

수학의 신

미적분

정답과 해설



01 수열의 극한

step ① 핵심 문제 20~21쪽

01 ① 02 243 03 -4 04 1 05 -2 06 4
07 ⑤ 08 $\perp, \sqsubset$ 09 5 10 ② 11 ① 12 2

step ② 고난도 문제 22~26쪽

01 ③ 02 ⑤ 03 8 04 4 05 ③ 06 $\frac{1}{2}$
07 ③ 08 2 09 $\frac{1}{2}$ 10 ③ 11 ③ 12 ①
13 21 14 6 15 5 16 -5 17 ② 18 5
19 52 20 ⑤ 21 ④ 22 ③ 23 4 24 ③
25 16 26 ①

step ③ 최고난도 문제 27~29쪽

01 $\frac{1}{2}$ 02 5 03 ② 04 3π 05 6 06 ④
07 ⑤ 08 $\frac{3}{5}$ 09 $\frac{1}{3}$ 10 ③ 11 12

02 급수

step ① 핵심 문제 30~31쪽

01 $\frac{11}{12}$ 02 ④ 03 ③ 04 ③ 05 ④ 06 $\frac{1}{4}$
07 ④ 08 $\frac{25}{2}$ 09 ③ 10 ③ 11 ②

step ② 고난도 문제 32~36쪽

01 ⑤ 02 ① 03 -1 04 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ 05 5 06 ①
07 1 08 -6 09 ② 10 6 11 ② 12 $\frac{1}{12}$
13 $\frac{3}{5}$ 14 ① 15 $\frac{1}{50}$ 16 4 17 8 18 ③
19 ⑤ 20 ③ 21 ② 22 ③

step ③ 최고난도 문제 37~39쪽

01 3 02 ② 03 ② 04 $\frac{5}{24}$ 05 ⑤ 06 $\frac{6}{5}$
07 ③ 08 ⑤ 09 ②

기출 변형 문제로 단원 마스터

40~43쪽

01 ① 02 ② 03 ⑤ 04 -1 05 ⑤ 06 ③
07 ③ 08 ④ 09 179 10 ② 11 ②

03 지수함수와 로그함수의 미분

step ① 핵심 문제

46~47쪽

01 ⑤ 02 ③ 03 2 04 4 05 2 06 ④
07 4 08 ② 09 ② 10 ④ 11 ① 12 $\frac{3}{e}$

step ② 고난도 문제

48~51쪽

01 9 02 ③ 03 2 04 ③ 05 ④ 06 13
07 1 08 ② 09 $4\ln 2$ 10 $\sqrt{17}$ 11 ⑤ 12 1
13 e 14 2 15 ⑤ 16 ④ 17 ② 18 ⑤
19 $\frac{27}{4e}$ 20 ⑤ 21 8

step ③ 최고난도 문제

52~53쪽

01 ③ 02 ③ 03 -1 04 ⑤ 05 ③ 06 ①
07 61

04 삼각함수의 미분

step ① 핵심 문제

54~55쪽

01 ③ 02 2 03 $\frac{7}{5}$ 04 ② 05 ④ 06 $\frac{24}{25}$
07 ⑤ 08 ③ 09 ⑤ 10 2 11 ④ 12 6

step ② 고난도 문제

56~59쪽

01 $\frac{7}{65}$ 02 4 03 ④ 04 ③ 05 ⑤ 06 5
07 ③ 08 11 09 12 10 ④ 11 20 12 ②
13 8 14 ① 15 4 16 ④ 17 $\frac{1}{3}$ 18 ④
19 ③ 20 ⑤ 21 $\pi + 4$

step ③ 최고난도 문제

60~61쪽

01 $4 - 2\sqrt{3}$ 02 161 03 ④ 04 2 05 ④
06 50 07 135

05 여러 가지 미분법

step ① 핵심 문제 62~63쪽

01 16 02 ④ 03 2 04 ⑤ 05 -4 06 ⑤
07 $\frac{5}{3}$ 08 ② 09 ⑤ 10 $\frac{1}{2}$ 11 ④ 12 ①

step ② 고난도 문제 64~68쪽

01 ③ 02 ③ 03 8 04 1 05 5 06 2
07 ④ 08 8 09 ① 10 ④ 11 $\frac{1}{3}$ 12 ②
13 ① 14 $\frac{1}{2}$ 15 ① 16 4 17 31 18 ①
19 -4 20 ③ 21 ② 22 $\frac{7}{6}$ 23 $\frac{1}{9}$ 24 $\frac{1}{5}$
25 24 26 $\frac{9}{4}$ 27 ④ 28 ④

step ③ 최고난도 문제 69~71쪽

01 ③ 02 11 03 ② 04 ⑤ 05 6 06 ⑤
07 15 08 ① 09 3 10 ③

06 도함수의 활용

step ① 핵심 문제 72~73쪽

01 $\frac{29}{20}$ 02 -14 03 2 04 2 05 ④ 06 7
07 ③ 08 96 09 6 10 ④ 11 ④ 12 $\frac{e}{4}$
13 ⑤ 14 4

step ② 고난도 문제 74~78쪽

01 10 02 ③ 03 ① 04 ④ 05 $5\sqrt{2}$ 06 25
07 ③ 08 $\frac{3}{16}$ 09 49 10 17 11 ④ 12 3
13 ③ 14 ③ 15 6 16 ⑤ 17 424 18 e^6
19 $\frac{2}{3}$ 20 ③ 21 e 22 -42 23 ② 24 ④
25 e 26 $0 < a \leq 1$ 27 ② 28 ⑤

step ③ 최고난도 문제 79~81쪽

01 5 02 ③ 03 ⑤ 04 5 05 ③ 06 43
07 24 08 ① 09 2 10 30 11 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터

82~85쪽

01 ⑤ 02 $1-\sqrt{2}$ 03 ② 04 ④ 05 50
06 ⑤ 07 ① 08 1 09 $\frac{7}{2}$ 10 ③ 11 $\frac{5}{2}$
12 ③ 13 4 14 $2\sqrt{11}$

07 여러 가지 적분법

step 1 핵심 문제

88~89쪽

- 01 0 02 $\frac{1}{e^2}+1$ 03 $\pi+\frac{1}{2}$ 04 ⑤
 05 $\frac{8}{15}$ 06 ③ 07 1 08 ③ 09 35 10 ③
 11 2 12 15 13 ③ 14 ③ 15 $6\ln 2-3$

step 2 고난도 문제

90~94쪽

- 01 ② 02 ④ 03 $\frac{5}{2}$ 04 ⑤ 05 ① 06 0
 07 $\frac{e^9}{6}$ 08 ② 09 $\frac{1}{2}$ 10 72 11 ① 12 -2
 13 ② 14 52 15 0 16 $1+\frac{3}{\pi}$ 17 $\frac{16}{15}$
 18 ③ 19 $\frac{4}{3}-2\sqrt{3}$ 20 ⑤ 21 $\frac{\pi}{12\ln 3}$
 22 ① 23 105 24 ② 25 $3e^2+3$ 26 4
 27 2 28 $6e$ 29 ⑤

step 3 최고난도 문제

95~97쪽

- 01 ① 02 $\frac{2}{5}$ 03 ⑤ 04 3π 05 115 06 ④
 07 30 08 ③ 09 32 10 10 11 ④

08 정적분의 활용

step 1 핵심 문제

98~99쪽

- 01 ④ 02 ④ 03 $\frac{e^3}{2}$ 04 ② 05 $\frac{e^2}{2}-e$
 06 $\ln 2$ 07 $\frac{2}{3}$ 08 $\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$ 09 ② 10 2
 11 ③ 12 ②

step 2 고난도 문제

100~103쪽

- 01 ③ 02 ① 03 10 04 ② 05 ③ 06 ③
 07 ③ 08 $\frac{e}{2}$ 09 ① 10 $2-\sqrt{2}$ 11 ①
 12 24 13 $\frac{\pi}{2}+2-2\sqrt{2}$ 14 4 15 ⑤ 16 6
 17 ① 18 ④ 19 ②

step 3 최고난도 문제

104~105쪽

- 01 ④ 02 ④ 03 $e^2+\frac{1}{e^2}-2$ 04 143 05 ①
 06 15 07 ①

기출 변형 문제로 단원 마스터

106~109쪽

- 01 ③ 02 ② 03 ③ 04 15 05 ③ 06 ④
 07 ⑤ 08 11 09 ④ 10 ③ 11 35 12 278
 13 15

step 1 핵심 문제

| 20~21쪽

01 ① 02 243 03 -4 04 1 05 -2 06 4

07 ⑤ 08 L, C 09 5 10 ② 11 ① 12 2

01 답 ①

ㄱ. 수열 $\left\{\frac{1}{n} \sin \frac{n}{2}\pi\right\}$ 의 항을 첫째항부터 차례대로 나열해 보면

$$\sin \frac{\pi}{2}=1, \frac{1}{2} \sin \pi=0, \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}\pi=-\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \sin 2\pi=0,$$

$$\frac{1}{5} \sin \frac{5}{2}\pi=\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \sin 3\pi=0, \frac{1}{7} \sin \frac{7}{2}\pi=-\frac{1}{7}, \frac{1}{8} \sin 4\pi=0, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 0으로 수렴한다.

$$\text{ㄴ. } \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right\}$ 의 항을 첫째항부터 차례대로 나열해 보면

$$\sqrt{2}+1, \sqrt{3}+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}, \sqrt{5}+2, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

ㄷ. 수열 $\{(-1)^n \cos n\pi\}$ 의 항을 첫째항부터 차례대로 나열해 보면

$$-\cos \pi=1, \cos 2\pi=1, -\cos 3\pi=1, \cos 4\pi=1, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 1로 수렴한다.

ㄹ. (i) n 이 홀수일 때,

$$\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \text{이고 } -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \text{이므로}$$

$$\left\lfloor \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = -1$$

(ii) n 이 짝수일 때,

$$\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \text{이고 } 0 < \frac{1}{n} < 1 \text{이므로}$$

$$\left\lfloor \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = 0$$

(i), (ii)에서 수열 $\left\{\left\lfloor \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor\right\}$ 의 항을 첫째항부터 차례대로 나열해

보면 $-1, 0, -1, 0, \dots$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 발산(진동)한다.

따라서 보기에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 답 243

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+5}}{a_{n+4}} = 3$$

극한이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \times \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \times \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}} \times \frac{a_{n+5}}{a_{n+4}} \right) = 3^5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+5}}{a_n} = 243$$

03 답 -4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - b_n^2) = 15 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

극한이 모두 수렴하므로 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)(a_n - b_n)}{a_n + b_n} = 5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \text{을 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\} = 8$$

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{을 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\} = -2$$

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ = 4 \times (-1) = -4$$

04 답 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} a_n = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} b_n = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

극한이 모두 수렴하므로 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+2} b_n - \frac{2n^2}{n+2} a_n \right) = 8$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} (b_n - a_n) = 8$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{4n+1} (b_n - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2n^2}{n+2} (b_n - a_n) \times \frac{(n+2)(n^2+3)}{2n^2(4n+1)} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} (b_n - a_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n^2+3n+6}{8n^3+2n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} (b_n - a_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{6}{n^3}}{8 + \frac{2}{n}}$$

$$= 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

05 답 -2

$$(2n+2)^2 < 4n^2+8n+5 < (2n+3)^2 \text{이므로}$$

$$2n+2 < \sqrt{4n^2+8n+5} < 2n+3$$

따라서 $a_n = \sqrt{4n^2+8n+5}$ 의 정수 부분은 $2n+2$ 이므로

$$b_n = 2n+2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 8n(b_n - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 8n(2n+2 - \sqrt{4n^2+8n+5})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(2n+2 - \sqrt{4n^2+8n+5})(2n+2 + \sqrt{4n^2+8n+5})}{2n+2 + \sqrt{4n^2+8n+5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n\{(2n+2)^2 - (4n^2+8n+5)\}}{2n+2 + \sqrt{4n^2+8n+5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8n}{2n+2 + \sqrt{4n^2+8n+5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8}{2 + \frac{2}{n} + \sqrt{4 + \frac{8}{n} + \frac{5}{n^2}}}$$

$$= -\frac{8}{2+2} = -2$$

06 답 4

$b \neq 0$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+3}{bn^2+2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{n} + \frac{3}{n^2}}{b + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}} = 0$$

이는 조건을 만족시키지 않으므로 $b=0$ 배점 30%

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+3}{bn^2+2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+3}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{3}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2} = -2$ 이므로 $a = -4$ 배점 30%

한편 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+cn}-n) = 2$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+cn}-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+cn}-n)(\sqrt{n^2+cn}+n)}{\sqrt{n^2+cn}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn}{\sqrt{n^2+cn}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{1+\frac{c}{n}}+1} \\ &= \frac{c}{1+1} = \frac{c}{2} \end{aligned}$$

즉, $\frac{c}{2} = 2$ 이므로 $c = 4$ 배점 30%

$\therefore a-b+2c = -4-0+2 \times 4 = 4$ 배점 10%

07 답 ⑤

곡선 $y = x^2 - (n+1)x + a_n$ 이 x 축과 만나므로 이차방정식 $x^2 - (n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (n+1)^2 - 4a_n \geq 0 \quad \therefore a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

곡선 $y = x^2 - nx + a_n$ 이 x 축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2 - nx + a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = n^2 - 4a_n < 0 \quad \therefore a_n > \frac{n^2}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서

$$\frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \therefore \frac{1}{4} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{1}{4}$ 이

므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$$

08 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. [반례] $a_n = -\frac{1}{n}$ 이면 $a_n < a_{n+1}$ 이지만 수열 $\{a_n\}$ 은 0으로 수렴한다.

ㄴ. $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이고 수열 $\{a_n - b_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b_n}{a_n} \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$ 은 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n$, $c_n = n + \frac{1}{n}$ 이면 $a_n < b_n < c_n$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$
이지만 수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09 답 5

등비수열 $\left\{ (x-3) \left(\frac{x^2+5x-1}{5} \right)^{n-1} \right\}$ 의 첫째항이 $x-3$, 공비가

$\frac{x^2+5x-1}{5}$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$x-3=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x^2+5x-1}{5} \leq 1$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } -5 < x^2+5x-1 \leq 5$$

(i) $-5 < x^2+5x-1$ 에서

$$x^2+5x+4 > 0, (x+4)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -4 \text{ 또는 } x > -1$$

(ii) $x^2+5x-1 \leq 5$ 에서

$$x^2+5x-6 \leq 0, (x+6)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq x \leq 1$$

(i), (ii)에서

$$-6 \leq x < -4 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1$$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-6 \leq x < -4 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1 \text{ 또는 } x=3$$

이때 정수 x 는 $-6, -5, 0, 1, 3$ 의 5개이다.

10 답 ②

(i) $\left| \frac{x}{4} \right| > 1$, 즉 $x < -4$ 또는 $x > 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x} \right)^{2n} = 0$$
이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{4} \right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{4} \right)^{2n} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \frac{x}{4} - \left(\frac{4}{x} \right)^{2n}}{1 + 3 \times \left(\frac{4}{x} \right)^{2n}} = \frac{x}{2}$$

$$\text{이때 } x < -4 \text{ 또는 } x > 4 \text{이므로 } \frac{x}{2} < -2 \text{ 또는 } \frac{x}{2} > 2$$

즉, $f(k) = -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 정수 k 가 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{x}{4} = -1$, 즉 $x = -4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4} \right)^{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4} \right)^{2n+1} = -1$$
이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{4} \right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{4} \right)^{2n} + 3} = \frac{2 \times (-1) - 1}{1 + 3} = -\frac{3}{4}$$

즉, $f(k) = -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 정수 k 가 존재하지 않는다.

(iii) $\frac{x}{4} = 1$, 즉 $x = 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4} \right)^{2n+1} = 1$$
이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{4} \right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{4} \right)^{2n} + 3} = \frac{2 \times 1 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{4}$$

즉, $f(k) = -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 정수 k 가 존재하지 않는다.

(iv) $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, 즉 $-4 < x < 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n} + 3} = -\frac{1}{3}$$

이때 $-4 < x < 4$ 이므로 $f(k) = -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 정수 k 는 -3 ,

$-2, -1, \dots, 3$ 의 7개이다.

(i)~(iv)에서 정수 k 의 개수는 7이다.

11 답 ①

(가)에서 $A_1(0, 0)$ 이고 $n=1$ 은 홀수이므로 (나)에서

$$A_2(a, 0)$$

$n=2$ 는 짝수이므로 (다)에서

$$A_3(a, a+1)$$

같은 방법으로 하면

$$A_4(2a, a+1), A_5(2a, 2(a+1)), A_6(3a, 2(a+1)),$$

$$A_7(3a, 3(a+1)), A_8(4a, 3(a+1)), \dots$$

$$\therefore A_{2n}(na, (n-1)(a+1))$$

따라서 $A_1 A_{2n} = \sqrt{(na)^2 + (n-1)^2(a+1)^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 A_{2n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(na)^2 + (n-1)^2(a+1)^2}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2(a+1)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + (a+1)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sqrt{2a^2 + 2a + 1} = \frac{\sqrt{34}}{2} \text{ 이므로}$$

$$2a^2 + 2a + 1 = \frac{17}{2}$$

$$4a^2 + 4a - 15 = 0$$

$$(2a+5)(2a-3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} \quad (\because a > 0)$$

12 답 2

$P_n(a^n, n), Q_n(a^n, 0), P_{n+1}(a^{n+1}, n+1), Q_{n+1}(a^{n+1}, 0)$ 이므로 사각형 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ 의 넓이 $S(a)$ 는

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \times (n+n+1) \times (a^{n+1} - a^n) \\ &= \frac{(2n+1)(a-1)a^n}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } S(3) = \frac{(2n+1) \times 2 \times 3^n}{2} = (2n+1)3^n,$$

$$S(2) = \frac{(2n+1) \times 1 \times 2^n}{2} = (2n+1)2^{n-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(3) - S(2)}{n \times 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)3^n - (2n+1)2^{n-1}}{n \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2n+1}{n} - \frac{2n+1}{2n} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \\ &= 2 - 1 \times 0 = 2 \end{aligned}$$

step 2 고난도 문제

| 22~26쪽

01 ③	02 ⑤	03 8	04 4	05 ③	06 $\frac{1}{2}$
07 ③	08 2	09 $\frac{1}{2}$	10 ③	11 ③	12 ①
13 21	14 6	15 5	16 -5	17 ②	18 5
19 52	20 ⑤	21 ④	22 ③	23 4	24 ③
25 16	26 ①				

01 답 ③

이차방정식 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 의 한 근이 -1 이므로

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0$$

$$\therefore 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

이차방정식 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 의 두 근이 $-1, b_n$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$-b_n = \frac{a_{n+2}}{a_n}$$

$$\therefore b_n = -\frac{a_{n+2}}{a_n} = -\frac{a + (n+1)d}{a + (n-1)d} = -\frac{dn+a+d}{dn+a-d}$$

(i) $d=0$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{a}{a}\right) = -1$$

(ii) $d \neq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{dn+a+d}{dn+a-d}\right) \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d + \frac{a+d}{n}}{d + \frac{a-d}{n}} = -1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$

02 답 ⑤

$a_n = xn - y$ 에서 $a_n^2 = x^2 n^2 - y^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{a_n} - \frac{n^3+3n}{a_n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{xn-y} - \frac{n^3+3n}{x^2 n^2 - y^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(xn^2-y) - (n^3+3n)(xn-y)}{(xn-y)(x^2 n^2 - y^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{yn^3 - (2x+y)n^2 + 3yn - y}{x^2 n^3 - xyn^2 - xyn + y^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y - \frac{2x+y}{n} + \frac{3y}{n^2} - \frac{y}{n^3}}{x^2 - \frac{xy}{n} - \frac{xy}{n^2} + \frac{y^2}{n^3}} \\ &= \frac{y}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{y}{x^2} = \frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$x^2 = 5y$$

이때 x, y 는 한 자리의 자연수이므로

$$x=5, y=5$$

$$\therefore x+y=10$$

03 답 8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+2n} + \cdots + \sqrt{n^2+an} - a\sqrt{n^2+an})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+an}) + (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+an})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+an}) \}$$

자연수 k 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+kn} - \sqrt{n^2+an})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+kn} - \sqrt{n^2+an})(\sqrt{n^2+kn} + \sqrt{n^2+an})}{\sqrt{n^2+kn} + \sqrt{n^2+an}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k-a)n}{\sqrt{n^2+kn} + \sqrt{n^2+an}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k-a}{\sqrt{1+\frac{k}{n}} + \sqrt{1+\frac{a}{n}}}$$

$$= \frac{k-a}{1+1} = \frac{k-a}{2} \quad \text{배점 40\%}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+2n} + \cdots + \sqrt{n^2+an} - a\sqrt{n^2+an})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+an}) + (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+an})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+an}) \}$$

$$= \frac{1-a}{2} + \frac{2-a}{2} + \frac{3-a}{2} + \cdots + \frac{a-a}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^a \frac{k-a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a(a+1)}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{a-a^2}{4} \quad \text{배점 40\%}$$

$$\text{즉, } \frac{a-a^2}{4} = -14 \text{이므로}$$

$$a^2 - a - 56 = 0, (a+7)(a-8) = 0$$

$$\therefore a = 8 (\because a \text{는 자연수}) \quad \text{배점 20\%}$$

04 답 4

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a+2} + 3n^b + 2n^3}{n^a + 2n^{b+1}}$ 의 값이 존재하므로 분모의 최고차항의 차수가 분자의 최고차항의 차수보다 크거나 같아야 한다.

$a+2 > a, b+1 > b$ 이므로 분모의 최고차항의 차수는 $b+1$ 이다.

$b+1 \geq a+2, b+1 \geq 3$ 이어야 하므로

$b \geq 2, a \leq b-1$

(i) $b=2$ 일 때,

$a \leq b-1$ 에서 $a \leq 1$

이때 a 는 음이 아닌 정수이므로

$a=0$ 또는 $a=1$

① $a=0$ 일 때,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a+2} + 3n^b + 2n^3}{n^a + 2n^{b+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n^2 + 2n^3}{1 + 2n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 4n^2}{2n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{2 + \frac{1}{n^3}} = 1$$

$$\therefore (b-a) \times c = (2-0) \times 1 = 2$$

② $a=1$ 일 때,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a+2} + 3n^b + 2n^3}{n^a + 2n^{b+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 2n^3}{n + 2n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 3n^2}{2n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore (b-a) \times c = (2-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

(ii) $b > 2$ 일 때

① $a=b-1$ 일 때,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a+2} + 3n^b + 2n^3}{n^a + 2n^{b+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{b+1} + 3n^b + 2n^3}{n^{b-1} + 2n^{b+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^{b-2}}}{\frac{1}{n^2} + 2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore (b-a) \times c = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

② $a < b-1$ 일 때, $\xrightarrow{a=b-1 \text{에서 } b-a=1}$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a+2} + 3n^b + 2n^3}{n^a + 2n^{b+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{b-a-1}} + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^{b-2}}}{\frac{1}{n^{b-a+1}} + 2}$$

$$= 0$$

$$\therefore (b-a) \times c = 0 \quad \text{--- } b-a \text{의 값에 관계없이 } (b-a) \times c = 0 \text{이다.}$$

(i), (ii)에서 서로 다른 $(b-a) \times c$ 의 값의 합은

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 4$$

05 답 ③

$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$ 의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{0!} = \frac{3}{3!} \quad \therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

한편 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!}$ 라 하면 $n \geq 2$ 일 때,

$$\frac{a_n}{(n-1)!} = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{3}{(n+2)!} - \frac{3}{(n+1)!}$$

$$= \frac{3}{(n+2)!} - \frac{3(n+2)}{(n+2)!}$$

$$= \frac{-3(n+1)}{(n+2)!}$$

$$\therefore a_n = \frac{-3(n+1)}{(n+2)!} \times (n-1)!$$

$$= \frac{-3(n+1)}{(n+2)(n+1)n}$$

$$= -\frac{3}{n^2+2n} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + n^2 a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3n^2}{n^2+2n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{1 + \frac{2}{n}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

개념 NOTE

자연수 n 에 대하여

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1, 0! = 1$$

06 답 1/2

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(나)의 \frac{2^{a_1} \times 2^{a_5}}{2^{a_6}} = \frac{1}{16}에서 2^{a_1+a_5-a_6} = 2^{-4}$$

$$\therefore a_1 + a_5 - a_6 = -4$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 + a_8 = 2a_6$ 이므로

$$2a_6 - a_6 = -4, a_6 = -4$$

$$a_1 + 5d = -4 \quad \therefore a_1 = -5d - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(다)의 |a_m| = |a_{m+2}|에서$$

$$a_m = a_{m+2} \text{ 또는 } a_m = -a_{m+2}$$

(i) $a_m = a_{m+2}$ 일 때,

$$a_1 + (m-1)d = a_1 + (m+1)d \text{이므로}$$

$$2d = 0 \quad \therefore d = 0$$

이는 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_m = -a_{m+2}$ 일 때,

$$a_1 + (m-1)d = -a_1 - (m+1)d \text{이므로}$$

$$2a_1 + 2md = 0, a_1 + md = 0$$

$$\textcircled{1}을 대입하면 -5d - 4 + md = 0$$

$$(m-5)d = 4$$

이때 $m-5$ 는 -4 이상의 정수이고 (가)에서 d 는 소수이므로

$$d = 2$$

(i), (ii)에서 $d = 2$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a_1 = -14$

따라서 $a_n = -14 + (n-1) \times 2 = 2n - 16$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (2k - 16) \\ = n(n+1) - 16n = n^2 - 15n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{2n^2 + 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 15n}{2n^2 + 3n + 7} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{15}{n}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

07 답 ③

$$\frac{1}{\sqrt{3n+3} + \sqrt{3n+6}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{3n+3} + \sqrt{3n+3}}에서 \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k+6}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k+6}}{(\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k+6})(\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k+6})} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k+6}}{3} \\ = \frac{1}{3} \{ (\sqrt{9} - \sqrt{6}) + (\sqrt{12} - \sqrt{9}) + (\sqrt{15} - \sqrt{12}) \\ + \dots + (\sqrt{3n+6} - \sqrt{3n+3}) \} \\ = \frac{1}{3} (\sqrt{3n+6} - \sqrt{6}) \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k+3}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k+3}}{(\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k+3})(\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k+3})} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k+3}}{3} \\ = \frac{1}{3} \{ (\sqrt{6} - \sqrt{3}) + (\sqrt{9} - \sqrt{6}) + (\sqrt{12} - \sqrt{9}) \\ + \dots + (\sqrt{3n+3} - \sqrt{3n}) \} \\ = \frac{1}{3} (\sqrt{3n+3} - \sqrt{3})$$

따라서 $\frac{1}{3}(\sqrt{3n+6} - \sqrt{6}) < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{1}{3}(\sqrt{3n+3} - \sqrt{3})$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3n+6} - \sqrt{6}}{3\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=1}^n a_k < \frac{\sqrt{3n+3} - \sqrt{3}}{3\sqrt{n+1}}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+6} - \sqrt{6}}{3\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+3} - \sqrt{3}}{3\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 수열의 극

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

08 답 2

$$\frac{n^2}{2} - 1 < \left[\frac{n^2}{2} \right] \leq \frac{n^2}{2} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{2}{n+3} \right)^2 \left(\frac{n^2}{2} - 1 \right) < \left(\frac{2}{n+3} \right)^2 \left[\frac{n^2}{2} \right] \leq \left(\frac{2}{n+3} \right)^2 \times \frac{n^2}{2}$$

$$\therefore \frac{2n^2 - 4}{n^2 + 6n + 9} < \left(\frac{2}{n+3} \right)^2 \left[\frac{n^2}{2} \right] \leq \frac{2n^2}{n^2 + 6n + 9}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 4}{n^2 + 6n + 9} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 6n + 9} = 2$ 이므로 수열의 극한의 대

소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+3} \right)^2 \left[\frac{n^2}{2} \right] = 2$$

09 답 1/2

(나)에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 같고, 이때 공차가 0이 아니므로 공차를 d ($d \neq 0$)라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d, b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$\therefore a_n + b_n = a_1 + b_1 + 2(n-1)d = 2dn + a_1 + b_1 - 2d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(다)의 a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} < c_n < b_2 + b_4 + \dots + b_{2n}에서$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = \frac{n\{2a_1 + (n-1) \times 2d\}}{2}$$

$$= dn^2 + (a_1 - d)n$$

$$b_2 + b_4 + \dots + b_{2n} = \frac{n\{2(b_1 + d) + (n-1) \times 2d\}}{2}$$

$$= dn^2 + b_1n$$

즉, $dn^2 + (a_1 - d)n < c_n < dn^2 + b_1n$ 이고 (가)에서 $a_n + b_n > 0$ 이므로

$$\frac{dn^2 + (a_1 - d)n}{n(a_n + b_n)} < \frac{c_n}{n(a_n + b_n)} < \frac{dn^2 + b_1n}{n(a_n + b_n)}$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{dn^2 + (a_1 - d)n}{n(2dn + a_1 + b_1 - 2d)} < \frac{c_n}{n(a_n + b_n)} < \frac{dn^2 + b_1n}{n(2dn + a_1 + b_1 - 2d)}$$

$$\therefore \frac{dn^2 + (a_1 - d)n}{2dn^2 + (a_1 + b_1 - 2d)n} < \frac{c_n}{n(a_n + b_n)} < \frac{dn^2 + b_1n}{2dn^2 + (a_1 + b_1 - 2d)n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn^2 + (a_1 - d)n}{2dn^2 + (a_1 + b_1 - 2d)n} = \frac{1}{2},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn^2 + b_1n}{2dn^2 + (a_1 + b_1 - 2d)n} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의

하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n(a_n + b_n)} = \frac{1}{2}$$

개념 NOTE

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

10 답 ③

ㄱ. $a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2}$ 에서

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2, \dots \quad \text{.....} \quad \text{㉠}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄴ. $b_n = p \times (-1)^{n+1} + q$ 에서

$$b_1 = p + q, b_2 = -p + q, b_3 = p + q, b_4 = -p + q, \dots \quad \text{.....} \quad \text{㉡}$$

이때 $p=0$ 이면 $b_n=q$ 로 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. ㉠, ㉡에서

$$a_1 + b_1 = 1 + p + q, a_2 + b_2 = 2 - p + q, a_3 + b_3 = 1 + p + q,$$

$$a_4 + b_4 = 2 - p + q, \dots$$

수열 $\{a_n + b_n\}$ 이 수렴하면

$$1 + p + q = 2 - p + q, 2p = 1 \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

또 ㉠, ㉡에서

$$a_1 b_1 = p + q, a_2 b_2 = 2(-p + q), a_3 b_3 = p + q, a_4 b_4 = 2(-p + q), \dots$$

수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하면

$$p + q = 2(-p + q) \quad \therefore q = 3p$$

$$p = \frac{1}{2} \text{을 대입하면 } q = \frac{3}{2}$$

따라서 $a_n + b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3, a_n b_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n)^2 + (b_n)^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n\} \\ = 3^2 - 2 \times 2 = 5$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 답 ③

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 정수이고 $-1 \leq a_n \leq 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 항은 $-1, 0, 1$ 중 하나이다.

ㄱ. $a_n b_n = \frac{1}{n}$ 이므로 $a_n \neq 0$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 항은 -1 또는 1 이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 $-\frac{1}{n}$ 또는 $\frac{1}{n}$ 을 항으로 갖는다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. $a_{n+1} - a_n = c$ 에서 $c \neq 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 c 인 등차수열이므로 $-1 \leq a_n \leq 1$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 $c=0$ 이므로 $a_{n+1} - a_n = 0 \quad \therefore a_n = a_{n+1}$

즉, $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \dots$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 발산하고

$a_n b_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 답 ①

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하자.

$$\alpha < 0 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = -\alpha$$

$$\alpha = 0 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

$$\alpha > 0 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \alpha$$

따라서 수열 $\{|a_n|\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. [반례] $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ 이면 $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{5}, \dots$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 0으로 수렴한다.

이때 $[a_1] = [a_3] = [a_5] = \dots = -1, [a_2] = [a_4] = [a_6] = \dots = 0$ 이므로 수열 $\{[a_n]\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄷ. [반례] $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ 이면 $a_{n^2} = n - [n] = 0$ 이므로 수열 $\{a_{n^2}\}$ 은 수렴한다.

이때 $a_1 = 0, a_2 = \sqrt{2} - 1, a_3 = \sqrt{3} - 1, a_4 = 0, a_5 = \sqrt{5} - 2, \dots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

13 답 21

$5 \times 2^n \times 3^n$ 의 모든 양의 약수의 합이 a_n 이므로

$$a_n = (1+5)(1+2+\dots+2^n)(1+3+\dots+3^n)$$

$$= 6 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{n+1}-1}{3-1}$$

$$= 3(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)$$

$$= 3(6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+1}+1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{r^{n+1}+6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+1}+1)}{r^{n+1}+6^n} \quad \text{.....} \quad \text{㉠}$$

(i) $0 < r < 6$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{6}\right)^n = 0 \text{이므로 } \text{㉠에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+1}+1)}{r^{n+1}+6^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left\{6-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}}{r\left(\frac{r}{6}\right)^n + 1} = 18$$

즉, 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $r=6$ 일 때,

㉠에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+1}+1)}{6^{n+1}+6^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left\{6-3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}}{6+1} = \frac{18}{7}$$

즉, 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $r > 6$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{r}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{r}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0 \text{이므로 } \text{㉠에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+1}+1)}{r^{n+1}+6^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left\{6 \times \left(\frac{6}{r}\right)^n - 3 \times \left(\frac{3}{r}\right)^n - 2 \times \left(\frac{2}{r}\right)^n + \left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{r + \left(\frac{6}{r}\right)^n} = 0$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 r 의 값의 범위는

$$0 < r \leq 6$$

이때 자연수 r 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$$1+2+3+4+5+6=21$$

개념 NOTE

자연수 p, q, r, l, m, n 에 대하여 $p^l \times q^m \times r^n$ 의 모든 양의 약수의 합은

$$(1+p+p^2+\dots+p^l)(1+q+q^2+\dots+q^m)(1+r+r^2+\dots+r^n)$$

14 답 6

수열 $\left\{(x^2+4x+a)\left(\frac{3x-1}{b}\right)^{n-1}\right\}$ 은 첫째항이 x^2+4x+a , 공비가 $\frac{3x-1}{b}$ 인 등비수열이므로 이 등비수열이 수렴하려면 $x^2+4x+a=0$ 또는 $-1 < \frac{3x-1}{b} \leq 1$ 배점 10%

(i) $x^2+4x+a=0$ 일 때,
 $x = -2 \pm \sqrt{4-a}$
 이때 a 는 자연수이므로 x 의 값이 정수가 되려면
 $a=3$ 일 때, $x=-1$ 또는 $x=-3$
 $a=4$ 일 때, $x=-2$ 배점 30%

(ii) $-1 < \frac{3x-1}{b} \leq 1$ 일 때,
 $-b < 3x-1 \leq b$
 $\therefore \frac{-b+1}{3} < x \leq \frac{b+1}{3}$
 이때 b 는 자연수이므로
 $b=1$ 일 때, $0 < x \leq \frac{2}{3}$ 이므로 정수 x 가 존재하지 않는다.
 $b=2$ 일 때, $-\frac{1}{3} < x \leq 1$ 이므로 정수 x 의 값은 0, 1이다.
 $b=3$ 일 때, $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{4}{3}$ 이므로 정수 x 의 값은 0, 1이다.
 $b=4$ 일 때, $-1 < x \leq \frac{5}{3}$ 이므로 정수 x 의 값은 0, 1이다.
 $b=5$ 일 때, $-\frac{4}{3} < x \leq 2$ 이므로 정수 x 의 값은 -1, 0, 1, 2이다.
 $b=6$ 일 때, $-\frac{5}{3} < x \leq \frac{7}{3}$ 이므로 정수 x 의 값은 -1, 0, 1, 2이다.
 $b=7$ 일 때, $-2 < x \leq \frac{8}{3}$ 이므로 정수 x 의 값은 -1, 0, 1, 2이다.
 $b \geq 8$ 일 때, $\frac{-b+1}{3} < -2$, $\frac{b+1}{3} \geq 3$ 이므로 정수 x 는 -2, -1, 0, 1, 2, 3을 포함하여 6개 이상이다. 배점 30%

(i), (ii)에서
 $a=3$ 이고 $b=5, 6, 7$ 일 때, 정수 x 는 -3, -1, 0, 1, 2의 5개이다.
 $a=4$ 이고 $b=5, 6, 7$ 일 때, 정수 x 는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.
 따라서 순서쌍 (a, b) 는 (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7)의 6개이다. 배점 30%

15 답 5

이차방정식 $x^2+2\sqrt{a_{n+1}}x+2a_n=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=a_{n+1}-2a_n < 0$
 $\therefore a_{n+1} < 2a_n$
 즉, $a_n < 2a_{n-1} < 2^2a_{n-2} < 2^3a_{n-3} < \dots < 2^{n-1}a_1$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로
 $0 < a_n < 2^{n-1}a_1$ ㉠

㉠의 각 변에 $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ 을 곱하면
 $0 < \left(\frac{2}{5}\right)^n a_n < \frac{a_1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{a_1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n a_n = 0$
 ㉠에서 $0 < a_{2n} < 2^{2n-1}a_1$

각 변을 5^n 으로 나누면

$$0 < \frac{a_{2n}}{5^n} < \frac{a_1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{a_1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{5^n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}+5^{n+1}}{5^n+2^n a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{2n}}{5^n}+5}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 5$$

16 답 -5

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(a)\}^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$ 에서 $|f(a)|$ 의 값이 $|a|$, $|b|$ 의 값보다 크면 극한값이 존재하지 않고, 작으면 극한값이 0이므로 $|f(a)|$ 의 값은 $|a|$ 또는 $|b|$ 의 값과 같다.

(i) $|a| < |b|$ 일 때,

$$|f(a)| = |a| \text{이면 극한값이 } 0 \text{ 이므로 } |f(a)| = |b|$$

① $f(a)=b$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(a)\}^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+1} = b$$

$$\text{즉, } b=1 \text{ 이므로 } f(a)=1$$

$$-a^2-4a-3=1, a^2+4a+4=0$$

$$(a+2)^2=0 \quad \therefore a=-2$$

그런데 이는 $|a| < |b|$ 를 만족시키지 않는다.

② $f(a)=-b$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(a)\}^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-b)^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-b \times (-1)^n}{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$$

이때 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $|b| < |a|$ 일 때,

$$|f(a)| = |b| \text{ 이면 극한값이 } 0 \text{ 이므로 } |f(a)| = |a|$$

① $f(a)=a$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(a)\}^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1$$

$$f(a)=a \text{ 에서 } -a^2-4a-3=a$$

$$a^2+5a+3=0 \rightarrow D=25-4 \times 3=13 > 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a 의 값의 합은 -5이다.

② $f(a)=-a$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(a)\}^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-a)^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a \times (-1)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

이때 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은 -5이다.

idea

17 답 ②

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

(*)의 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = pa_{n+1} - q$ 에서 $S_n = pa_{n+1} - q$ 이므로

$$S_{n-1} = pa_n - q$$

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = (pa_{n+1} - q) - (pa_n - q)$$

$$(p+1)a_n = pa_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{p+1}{p} a_n \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

따라서 $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{p+1}{p}$ 인 등비수열이다.

즉, (7)에서 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = \frac{4}{3} \times 3^{n-1} = 4 \times 3^{n-2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1} - 1}{a_{2n} + a_{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{2n-1} - 1}{4 \times 3^{2n-2} + 4 \times 3^{2n-3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3^{2n}}}{\frac{4}{9} + \frac{4}{27}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{16}{27}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

18 ㉮ 5

(i) $|x| > 1$, 즉 $x < -1$ 또는 $x > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 2x + 1}{x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{2x}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = x \end{aligned}$$

(ii) $x = -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 2x + 1}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{-1 - 2 + 1}{1 + 1} = -1 \end{aligned}$$

(iii) $x = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 2x + 1}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{1 + 2 + 1}{1 + 1} = 2 \end{aligned}$$

(iv) $|x| < 1$, 즉 $-1 < x < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 2x + 1}{x^{2n} + 1} = 2x + 1$$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$(f \circ f)(a) = 2 \text{에서 } f(f(a)) = 2$$

$$\text{이때 } f(a) = k \text{라 하면 } f(k) = 2$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 가 만나는 점의 x 좌표가 k 와 같으므로

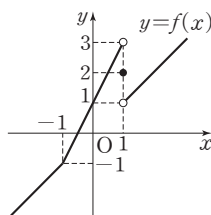
$$k = \frac{1}{2} \text{ 또는 } k = 1 \text{ 또는 } k = 2$$

즉, $(f \circ f)(a) = 2$ 이라면 $f(a) = \frac{1}{2}$ 또는 $f(a) = 1$ 또는 $f(a) = 2$ 이어야 하므로 실수 a 의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 세 직선 $y = \frac{1}{2}$,

$y=1$, $y=2$ 와 만나는 점의 개수와 같다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 세 직선 $y = \frac{1}{2}$, $y=1$, $y=2$ 와 만나는 점의 개수는 각각 1, 1, 3이므로 실수 a 의 개수는

$$1 + 1 + 3 = 5$$



19 ㉮ 52

(i) $-1 < x < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} + 5}{x^n + x + 1} = \frac{5}{x+1}$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} + 5}{x^n + x + 1} = \frac{1+5}{1+1+1} = 2$$

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} + 5}{x^n + x + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{5}{x^n}}{1 + \frac{x}{x^n} + \frac{1}{x^n}} = x^2$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고, 직선 $g(x)=mx-1$ 은 점 $(0, -1)$ 을 항상 지나고 기울기 m 이 양수이다.

직선 $y=mx-1$ 과 곡선 $y=x^2$ 이 접하면 이차방정식 $mx-1=x^2$, 즉 $x^2-mx+1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D = m^2 - 4 = 0 \quad \therefore m = 2 \quad (\because m > 0)$$

즉, 직선 $y=2x-1$ 과 곡선 $y=x^2$ 은 점

$(1, 1)$ 에서 접한다.

직선 $y=mx-1$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지나면

$$2 = m - 1 \quad \therefore m = 3$$

직선 $y=mx-1$ 이 점 $(1, \frac{5}{2})$ 를 지나면

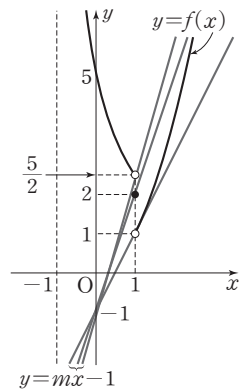
$$\frac{5}{2} = m - 1 \quad \therefore m = \frac{7}{2}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이려면

$$m = 3 \text{ 또는 } m > \frac{7}{2}$$

따라서 모든 10 이하의 자연수 m 의 값의 합은

$$3 + 4 + 5 + \dots + 10 = \frac{8(3+10)}{2} = 52$$



20 ㉮ 5

(i) $\left| \frac{x-1}{3} \right| > 1$, 즉 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x-1} \right)^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{3} \right)^{2n+1} + x}{\left(\frac{x-1}{3} \right)^{2n} + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{3} + x \times \left(\frac{3}{x-1} \right)^{2n}}{1 + 2 \times \left(\frac{3}{x-1} \right)^{2n}} = \frac{x-1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $\frac{x-1}{3} = -1$, 즉 $x = -2$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{3} \right)^{2n+1} + x}{\left(\frac{x-1}{3} \right)^{2n} + 2} = \frac{-1-2}{1+2} = -1$$

(iii) $\frac{x-1}{3}=1$, 즉 $x=4$ 일 때,

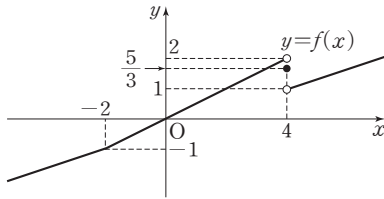
$$f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^{2n+1}+x}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^{2n}+2}=\frac{1+4}{1+2}=\frac{5}{3}$$

(iv) $\left|\frac{x-1}{3}\right|<1$, 즉 $-2<x<4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{3}\right)^{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{3}\right)^{2n+1}=0 \text{이므로}$$

$$f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^{2n+1}+x}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^{2n}+2}=\frac{x}{2}$$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $f(2)=1$, $f(4)=\frac{5}{3}$ 이므로 $f(2)+f(4)=\frac{8}{3}$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서만 불연속이므로 불연속인 x 의 개수는 1이다.

ㄷ. $g(x)=(x^2-8x+16)f(x)=(x-4)^2f(x)$ 라 하면 $g(4)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{g(x)-g(4)}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x-4)^2 \times \frac{x-1}{3}}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x-1)(x-4)}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{g(x)-g(4)}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{(x-4)^2 \times \frac{x}{2}}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{x(x-4)}{2} = 0 \end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{g(x)-g(4)}{x-4}$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

21 답 ④

직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \\ &= 4n^2 + n^2 + 1 \\ &= 5n^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{5n^2+1} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

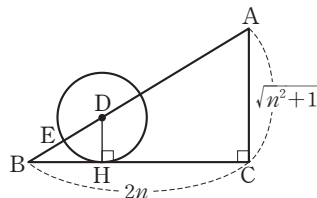
점 D를 중심으로 하고 선분 BC에 접하는 원의 접점을 H라 하자.

$$\angle DHB = \angle ACB = \frac{\pi}{2}, \angle B \text{는 공통이므로}$$

$$\triangle DBH \sim \triangle ABC \quad (\text{AA 닮음})$$

점 D는 선분 AB를 $n:1$ 로 내분하는 점이므로

$$\overline{AD} : \overline{DB} = n : 1$$



따라서 두 삼각형 DBH, ABC의 닮음비가 $1:(n+1)$ 이므로

$$\overline{DH} : \overline{AC} = 1 : (n+1)$$

$$\overline{DH} : \sqrt{n^2+1} = 1 : (n+1)$$

$$\therefore \overline{DH} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

점 D가 원의 중심이므로

$$\overline{DE} = \overline{DH} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

또 $\overline{DB} : \overline{AB} = 1 : (n+1)$ 이므로

$$\overline{DB} : \sqrt{5n^2+1} = 1 : (n+1)$$

$$\therefore \overline{DB} = \frac{\sqrt{5n^2+1}}{n+1}$$

$$\therefore \overline{BE} = \overline{DB} - \overline{DE} = \frac{\sqrt{5n^2+1}}{n+1} - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \frac{\sqrt{5n^2+1} - \sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{BE} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2+1} - \sqrt{n^2+1}}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5n^2+1} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{5n^2+1} + \sqrt{n^2+1})}{(n+1)(\sqrt{5n^2+1} + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{(n+1)(\sqrt{5n^2+1} + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{5 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}+1} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ &= \sqrt{5}-1 \end{aligned}$$

22 답 ③

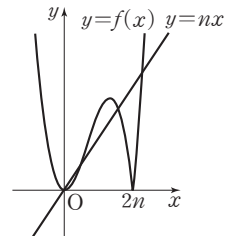
$$f(x) = |x^3 - 2nx^2|$$

$$= |x^2(x-2n)|$$

$$= \begin{cases} -x^3 + 2nx^2 & (x < 2n) \\ x^3 - 2nx^2 & (x \geq 2n) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=nx$ 는 그림과 같다.



(i) $x < 2n$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=nx$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-x^3 + 2nx^2 = nx, \quad x^3 - 2nx^2 + nx = 0$$

$$x(x^2 - 2nx + n) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=n \pm \sqrt{n^2-n}$$

(ii) $x \geq 2n$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=nx$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - 2nx^2 = nx, \quad x^3 - 2nx^2 - nx = 0$$

$$x(x^2 - 2nx - n) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=n \pm \sqrt{n^2+n}$$

그런데 $x \geq 2n$ 이므로

$$x=n+\sqrt{n^2+n}$$

(i), (ii)에서

$$a_n = n - \sqrt{n^2-n}, \quad b_n = n + \sqrt{n^2-n}, \quad c_n = n + \sqrt{n^2+n}$$

또 두 점 P_2, P_3 은 직선 $y=nx$ 위의 점이므로

$$f(b_n) = nb_n, \quad f(c_n) = nc_n$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(c_n) - f(b_n)}{b_n - a_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(c_n - b_n)}{b_n - a_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})}{2\sqrt{n^2 - n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})}{2\sqrt{n^2 - n}(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2\sqrt{n^2 - n}(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \\
&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

23 답 4

직선 OP_n 의 기울기는 $\frac{an^2}{n} = an$ 이므로 직선 OP_n 의 방정식은

$$y = anx \quad \therefore anx - y = 0$$

$y = ax^2$ 에서 $y' = 2ax$ 이므로 점 A_n 의 x 좌표를 x_n 이라 하면

$$2ax_n = an \quad \therefore x_n = \frac{n}{2}$$

$$\therefore A_n\left(\frac{n}{2}, \frac{an^2}{4}\right)$$

삼각형 OA_nP_n 의 밑변을 선분 OP_n 으로 하면 높이는 점 A_n 과 직선 $anx - y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|\frac{an^2}{2} - \frac{an^2}{4}\right|}{\sqrt{(an)^2 + (-1)^2}} = \frac{an^2}{4\sqrt{a^2n^2 + 1}}$$

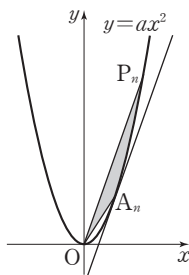
또 $OP_n = \sqrt{n^2 + a^2n^4} = n\sqrt{1 + a^2n^2}$ 이므로 삼각형 OA_nP_n 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times n\sqrt{1 + a^2n^2} \times \frac{an^2}{4\sqrt{a^2n^2 + 1}} = \frac{a}{8}n^3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3 - an} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{8}n^3}{n^3 - an} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{8}}{1 - \frac{a}{n^2}} = \frac{a}{8}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{8} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a = 4$$



24 답 ③

중심이 $C_n(3n, 2n)$ 인 원 C_n 이 x 축에 접하고 접점이 P_n 이므로

$$P_n(3n, 0)$$

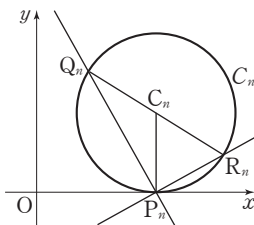
직선 P_nQ_n 의 기울기가 $-\sqrt{3}$ 이므로 원점 O 에 대하여

$$\angle OP_nQ_n = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{이때 } \angle OP_nC_n = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \angle C_nP_nQ_n = \frac{\pi}{6}$$

삼각형 $C_nQ_nP_n$ 은 이등변삼각형이므로 $\angle C_nQ_nP_n = \frac{\pi}{6}$ 에서

$$\angle P_nC_nQ_n = \frac{2}{3}\pi$$



또 $4\angle P_nC_nR_n = 2\pi - \angle P_nC_nQ_n$ 에서

$$\angle P_nC_nR_n = \frac{1}{4}\left(2\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{3}$$

따라서 삼각형 $C_nP_nR_n$ 은 정삼각형이므로

$$\angle C_nP_nR_n = \frac{\pi}{3}$$

직선 P_nR_n 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 직선

P_nR_n 의 기울기는

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

직선 P_nR_n 의 방정식은

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 3n)$$

$$\therefore x - \sqrt{3}y - 3n = 0$$

원의 중심 $C_n(3n, 2n)$ 과 직선 $x - \sqrt{3}y - 3n = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3n - 2\sqrt{3}n - 3n|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \sqrt{3}n$$

원 C_n 의 반지름의 길이는 $2n$ 이므로 원 C_n 위의 점과 직선 P_nR_n 사이의 거리의 최댓값 d_n 은

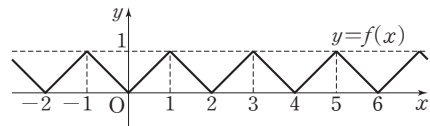
$$d_n = 2n + \sqrt{3}n = (2 + \sqrt{3})n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \sqrt{3})n}{n} = 2 + \sqrt{3}$$

25 답 16

$$f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{ 이고 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x+2) = f(x)$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

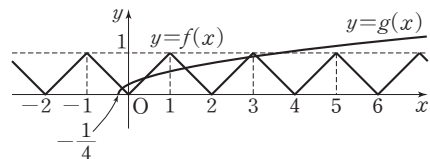


$$g(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{4n^2}} \text{ 이라 하자.}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 과 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{\frac{4x+1}{4n^2}} = 1, \quad 4x+1 = 4n^2$$

$$4x = 4n^2 - 1 \quad \therefore x = n^2 - \frac{1}{4}$$



(i) $n = 2k - 1$ (k 는 자연수)일 때,

$n = 1$ 이면 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $\left(1 - \frac{1}{4}, 1\right)$ 을 지나므로

$$a_1 = 1$$

$n = 3$ 이면 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $\left(9 - \frac{1}{4}, 1\right)$ 을 지나므로

$$a_3 = 9$$

:

$n = 2k - 1$ 이면 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $\left((2k-1)^2 - \frac{1}{4}, 1\right)$ 을 지나므로

$$a_{2k-1} = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$n=2$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 점 $(4-\frac{1}{4}, 1)$ 을 지나므로

$$a_2=5$$

$n=4$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 점 $(16-\frac{1}{4}, 1)$ 을 지나므로

$$a_4=17$$

⋮

$n=2k$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 점 $((2k)^2-\frac{1}{4}, 1)$ 을 지나므로

$$a_{2k}=(2k)^2+1=4k^2+1$$

(i), (ii)에서

$$a_{2n-1}=4n^2-4n+1, a_{2n}=4n^2+1$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^4 - a_{2n-1}a_{2n}}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^4 - (4n^2 - 4n + 1)(4n^2 + 1)}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^3 - 8n^2 + 4n - 1}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(16 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 16\end{aligned}$$

26 [답] ①

삼각형 $A_n B_n C_n$ 에서 $\overline{B_n C_n} = \sqrt{3} \times 2^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{A_n C_n} &= \overline{B_n C_n} \tan \frac{\pi}{6} \\ &= \sqrt{3} \times 2^{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 2^{n-1}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 $A_n B_n C_n$ 의 넓이 S_n 은

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} \times \overline{B_n C_n} \times \overline{A_n C_n} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2^{n-1} \times 2^{n-1} = \sqrt{3} \times 2^{2n-3}\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{A_n C_n}}{\overline{A_n B_n}} = \sin \frac{\pi}{6} \text{이므로 } \frac{2^{n-1}}{\overline{A_n B_n}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{A_n B_n} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

두 직각삼각형 $O_n B_n C_n$, $O_n B_n P_n$ 은 합동 (RHS 합동)이므로

$$\overline{B_n P_n} = \overline{B_n C_n} = \sqrt{3} \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \overline{A_n P_n} = \overline{A_n B_n} - \overline{B_n P_n} = 2^n - \sqrt{3} \times 2^{n-1}$$

직각삼각형 $A_n P_n O_n$ 에서 $\angle P_n A_n O_n = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\angle A_n O_n P_n = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\overline{A_n P_n}}{\overline{O_n P_n}} = \tan \frac{\pi}{6} \text{이므로 } \frac{2^n - \sqrt{3} \times 2^{n-1}}{\overline{O_n P_n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \overline{O_n P_n} = \sqrt{3}(2^n - \sqrt{3} \times 2^{n-1}) = \sqrt{3} \times 2^n - 3 \times 2^{n-1}$$

원과 직선 l 이 접하는 점을 R_n 이라 하면

두 직각삼각형 $A_n P_n O_n$, $A_n R_n O_n$ 은 합동

(RHS 합동)이므로

$$\angle R_n A_n O_n = \angle P_n A_n O_n = \frac{\pi}{3}$$

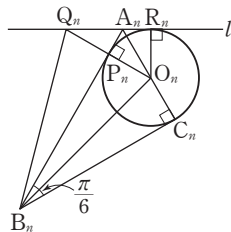
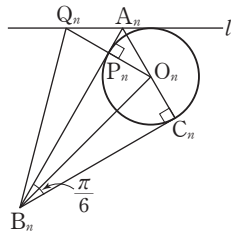
$$\therefore \angle Q_n A_n P_n = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

따라서 두 직각삼각형 $A_n P_n O_n$, $A_n P_n Q_n$ 은

합동 (ASA 합동)이므로 $\overline{O_n P_n} = \overline{Q_n P_n}$

따라서 삼각형 $Q_n B_n O_n$ 의 넓이 T_n 은

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{2} \times \overline{O_n Q_n} \times \overline{B_n P_n} = \frac{1}{2} \times 2\overline{O_n P_n} \times \overline{B_n P_n} \\ &= \frac{1}{2} \times 2(\sqrt{3} \times 2^n - 3 \times 2^{n-1}) \times \sqrt{3} \times 2^{n-1} \\ &= 3 \times 2^{2n-1} - 3\sqrt{3} \times 2^{2n-2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - T_n}{2^n + 4^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} \times 2^{2n-3} - (3 \times 2^{2n-1} - 3\sqrt{3} \times 2^{2n-2})}{2^n + 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{7\sqrt{3} - 12}{8}\end{aligned}$$

step 3 최고난도 문제

| 27~29쪽

01 $\frac{1}{2}$ 02 5 03 ② 04 3π 05 6 06 ④

07 ⑤ 08 $\frac{3}{5}$ 09 $\frac{1}{3}$ 10 ③ 11 12

idea

01 답 $\frac{1}{2}$

1단계 x 를 n 에 대한 식으로 나타내기

(가)에서 $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \frac{[x]}{n}$ 이므로 $\frac{[x]}{n}$ 가 정수이다.

$$\frac{[x]}{n} = k \text{ (} k \text{는 정수)로 놓으면}$$

$$[x] = kn \quad \dots\dots ㉠$$

이때 (가)에서 $0 \leq x < n^2 + 1$ 이므로

$$0 \leq [x] \leq n^2$$

$$\therefore k = 0, 1, 2, \dots, n$$

(다)에서 $[n(x - [x])] = n(x - [x])$ 이므로 $n(x - [x])$ 가 정수이다.

$n(x - [x]) = m$ (m 은 정수)으로 놓으면

$$x - [x] = \frac{m}{n} \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $0 \leq x - [x] < 1$ 이므로

$$m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$㉠ + ㉡ \text{을 하면 } x = kn + \frac{m}{n}$$

2단계 a_n 구하기

이때 k 는 0부터 n 까지의 정수이고, m 은 0부터 $n-1$ 까지의 정수이다.

$k=0$ 일 때, 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\begin{aligned}0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} &= \frac{1}{n} \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

$k=1$ 일 때, 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\begin{aligned}&n + \left(n + \frac{1}{n}\right) + \left(n + \frac{2}{n}\right) + \left(n + \frac{3}{n}\right) + \dots + \left(n + \frac{n-1}{n}\right) \\ &= n \times n + \frac{1}{n} \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} \\ &= n^2 + \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

$k=2$ 일 때, 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\begin{aligned}&2n + \left(2n + \frac{1}{n}\right) + \left(2n + \frac{2}{n}\right) + \left(2n + \frac{3}{n}\right) + \dots + \left(2n + \frac{n-1}{n}\right) \\ &= 2n \times n + \frac{1}{n} \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} \\ &= 2n^2 + \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

⋮

$k=n$ 일 때, 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\begin{aligned} & n^2 + \left(n^2 + \frac{1}{n}\right) + \left(n^2 + \frac{2}{n}\right) + \left(n^2 + \frac{3}{n}\right) + \cdots + \left(n^2 + \frac{n-1}{n}\right) \\ &= n^2 \times n + \frac{1}{n} \{1+2+3+\cdots+(n-1)\} \\ &= n^3 + \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 합 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{2} + \left(n^2 + \frac{n-1}{2}\right) + \left(2n^2 + \frac{n-1}{2}\right) + \cdots + \left(n^3 + \frac{n-1}{2}\right) \\ &= n^2(1+2+3+\cdots+n) + \frac{n-1}{2} \times (n+1) \\ &= n^2 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^4 + n^3 + n^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^4}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^3 + n^2 - 1}{2n^4} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

02 답 5

1단계 a_n 구하기

$f(x) = x(x-n)(x-3n^2) = x^3 - (3n^2+n)x^2 + 3n^3x$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 2(3n^2+n)x + 3n^3$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = \frac{3n^2+n \pm \sqrt{(3n^2+n)^2 - 3 \times 3n^3}}{3} = \frac{3n^2+n \pm \sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$x = \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3} \text{에서 극댓값을 갖는다.}$$

$$\therefore a_n = \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $\frac{a_n b_n}{n^3}$ 의 식 구하기

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

와 직선 $y=f(a_n)$ 이 $x=a_n$ 인 점에서

접하고 $x=b_n$ 인 점에서 만나므로

$$f(x) - f(a_n) = (x-a_n)^2(x-b_n)$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) - f(a_n) = -a_n^2 b_n$$

$$f(0)=0 \text{이므로 } f(a_n) = a_n^2 b_n$$

이때 $f(x) = x^3 - (3n^2+n)x^2 + 3n^3x$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n^3 - (3n^2+n)a_n^2 + 3n^3a_n &= a_n^2 b_n \\ \therefore \frac{a_n b_n}{n^3} &= \frac{a_n^2 - (3n^2+n)a_n + 3n^3}{n^3} \end{aligned}$$

3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값 구하기

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n} \\ &= \frac{n(3n+1)-n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3n} \\ &= \frac{1}{3}(3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1})(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1})}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2+6n+1-(9n^2-3n+1)}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3+\frac{1}{n}+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^3}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - (3n^2+n)a_n + 3n^3}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \times \left(\frac{a_n}{n}\right)^2 - \left(3+\frac{1}{n}\right) \times \frac{a_n}{n} + 3 \right\} \\ &= 0 - 3 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

5단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=2, q=3$ 이므로

$$p+q=5$$

03 답 ②

1단계 l 의 값의 범위 구하기

$$\left[\frac{a_n}{n^2+kn} \right] = n \text{에서}$$

$$n \leq \frac{a_n}{n^2+kn} < n+1$$

$$n^2+kn > 0 \text{이므로}$$

$$n(n^2+kn) \leq a_n < (n+1)(n^2+kn)$$

$$n^3+kn^2 \leq a_n < n^3+(k+1)n^2+kn$$

$$kn^2 \leq a_n - n^3 < (k+1)n^2+kn$$

$$\therefore \frac{1}{(k+1)n^2+kn} < \frac{1}{a_n-n^3} \leq \frac{1}{kn^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\left[\frac{b_n}{n^2+n} \right] = n+2k \text{에서}$$

$$n+2k \leq \frac{b_n}{n^2+n} < n+2k+1$$

$$n^2+n > 0 \text{이므로}$$

$$(n+2k)(n^2+n) \leq b_n < (n+2k+1)(n^2+n)$$

$$n^3+(2k+1)n^2+2kn \leq b_n < n^3+(2k+2)n^2+(2k+1)n$$

$$\therefore (2k+1)n^2+2kn \leq b_n - n^3 < (2k+2)n^2+(2k+1)n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\frac{(2k+1)n^2+2kn}{(k+1)n^2+kn} < \frac{b_n-n^3}{a_n-n^3} < \frac{(2k+2)n^2+(2k+1)n}{kn^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)n^2+2kn}{(k+1)n^2+kn} = \frac{2k+1}{k+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)n^2+(2k+1)n}{kn^2} = \frac{2k+2}{k} \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계}$$

에 의하여

$$\frac{2k+1}{k+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n-n^3}{a_n-n^3} \leq \frac{2k+2}{k}$$

$$\therefore \frac{2k+1}{k+1} \leq l \leq \frac{2k+2}{k} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

2단계 k 의 값에 따라 l 의 값 구하기

(i) $k=1$ 일 때,

㉔에서 $\frac{3}{2} \leq l \leq 4$ 이고 l 은 2보다 큰 자연수이므로 l 의 값은 3, 4이다.

(ii) $k=2$ 일 때,

㉔에서 $\frac{5}{3} \leq l \leq 3$ 이고 l 은 2보다 큰 자연수이므로 l 의 값은 3이다.

(iii) $k \geq 3$ 일 때,

㉔에서 $2 - \frac{1}{k+1} \leq l \leq 2 + \frac{2}{k}$ 이고 $k \geq 3$ 이면 $2 + \frac{2}{k} \leq 2 + \frac{2}{3}$ 이므로

2보다 큰 자연수 l 의 값이 존재하지 않는다.

3단계 $k \times l$ 의 값의 합 구하기

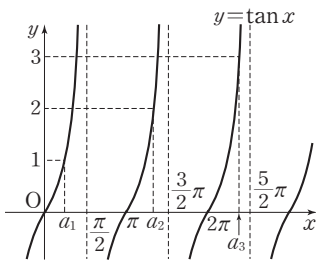
(i), (ii), (iii)에서 $k \times l$ 의 값은 1×3 , 1×4 , 2×3 이므로 그 합은

$$3 + 4 + 6 = 13$$

04 답 3π

1단계 a_n 의 범위 구하기

함수 $y = \tan x$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$A_1 = \left\{ x \mid \tan x = 1, x < \frac{\pi}{2} \right\} \text{이므로 } a_1 = \frac{\pi}{4}$$

같은 방법으로 하면 a_n 은 $x < \frac{2n-1}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와

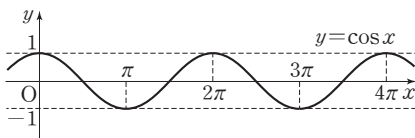
직선 $y = n$ 이 만나는 점의 x 좌표 중 가장 큰 실수이므로

$$a_1 < a_2 < \frac{3}{2}\pi, a_2 < a_3 < \frac{5}{2}\pi, \dots$$

$$\therefore (n-1)\pi < a_n < \frac{2n-1}{2}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $a_n + 2b_n$ 구하기

함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$B_1 = \left\{ x \mid \cos \frac{x+a_1}{2} = -1, x > a_1 \right\} \text{에서 } a_1 = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{b_1+a_1}{2} = \pi \quad \therefore b_1 = 2\pi - a_1$$

↳ b_i 이 조건을 만족시키는 가장 작은 실수이도록 값을 택한다.

$$B_2 = \left\{ x \mid \cos \frac{x+a_2}{2} = 1, x > a_2 \right\} \text{에서 } \pi < a_2 < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{b_2+a_2}{2} = 2\pi \quad \therefore b_2 = 4\pi - a_2$$

$$B_3 = \left\{ x \mid \cos \frac{x+a_3}{2} = -1, x > a_3 \right\} \text{에서 } 2\pi < a_3 < \frac{5}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{b_3+a_3}{2} = 3\pi \quad \therefore b_3 = 6\pi - a_3$$

⋮

$$b_n = 2n\pi - a_n$$

$$\therefore a_n + 2b_n = a_n + 2(2n\pi - a_n) = 4n\pi - a_n$$

3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2b_n}{n}$ 의 값 구하기

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4n\pi - \frac{2n-1}{2}\pi < 4n\pi - a_n < 4n\pi - (n-1)\pi$$

$$\left(3n + \frac{1}{2}\right)\pi < a_n + 2b_n < (3n+1)\pi$$

$$\therefore \left(3 + \frac{1}{2n}\right)\pi < \frac{a_n + 2b_n}{n} < \left(3 + \frac{1}{n}\right)\pi$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{2n}\right)\pi = 3\pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)\pi = 3\pi$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2b_n}{n} = 3\pi$$

05 답 6

1단계 $a_n - 3 = b_n$ 으로 놓고 짝수 번째 항과 홀수 번째 항의 부호 알기

$a_n - 3 = b_n$ 으로 놓으면

$$b_1 = a_1 - 3 = 2 - 3 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(*)에서 $b_n b_{n+1} < 0$

이때 $b_1 < 0$ 이므로 자연수 k 에 대하여 $b_{2k-1} < 0$, $b_{2k} > 0$

2단계 인접한 두 항 사이의 관계 알기

$$(\text{1}) \text{에서 } \frac{b_{n+1}}{b_n} > -\frac{1}{2}$$

$n = 2k - 1$ 일 때, $b_{2k-1} < 0$ 이고 $\frac{b_{2k}}{b_{2k-1}} > -\frac{1}{2}$ 이므로

$$b_{2k} < -\frac{1}{2}b_{2k-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$n = 2k$ 일 때, $b_{2k} > 0$ 이고 $\frac{b_{2k+1}}{b_{2k}} > -\frac{1}{2}$ 이므로

$$b_{2k+1} > -\frac{1}{2}b_{2k} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$b_{2k-1} > -\frac{1}{2}b_{2k-2} \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2}b_{2k-1} < \left(-\frac{1}{2}\right)^2 b_{2k-2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ 의 값 구하기

②, ④에서

$$b_{2k} < -\frac{1}{2}b_{2k-1} < \left(-\frac{1}{2}\right)^2 b_{2k-2} < \dots < \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} b_1 = \frac{1}{2^{2k-1}} \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, $0 < b_{2k} < \frac{1}{2^{2k-1}}$ 이므로

$$0 < a_{2n} - 3 < \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \therefore 3 < a_{2n} < \frac{1}{2^{2n-1}} + 3$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + 3\right) = 3$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 3$$

또 ③, ⑤에서 같은 방법으로 하면

$$b_{2k+1} > -\frac{1}{2}b_{2k} > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 b_{2k-1} > \dots > \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} b_1 = -\frac{1}{2^{2k}} \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, $-\frac{1}{2^{2k}} < b_{2k+1} < 0$ 이므로

$$-\frac{1}{2^{2n}} < a_{2n+1} - 3 < 0 \quad \therefore -\frac{1}{2^{2n}} + 3 < a_{2n+1} < 3$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2^{2n}} + 3\right) = 3$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = 3 + 3 = 6$$

06 답 ④

1단계 $f(x)$ 구하기

$$|x-1| = (x-3)^2 \text{에서}$$

$$x < 1 \text{일 때, } -x+1 = (x-3)^2 \text{이므로}$$

$$x^2 - 5x + 8 = 0$$

이를 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

$$x \geq 1 \text{일 때, } x-1 = (x-3)^2 \text{이므로}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=5$$

(i) $|x-1| < (x-3)^2$, 즉 $x < 2$ 또는 $x > 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x-1}{(x-3)^2} \right\}^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-3)^{2n}} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x-3)^{2n} + b(x-1)^{n+1} + 1}{(x-1)^n + (x-3)^{2n+1} + 1} \quad x-3 < -1 \text{ 또는 } x-3 > 2$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b(x-1) \left\{ \frac{x-1}{(x-3)^2} \right\}^n + \frac{1}{(x-3)^{2n}}}{\left\{ \frac{x-1}{(x-3)^2} \right\}^n + x-3 + \frac{1}{(x-3)^{2n}}} \\ &= \frac{a}{x-3} \end{aligned}$$

(ii) $|x-1| = (x-3)^2$, 즉 $x=2$ 또는 $x=5$ 일 때

① $x=2$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x-3)^{2n} + b(x-1)^{n+1} + 1}{(x-1)^n + (x-3)^{2n+1} + 1} \\ &= \frac{a+b+1}{1-1+1} = a+b+1 \end{aligned}$$

② $x=5$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x-3)^{2n} + b(x-1)^{n+1} + 1}{(x-1)^n + (x-3)^{2n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times 2^{2n} + b \times 4^{n+1} + 1}{4^n + 2^{2n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+4b+\frac{1}{4^n}}{1+2+\frac{1}{4^n}} = \frac{a+4b}{3} \end{aligned}$$

(iii) $|x-1| > (x-3)^2$, 즉 $2 < x < 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(x-3)^2}{x-1} \right\}^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x-3)^{2n} + b(x-1)^{n+1} + 1}{(x-1)^n + (x-3)^{2n+1} + 1} \quad 1 < x-1 < 4$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times \left\{ \frac{(x-3)^2}{x-1} \right\}^n + b(x-1) + \frac{1}{(x-1)^n}}{1 + (x-3) \left\{ \frac{(x-3)^2}{x-1} \right\}^n + \frac{1}{(x-1)^n}} \\ &= b(x-1) \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

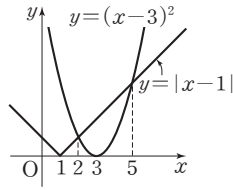
$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-3} & (x < 2 \text{ 또는 } x > 5) \\ a+b+1 & (x=2) \\ b(x-1) & (2 < x < 5) \\ \frac{a+4b}{3} & (x=5) \end{cases}$$

2단계 $a+a+b$ 의 값 구하기

함수 $f(x)$ 는 $x \neq 2, x \neq 5$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서만 불연속이므로 $x=2$ 에서 연속이거나

$x=5$ 에서 연속이어야 한다.



함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속하려면

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} b(x-1) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{a}{x-3} = a+b+1$$

$$b = -a = a+b+1$$

$$\therefore a = -1, b = 1$$

함수 $f(x)$ 가 $x=5$ 에서 연속하려면

$$\lim_{x \rightarrow 5+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = f(5) \text{이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5+} \frac{a}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 5-} b(x-1) = \frac{a+4b}{3}$$

$$\frac{a}{2} = 4b = \frac{a+4b}{3}$$

$$\frac{a}{2} = 4b \text{에서 } \frac{a}{b} = 8$$

이는 $ab < 0$ 을 만족시키지 않으므로 $x=5$ 에서 불연속이다.

따라서 $a=5, a=-1, b=1$ 이므로

$$a+a+b=5$$

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

07 답 ⑤

1단계 $f(x)$ 구하기

(i) $\left| \frac{x-1}{k} \right| > 1$, 즉 $x < 1-k$ 또는 $x > 1+k$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x-1} \right)^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{k}{x-1} \right)^{2n}}{1 + \left(\frac{k}{x-1} \right)^{2n}} = 1$$

(ii) $\left| \frac{x-1}{k} \right| = 1$, 즉 $x=1-k$ 또는 $x=1+k$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(iii) $\left| \frac{x-1}{k} \right| < 1$, 즉 $1-k < x < 1+k$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x-1}{k} \right)^{2n} + 1} = -1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < 1-k \text{ 또는 } x > 1+k) \\ 0 & (x=1-k \text{ 또는 } x=1+k) \\ -1 & (1-k < x < 1+k) \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 k 의 값 구하기

함수 $g(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & (x=k) \\ (x-k)^2 & (x \neq k) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x=k$ 에서도 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$

$$\lim_{x \rightarrow k} (x-k)^2 = (f \circ f)(k)$$

$$\therefore (f \circ f)(k) = 0$$

$(f \circ f)(k)=0$ 에서 $f(f(k))=0$ 이므로 ㉠에서

$$f(k)=1-k \text{ 또는 } f(k)=1+k$$

이때 $k>0$ 에서 $1+k>1$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{-1, 0, 1\}$ 이므로

$f(k)=1+k$ 를 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore f(k)=1-k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $1-k=-1$, 즉 $k=2$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3) \\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3) \\ -1 & (-1<x<3) \end{cases}$$

$f(2)=-1$ 이므로 ㉡을 만족시킨다.

(ii) $1-k=0$, 즉 $k=1$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=2) \\ -1 & (0<x<2) \end{cases}$$

$f(1)=-1$ 이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(iii) $1-k=1$, 즉 $k=0$ 일 때,

$k>0$ 인 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=2$

3단계 $(g \circ f)(k)$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3) \\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3) \\ -1 & (-1<x<3) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} (f \circ f)(x) & (x=2) \\ (x-2)^2 & (x \neq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(k)=g(f(2))=g(-1) \\ =(-3)^2=9$$

08 답 $\frac{3}{5}$

1단계 $h(x)$ 구하기

(i) $g(x)<f(x)$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}^n = 0 \text{이므로}$$

$$h(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^{n+1}} \\ =\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}^n}{1 + g(x) \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}^n} = f(x)$$

(ii) $g(x)=f(x)$ 일 때,

$$h(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^{n+1}} \\ =\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{f(x)\}^n}{\{f(x)\}^n + \{f(x)\}^{n+1}} = 1$$

(iii) $g(x)>f(x)$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}^n = 0 \text{이므로}$$

$$h(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^{n+1}} \\ =\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}^n + 1}{\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}^n + g(x)} = \frac{1}{g(x)}$$

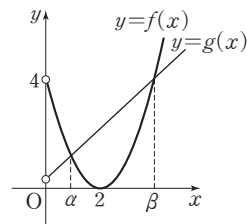
(i), (ii), (iii)에서

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (g(x)<f(x)) \\ 1 & (g(x)=f(x)) \\ \frac{1}{g(x)} & (g(x)>f(x)) \end{cases}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나므로 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α , β

$(0<\alpha<2<\beta)$ 라 하면

$$h(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (0<x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta) \\ 1 & (x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta) \\ \frac{1}{ax+b} & (\alpha<x<\beta) \end{cases}$$



2단계 a , b 의 값 구하기

㉢에서 함수 $h(x)$ 가 불연속인 x 의 개수는 1이므로 $x=\alpha$ 에서 연속이거나 $x=\beta$ 에서 연속이어야 한다.

이때 ㉢에서 방정식 $h(x)=k$ ($k>1$)를 만족시키는 실근의 개수의 최댓값이 1이므로 그림과 같이 함수 $h(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 연속이고 $f(\beta) \geq 4$ 이어야 한다.

함수 $h(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha-} h(x) = h(\alpha)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+} \frac{1}{ax+b} = \lim_{x \rightarrow \alpha-} (x-2)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{a\alpha+b} = (\alpha-2)^2 = 1$$

$$(\alpha-2)^2 = 1 \text{에서}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-3) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1 \quad (\because 0 < \alpha < 2)$$

$$\frac{1}{a\alpha+b} = 1 \text{에서 } \alpha = 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{a+b} = 1, a+b=1$$

$$\therefore b=1-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^2-(a+4)x+4-b=0$ 의 두 실근이 α , β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a+4$$

$$\therefore \beta=a+3 \quad (\because \alpha=1)$$

또 $f(\beta) \geq 4$, 즉 $f(a+3) \geq 4$ 이어야 하므로

$$(a+1)^2 \geq 4, a^2+2a-3 \geq 0$$

$$(a+3)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \geq 1 \quad (\because a > 0)$$

이때 $0 \leq b < 4$ 이므로 ㉠을 만족시키는 a , b 의 값은

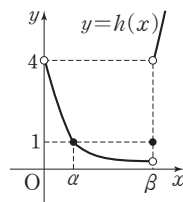
$$a=1, b=0$$

3단계 $h\left(\frac{5}{3}\right)$ 의 값 구하기

따라서 $\beta=a+3=4$ 이므로

$$h(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (0<x<1 \text{ 또는 } x>4) \\ 1 & (x=1 \text{ 또는 } x=4) \\ \frac{1}{x} & (1<x<4) \end{cases}$$

$$\therefore h\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5}$$



09 답 1/3

1단계 a_n 구하기

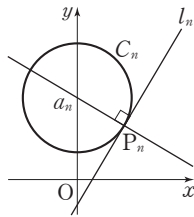
원 C_n 이 점 P_n 에서 직선 l_n 에 접하므로 점 P_n 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선은 원 C_n 의 중심을 지난다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P_n(n, f(n))$ 에서의 접선 l_n 의 기울기는 $f'(n)$ 이므로 점 P_n 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(n)=-\frac{1}{f'(n)}(x-n)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{f'(n)}x+\frac{n}{f'(n)}+f(n)$$

이 직선의 y 절편이 a_n 이므로 $a_n=\frac{n}{f'(n)}+f(n)$



2단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n\{a_n-f(n)\}}{n^2}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n\{a_n-f(n)\}}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{\frac{n}{f'(n)}+f(n)\right\} \times \frac{n}{f'(n)}}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\{f'(n)\}^2} + \frac{f(n)}{nf'(n)} \right] \end{aligned}$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2px+q$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\{f'(n)\}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n^2+2pn+q)^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{nf'(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+pn^2+qn+r}{3n^3+2pn^2+qn} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n\{a_n-f(n)\}}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\{f'(n)\}^2} + \frac{f(n)}{nf'(n)} \right] \\ &= 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10 답 ③

1단계 p 의 값 구하기

두 점 $A(2, 0), B(2^{n+1}, 0)$ 은 x 축 위의 점이

고 삼각형 ABC 에서 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점

$C(p, q)$ 는 직선 $x=2$ 위의 점이다.

$$\therefore p=2$$

2단계 q 의 값 구하기

$$|pq| \leq 2^{n+3} \text{에서 } |2q| \leq 2^{n+3}$$

$$-2^{n+3} \leq 2q \leq 2^{n+3} \quad \therefore -2^{n+2} \leq q \leq 2^{n+2}$$

$q \neq 0$ 이고 q 는 정수이므로 q 의 값은 $-2^{n+2}, -2^{n+2}+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2^{n+2}$ 이다.

3단계 S_n 구하기

삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (2^{n+1}-2) \times |q| = (2^n-1) \times |q|$ 이므로 모

든 삼각형 ABC 의 넓이의 합 S_n 은

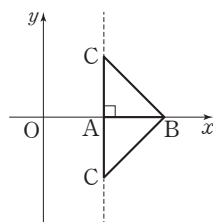
$$S_n = (2^n-1) \times 2(1+2+3+\dots+2^{n+2})$$

$$= (2^n-1) \times 2 \times \frac{2^{n+2}(2^{n+2}+1)}{2}$$

$$= (2^n-1)(2^{2n+4}+2^{n+2})$$

$$= 2^{3n+4} - 2^{2n+4} + 2^{2n+2} - 2^{n+2}$$

$$= 16 \times 8^n - 12 \times 4^n - 4 \times 2^n$$



4단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{8^n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{8^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times 8^n - 12 \times 4^n - 4 \times 2^n}{8^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 16 - 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

11 답 12

1단계 점 Q_n 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선의 방정식 구하기

그림과 같이 점 $Q_n(0, 2n^2)$ 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선을 m_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 m_n 위에 있다.

직선 l_n 은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(2n, 4n^2)$ 에서의 접선과 수직이므로 직선 m_n 은 이 접선과 평행하다.

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 점 P_n 에서의 접선의 기울기는 $4n$ 이다.

따라서 직선 m_n 의 기울기는 $4n$ 이므로 직선 m_n 의 방정식은

$$y=4nx+2n^2$$

2단계 선분 P_nQ_n 의 수직이등분선의 방정식 구하기

선분 P_nQ_n 의 수직이등분선을 k_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 k_n 위에 있다.

직선 P_nQ_n 의 기울기는 $\frac{4n^2-2n^2}{2n}=n$ 이므로 직

선 k_n 의 기울기는 $-\frac{1}{n}$ 이다.

선분 P_nQ_n 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2n}{2}, \frac{4n^2+2n^2}{2}\right) \quad \therefore (n, 3n^2)$$

따라서 직선 k_n 의 방정식은

$$y-3n^2=-\frac{1}{n}(x-n) \quad \therefore y=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$$

3단계 a_n 구하기

원 C_n 의 중심은 두 직선 m_n, k_n 이 만나는 점과 같다.

두 직선 m_n, k_n 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$4nx+2n^2=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$$

$$\left(4n+\frac{1}{n}\right)x=n^2+1 \quad \therefore x=\frac{n^2+1}{4n+\frac{1}{n}}=\frac{n^3+n}{4n^2+1}$$

원 C_n 의 중심은 직선 $y=4nx+2n^2$ 위의 점이므로 y 좌표를 구하면

$$y=4n \times \frac{n^3+n}{4n^2+1} + 2n^2 = \frac{4n^4+4n^2+2n^2(4n^2+1)}{4n^2+1} = \frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$$

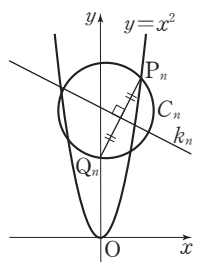
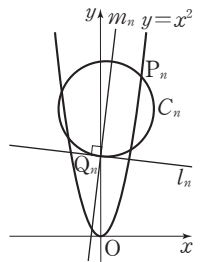
원점을 지나고 원 C_n 의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심

$\left(\frac{n^3+n}{4n^2+1}, \frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}\right)$ 을 지나므로 이 직선의 기울기 a_n 은

$$a_n = \frac{\frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}}{\frac{n^3+n}{4n^2+1}} = \frac{12n^4+6n^2}{n^3+n} = \frac{12n^3+6n}{n^2+1}$$

4단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값 구하기

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^3+6n}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 12$$



step 1 핵심 문제

| 30~31쪽

- 01 $\frac{11}{12}$ 02 ④ 03 ③ 04 ③ 05 ④ 06 $\frac{1}{4}$
 07 ④ 08 $\frac{25}{2}$ 09 ③ 10 ③ 11 ②

01 답 $\frac{11}{12}$

다항식 $a_n x^2 + 6a_n x - 6$ 이 $x - 2n$ 으로 나누어떨어지므로

$$(2n)^2 a_n + 6 \times 2n a_n - 6 = 0$$

$$4n^2 a_n + 12n a_n - 6 = 0$$

$$(2n^2 + 6n)a_n = 3$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{2n^2 + 6n} = \frac{3}{2n(n+3)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) \right. \\ \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11}{6} = \frac{11}{12}$$

02 답 ④

$$n^2 + n \leq 2n^2 - 3n \text{에서 } n^2 - 4n \geq 0$$

$$n(n-4) \geq 0 \quad \therefore n \geq 4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

$$\text{따라서 } a_n = \begin{cases} 2n^2 - 3n & (1 \leq n \leq 3) \\ n^2 + n & (n \geq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{2n^2 - 3n} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \right) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= -\frac{7}{18} + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= -\frac{7}{18} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= -\frac{7}{18} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= -\frac{7}{18} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= -\frac{7}{18} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{36}$$

03 답 ③

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3) \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3) = 0$$

$$b_n = 2a_n - 3 \text{이라 하면}$$

$$2a_n = b_n + 3 \quad \therefore a_n = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} \right) = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } r = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} - 1}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{9}{4}$$

04 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 4이므로 공차를 d 라 하면

$$a_n = 4 + (n-1)d = dn + 4 - d$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{dn+4-d}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) = 0$$

$$d-3=0 \quad \therefore d=3$$

$$\text{따라서 } a_n = 3n+1 \text{이므로}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 + \frac{1}{n} - \left(3 + \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{3}{2}$$

05 답 ④

ㄱ. [반례] $a_n = 1$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴하지 않지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 이므로 수열

$\{a_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = S, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = T$ (S, T 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2a_n + b_n) - (a_n + 2b_n)}{3} = \frac{2S - T}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a_n + b_n) - 2(a_n + 2b_n)}{-3} = -\frac{S - 2T}{3}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = 0$$

$$c_n = b_n - a_n \text{이라 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0 \text{이므로}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } a_n \leq b_n \text{에서 } b_n - a_n \geq 0 \text{이므로 } c_n \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } c_n = 0$$

$$\text{따라서 } b_n - a_n = 0 \text{이므로 } a_n = b_n$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

06 답 $\frac{1}{4}$

$$a_1 = \frac{1}{3} \times \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{3^2} \times \tan \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{3^2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3^3} \times \tan \frac{5}{4}\pi = \frac{1}{3^3}, a_4 = \frac{1}{3^4} \times \tan \frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{3^4}, \dots$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{4}$$

07 답 ④

$$a_1 = 1, a_n a_{n+1} = 3^n \text{에서}$$

$$a_1 a_2 = 3^1 \text{이므로 } a_2 = 3$$

$$a_2 a_3 = 3^2 \text{이므로 } a_3 = \frac{3^2}{a_2} = 3$$

$$a_3 a_4 = 3^3 \text{이므로 } a_4 = \frac{3^3}{a_3} = 3^2$$

$$a_4 a_5 = 3^4 \text{이므로 } a_5 = \frac{3^4}{a_4} = 3^2$$

$$a_5 a_6 = 3^5 \text{이므로 } a_6 = \frac{3^5}{a_5} = 3^3$$

$$\vdots$$

따라서 $a_{2n} = 3^n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

다른 풀이

$$a_n a_{n+1} = 3^n \dots\dots ㉠$$

$$a_{n+1} a_{n+2} = 3^{n+1} \dots\dots ㉡$$

㉡ ÷ ㉠을 하면

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = 3$$

$a_1 = 1$ 이고, ㉠에서 $a_1 a_2 = 3$ 이므로

$$a_2 = 3$$

즉, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_{2n} = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

08 답 $\frac{25}{2}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10 \text{에서}$$

$$\frac{a}{1-r} = 10 \quad \therefore a = 10(1-r) \quad \dots\dots ㉠ \quad \text{배점 20\%}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = -30 \text{에서 } a_n a_{n+1} = ar^{n-1} \times ar^n = a^2 r \times (r^2)^{n-1} \text{이므로}$$

$$\frac{a^2 r}{1-r^2} = -30 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

㉠을 대입하면

$$\frac{100(1-r)^2 r}{1-r^2} = -30$$

$$\frac{100(1-r)^2 r}{(1+r)(1-r)} = -30$$

$$\frac{10(1-r)r}{1+r} = -3$$

$$10(1-r)r = -3(1+r)$$

$$10r^2 - 13r - 3 = 0$$

$$(5r+1)(2r-3) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{5} \quad (\because -1 < r < 1)$$

이를 ㉠에 대입하면 $\rightarrow$ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$

$$a = 10 \times \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 12 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a = 12$, 공비가 $r^2 = \frac{1}{25}$ 인 등비수열이

므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{12}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25}{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

09 답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ 은 첫째항과 공비가 $\frac{r-1}{2}$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$-2 < r-1 < 0$$

$$\therefore -1 < \frac{r-1}{2} < 0$$

따라서 주어진 등비급수는 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3} - 1\right)^{2n}$ 은 첫째항과 공비가 $\left(\frac{r}{3} - 1\right)^2$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$-\frac{1}{3} < \frac{r}{3} < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{4}{3} < \frac{r}{3} - 1 < -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{4}{9} < \left(\frac{r}{3} - 1\right)^2 < \frac{16}{9}$$

따라서 주어진 등비급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r+1}\right)^n$ 은 첫째항과 공비가 $\frac{1}{r+1}$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$0 < r+1 < 2$$

$$\therefore \frac{1}{r+1} > \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 등비급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 첫째항과 공비가 $-r$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$-1 < -r < 1$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = a, \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n = \beta \quad (a, \beta \text{는 실수}) \text{라 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{r^n - 2 \times (-r)^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$$

$$= a - 2\beta$$

따라서 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 보기에서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

10 답 ③

원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{9}\right)^n$ 의 접선 중 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y=-x \pm \left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{(-1)^2+1}$$

$$\therefore y=-x \pm \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

두 접선 중 제1사분면을 지나는 접선의 방정식은

$$y=-x+\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

이 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 a_n 이므로

$$a_n=\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

$$= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

개념 NOTE

원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx \pm r\sqrt{m^2+1}$$

11 답 ②

$\overline{B_1C_1}=12$, $\angle B_1=\frac{\pi}{3}$ 이므로 부채꼴 $C_1B_1C_2$ 의 넓이 S_1 은

$$S_1=\frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{\pi}{3}=24\pi$$

직각삼각형 AB_1C_1 에서

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}, \frac{1}{2} = \frac{12}{\overline{AB_1}}$$

$$\therefore \overline{AB_1}=24$$

$$\therefore \overline{AC_2}=\overline{AB_1}-\overline{B_1C_1}=24-12=12$$

$$\angle A=\frac{\pi}{6} \text{이므로 } \angle AB_2C_2=\frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 AB_2C_2 에서

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}}, \sqrt{3} = \frac{12}{\overline{B_2C_2}}$$

$$\therefore \overline{B_2C_2}=4\sqrt{3}$$

부채꼴의 중심각의 크기는 모두 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 부채꼴은 닮음이다. 이때 닮음

비는 $12:4\sqrt{3}$, 즉 $3:\sqrt{3}$ 이므로 넓이의 비는 $9:3$, 즉 $3:1$ 이다.

따라서 $S_n=24\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{24\pi}{1-\frac{1}{3}} = 36\pi$$

개념 NOTE

반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l=r\theta, S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$

step 2 고난도 문제

| 32~36쪽

01 ⑤

02 ①

03 -1

04 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

05 5

06 ①

07 1

08 -6

09 ②

10 6

11 ②

12 $\frac{1}{12}$

13 $\frac{3}{5}$

14 ①

15 $\frac{1}{50}$

16 4

17 8

18 ③

19 ⑤

20 ③

21 ②

22 ③

01 답 ⑤

(가)의 $\log a_n + \log a_{n+1} + \log b_n = 0$ 에서

$$\log a_n a_{n+1} b_n = 0$$

$$a_n a_{n+1} b_n = 1$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이므로 $a_{n+1} - a_n = 3$ 에서

$$b_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

이때 $a_n = a_1 + (n-1) \times 3$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{3n+a_1} \right) = \frac{1}{3a_1}$$

(나)의 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{12}$ 에서

$$\frac{1}{3a_1} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore a_1 = 4$$

02 답 ①

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ a_1 - a_2 + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - na_{n+1}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = \frac{2n}{n+1}$ 이

므로

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

따라서 ①에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - na_{n+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2n}{n+1} - \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= 2 - 0 = 2$$

03 답 -1

$$S_n = 2n^2 + 3n + p \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = 5 + p$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 + 3n + p - \{2(n-1)^2 + 3(n-1) + p\}$$

$$= 4n + 1$$

$$a_2 = 4 \times 2 + 1 = 9 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(5+p) \times 9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$= \frac{1}{9p+45} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right)$$

$$= \frac{1}{9p+45} + \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right)$$

$$= \frac{1}{9p+45}$$

$$+ \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{17} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{9p+45} + \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4n+5} \right)$$

$$= \frac{1}{9p+45} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9p+45} + \frac{1}{36}$$

$$\approx, \frac{1}{9p+45} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{9p+45} = \frac{1}{36}$$

$$9p+45=36$$

$$9p=-9$$

$$\therefore p=-1$$

04 답 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{이고, } a_2 = \frac{1}{3} < 1, a_{n+2} = a_n a_{n+1} \text{이므로}$$

$$0 < a_n \leq a_1$$

$$a_{n+2} = a_n a_{n+1} \leq a_1 a_{n+1} = \frac{1}{2} a_{n+1} \text{이므로}$$

$$a_3 \leq \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$a_4 \leq \frac{1}{2} a_3 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$a_5 \leq \frac{1}{2} a_4 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \frac{1}{3}$$

$\vdots$

$$\therefore a_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \times \frac{1}{3}$$

이때 $a_n > 0$ 이므로

$$0 < a_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \times \frac{1}{3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \times \frac{1}{3} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}} + \sqrt{a_n a_{n+1}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{\sqrt{a_{n+3}} + \sqrt{a_{n+2}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{n+3} - a_{n+2})(\sqrt{a_{n+3}} - \sqrt{a_{n+2}})}{(\sqrt{a_{n+3}} + \sqrt{a_{n+2}})(\sqrt{a_{n+3}} - \sqrt{a_{n+2}})} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{n+3} - a_{n+2})(\sqrt{a_{n+3}} - \sqrt{a_{n+2}})}{a_{n+3} - a_{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{a_{n+3}} - \sqrt{a_{n+2}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{a_{k+3}} - \sqrt{a_{k+2}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) + (\sqrt{a_5} - \sqrt{a_4}) \\ &\quad + (\sqrt{a_6} - \sqrt{a_5}) + \cdots + (\sqrt{a_{n+3}} - \sqrt{a_{n+2}}) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{a_3} + \sqrt{a_{n+3}}) \\ &= -\sqrt{a_3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+3}} = 0 \\ &= -\sqrt{a_1 a_2} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

★ idea

05 답 5

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_k + b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n (a_k + b_{k+1}) + a_{n+1} + b_1$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} + a_{n+1} + 5 \quad (\because \text{㉞}, \text{㉟})$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + a_{n+1} + 5$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} + a_{n+1} + 5$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + a_{n+1} + 5$$

$$= \frac{11}{2} - \frac{1}{n+2} + a_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} (a_k + b_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{n+2} + a_{n+1} \right) \end{aligned}$$

이때 ㉞의 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{n+2} + a_{n+1} \right) = \frac{11}{2} - 0 - \frac{1}{2} = 5$$

06 답 ①

㉞에서 일정한 값을 p 라 하면

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n} = p \quad \cdots \text{㉟}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)라 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} &= \frac{2n\{2a + (2n-1)d\}}{2} \\ &= n\{2a + (2n-1)d\} \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

이를 ㉟에 대입하면

$$\frac{n\{2a + (2n-1)d\}}{\frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}} = p$$

$$2\{2a + (2n-1)d\} = p\{2a + (n-1)d\}$$

$4dn + 4a - 2d = dpn + 2ap - dp$
 $(4d - dp)n + 4a - 2d - 2ap + dp = 0$
 모든 자연수 n 에 대하여 이 식이 성립하므로
 $4d - dp = 0, 4a - 2d - 2ap + dp = 0$
 $4d - dp = 0$ 에서 $d(4 - p) = 0$
 $\therefore p = 4$ ($\because d > 0$)
 이를 $4a - 2d - 2ap + dp = 0$ 에 대입하면
 $4a - 2d - 8a + 4d = 0$
 $2d = 4a \quad \therefore d = 2a$
 $\therefore a_n = a + (n-1) \times 2a = 2an - a$
 (나)의 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)a_n} = \frac{1}{10}$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)a_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2an-a)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \times 1 = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{10} \text{이므로 } a = 10$$
 따라서 $a_n = 20n - 10$ 이므로
 $a_{10} = 200 - 10 = 190$

07 답 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = 0$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
 수열 $\{b_n - a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \alpha \times 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{a_n} - 1 \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + b_n + 2a_n}{1 + 3b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{a_n} + \frac{b_n}{a_n} + 2}{\frac{1}{a_n} + 3 \times \frac{b_n}{a_n}}$$

$$= \frac{0 + 1 + 2}{0 + 3 \times 1} = 1$$

08 답 -6

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = 0$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k - k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ S_n - \frac{n(n+1)}{2} \right\}$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ S_n - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3$

$$b_n = S_n - \frac{n(n+1)}{2} \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

$$S_n = b_n + \frac{n(n+1)}{2} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2S_n + n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ a_n - 2b_n - n(n+1) + n^2 \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n - 2b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$= 0 - 2 \times 3 = -6$$

09 답 ②

ㄱ. [반례] $a_n = \begin{cases} 1 & (n \text{은 짝수}) \\ 0 & (n \text{은 홀수}) \end{cases}$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} - \sum_{k=1}^n a_{2k} \right) = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 0$ 이

지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 은 발산하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 0$ 을 만족시키지 않는다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{1+k} + a_{2+k} + a_{3+k} + \cdots + a_{n+k} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k)$$

$$= \alpha - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k)$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ 는 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 2a_n + 1)$ 이 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n^2 - (a_n^2 - 2a_n + 1) \} \text{도 수렴한다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 1) = 0$$

$$b_n = 2a_n - 1 \text{이라 하면 } 2a_n = b_n + 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

idea

10 답 6

(가)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0, b_n > 0$ 이므로
 $a_n^2 > 0, b_n^2 > 0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a_n^2 + b_n^2 \geq 2\sqrt{a_n^2 b_n^2} = 2a_n b_n \text{ (단, 등호는 } a_n^2 = b_n^2 \text{일 때 성립)}$$

따라서 $\sum_{k=1}^n 2a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$ 이므로 (나), (다)에서

$$\frac{n^3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} < \sum_{k=1}^n 2a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) < 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3}{2n^3 + 3n^2 + n} = 3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 2a_nb_n &= 3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 3 \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_nb_n \\ &= 3 + 3 = 6\end{aligned}$$

개념 NOTE

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

11 답 ②

직선 $y=x+1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 선분 P_nQ_n 을 대각선으로 하는 정사각형의 각 변은 x 축 또는 y 축에 평행하다. 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표를 각각 α_n, β_n 이라 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n - \beta_n|$ 이므로

$$a_n = (\alpha_n - \beta_n)^2$$

α_n, β_n 은 곡선 $y=x^2-2nx-2n$ 과 직선 $y=x+1$ 이 만나는 점의 x 좌표이므로 이차방정식 $x^2-2nx-2n=x+1$, 즉

$$x^2 - (2n+1)x - 2n - 1 = 0 \text{의 두 근이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 2n+1, \quad \alpha_n\beta_n = -2n-1$$

$$\therefore a_n = (\alpha_n - \beta_n)^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n$$

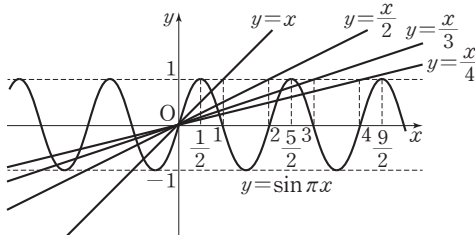
$$= (2n+1)^2 - 4(-2n-1)$$

$$= 4n^2 + 12n + 5$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 12n + 5} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+5)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+5} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

12 답 $\frac{1}{12}$

함수 $y=\sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이고, 곡선 $y=\sin \pi x$ 와 직선 $y=\frac{x}{n}$ 는 각각 원점에 대하여 대칭이고, 원점에서 만난다.



곡선 $y=\sin \pi x$ 는 점 $(\frac{1}{2}, 1)$, 점 $(\frac{5}{2}, 1)$, 점 $(\frac{9}{2}, 1)$, ...을 지난다.

직선 $y=x$ 는 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $x > 0$ 인 부분에서 곡선 $y=\sin \pi x$ 와 한 점에서 만나고, 원점에 대하여 대칭이므로 $x < 0$ 인 부분에서도 한 점에서 만난다.

$$\therefore a_1 = 3$$

직선 $y=\frac{x}{2}$ 는 점 $(2, 1)$ 을 지나므로 $a_2 = 3$

직선 $y=\frac{x}{3}$ 는 점 $(3, 1)$ 을 지나므로 $a_3 = 7$

직선 $y=\frac{x}{4}$ 는 점 $(4, 1)$ 을 지나므로 $a_4 = 7$

$\vdots$

자연수 k 에 대하여

$$a_{2k-1} = 4k-1, \quad a_{2k} = 4k-1 \quad \cdots \cdots \cdots \text{배점 50\%}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{2n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \quad \cdots \cdots \cdots \text{배점 50\%}\end{aligned}$$

13 답 $\frac{3}{5}$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1}{r - 1}(r^n - 1)$$

(i) $0 < r < 3$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2^n + 3^n} = \frac{a_1}{r - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{2^n + 3^n} = \frac{a_1}{r - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 0$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r = 3$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2^n + 3^n} &= \frac{a_1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{2^n + 3^n} = \frac{a_1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \\ &= \frac{a_1}{2} \times 1 = \frac{a_1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a_1}{2} = 4 \text{이므로 } a_1 = 8$$

(iii) $r > 3$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2^n + 3^n} = \frac{a_1}{r - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{2^n + 3^n} = \frac{a_1}{r - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

이때 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $r = 3, a_1 = 8$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a_1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n = \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{3}{5}$$

14 답 ①

$$\begin{aligned}
 r^3 \sum_{n=1}^6 a_n + \sum_{n=7}^{\infty} a_n &= 0 \text{에서 } \sum_{n=7}^{\infty} a_n = -r^3 \sum_{n=1}^6 a_n \\
 \text{즉, } \sum_{n=7}^{\infty} a_n &\text{은 수렴하므로} \\
 -1 < r < 0 \text{ 또는 } 0 < r < 1 &\dots\dots \text{㉠} \\
 a_n = r^{n-1} \text{이고 } a_7 = r^6 \text{이므로} \\
 r^3 \sum_{n=1}^6 a_n + \sum_{n=7}^{\infty} a_n &= r^3 \times \frac{1-r^6}{1-r} + \frac{r^6}{1-r} = \frac{r^3 - r^9 + r^6}{1-r} \\
 \text{즉, } \frac{r^3 - r^9 + r^6}{1-r} &= 0 \text{이므로} \\
 r^3 - r^9 + r^6 &= 0 \\
 r^3(r^6 - r^3 - 1) &= 0 \\
 r^6 - r^3 - 1 &= 0 \quad (\because r \neq 0) \\
 r^3 = s \text{로 놓으면} \\
 s^2 - s - 1 &= 0 \\
 \therefore s &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\
 \text{그런데 ㉠에서 } -1 < s < 0 \text{ 또는 } 0 < s < 1 \text{이므로} \\
 s &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \therefore r^3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} r a_{3n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (r \times r^{3n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{3n} \\
 &= \frac{r^3}{1-r^3} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
 &= \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} \\
 &= \frac{6-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

15 답 $\frac{1}{50}$

(가)에서 $\log a_n$ 과 $\log a_{n+1}$ 의 소수 부분이 서로 같으므로

$$\log a_n - \log a_{n+1} = \log \frac{a_n}{a_{n+1}} \text{은 정수이다.}$$

(나)의 $10 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1000$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$1 < \log \frac{a_n}{a_{n+1}} < 3$$

이때 $\log \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 이 정수이므로

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2$$

즉, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 100$ 이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{100} \dots\dots\dots$ 배점 40%

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{100}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99} a_1$$

즉, $\frac{100}{99} a_1 = 200$ 이므로 $a_1 = 198 \dots\dots\dots$ 배점 30%

수열 $\{a_{n+2}\}$ 는 첫째항이 $198 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2$ 이고 공비가 $\frac{1}{100}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \frac{198 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1}{50} \dots\dots\dots$$
배점 30%

16 답 4

이차식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned}
 (x-2)^{n-2} f(x) &= (x-2)^{n-2} (x^2 + ax + b) \\
 &= (x-2)^{n-2} \{ (x-2)^2 + (a+4)x + b-4 \} \\
 &= (x-2)^n + \{ (a+4)x + b-4 \} (x-2)^{n-2}
 \end{aligned}$$

$(x-2)^{n-2} f(x)$ 를 $(x-2)^n$ 으로 나누었을 때의 몫은 1이고 나머지는

$$R_n(x) = \{ (a+4)x + b-4 \} (x-2)^{n-2}$$

$R_n(3) = 3$ 에서

$$3(a+4) + b-4 = 3 \quad \therefore 3a+b = -5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} R_n\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ 에서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{\infty} R_n\left(\frac{3}{2}\right) &= \left\{ \frac{3}{2}(a+4) + b-4 \right\} \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
 &= \left\{ \frac{3}{2}(a+4) + b-4 \right\} \times \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\
 &= a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

즉, $a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3} = 1$ 이므로

$$3a + 2b + 4 = 3 \quad \therefore 3a + 2b = -1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 4$

따라서 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 이므로

$$f(3) = 9 - 9 + 4 = 4$$

17 답 8

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_m}{a_m}\right)^n$ 은 첫째항과 공비가 $\frac{b_m}{a_m}$ 인 등비급수이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{b_m}{a_m} < 1 \quad \therefore -1 < \frac{-2m+p}{2m-9} < 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(i) $2m-9 < 0$, 즉 $m < \frac{9}{2}$ 일 때,

㉠에서 $2m-9 < -2m+p < -2m+9$

$$2m-9 < -2m+p \text{에서 } 4m < p+9$$

$$\therefore m < \frac{p+9}{4}$$

$$-2m+p < -2m+9 \text{에서 } p < 9$$

$m < \frac{p+9}{4}$ 를 만족시키는 자연수 m 의 개수가 4이려면

$$\frac{p+9}{4} > 4, p+9 > 16 \quad \leftarrow m < \frac{9}{2} \text{이므로 } \frac{p+9}{4} > 4 \text{만 확인한다.}$$

$$\therefore p > 7$$

그런데 $p < 9$ 이므로 $7 < p < 9$

따라서 정수 p 의 값은 8이다.

(ii) $2m-9 > 0$, 즉 $m > \frac{9}{2}$ 일 때,

㉠에서 $-2m+9 < -2m+p < 2m-9$

$$-2m+9 < -2m+p \text{에서 } p > 9$$

$$-2m+p < 2m-9 \text{에서 } 4m > p+9$$

$$\therefore m > \frac{p+9}{4}$$

이를 만족시키는 자연수 m 은 무수히 많으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $p = 8$

18 답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^{n-1}}$ 은 첫째항이 x^2 , 공비가 $\frac{1}{1-x^2}$ 인 등비급수이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$x^2=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{1}{1-x^2} < 1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{1}{1-x^2} < 1$$

(i) $x=0$ 일 때,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^{n-1}} = 0$$

(ii) $-1 < \frac{1}{1-x^2} < 1$ 일 때,

$$1-x^2 < -1 \text{ 또는 } 1-x^2 > 1$$

$$x^2 > 2 \text{ 또는 } x^2 < 0$$

이때 $x^2 < 0$ 인 실수 x 의 값은 존재하지 않으므로 $x^2 > 2$ 에서

$$x < -\sqrt{2} \text{ 또는 } x > \sqrt{2}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{x^2}{1-\frac{1}{1-x^2}} = \frac{x^2(1-x^2)}{1-x^2-1}$$

$$= x^2 - 1$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x < -\sqrt{2} \text{ 또는 } x > \sqrt{2}) \\ 0 & (x = 0) \\ ax^2 + bx + c & (-\sqrt{2} \leq x < 0 \text{ 또는 } 0 < x \leq \sqrt{2}) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x = -\sqrt{2}$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}-} (x^2 - 1)$$

$$2a - \sqrt{2}b + c = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \sqrt{2}$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}+} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} (ax^2 + bx + c)$$

$$1 = 2a + \sqrt{2}b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 $c=0$ 을 대입하면

$$2a - \sqrt{2}b = 1, \quad 2a + \sqrt{2}b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x < -\sqrt{2} \text{ 또는 } x > \sqrt{2}) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{1}{2}x^2 & (-\sqrt{2} \leq x < 0 \text{ 또는 } 0 < x \leq \sqrt{2}) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f(3) = \frac{1}{8} \times (9-1) = 1$$

19 답 ⑤

원 O_1 의 중심을 E_1 이라 하면

$$\overline{A_1E_1} = \overline{E_1B_1} = \overline{E_1D_1} = 2$$

점 C_1 은 선분 A_1B_1 을 3 : 1로 내분하는 점이다

므로

$$\overline{A_1C_1} = 3, \quad \overline{C_1B_1} = 1$$

$$\therefore \overline{E_1C_1} = \overline{E_1B_1} - \overline{C_1B_1} = 2 - 1 = 1$$

$$\angle E_1C_1D_1 = \frac{\pi}{2} \text{이므로 직각삼각형 } E_1C_1D_1 \text{에서}$$

$$\cos(\angle D_1E_1C_1) = \frac{\overline{E_1C_1}}{\overline{E_1D_1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle D_1E_1C_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle A_1E_1D_1 = \frac{2}{3}\pi$$

두 선분 A_1C_1 , C_1D_1 과 호 A_1D_1 로 둘러싸인 도형의 넓이는 삼각형

$E_1C_1D_1$ 의 넓이와 부채꼴 $E_1D_1A_1$ 의 넓이의 합과 같으므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{E_1C_1} \times \overline{E_1D_1} \times \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times \overline{A_1E_1}^2 \times \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{6}$$

원 O_2 의 중심이 점 D_1 이므로 원 O_2 의 반지름의 길이는

$$\overline{C_1D_1} = \overline{E_1C_1} \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

두 원 O_1 , O_2 는 닮음이고 닮음비는 $2 : \sqrt{3}$ 이므로 넓이의 비는 $4 : 3$ 이다.

즉, 두 원 O_n , O_{n+1} 의 넓이의 비는 $4 : 3$ 이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 $4 : 3$ 이다.

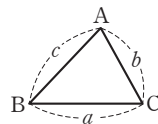
따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{6}$ 이고 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{6}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{6\sqrt{3} + 16\pi}{3}$$

개념 NOTE

삼각형 ABC의 넓이는

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$



20 답 ③

직각삼각형 $A_1B_1D_1$ 에서

$$\overline{B_1D_1} = \sqrt{\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1D_1}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\therefore \overline{D_1E_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$ 은 직각이등변삼각형이고 서로 합동(RHA 합동)이므로

$$S_1 = 2 \times \triangle A_2D_1E_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

두 점 A_2, B_2 에서 선분 D_1C_1 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하고
 $\angle B_1D_1C_1 = \theta$ 라 하면

$$\angle A_2D_1H_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$$

직각삼각형 $A_2D_1H_1$ 에서

$$\overline{D_1H_1} = \overline{A_2D_1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{17}}{2} \sin \theta$$

$$\text{직각삼각형 } B_1D_1C_1 \text{에서 } \sin \theta = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1D_1}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \text{이므로}$$

$$\overline{D_1H_1} = \frac{\sqrt{17}}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } \overline{C_1H_2} = \overline{D_1H_1} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1} - 2\overline{D_1H_1} = 4 - 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ 는 닮음이고 닮음비는 4 : 3이므로 넓이의 비는 16 : 9이다.

즉, 두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n, A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이의 비는 16 : 9이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 16 : 9이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{17}{4}$ 이고 공비가 $\frac{9}{16}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{17}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{68}{7}$$

21 답 ②

점 D_1 은 선분 A_1B_1 의 중점이므로 $\overline{A_1D_1} = \overline{D_1B_1} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

점 G_1 은 선분 A_1D_1 의 중점이므로 $\overline{A_1G_1} = \overline{G_1D_1} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

점 A_2 는 선분 G_1D_1 의 중점이므로 $\overline{G_1A_2} = \overline{A_2D_1} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$$\therefore \overline{A_1A_2} = \overline{A_1G_1} + \overline{G_1A_2} = 2 + 1 = 3$$

이때 $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = 3, \overline{A_1C_2} = \overline{B_1A_2} = \overline{C_1B_2} = 5$ 이고

$$\angle C_2A_1A_2 = \angle A_2B_1B_2 = \angle B_2C_1C_2 = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\triangle A_1A_2C_2 \cong \triangle B_1B_2A_2 \cong \triangle C_1C_2B_2 \text{ (SAS 합동)}$$

따라서 $\overline{A_2C_2} = \overline{B_2A_2} = \overline{C_2B_2}$ 이므로 삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 정삼각형이다.

삼각형 $A_1A_2C_2$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{A_2C_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1C_2}^2 - 2 \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1C_2} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = 19$$

$$\therefore \overline{A_2C_2} = \sqrt{19} \text{ (} \because \overline{A_2C_2} > 0 \text{)}$$

또 $\overline{A_1G_1} = \overline{B_1H_1} = \overline{C_1I_1} = 2, \overline{A_1F_1} = \overline{B_1D_1} = \overline{C_1E_1} = 4$ 이므로

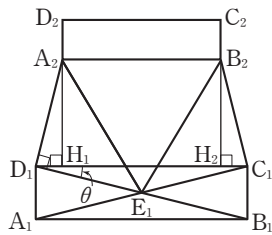
$$S_1 = \triangle A_1B_1C_1 - \triangle A_2B_2C_2 - 3 \times \triangle A_1G_1F_1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{19})^2 - 3 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= 16\sqrt{3} - \frac{19\sqrt{3}}{4} - 6\sqrt{3} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

두 정삼각형 $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ 는 닮음이고 닮음비는 8 : $\sqrt{19}$ 이므로 넓이의 비는 64 : 19이다.

즉, 두 정삼각형 $A_nB_nC_n, A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 의 넓이의 비는 64 : 19이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 64 : 19이다.



따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{21\sqrt{3}}{4}$ 이고 공비가 $\frac{19}{64}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{19}{64}} = \frac{112\sqrt{3}}{15}$$

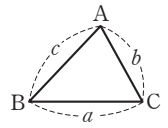
개념 NOTE

삼각형 ABC에 대하여 코사인법칙은 다음과 같다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



22 답 ③

선분 AE는 원 O의 지름이므로 $\angle ABE = \frac{\pi}{2}$

원 O의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{AE} = 4$

$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 이므로 직각삼각형 ABE에서

$$\overline{AB} = \overline{AE} \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

원 O_1 의 중심을 F, 원 O_1 이 선분 AB에 접하는 점을 G, 호 BD에 접하는 점을 H라 하고,
 원 O_1 의 반지름의 길이를 r_1 이라 하면

$$\overline{AF} = 2 - r_1, \angle GAF = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 AGF에서

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}, \frac{1}{2} = \frac{r_1}{2 - r_1}$$

$$2r_1 = 2 - r_1, 3r_1 = 2 \quad \therefore r_1 = \frac{2}{3}$$

두 원 O_1, O_2 는 합동이므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB}^2 \times \frac{2}{3} \pi - 2 \times \pi \times r_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3} \pi - 2 \times \pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \pi$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = 4 - 2 = 2$$

두 원 O, O_3 은 닮음이고 닮음비는 4 : 2, 즉 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

즉, 그림 R_2 에서 원 O_3 의 내부에 새로 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{1}{4} S_1$ 이다.

또 두 원 O, O_1 은 닮음이고 닮음비는 $2 : \frac{2}{3}$, 즉 $1 : \frac{1}{3}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{9}$ 이다.

즉, 그림 R_2 에서 원 O_1 의 내부에 새로 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{1}{9} S_1$ 이므로

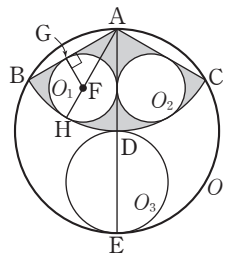
원 O_2 의 내부에 새로 색칠한 도형의 넓이도 $\frac{1}{9} S_1$ 이다.

따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠한 도형의 넓이는

$$\frac{1}{4} S_1 + 2 \times \frac{1}{9} S_1 = \frac{17}{36} S_1$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{4}{9} \pi$ 이고 공비가 $\frac{17}{36}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{4}{9} \pi}{1 - \frac{17}{36}} = \frac{16}{19} \pi$$



01 3 02 ② 03 ② 04 $\frac{5}{24}$ 05 ⑤ 06 $\frac{6}{5}$
07 ③ 08 ⑤ 09 ②

idea

01 답 3

1단계 $a_{6n-5}, a_{6n-1}, a_{6n}$ 구하기

(가)의 $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_{2n} + (-1)^{n+1} a_{3n}\} = 9$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_{2n} + (-1)^{n+1} a_{3n}\} \\ &= (a_2 + a_3) + (a_4 - a_6) + (a_6 + a_9) + (a_8 - a_{12}) + (a_{10} + a_{15}) \\ &\quad + (a_{12} - a_{18}) + \cdots \\ &= (a_2 + a_3 + a_4) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + (a_{14} + a_{15} + a_{16}) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-4} + a_{6n-3} + a_{6n-2}) \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-4} + a_{6n-3} + a_{6n-2}) &= 9 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(가)의 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_{2n} + (-1)^{n+1} a_{3n}\}$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-4} + a_{6n-3} + a_{6n-2}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-4} + a_{6n-3} + a_{6n-2}) &= 0 \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-5} + a_{6n-1} + a_{6n}) &= 0 \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 0보다 크거나 같으므로

$$a_{6n-5}=0, a_{6n-1}=0, a_{6n}=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

2단계 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{6n+3}$ 의 값 구하기

②에서 $a_{6n+1}=0, a_{6n+5}=0, a_{6n+6}=0$ 이므로

(나)의 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n+2} + a_{6n+4} + a_{6n+6}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n+1} + a_{6n+3} + a_{6n+5})$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n+2} + a_{6n+4}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{6n+3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n+2} + a_{6n+4}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{6n+3} = k \quad (k \text{는 실수}) \text{라 하자.} \end{aligned}$$

①에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-4} + a_{6n-3} + a_{6n-2}) &= a_2 + a_3 + a_4 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n+2} + a_{6n+4}) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{6n+3} \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + 2k \end{aligned}$$

이때 $\sum_{k=1}^4 a_k = 3$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$

②에서 $a_1 = 0$ 이므로

$$a_2 + a_3 + a_4 = 3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n-4} + a_{6n-3} + a_{6n-2}) = a_2 + a_3 + a_4 + 2k = 3 + 2k$$

즉, $3 + 2k = 9$ 이므로

$$2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_{6n+2} + a_{6n+4}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{6n+3} = 3$$

3단계 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+3}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+3} &= a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + \cdots \\ &= a_9 + a_{15} + a_{21} + \cdots \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{6n+3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

02 답 ②

1단계 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차 사이의 관계식 구하기

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 등차수열이므로

$a_n = pn + q, b_n = rn + s$ (p, q, r, s 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n+1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{pn+q}{n} + \frac{rn+s}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(p+r + \frac{q}{n} + \frac{s-r}{n+1} \right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(p+r + \frac{q}{n} + \frac{s-r}{n+1} \right)$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(p+r + \frac{q}{n} + \frac{s-r}{n+1} \right) = 0 \quad \therefore p+r=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

2단계 a_n, b_n 구하기

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n+1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} + \frac{s-r}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{q}{n+1} + \frac{q+s-r}{n+1} \right) \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

이때 ③에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{q}{n+1} \right) &= q \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= q \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= q \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = q \times 1 = q \end{aligned}$$

$q+s-r \neq 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q+s-r}{n+1} = (q+s-r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 은 발산하므로 ③은 발산한다.

따라서 $q+s-r=0$ 이므로 ③에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n+1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{q}{n+1} \right) = q \\ \therefore q &= 2 \end{aligned}$$

이를 $q+s-r=0$ 에 대입하면

$$2+s-r=0 \quad \therefore r-s=2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$b_1 = -4 \text{에서 } r+s=-4 \quad \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤를 연립하여 풀면 $r=-1, s=-3$

$r=-1$ 을 ②에 대입하면 $p-1=0 \quad \therefore p=1$

$$\therefore a_n = n+2, b_n = -n-3$$

3단계 $a_5 + b_3$ 의 값 구하기

$$\therefore a_5 + b_3 = 7 + (-6) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{참고} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 은 발산한다.

03 답 ②

1단계 a_n 구하기

$x^2 - 1 < a < x^2 + 2x$ 에서

$$x^2 - 1 < a < (x+1)^2 - 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) $x=1$ 일 때,

①에서 $0 < a < 3$

자연수 a 의 값이 1, 2일 때, 집합 A 는 $x=1$ 을 원소로 가지므로 1, 2는 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(ii) $x=2$ 일 때,

㉠에서 $3 < a < 8$

자연수 a 의 값이 4, 5, 6, 7일 때, 집합 A 는 $x=2$ 를 원소로 가지므로 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(i), (ii)에서 $a=3$ 이면 ㉠을 만족시키는 자연수 x 의 값이 존재하지 않으므로

$a_1=3$

(iii) $x=3$ 일 때,

㉠에서 $8 < a < 15$

자연수 a 의 값이 9, 10, ..., 14일 때, 집합 A 는 $x=3$ 을 원소로 가지므로 9, 10, ..., 14는 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(ii), (iii)에서 $a=8$ 이면 ㉠을 만족시키는 자연수 x 의 값이 존재하지 않으므로

$a_2=8$

(iv) $x=4$ 일 때,

㉠에서 $15 < a < 24$

자연수 a 의 값이 16, 17, ..., 23일 때, 집합 A 는 $x=4$ 를 원소로 가지므로 16, 17, ..., 23은 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(iii), (iv)에서 $a=15$ 이면 ㉠을 만족시키는 자연수 x 의 값이 존재하지 않으므로

$a_3=15$

같은 방법으로 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$a_n=n^2+2n$

2단계 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

04 답 5/24

1단계 $g(x)$ 구하기

함수 $f(x) = \frac{-2nx+2n^2+1}{x-n}$ 의 역함수는

$$g(x) = \frac{nx+2n^2+1}{x+2n}$$

2단계 a_n, b_n 구하기

$$(f \circ g)(x) = x (x \neq -2n),$$

$$(g \circ f)(x) = x (x \neq n) \text{이므로 함수}$$

$y=h(x)$ 의 그래프와 직선

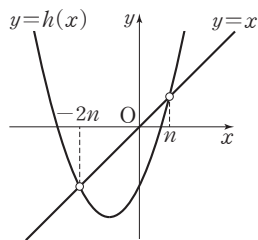
$y=x(x \neq -2n)$ 가 점 A에서 만나고, 함수

$y=h(x)$ 의 그래프와 직선

$y=x(x \neq n)$ 가 점 B에서 만날 때, 두 점

A, B가 서로 다른 점이라면 함수

$y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 $x=-2n, x=n$ 인 두 점에서 만나야 한다.



함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$h(x)-x=(x+2n)(x-n)=x^2+nx-2n^2$$

$$\therefore h(x)=x^2+(n+1)x-2n^2$$

이때 $h(x)=x^2+a_nx+b_n$ 이므로

$$a_n=n+1, b_n=-2n^2$$

3단계 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8a_n-b_n-2}$ 의 값 구하기

$$8a_n-b_n-2=8(n+1)-(-2n^2)-2=2n^2+8n+6 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8a_n-b_n-2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+8n+6} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+3)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

개념 NOTE

유리함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)의 역함수는

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

05 답 ⑤

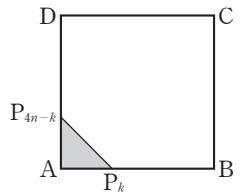
1단계 S_n 구하기

(i) $1 \leq k \leq n$ 일 때, $\rightarrow$ 점 P_k 가 변 AB 위의 점이다.

직각삼각형 AP_kP_{4n-k} 에서

$$\overline{AP_k} = \frac{k}{n}, \overline{AP_{4n-k}} = \frac{k}{n} \text{이므로}$$

$$a_k = \frac{1}{2} \times \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{k^2}{2n^2}$$



(ii) $n+1 \leq k \leq 2n-1$ 일 때, $\rightarrow$ 점 P_k 가 변 BC 위의 점이다.

$t=k-n$ 이라 하면

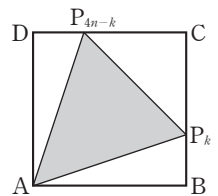
$$1 \leq t \leq n-1$$

두 직각삼각형 ABP_k, ADP_{4n-k} 는 합동이

고, 삼각형 P_kCP_{4n-k} 는 직각이등변삼각형이다.

$$\overline{BP_k} = \frac{t}{n}, \overline{CP_k} = \overline{CP_{4n-k}} = 1 - \frac{t}{n} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_k &= 1 \times 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{t}{n} \right) - \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{t}{n} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{t}{n} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2t}{n} + \frac{t^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2n^2} \end{aligned}$$



(iii) $2n+1 \leq k \leq 3n-1$ 일 때,

(ii)와 같은 삼각형이 만들어지므로

$$\sum_{k=2n+1}^{3n-1} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k$$

(iv) $3n \leq k \leq 4n-1$ 일 때,

(i)과 같은 삼각형이 만들어지므로

$$\sum_{k=3n}^{4n-1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k$$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{4n-1} a_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^n a_k + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^2} + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2n^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} + (n-1) - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{t^2}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} + 1 + (n-1) - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{t^2}{n^2} \\ &= n \end{aligned}$$

2단계 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{S_{4n-3} S_{4n+1}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{S_{4n-3} S_{4n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n-3)(4n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

06 답 $\frac{6}{5}$

1단계 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 항 구하기

원점 O에 대하여 동경 OA_n 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_n 이라 하면

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\pi}{2}$$

점 A_n 의 x 좌표는 $a_n = \cos \theta_n$ 이므로

$$a_1 = \cos \theta_1$$

$$a_2 = \cos \theta_2 = \cos \left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \theta_1$$

$$a_3 = \cos \theta_3 = \cos (\theta_1 + \pi) = -\cos \theta_1$$

$$a_4 = \cos \theta_4 = \cos \left(\theta_1 + \frac{3}{2}\pi \right) = \sin \theta_1$$

또 점 A_n 의 y 좌표는 $b_n = \sin \theta_n$ 이므로

$$b_1 = \sin \theta_1$$

$$b_2 = \sin \theta_2 = \sin \left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta_1$$

$$b_3 = \sin \theta_3 = \sin (\theta_1 + \pi) = -\sin \theta_1$$

$$b_4 = \sin \theta_4 = \sin \left(\theta_1 + \frac{3}{2}\pi \right) = -\cos \theta_1$$

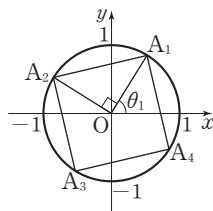
$A_{n+4} = A_n$ 이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 에서 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$a_{4k+1} + b_{4k+1} = \cos \theta_1 + \sin \theta_1$$

$$a_{4k+2} + b_{4k+2} = -\sin \theta_1 + \cos \theta_1$$

$$a_{4k+3} + b_{4k+3} = -\cos \theta_1 - \sin \theta_1 = -(\cos \theta_1 + \sin \theta_1)$$

$$a_{4k+4} + b_{4k+4} = \sin \theta_1 - \cos \theta_1 = -(-\sin \theta_1 + \cos \theta_1)$$



2단계 a_1 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{2^n} &= \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2^2} + \frac{a_3 + b_3}{2^3} + \frac{a_4 + b_4}{2^4} + \cdots \\ &= (\cos \theta_1 + \sin \theta_1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \cdots \right) \\ &\quad + (-\sin \theta_1 + \cos \theta_1) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \cdots \right) \\ &= (\cos \theta_1 + \sin \theta_1) \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &\quad + (-\sin \theta_1 + \cos \theta_1) \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &= (\cos \theta_1 + \sin \theta_1) \times \frac{2}{5} + (-\sin \theta_1 + \cos \theta_1) \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{5} \cos \theta_1 + \frac{1}{5} \sin \theta_1 \end{aligned}$$

즉, $\frac{3}{5} \cos \theta_1 + \frac{1}{5} \sin \theta_1 = \frac{1}{5}$ 이므로 $3 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 = 1$

$$\sin \theta_1 = 1 - 3 \cos \theta_1$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta_1 = 1 - 6 \cos \theta_1 + 9 \cos^2 \theta_1$$

$$1 - \cos^2 \theta_1 = 1 - 6 \cos \theta_1 + 9 \cos^2 \theta_1$$

$$10 \cos^2 \theta_1 - 6 \cos \theta_1 = 0, \quad 2 \cos \theta_1 (5 \cos \theta_1 - 3) = 0$$

$$\therefore \cos \theta_1 = 0 \text{ 또는 } \cos \theta_1 = \frac{3}{5}$$

이때 $a_1 \neq 0$ 에서 $\cos \theta_1 \neq 0$ 이므로

$$\cos \theta_1 = \frac{3}{5} \quad \therefore a_1 = \frac{3}{5}$$

3단계 $a_1 + b_2$ 의 값 구하기

$$b_2 = \cos \theta_1 = a_1 \text{이므로}$$

$$a_1 + b_2 = 2a_1 = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

07 답 ③

1단계 S_1 의 값 구하기

$$1+i = a_1 + b_1 i \text{에서}$$

$$a_1 = 1, b_1 = 1 \quad \therefore P_1(1, 1)$$

$$(1+i)^2 = 2i \text{이므로}$$

$$a_2 = 0, b_2 = 2 \quad \therefore P_2(0, 2)$$

$$(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i \text{이므로}$$

$$a_3 = -2, b_3 = 2 \quad \therefore P_3(-2, 2)$$

따라서 삼각형 $P_1P_2P_3$ 의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

2단계 S_n 구하기

$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, $(1+i)^8 = (-4)^2 = 2^4$ 이므로 음이 아닌 정수 k 에 대하여 $(1+i)^{8k} = 2^{4k}$

$$(1+i)^{8k+1} = 2^{4k}(1+i) = 2^{4k} + 2^{4k}i \text{이므로}$$

$$a_{8k+1} = 2^{4k}, b_{8k+1} = 2^{4k} \quad \therefore P_{8k+1}(2^{4k}, 2^{4k})$$

$$(1+i)^{8k+2} = 2^{4k} \times 2i = 2^{4k+1}i \text{이므로}$$

$$a_{8k+2} = 0, b_{8k+2} = 2^{4k+1} \quad \therefore P_{8k+2}(0, 2^{4k+1})$$

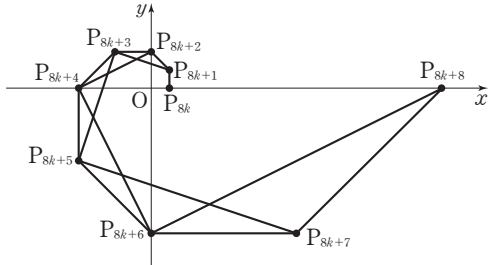
$$(1+i)^{8k+3} = 2^{4k+1}i(1+i) = -2^{4k+1} + 2^{4k+1}i \text{이므로}$$

$$a_{8k+3} = -2^{4k+1}, b_{8k+3} = 2^{4k+1} \quad \therefore P_{8k+3}(-2^{4k+1}, 2^{4k+1})$$

$$(1+i)^{8k+4} = 2^{4k} \times (-4) = -2^{4k+2} \text{이므로}$$

$$a_{8k+4} = -2^{4k+2}, b_{8k+4} = 0 \quad \therefore P_{8k+4}(-2^{4k+2}, 0)$$

$$\begin{aligned}
 (1+i)^{8k+5} &= -2^{4k+2}(1+i) = -2^{4k+2} - 2^{4k+2}i \text{ 이므로} \\
 a_{8k+5} &= -2^{4k+2}, b_{8k+5} = -2^{4k+2} \quad \therefore P_{8k+5}(-2^{4k+2}, -2^{4k+2}) \\
 (1+i)^{8k+6} &= -2^{4k+2} \times 2i = -2^{4k+3}i \text{ 이므로} \\
 a_{8k+6} &= 0, b_{8k+6} = -2^{4k+3} \quad \therefore P_{8k+6}(0, -2^{4k+3}) \\
 (1+i)^{8k+7} &= -2^{4k+3}i(1+i) = 2^{4k+3} - 2^{4k+3}i \text{ 이므로} \\
 a_{8k+7} &= 2^{4k+3}, b_{8k+7} = -2^{4k+3} \quad \therefore P_{8k+7}(2^{4k+3}, -2^{4k+3}) \\
 (1+i)^{8k+8} &= (2^4)^{k+1} = 2^{4k+4} \text{ 이므로} \\
 a_{8k+8} &= 2^{4k+4}, b_{8k+8} = 0 \quad \therefore P_{8k+8}(2^{4k+4}, 0)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \overline{P_{8k+2}P_{8k+3}} &= 2^{4k+1}, \overline{OP_{8k+2}} - \overline{P_{8k+2}P_{8k+1}} = 2^{4k+1} - 2^{4k} = 2^{4k} \text{ 이므로 삼각형} \\
 &P_{8k+1}P_{8k+2}P_{8k+3} \text{의 넓이 } S_{8k+1} \text{은} \\
 S_{8k+1} &= \frac{1}{2} \times 2^{4k+1} \times 2^{4k} = 2^{8k} \\
 \overline{P_{8k+2}P_{8k+3}} &= 2^{4k+1}, \overline{OP_{8k+2}} = 2^{4k+1} \text{ 이므로 삼각형 } P_{8k+2}P_{8k+3}P_{8k+4} \text{의 넓이} \\
 &S_{8k+2} \text{는} \\
 S_{8k+2} &= \frac{1}{2} \times 2^{4k+1} \times 2^{4k+1} = 2^{8k+1} \\
 \overline{P_{8k+4}P_{8k+5}} &= 2^{4k+2}, \overline{OP_{8k+4}} - \overline{P_{8k+4}P_{8k+3}} = 2^{4k+2} - 2^{4k+1} = 2^{4k+1} \text{ 이므로 삼} \\
 &\text{각형 } P_{8k+3}P_{8k+4}P_{8k+5} \text{의 넓이 } S_{8k+3} \text{은} \\
 S_{8k+3} &= \frac{1}{2} \times 2^{4k+2} \times 2^{4k+1} = 2^{8k+2} \\
 &\vdots \\
 &\text{따라서 수열 } \{S_n\} \text{은 첫째항이 } S_1=1 \text{이고, 공비가 2인 등비수열이므로} \\
 S_n &= 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

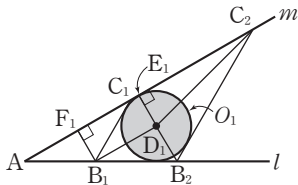
3단계 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

08 답 ⑤

1단계 S_1 의 값 구하기

원 O_1 의 중심을 D_1 이라 하고, 점 D_1 에서 반직선 m 에 내린 수선의 발을 E_1 , 점 B_1 에서 반직선 m 에 내린 수선의 발을 F_1 이라 하자.



$$\begin{aligned}
 \angle A &= \frac{\pi}{6}, \angle AB_1C_1 = \frac{2}{3}\pi \text{에서} \\
 \angle AC_1B_1 &= \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots ㉠ \\
 \angle C_1B_1B_2 &= \frac{\pi}{3} \text{이고 } \angle C_1B_1D_1 = \angle B_2B_1D_1 \text{이므로} \\
 &\quad \hookrightarrow \text{두 직선 } B_1C_1, B_1B_2 \text{는 원 } O_1 \text{의 접선이고 점 } D_1 \text{은 원의 중심이다.} \\
 \angle C_1B_1D_1 &= \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots ㉡ \\
 ㉠, ㉡ \text{에서 반직선 } m \text{과 직선 } B_1D_1 \text{은 평행하므로 } \overline{B_1F_1} &= \overline{D_1E_1}
 \end{aligned}$$

직각삼각형 $B_1F_1C_1$ 에서

$$\overline{B_1F_1} = \overline{B_1C_1} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

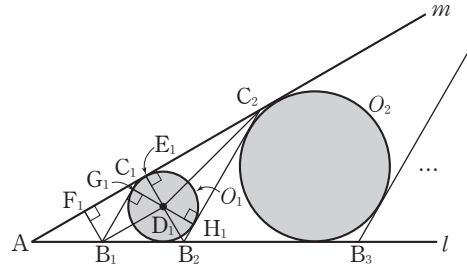
즉, $\overline{D_1E_1} = 1$ 이므로 원 O_1 의 반지름의 길이가 1이다.

$$\therefore S_1 = \pi \times 1^2 = \pi$$

2단계 S_n 구하기

원 O_1 이 직선 B_1C_1 과 접하는 점을 G_1 , 직선 B_2C_2 와 접하는 점을 H_1 이라 하면

$$\overline{D_1G_1} = \overline{D_1H_1} = 1$$



직각삼각형 $D_1G_1B_1$ 에서

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{D_1G_1}}{\overline{B_1G_1}}, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\overline{B_1G_1}} \quad \therefore \overline{B_1G_1} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{C_1G_1} = \overline{B_1C_1} - \overline{B_1G_1} = 2 - \sqrt{3}$$

두 직선 B_1C_1, B_2C_2 가 평행하므로 $\angle AB_2C_2 = \frac{2}{3}\pi$

$$\angle D_1B_2H_1 = \angle D_1B_2B_1 \text{이므로 } \angle D_1B_2H_1 = \frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 $D_1B_2H_1$ 에서

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{D_1H_1}}{\overline{B_2H_1}}, \sqrt{3} = \frac{1}{\overline{B_2H_1}} \quad \therefore \overline{B_2H_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 AF_1B_1 에서

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{B_1F_1}}{\overline{AF_1}}, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\overline{AF_1}} \quad \therefore \overline{AF_1} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AC_1} = 2\overline{AF_1} = 2\sqrt{3}$$

또 $\overline{C_1E_1} = \overline{C_1G_1} = 2 - \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{E_1C_2} = \overline{H_1C_2} = k$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \overline{AC_2} &= \overline{AC_1} + \overline{C_1E_1} + \overline{E_1C_2} \\
 &= 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) + k = 2 + \sqrt{3} + k
 \end{aligned}$$

$$\overline{B_2C_2} = \overline{B_2H_1} + \overline{H_1C_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} + k$$

삼각형 AB_2C_2 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC_2}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{2 + \sqrt{3} + k}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + k}{\frac{1}{2}}$$

$$2 + \sqrt{3} + k = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + k \right), \quad 2 + \sqrt{3} + k = 1 + \sqrt{3}k$$

$$(\sqrt{3} - 1)k = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{B_2C_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} + k = \frac{\sqrt{3}}{3} + (2 + \sqrt{3}) = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}$$

따라서 두 삼각형 AB_1C_1, AB_2C_2 는 닮음이고 닮음비는 $2 : \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}$, 즉

$1 : \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)^2$, 즉 $1 : \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}$ 이다.

즉, 두 삼각형 AB_nC_n , $AB_{n+1}C_{n+1}$ 의 넓이의 비는 $1 : \frac{7+4\sqrt{3}}{3}$ 이므로

두 원 O_n , O_{n+1} 의 넓이의 비도 $1 : \frac{7+4\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 π , 공비가 $\frac{7+4\sqrt{3}}{3}$ 인 등비수열이므로

$$S_n = \pi \left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1}$$

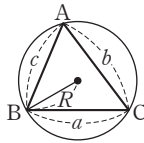
3단계 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{S_n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{S_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7+4\sqrt{3}} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{7+4\sqrt{3}}} = \frac{7+4\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}} \\ &= \frac{(7+4\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{5+3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

개념 NOTE

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙은 다음과 같다.

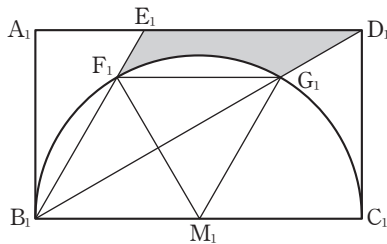
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



09 답 ②

1단계 S_1 의 값 구하기

선분 B_1C_1 의 중점을 M_1 이라 하자.



직각삼각형 $A_1B_1D_1$ 에서

$$\tan(\angle A_1B_1D_1) = \frac{A_1D_1}{A_1B_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \angle A_1B_1D_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle B_1D_1A_1 = \angle D_1B_1C_1 = \frac{\pi}{6}$$

점 E_1 은 선분 A_1D_1 을 $1:2$ 로 내분하는 점이므로

$$\overline{A_1E_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \overline{E_1D_1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $A_1B_1E_1$ 에서

$$\tan(\angle A_1B_1E_1) = \frac{\overline{A_1E_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \angle A_1B_1E_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle F_1B_1G_1 = \frac{\pi}{6}$$

즉, 호 F_1G_1 에 대한 원주각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 중심각의 크기는

$$\angle F_1M_1G_1 = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

따라서 삼각형 $F_1M_1G_1$ 은 정삼각형이다.

또 $\angle F_1B_1M_1 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 $B_1M_1F_1$ 도 정삼각형이다.

$$\therefore \angle G_1F_1M_1 = \angle B_1M_1F_1$$

따라서 두 직선 F_1G_1 , B_1C_1 은 평행하다.

두 삼각형 $F_1B_1G_1$, $F_1M_1G_1$ 의 넓이가 같으므로 호 F_1G_1 과 두 선분

B_1F_1 , B_1G_1 로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$ 의 넓이와 같다.

따라서 그림 R_1 에 색칠된 부분의 넓이는 삼각형 $E_1B_1D_1$ 의 넓이에서 부

채꼴 $F_1M_1G_1$ 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \times \overline{E_1D_1} \times \overline{A_1B_1} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \overline{B_1C_1} \right)^2 \times \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 - \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{3}-3\pi}{6} \end{aligned}$$

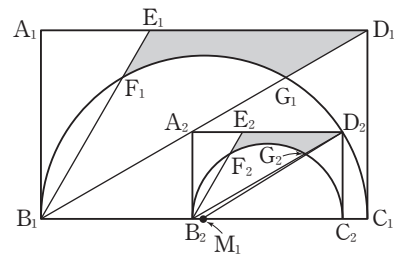
2단계 넓이의 비 구하기

$\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : \sqrt{3}$ 이므로 두 직각삼각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 는 닮음이다.

또 두 직각삼각형 $A_2B_1B_2$, $D_2B_2C_2$ 는 합동이므로 $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2C_2}$

이때 $\overline{B_1C_2} < \overline{B_1C_1}$ 이므로 $\overline{B_1B_2} < \overline{B_1M_1}$

따라서 그림과 같이 점 M_1 은 점 B_2 의 오른쪽에 있다.



$\overline{A_2B_2} = x$ ($x > 0$)라 하면 $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{B_2C_2} = \sqrt{3}x$$

$$\overline{B_1B_2} = \overline{B_2C_2} \text{이므로 } \overline{B_1C_2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{M_1C_2} = \overline{B_1C_2} - \overline{B_1M_1} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

직각삼각형 $D_2M_1C_2$ 에서

$$\overline{D_2M_1}^2 = \overline{M_1C_2}^2 + \overline{C_2D_2}^2$$

$$(\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 + x^2, 3 = 12x^2 - 12x + 3 + x^2$$

$$13x^2 - 12x = 0, x(13x - 12) = 0$$

$$\therefore x = \frac{12}{13} \quad (\because x > 0) \quad \therefore \overline{A_2B_2} = \frac{12}{13}$$

두 직각삼각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 의 닮음비는 $2 : \frac{12}{13}$, 즉 $1 : \frac{6}{13}$ 이므로

넓이의 비는 $1 : \frac{36}{169}$ 이다.

즉, 두 직각삼각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이의 비는

$1 : \frac{36}{169}$ 이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한

부분의 넓이의 비도 $1 : \frac{36}{169}$ 이다.

3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값 구하기

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{8\sqrt{3}-3\pi}{6}$ 이고 공비가 $\frac{36}{169}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{8\sqrt{3}-3\pi}{6}}{1 - \frac{36}{169}} = \frac{169}{798} (8\sqrt{3}-3\pi)$$

01 ①	02 ②	03 ⑤	04 -1	05 ⑤	06 ③
07 ③	08 ④	09 179	10 ②	11 ②	

01 답 ①

이차방정식 $a_{n+2}x^2 + 4a_{n+1}x + 4a_n = 0$ 의 한 근이 -2 이므로

$$4a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad \therefore 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

이차방정식 $a_{n+2}x^2 + 4a_{n+1}x + 4a_n = 0$ 의 두 근이 -2 , b_n 이므로 근과 계

$$\text{수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 } -2b_n = \frac{4a_n}{a_{n+2}}$$

$$\therefore b_n = -\frac{2a_n}{a_{n+2}} = -\frac{2a+2(n-1)d}{a+(n+1)d} = -\frac{2dn+2a-2d}{dn+a+d}$$

(i) $d=0$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2a}{a} \right) = -2$$

(ii) $d \neq 0$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2dn+2a-2d}{dn+a+d} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d+\frac{2a-2d}{n}}{d+\frac{a+d}{n}} = -2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$

02 답 ②

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!}$ 라 하면 $n \geq 2$ 일 때,

$$\frac{a_n}{n!} = S_n - S_{n-1} = \frac{b}{(n+3)!} - \frac{b}{(n+2)!}$$

$$= \frac{b}{(n+3)!} - \frac{b(n+3)}{(n+3)!} = \frac{-b(n+2)}{(n+3)!}$$

$$\therefore a_n = \frac{-b(n+2)}{(n+3)!} \times n! = \frac{-b(n+2)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-b}{n^2+4n+3} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-bn^2}{n^2+4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-b}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = -b$$

즉, $-b = -24$ 이므로 $b = 24$

따라서 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} = \frac{24}{(n+3)!}$ 이므로 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{1!} = \frac{24}{4!} \quad \therefore a_1 = 1$$

$$\therefore a_1 + b = 1 + 24 = 25$$

03 답 ⑤

ㄱ. $a_n = 2 \times (-1)^n + 3$ 에서

$$a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 1, a_4 = 5, \dots \quad \text{..... ㉠}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄴ. $b_n = |p \times (-1)^n + q|$ 에서

$$b_1 = |-p+q|, b_2 = |p+q|,$$

$$b_3 = |-p+q|, b_4 = |p+q|, \dots \quad \text{..... ㉡}$$

수열 $\{b_n\}$ 이 수렴하면 $|-p+q| = |p+q|$

$$-p+q = p+q \text{ 또는 } -p+q = -p-q \quad \therefore p=0 \text{ 또는 } q=0$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴하면 $pq=0$ 이다.

ㄷ. ㉠, ㉡에서

$$a_1+b_1=1+|-p+q|, a_2+b_2=5+|p+q|,$$

$$a_3+b_3=1+|-p+q|, a_4+b_4=5+|p+q|, \dots$$

수열 $\{a_n+b_n\}$ 이 수렴하면

$$1+|-p+q|=5+|p+q| \quad \text{..... ㉢}$$

또 ㉠, ㉡에서

$$a_1b_1 = |-p+q|, a_2b_2 = 5|p+q|,$$

$$a_3b_3 = |-p+q|, a_4b_4 = 5|p+q|, \dots$$

수열 $\{a_nb_n\}$ 이 수렴하면

$$|-p+q|=5|p+q|$$

$$-p+q=5p+5q \text{ 또는 } -p+q=-5p-5q$$

$$\therefore q = -\frac{3}{2}p \text{ 또는 } q = -\frac{2}{3}p$$

(i) $q = -\frac{3}{2}p$ 일 때,

이를 ㉢에 대입하면

$$1+|-p-\frac{3}{2}p|=5+|p-\frac{3}{2}p|$$

$$1+|-\frac{5}{2}p|=5+|-\frac{1}{2}p|$$

$$p < 0 \text{이면 } 1-\frac{5}{2}p=5-\frac{1}{2}p, 2p=-4 \quad \therefore p=-2$$

$$q = -\frac{3}{2} \times (-2) = 3 \text{ 이므로 } pq = -6$$

$$p \geq 0 \text{ 이면 } 1+\frac{5}{2}p=5+\frac{1}{2}p, 2p=4 \quad \therefore p=2$$

$$q = -\frac{3}{2} \times 2 = -3 \text{ 이므로 } pq = -6$$

(ii) $q = -\frac{2}{3}p$ 일 때,

이를 ㉢에 대입하면

$$1+|-p-\frac{2}{3}p|=5+|p-\frac{2}{3}p|$$

$$1+|-\frac{5}{3}p|=5+|\frac{1}{3}p|$$

$$p < 0 \text{ 이면 } 1-\frac{5}{3}p=5-\frac{1}{3}p, \frac{4}{3}p=-4 \quad \therefore p=-3$$

$$q = -\frac{2}{3} \times (-3) = 2 \text{ 이므로 } pq = -6$$

$$p \geq 0 \text{ 이면 } 1+\frac{5}{3}p=5+\frac{1}{3}p, \frac{4}{3}p=4 \quad \therefore p=3$$

$$q = -\frac{2}{3} \times 3 = -2 \text{ 이므로 } pq = -6$$

(i), (ii)에서 $pq = -6$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 -1

$$f(x) = x(x+n^2)(x-2n) = x^3 + (n^2-2n)x^2 - 2n^3x \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(n^2-2n)x - 2n^3$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

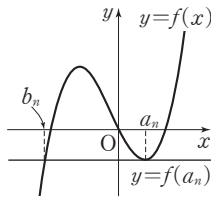
$$x = \frac{-(n^2-2n) \pm \sqrt{(n^2-2n)^2 + 6n^3}}{3} = \frac{-n^2+2n \pm \sqrt{n^4+2n^3+4n^2}}{3}$$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$x = \frac{-n^2+2n+\sqrt{n^4+2n^3+4n^2}}{3} \text{ 일 때 극소이다.}$$

$$\therefore a_n = \frac{-n^2+2n+\sqrt{n^4+2n^3+4n^2}}{3} \quad \text{..... ㉠}$$

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(a_n)$ 이 $x=a_n$ 인 점에서 접하고 $x=b_n$ 인 점에서 만나므로



$$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)-f(a_n)=-a_n^2b_n$$

$$f(0)=0\text{이므로}$$

$$f(a_n)=a_n^2b_n$$

$$\text{이때 } f(x)=x^3+(n^2-2n)x^2-2n^3x\text{이므로}$$

$$a_n^3+(n^2-2n)a_n^2-2n^3a_n=a_n^2b_n$$

$$\therefore \frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{a_n^2+(n^2-2n)a_n-2n^3}{n^3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $\textcircled{L}$ 에서

$$\frac{a_n}{n}=\frac{-n^2+2n+\sqrt{n^4+2n^3+4n^2}}{3n}=\frac{\sqrt{n^2+2n+4}-n+2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+4}-n+2}{3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n+4}-n+2)(\sqrt{n^2+2n+4}+n-2)}{3(\sqrt{n^2+2n+4}+n-2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+4-(n-2)^2}{3(\sqrt{n^2+2n+4}+n-2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n+4}+n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}+1-\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{1+1}=1 \end{aligned}$$

따라서 $\textcircled{L}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_nb_n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2+(n^2-2n)a_n-2n^3}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \times \left(\frac{a_n}{n} \right)^2 + \left(1 - \frac{2}{n} \right) \times \frac{a_n}{n} - 2 \right\} \\ &= 0+1 \times 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

05 답 ⑤

(i) $\left| \frac{x}{k} \right| > 1$, 즉 $x < -k$ 또는 $x > k$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x} \right)^{2n} = 0\text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{k} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x}{k} \right)^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{k}{x} \right)^{2n}}{1 + \left(\frac{k}{x} \right)^{2n}} = 1$$

(ii) $\left| \frac{x}{k} \right| = 1$, 즉 $x = -k$ 또는 $x = k$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{k} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x}{k} \right)^{2n} + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(iii) $\left| \frac{x}{k} \right| < 1$, 즉 $-k < x < k$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{k} \right)^{2n} = 0\text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{k} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x}{k} \right)^{2n} + 1} = -1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < -k \text{ 또는 } x > k) \\ 0 & (x = -k \text{ 또는 } x = k) \\ -1 & (-k < x < k) \end{cases}$$

함수 $g(x) = \begin{cases} (f \circ f)(7-x) & (x=k) \\ x^2-2kx+2k^2-1 & (x \neq k) \end{cases}$ 이 $x=k$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$$

$$\lim_{x \rightarrow k} (x^2-2kx+2k^2-1) = (f \circ f)(7-k)$$

$$k^2-2k^2+2k^2-1 = f(f(7-k))$$

$$\therefore f(f(7-k)) = k^2-1 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

이때 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{-1, 0, 1\}$ 이므로

$$k^2-1 = -1 \text{ 또는 } k^2-1 = 0 \text{ 또는 } k^2-1 = 1$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=\sqrt{2} \quad (\because k>0)$$

(i) $k=1$ 일 때,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 0 & (x = -1 \text{ 또는 } x = 1) \\ -1 & (-1 < x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(f(7-k)) = f(f(6)) = f(1) = 0$$

이는 $\textcircled{\ominus}$ 을 만족시킨다.

(ii) $k=\sqrt{2}$ 일 때,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < -\sqrt{2} \text{ 또는 } x > \sqrt{2}) \\ 0 & (x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}) \\ -1 & (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(f(7-k)) = f(f(7-\sqrt{2})) = f(1) = -1$$

그런데 $k^2-1 = (\sqrt{2})^2-1=1$ 이므로 $\textcircled{\ominus}$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=1$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 1 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 0 & (x = -1 \text{ 또는 } x = 1) \\ -1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (f \circ f)(7-x) & (x=1) \\ x^2-2x+1 & (x \neq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right) + (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) &= g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= g(-1) + f\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 4 + (-1) = 3 \end{aligned}$$

06 답 ③

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 점 $P_n(n, n^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $2n$ 이다.

이 접선에 수직이고 점 $P_n(n, n^2)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-n^2 = -\frac{1}{2n}(x-n) \quad \therefore y = -\frac{1}{2n}x + n^2 + \frac{1}{2}$$

이 직선과 곡선 $y=x^2$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 = -\frac{1}{2n}x + n^2 + \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{2n}x - n\left(n + \frac{1}{2n}\right) = 0$$

$$(x-n)\left(x+n+\frac{1}{2n}\right) = 0$$

$$\therefore x=n \text{ 또는 } x=-n-\frac{1}{2n} \rightarrow x=n \text{인 점은 } P_n \text{이다.}$$

$$\therefore Q_n\left(-n-\frac{1}{2n}, n^2+\frac{1}{4n^2}+1\right)$$

선분 P_nQ_n 의 수직이등분선은 원 C_n 의 중심을 지나고, y 축이 원 C_n 의 넓이를 이등분하므로 원 C_n 의 중심 C_n 은 y 축 위에 있다.
즉, 선분 P_nQ_n 의 수직이등분선이 y 축과 만나는 점이 C_n 이다.

선분 P_nQ_n 의 중점의 좌표는

$$\left(-\frac{1}{4n}, n^2 + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2}\right)$$

선분 P_nQ_n 의 수직이등분선의 기울기는 $2n$

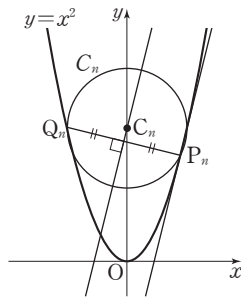
이므로 수직이등분선의 방정식은

$$y - \left(n^2 + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2}\right) = 2n\left(x + \frac{1}{4n}\right)$$

$$\therefore y = 2nx + n^2 + \frac{1}{8n^2} + 1 \quad \therefore C_n\left(0, n^2 + \frac{1}{8n^2} + 1\right)$$

따라서 $\overline{OC_n} = n^2 + \frac{1}{8n^2} + 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OC_n}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{8n^4} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$



07 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$$a_n = a_1 + (n-1) \times 2 = 2n + a_1 - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k + a_1 - 2) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (a_1 - 2)n \\ &= n^2 + (a_1 - 1)n \end{aligned}$$

(가)의 $b_n \times \sum_{k=1}^n a_k = 1$ 에서 $n=1$ 이면 $b_1 a_1 = 1$

이때 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < 1$ 이고 수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$b_1 \neq 1 \quad \therefore a_1 \neq 1$$

이때 a_1 이 자연수이므로 a_1 은 2 이상의 자연수이다.

따라서 $a_1 - 1$ 도 자연수이다.

$a_1 - 1 = m$ (m 은 자연수)으로 놓으면 (가)의 $b_n \times \sum_{k=1}^n a_k = 1$ 에서

$$b_n = \frac{1}{n^2 + (a_1 - 1)n} = \frac{1}{n^2 + mn} = \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) = \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{1+m}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+m}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+m}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right) + \left(\frac{1}{1+m} - \frac{1}{1+2m}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2+m} - \frac{1}{2+2m}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right. \\ &\quad \left. - \cdots - \frac{1}{n+m} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right)$$

(나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{11}{18}$ 이므로

$$\frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right) = \frac{11}{18}$$

이때 $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$ 이고 m 은 자연수이므로

$$m=3$$

즉, $a_1 - 1 = 3$ 이므로 $a_1 = 4$

08 답 ④

두 곡선 $y = x^3 - (n+1)x^2 - n^2x + n^3 + 2n^2$, $y = x^2$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - (n+1)x^2 - n^2x + n^3 + 2n^2 = x^2$$

$$x^3 - (n+2)x^2 - n^2x + n^2(n+2) = 0$$

$$x^2\{x - (n+2)\} - n^2\{x - (n+2)\} = 0$$

$$(x+n)(x-n)\{x - (n+2)\} = 0$$

$$\therefore x = -n \text{ 또는 } x = n \text{ 또는 } x = n+2$$

$P_n(-n, n^2)$, $Q_n(n, n^2)$, $R_n(n+2, n^2+4n+4)$ 라 하면 삼각형

$P_nQ_nR_n$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times 2n \times (4n+4) = 4n^2 + 4n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

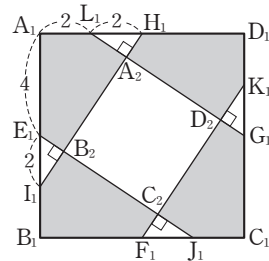
$$= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

09 답 179

$\overline{A_1B_1} = 8$ 이므로 $\overline{A_1E_1} = 4$, $\overline{A_1H_1} = 4$, $\overline{E_1I_1} = 2$

직각삼각형 $A_1I_1H_1$ 에서 $\overline{H_1I_1} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$



네 직각삼각형 $A_1I_1H_1$, $B_1I_1E_1$, $C_1I_1F_1$, $D_1I_1G_1$ 이 합동이므로 두 직각삼각형 $A_1I_1H_1$, $B_1I_1E_1$ 은 닮음(AA 닮음)이다.

$\overline{A_1I_1} : \overline{B_2I_1} = \overline{H_1I_1} : \overline{E_1I_1}$ 이므로

$$6 : \overline{B_2I_1} = 2\sqrt{13} : 2$$

$$\therefore \overline{B_2I_1} = \frac{12}{2\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

또 $\overline{A_1H_1} : \overline{B_2E_1} = \overline{H_1I_1} : \overline{E_1I_1}$ 이므로

$$4 : \overline{B_2E_1} = 2\sqrt{13} : 2$$

$$\therefore \overline{B_2E_1} = \frac{8}{2\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

네 삼각형 $B_2E_1I_1$, $C_2F_1J_1$, $D_2G_1K_1$, $A_2H_1L_1$ 은 합동이므로

$$\overline{A_2B_2} = \overline{H_1I_1} - \overline{B_2I_1} - \overline{B_2E_1}$$

$$= 2\sqrt{13} - \frac{6\sqrt{13}}{13} - \frac{4\sqrt{13}}{13} = \frac{16\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore S_1 = \square A_1B_1C_1D_1 - 4 \times \triangle B_2E_1I_1 - \square A_2B_2C_2D_2$$

$$= 8 \times 8 - 4 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{13}}{13} \times \frac{4\sqrt{13}}{13} \right) - \left(\frac{16\sqrt{13}}{13} \right)^2$$

$$= 64 - \frac{48}{13} - \frac{256}{13}$$

$$= \frac{528}{13}$$

두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 는 닮음이고 닮음비는 $8 : \frac{16\sqrt{13}}{13}$,

즉 $1 : \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{4}{13}$ 이다.

즉, 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이의 비는 $1 : \frac{4}{13}$ 이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 $1 : \frac{4}{13}$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{528}{13}$ 이고 공비가 $\frac{4}{13}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{528}{13}}{1 - \frac{4}{13}} = \frac{176}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=176$ 이므로

$$p+q=179$$

10 답 ②

$x^2+1 < a < x^2+2x+2$ 에서

$$x^2+1 < a < (x+1)^2+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $x=1$ 일 때,

①에서 $2 < a < 5$

자연수 a 의 값이 3, 4일 때, 집합 A 는 $x=1$ 을 원소로 가지므로 3, 4는 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(ii) $x=2$ 일 때,

①에서 $5 < a < 10$

자연수 a 의 값이 6, 7, 8, 9일 때, 집합 A 는 $x=2$ 를 원소로 가지므로 6, 7, 8, 9는 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(i), (ii)에서 a 의 값이 1, 2, 5이면 ①을 만족시키는 자연수 x 의 값이 존재하지 않으므로

$$a_1=1, a_2=2, a_3=5$$

(iii) $x=3$ 일 때,

①에서 $10 < a < 17$

자연수 a 의 값이 11, 12, ..., 16일 때, 집합 A 는 $x=3$ 을 원소로 가지므로 11, 12, ..., 16은 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 될 수 없다.

(ii), (iii)에서 $a=10$ 이면 ①을 만족시키는 자연수 x 의 값이 존재하지 않으므로

$$a_4=10$$

같은 방법으로 하면

$$a_5=4^2+1=17, a_6=5^2+1=26, \dots$$

$$\therefore a_n=(n-1)^2+1$$

이때 $b_n=a_{n+2}-2$ 이므로

$$b_n=(n+1)^2-1=n^2+2n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

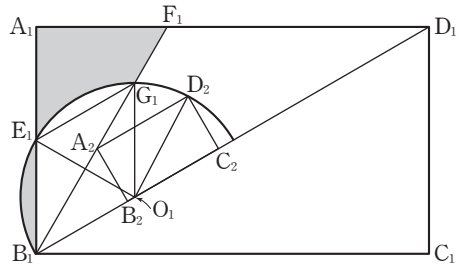
$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

11 답 ②

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_1D_1} = 1 : \sqrt{3} \text{이므로 } \angle A_1B_1D_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{A_1F_1} = \frac{1}{3} \overline{A_1D_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{이므로 } \angle A_1B_1F_1 = \frac{\pi}{6}$$



반원의 중심을 O_1 이라 하면 $\angle E_1B_1O_1 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 $E_1B_1O_1$ 은 정삼각형이다.

따라서 반원의 반지름의 길이는 선분 B_1E_1 의 길이와 같고 $\overline{B_1E_1} = 3$ 이다.

호 E_1G_1 에 대한 원주각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

즉, 삼각형 $E_1O_1G_1$ 은 정삼각형이므로 두 삼각형 $E_1B_1O_1$, $E_1O_1G_1$ 은 합동이다.

따라서 호 B_1E_1 과 선분 B_1E_1 로 둘러싸인 부분의 넓이와 호 E_1G_1 과 선분 E_1G_1 로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.

또 $\angle E_1G_1O_1 = \angle G_1O_1C_2$ 이므로 두 직선 E_1G_1 , B_1C_2 는 평행하다.

따라서 두 삼각형 $E_1B_1G_1$, $E_1O_1G_1$ 의 넓이가 같으므로

$$S_1 = \triangle A_1B_1F_1 - \triangle E_1O_1G_1$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$\overline{A_2B_2} = x$ ($x > 0$)라 하면 $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : \sqrt{3}$ 에서

$$\overline{B_2C_2} = \sqrt{3}x$$

직각삼각형 $A_2B_1B_2$ 에서 $\angle A_2B_1B_2 = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{B_1B_2} = \sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{B_1C_2} = \sqrt{3}x + \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{O_1C_2} = 2\sqrt{3}x - 3$$

직각삼각형 $D_2O_1C_2$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(2\sqrt{3}x - 3)^2 + x^2 = 3^2$$

$$13x^2 - 12\sqrt{3}x = 0, x(13x - 12\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{12\sqrt{3}}{13} (\because x > 0)$$

따라서 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 는 닮음이고 닮음비는

$$6 : \frac{12\sqrt{3}}{13}, \text{ 즉 } 1 : \frac{2\sqrt{3}}{13} \text{이므로 넓이의 비는 } 1 : \frac{12}{169} \text{이다.}$$

즉, 두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이의 비는 $1 : \frac{12}{169}$

이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 $1 : \frac{12}{169}$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 이고 공비가 $\frac{12}{169}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\frac{4}{39} \times \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4}{39} \times \frac{\frac{15\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{12}{169}} = \frac{65\sqrt{3}}{157}$$

03 지수함수와 로그함수의 미분

step 1 핵심 문제

| 46~47쪽

01 ⑤	02 ③	03 2	04 4	05 2	06 ④
07 4	08 ②	09 ②	10 ④	11 ①	12 $\frac{3}{e}$

01 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} \log_2 (3^{x+1} + 2^{2x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 (3^{x+1} + 2^{2x})^{\frac{3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[4^x \left\{ 3 \times \left(\frac{3}{4} \right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{3}{x}} \\ &= \log_2 \left[\lim_{x \rightarrow \infty} 4^3 \left\{ 3 \times \left(\frac{3}{4} \right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{3}{x}} \\ &= \log_2 (4^3 \times 1) = \log_2 2^6 = 6\end{aligned}$$

02 답 ③

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} = e \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} &\text{에서 } x-1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\ b &= \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-x} &\text{에서 } -x=s \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } s \rightarrow \infty \text{ 이므로} \\ c &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-x} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{-s-1}{-s+1} \right)^s \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{s}}{1-\frac{1}{s}} \right)^s \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{s} \right)^s}{\left\{ \left(1-\frac{1}{s} \right)^{-s} \right\}^{-1}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2 \\ \therefore b &< a < c\end{aligned}$$

03 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \left(1 + \frac{1}{2x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{2x+2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2x+2x} \right) - 1 \right\}^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \times \frac{2x+2}{2x+1} \times \frac{2x+3}{2x+2} \times \cdots \times \frac{4x+1}{4x} - 1 \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{2x} - 1 \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \text{ 이므로} \\ 4a &= 4 \times \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

04 답 4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-a^{x-\frac{1}{2}}}{1-ax} &= \frac{\ln b}{2} \text{에서 } x \rightarrow \frac{1}{2} \text{ 일 때 (분자)} \rightarrow 0 \text{ 이고 } 0 \text{ 이 아닌 극한값} \\ &\text{이 존재하므로 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이다.} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1-ax) &= 0 \text{에서} \\ 1 - \frac{a}{2} &= 0 \quad \therefore a = 2 \\ \text{이를 주어진 식에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-2^{x-\frac{1}{2}}}{1-2x} &= \frac{\ln b}{2} \\ \text{이때 } x - \frac{1}{2} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \frac{1}{2} \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-2^{x-\frac{1}{2}}}{1-2x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-2^t}{-2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t-1}{t} = -\frac{\ln 2}{2} \\ \therefore b &= 2 \text{ 이므로} \\ ab &= 2 \times 2 = 4\end{aligned}$$

05 답 2

$$\begin{aligned}f(n) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \cdots + \ln(1+nx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{x} + \cdots + \frac{\ln(1+nx)}{x}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2 + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+nx)}{nx} \times n} \\ &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

06 답 ④

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{e^x-1} &= g(x) \text{로 놓으면 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \\ f(x) &= (e^x-1)g(x) \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^2}{x \log_3(2x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)^2 \{g(x)\}^2}{x \log_3(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(e^x-1)^2}{x^2} \times \frac{x}{\log_3(2x+1)} \times \{g(x)\}^2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{e^x-1}{x} \right)^2 \times \frac{2x}{\log_3(1+2x)} \times \frac{\{g(x)\}^2}{2} \right] \\ &= 1^2 \times \ln 3 \times \frac{2^2}{2} = 2 \ln 3\end{aligned}$$

07 답 4

$x > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{\ln(1+x)(1+3x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+3x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{4x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{4x}-1}{4x} \times 4$$

$$= 1 \times 4 = 4$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 4$$

08 답 ②

$P(t, e^{2t+k}), Q(t, e^{-3t+k})$ 이므로 $\overline{PQ} = e^{2t+k} - e^{-3t+k}$

$\overline{PQ} = t$ 를 만족시키는 k 의 값이 $f(t)$ 이므로

$$e^{2t+f(t)} - e^{-3t+f(t)} = t$$

$$e^{f(t)}(e^{2t} - e^{-3t}) = t \quad \therefore e^{f(t)} = \frac{t}{e^{2t} - e^{-3t}}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} e^{f(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{e^{2t} - e^{-3t}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{e^{2t} - 1}{t} - \frac{e^{-3t} - 1}{t}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{2t} - 1}{t} - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{-3t} - 1}{t}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{2t} - 1}{2t} \times 2 - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{-3t} - 1}{-3t} \times (-3)}$$

$$= \frac{1}{1 \times 2 - 1 \times (-3)} = \frac{1}{5}$$

09 답 ②

두 점 A, P의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{t+1}{2}, 2\ln t\right)$

직선 AP의 기울기는 $\frac{4\ln t}{t-1}$ 이므로 선분 AP의 수직이등분선의 방정식은

$$y - 2\ln t = -\frac{t-1}{4\ln t} \left(x - \frac{t+1}{2}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{t-1}{4\ln t}x + \frac{(t-1)(t+1)}{8\ln t} + 2\ln t$$

따라서 $f(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{8\ln t} + 2\ln t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{(t-1)(t+1)}{8\ln t} + 2\ln t \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{8\ln t} + \lim_{t \rightarrow 1} 2\ln t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{8\ln t}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s)(s+2)}{8\ln(1+s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s}{\ln(1+s)} \times \frac{s+2}{8} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

10 답 ④

$f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$ 에서

$$f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x-1)e^x = (x^2+3x)e^x$$

방정식 $f'(x) = 0$ 에서

$$(x^2+3x)e^x = 0$$

$$x(x+3)e^x = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = -3, \beta = 0$

$$\therefore f(\alpha) = f(-3) = (9-3-1)e^{-3} = \frac{5}{e^3}$$

11 답 ①

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 7)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{\ln 2}$ 이므로

$$f(2) = 7, f'(2) = \frac{2}{\ln 2}$$

$$f(2) = 7 \text{에서 } 4\log_a 2 + b = 7$$

$$\therefore b = 7 - 4\log_a 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = 4\log_a x + b \text{에서 } f'(x) = \frac{4}{x \ln a}$$

$$f'(2) = \frac{2}{\ln 2} \text{에서 } \frac{2}{\ln a} = \frac{2}{\ln 2} \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 7 - 4 = 3$

$$\therefore f'(x) = \frac{4}{x \ln 2}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+ah) - f(4-bh)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4) + f(4) - f(4-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-3h) - f(4)}{-3h} \times 3$$

$$= 2f'(4) + 3f'(4) = 5f'(4)$$

$$= \frac{5}{\ln 2}$$

12 답 $\frac{3}{e}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln bx = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x+a}$$

$$\ln b = e^{1+a} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하고 $f'(x) = \begin{cases} e^{x+a} & (x < 1) \\ \frac{1}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x+a}$$

$$1 = e^{1+a}, 1+a=0 \quad \therefore a = -1 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\ln b = 1 \quad \therefore b = e \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & (x < 1) \\ \ln ex & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(0)f(e^2) = e^{-1} \times \ln e^3 = \frac{3}{e} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

01 9	02 ③	03 2	04 ③	05 ④	06 13
07 1	08 ②	09 $4 \ln 2$	10 $\sqrt{17}$	11 ⑤	12 1
13 e	14 2	15 ⑤	16 ④	17 ②	18 ⑤
19 $\frac{27}{4e}$	20 ⑤	21 8			

01 답 9

(가)의 $\log_2 \{f(x) - 3^{x+1}\}$ 에서 진수의 조건에 의하여
 $f(x) - 3^{x+1} > 0 \quad \therefore f(x) > 3^{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\log_2 \{f(x) - 3^{x+1}\} \leq x \leq \log_2 \{f(x) - 3^{x+1}\} + 1$ 에서
 $\log_2 \{f(x) - 3^{x+1}\} \leq \log_2 2^x \leq \log_2 2 \{f(x) - 3^{x+1}\}$
 로그의 밑이 1보다 크므로
 $f(x) - 3^{x+1} \leq 2^x \leq 2 \{f(x) - 3^{x+1}\}$
 $f(x) - 3^{x+1} \leq 2^x$ 에서 $f(x) \leq 2^x + 3^{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $2^x \leq 2 \{f(x) - 3^{x+1}\}$ 에서 $2^{x-1} \leq f(x) - 3^{x+1}$
 $\therefore f(x) \geq 2^{x-1} + 3^{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{C}$

①, ②, ③에서 $2^{x-1} + 3^{x+1} \leq f(x) \leq 2^x + 3^{x+1}$
 이때 (나)에서 $2^{x-1} + 3^{x-1} \leq g(x) \leq 2^x + 3^{x-1}$ 이므로
 $\frac{2^{x-1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^{x-1}} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x-1} + 3^{x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x-1} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 9$$

개념 NOTE

- (1) $a > 1$ 일 때,
 $\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) > g(x)$
 (2) $0 < a < 1$ 일 때,
 $\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) < g(x)$

02 답 ③

ㄱ. $a=2, b=4$ 이면

$$f(x) = \frac{4^x + \log_2 x}{2^x + \log_4 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4^x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x}{\log_2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^x}{\log_2 x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^x + \log_2 x}{2^x + \log_4 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4^x + \log_2 x}{2^x + \frac{1}{2} \log_2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4^x}{\log_2 x} + 1}{\frac{2^x}{\log_2 x} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

ㄴ. $0 < b < a < 1$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} b^x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_b x = -\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{\log_b x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x}{\log_b x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x + \log_a x}{a^x + \log_b x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^x}{\log_b x} + \frac{\log_a x}{\log_b x}}{\frac{a^x}{\log_b x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^x}{\log_b x} + \frac{\log_x b}{\log_x a}}{\frac{a^x}{\log_b x} + 1} = \log_a b \neq 0 \quad (\because b \neq 1)$$

ㄷ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0^+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{b^t + \log_a t}{a^t + \log_b t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} a^t = \lim_{t \rightarrow 0^+} b^t = 1, \lim_{t \rightarrow 0^+} |\log_a t| = \lim_{t \rightarrow 0^+} |\log_b t| = \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t}{\log_b t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{b^t}{\log_b t} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{b^t + \log_a t}{a^t + \log_b t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{b^t}{\log_b t} + \frac{\log_a t}{\log_b t}}{\frac{a^t}{\log_b t} + 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{b^t}{\log_b t} + \frac{\log_t b}{\log_t a}}{\frac{a^t}{\log_b t} + 1} = \log_a b$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 답 2

$\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0^+$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x^t - 1}{t} = \ln x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \{f(x+2) - f(x+1)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \{\ln(x+2) - \ln(x+1)\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \ln \frac{x+2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right\}^{\frac{2x}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} \ln \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \\ &= 2 \ln e = 2 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \{f(x+2) - f(x+1)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \{\ln(x+2) - \ln(x+1)\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \ln \frac{x+2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)^{2x} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left\{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^4}{\left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^2} \\ &= \ln \frac{e^4}{e^2} = \ln e^2 = 2 \end{aligned}$$

04 답 ③

$y=2e^{\frac{x}{2}-1}+1$ 이라 하면

$$\frac{y-1}{2}=e^{\frac{x}{2}-1}$$

양변에 자연로그를 취하면

$$\ln \frac{y-1}{2} = \frac{x}{2} - 1, \quad \frac{x}{2} = \ln \frac{y-1}{2} + 1$$

$$\therefore x = 2 \ln \frac{y-1}{2} + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 2 \ln \frac{x-1}{2} + 2 \quad \therefore g(x) = 2 \ln \frac{x-1}{2} + 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-3}{g(x+2)-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{\frac{x+1}{2}-1}-2}{2 \ln \frac{x+1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{x-1}{2}}-1}{\ln \frac{x+1}{2}}$$

$\frac{x-1}{2}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-3}{g(x+2)-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{x-1}{2}}-1}{\ln \frac{x+1}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^t-1}{t} \times \frac{t}{\ln(1+t)} \right\} \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

05 답 ④

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - a) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{2}{x} + 5 \right) \ln \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 3} + \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{2}{x} + 5 \right) \ln \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 3} + \frac{1}{x} + 1 \right) = 1 - a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{2}{x} + 5 \right) \ln \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 3} + \frac{1}{x} + 1 \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (5-2t) \ln(\sqrt{t^2+3}-t+1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ (5-2t) \times \frac{\ln(\sqrt{t^2+3}-t+1)}{\sqrt{t^2+3}-t} \times (\sqrt{t^2+3}-t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(1+\sqrt{t^2+3}-t)}{\sqrt{t^2+3}-t} \times \frac{(5-2t)(\sqrt{t^2+3}-t)(\sqrt{t^2+3}+t)}{\sqrt{t^2+3}+t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(1+\sqrt{t^2+3}-t)}{\sqrt{t^2+3}-t} \times \frac{15-6t}{\sqrt{t^2+3}+t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(1+\sqrt{t^2+3}-t)}{\sqrt{t^2+3}-t} \times \frac{\frac{15}{t}-6}{\sqrt{1+\frac{3}{t^2}}+1} \right\} \\ &= 1 \times \frac{-6}{1+1} = -3 \end{aligned}$$

①에서 $-3=1-a$ 이므로

$$a=4$$

06 답 13

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로 $f(-2)=1$ 에서

$$4a-2b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{2x}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = 0$ 에서

$$\ln f(0) = 0, \ln c = 0 \quad \therefore c = 1 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

이를 ①에 대입하면

$$4a-2b+1=1 \quad \therefore b=2a \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

따라서 $f(x)=ax^2+2ax+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{2x} + \frac{9}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax^2+2ax+1)}{2x} + \frac{9}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax^2+2ax)}{ax^2+2ax} \times \frac{ax+2a}{2} \right\} + \frac{9}{2} \\ &= 1 \times a + \frac{9}{2} = a + \frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%} \end{aligned}$$

한편 $f'(x)=2ax+2a$ 이므로

$$f'(4)=8a+2a=10a$$

$$\text{즉, } a + \frac{9}{2} = 10a \text{이므로 } 9a = \frac{9}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 이므로

$$f(4)=8+4+1=13 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

07 답 1

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{2^{x-1}-1} & (x \neq 1) \\ 2(1+a+b) & (x = 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{2^{x-1}-1} = 2(1+a+b) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+b) = 0$ 에서

$$1+a+b=0 \quad \therefore b=-a-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-a-1}{2^{x-1}-1} = 0$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-a-1}{2^{x-1}-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2+a(1+t)-a-1}{2^t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2+(a+2)t}{2^t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t}{2^t-1} \times (t+a+2) \right\} \\ &= \frac{a+2}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a+2}{\ln 2} = 0 \text{이므로 } a = -2$$

이를 ②에 대입하면 $b=2-1=1$

$$\text{따라서 } f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{2^{x-1}-1} & (x \neq 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2)g(2) = \frac{4-4+1}{2-1} = 1$$

08 답 ②

두 곡선 $y=e^{x-1}$, $y=a^x$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면
 $e^{x-1}=a^x$

양변에 자연로그를 취하면

$$x-1=x \ln a, (1-\ln a)x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{1-\ln a}$$

$$\text{즉, } f(a)=\frac{1}{1-\ln a} \text{이므로}$$

$$\lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1}{(e-a)f(a)} = \lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1-\ln a}{e-a}$$

$a-e=t$ 로 놓으면 $a \rightarrow e+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1}{(e-a)f(a)} &= \lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1-\ln a}{e-a} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-\ln(e+t)}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e+t)-\ln e}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e}} \times \frac{1}{e} \\ &= 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

09 답 4ln 2

두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+a$ 가 만나는 점 C의 x 좌표를 구하면

$$2^x = -2^x + a, 2 \times 2^x = a$$

$$2^x = \frac{a}{2} \quad \therefore x = \log_2 \frac{a}{2}$$

$$\therefore C\left(\log_2 \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$A(0, 1), B(0, a-1) \text{이므로 } \overline{AB}=a-2$$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{2} \times (a-2) \times \log_2 \frac{a}{2}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{(a-2)^2}{S(a)} = \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{(a-2)^2}{\frac{1}{2} \times (a-2) \times \log_2 \frac{a}{2}}$$

$$= 2 \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{a-2}{\log_2 \frac{a}{2}}$$

$a-2=t$ 로 놓으면 $a \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{(a-2)^2}{S(a)} = 2 \lim_{a \rightarrow 2^+} \frac{a-2}{\log_2 \frac{a}{2}}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\log_2 \frac{2+t}{2}}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t}{2}}{\log_2 \left(1+\frac{t}{2}\right)} \times 2$$

$$= 2 \times \ln 2 \times 2 = 4 \ln 2$$

10 답 $\sqrt{17}$

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{AP}, S_2(t) = \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{AP} \text{이므로}$$

$$\frac{S_2(t)}{S_1(t)} = \frac{\overline{QR} \times \overline{AP}}{\overline{PR} \times \overline{AP}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$$

곡선 $y=\ln(4x-3)$ 이 x 축과 만나는 점 A의 x 좌표를 구하면

$$\ln(4x-3)=0$$

$$4x-3=1 \quad \therefore x=1$$

$$\therefore A(1, 0)$$

$$t>1 \text{이므로 } \overline{AP}=t-1$$

$$Q(t, \ln(4t-3)) \text{이므로}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{(t-1)^2 + \{\ln(4t-3)\}^2}$$

직선 AR가 $\angle QAP$ 를 이등분하므로

$$\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{PR} : \overline{QR}$$

$$\therefore \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{(t-1)^2 + \{\ln(4t-3)\}^2}}{t-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{S_2(t)}{S_1(t)} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(t-1)^2 + \{\ln(4t-3)\}^2}}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\ln(4t-3)}{t-1} \right\}^2} \end{aligned}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{S_2(t)}{S_1(t)} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\ln(4t-3)}{t-1} \right\}^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\ln(1+4s)}{s} \right\}^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\ln(1+4s)}{4s} \right\}^2 \times 16} \\ &= \sqrt{1+1^2 \times 16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

11 답 ⑤

$$y=e^x-1 \text{에서 } y+1=e^x$$

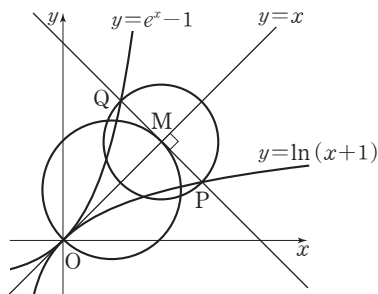
양변에 자연로그를 취하면

$$\ln(y+1)=x$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\ln(x+1)$$

즉, 두 함수 $y=e^x-1$, $y=\ln(x+1)$ 은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.



또 직선 $y=x$ 와 점 P를 지나고 기울기가 -1 인 직선은 서로 수직이므로 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

$$\therefore Q(b, a)$$

선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{PM} = \sqrt{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{2}}$$

$$\therefore S(a) = \pi \overline{PM}^2 = \frac{\pi}{2} (a-b)^2$$

$$\text{또 } \overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}} \text{이므로}$$

$$T(a) = \pi \left(\frac{1}{2} \overline{OM}\right)^2 = \frac{\pi}{8} (a+b)^2$$

이때 점 P(a, b)는 곡선 $y = \ln(x+1)$ 위의 점이므로 $b = \ln(a+1)$

$$\begin{aligned} \therefore 4T(a) - S(a) &= \frac{\pi}{2} (a+b)^2 - \frac{\pi}{2} (a-b)^2 \\ &= 2\pi ab = 2\pi a \ln(a+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{4T(a) - S(a)}{\pi a^2} &= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{2\pi a \ln(a+1)}{\pi a^2} \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+a)}{a} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

12 답 1

$f_n(x) = (x+1)^n - e^x$ 이라 하면

$$f'_n(x) = n(x+1)^{n-1} - e^x$$

$f_n(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^n - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{f_n(x) - f_n(0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{x}{f_n(x) - f_n(0)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{f'_n(0)} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=2}^{\infty} a_n a_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \end{aligned}$$

13 답 e

(가)의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = 0$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ 에서 $g(2) = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = g'(2)$ 이므로

$g'(2) = 0$ 배점 20%

$g(x) = e^x f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$$

$$\therefore g'(x) = e^x \{f(x) + f'(x)\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$g(x) = e^x f(x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$g(2) = e^2 f(2)$$

$$e^2 f(2) = 0 \quad \therefore f(2) = 0$$

①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$g'(2) = e^2 \{f(2) + f'(2)\}$$

$$e^2 f'(2) = 0 \quad \therefore f'(2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{배점 30\%}$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$, $f'(2)=0$ 이므로 $f(x) = (x+a)(x-2)^2$ (a 는 상수)이라 하자.

(나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - g(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - e^{2x} f(2x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(2x) \times \frac{1 - e^{2x}}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (2x+a)(2x-2)^2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x} \times (-2) \right\} \\ &= 4a \times 1 \times (-2) \\ &= -8a \end{aligned}$$

즉, $-8a = 8$ 이므로 $a = -1$ 배점 30%

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$ 이므로

$$f'(x) = (x-2)^2 + (x-1) \times 2(x-2)$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(1) = e \{f(1) + f'(1)\} = e(0+1) = e \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{배점 20\%}$$

14 답 2

$\ln f_n(x) = (n-1) \{x - \ln(e^x + 2)\}$ 에서

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= (n-1) \ln \frac{e^x}{e^x + 2} \\ &= \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore f_n(x) = \left(\frac{e^x}{e^x + 2} \right)^{n-1}$$

$0 < \frac{e^x}{e^x + 2} < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{e^x}{e^x + 2}} \\ &= \frac{e^x + 2}{2} \end{aligned}$$

즉, $g'(x) = \frac{1}{2} e^x$ 이므로

$$\ln g'(x) = \ln \left(\frac{1}{2} e^x \right) = x - \ln 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln g'(n) \times \ln g'(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \ln 2)(n+1 - \ln 2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n - \ln 2} - \frac{1}{n+1 - \ln 2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k - \ln 2} - \frac{1}{k+1 - \ln 2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1 - \ln 2} - \frac{1}{2 - \ln 2} \right) + \left(\frac{1}{2 - \ln 2} - \frac{1}{3 - \ln 2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n - \ln 2} - \frac{1}{n+1 - \ln 2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \ln 2} - \frac{1}{n+1 - \ln 2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \ln 2} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

15 답 ⑤

ㄱ. 두 함수 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln \frac{1}{x}$ 의 그래프가 만나는 점 P의 x좌

표를 구하면

$$\ln x = \ln \frac{1}{x}$$

$$\ln x = -\ln x, 2\ln x = 0$$

$$\therefore x=1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, f(1))$, 즉 $(1, 0)$ 이다.

ㄴ. $f(x)=\ln x$ 에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=1$$

$g(x)=\ln \frac{1}{x}=-\ln x$ 에서 $g'(x)=-\frac{1}{x}$ 이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=-1$$

따라서 $f'(1)g'(1)=1 \times (-1)=-1$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.

ㄷ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 그림과 같다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이고 1보다 큰 실수 t 에 대하여 $t \rightarrow \infty$ 일 때, 두 점 $P(1, 0)$, $(t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기는 0에 한없이 가까워진다.

$$\therefore 0 < \frac{f(t)}{t-1} < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(1)=-1$ 이고 1보다 큰 실수 t 에 대하여 $t \rightarrow \infty$ 일 때, 두 점 $P(1, 0)$, $(t, g(t))$ 를 지나는 직선의 기울기는 0에 한없이 가까워진다.

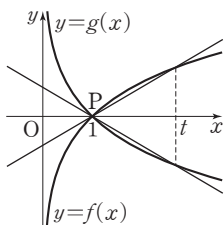
$$\therefore -1 < \frac{g(t)}{t-1} < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$-1 < \frac{f(t)}{t-1} \times \frac{g(t)}{t-1} < 0$$

$$\therefore -1 < \frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2} < 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



개념 NOTE

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이 서로 수직이면 $mm'=-1$ 이다.

16 답 ④

함수 $\frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \begin{cases} \frac{x^n+kx^2}{(e^x-1)\ln(2x+1)} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 이 $x > -\frac{1}{2}$ 에서 연속이

므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \frac{f_n(0)}{g_n(0)} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n+kx^2}{(e^x-1)\ln(2x+1)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x}{e^x-1} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{x^{n-2}+k}{2} \right\} = 0$$

$$1 \times 1 \times \frac{k}{2} = 0$$

$$\therefore k=0$$

따라서 $f_n(x)=x^n$ 이므로

$$h_n(x)=f_n(x)\ln x=x^n\ln x$$

$$\therefore h'_n(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n \times \frac{1}{x}$$

$$=x^{n-1}(n\ln x+1)$$

이때 $x>0$ 이므로 $h'_n(x)=0$ 에서

$$n\ln x+1=0$$

$$\ln x = -\frac{1}{n}$$

$$\therefore x=e^{-\frac{1}{n}}$$

따라서 $a_n=e^{-\frac{1}{n}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a_4a_8}{a_3a_6} &= \frac{e^{-\frac{1}{4}} \times e^{-\frac{1}{8}}}{e^{-\frac{1}{3}} \times e^{-\frac{1}{6}}} = \frac{e^{-\frac{3}{8}}}{e^{-\frac{1}{2}}} \\ &= e^{-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

따라서 $m=\frac{1}{8}$ 이므로

$$24m=24 \times \frac{1}{8}=3$$

17 답 ②

(㉞)에서 $f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$ 의 양변에 $x=2\ln 2$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(2\ln 2)=f(2\ln 2)f(0)+4f(2\ln 2)+4f(0)+12$$

$$f(2\ln 2)\{f(0)+3\}+4\{f(0)+3\}=0$$

$$\{f(2\ln 2)+4\}\{f(0)+3\}=0$$

이때 (㉞)에서 $f(2\ln 2) \neq -4$ 이므로

$$f(0)=-3$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h} \\ &= \{f(x)+4\} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \{f(x)+4\} \times f'(0) \\ &= \frac{1}{2}\{f(x)+4\} \quad (\because \text{㉞}) \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2\ln 2$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(2\ln 2)=\frac{1}{2}\{f(2\ln 2)+4\}=\frac{1}{2}(-2+4)=1$$

한편 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x$ 에서

$$g'(x)=x-\frac{2}{x}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=k$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(k)=k-\frac{2}{k}$$

두 접선이 서로 수직이므로 $f'(2\ln 2)g'(k)=-1$ 에서

$$1 \times \left(k - \frac{2}{k}\right) = -1$$

$$k^2+k-2=0$$

$$(k+2)(k-1)=0$$

$$\therefore k=1 \quad (\because k>0)$$

18 ㉮ ⑤

$$f(x) = |2^x - 16| + 3$$

$$= \begin{cases} -2^x + 19 & (x < 4) \\ 2^x - 13 & (x \geq 4) \end{cases}$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 3) \\ 1 & (t=3 \text{ 또는 } t \geq 19) \\ 2 & (3 < t < 19) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x=3$, $x=19$ 에서 불연속이므로 함수 $\{f(x)-k\}g(x)$ 가 불연속인 x 의 개수가 1이 되려면 $x=3$ 에서는 연속이거나 $x=19$ 에서는 연속이어야 한다.

(i) 함수 $\{f(x)-k\}g(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \{f(x)-k\}g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \{f(x)-k\}g(x) = \{f(3)-k\}g(3)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} (-2^x + 19 - k) \times 2 = \lim_{x \rightarrow 3-} (-2^x + 19 - k) \times 0 = (11 - k) \times 1$$

$$2(11 - k) = 0 = 11 - k$$

$$\therefore k = 11$$

(ii) 함수 $\{f(x)-k\}g(x)$ 가 $x=19$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 19+} \{f(x)-k\}g(x) = \lim_{x \rightarrow 19-} \{f(x)-k\}g(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 19+} (2^x - 13 - k) \times 1 = \lim_{x \rightarrow 19-} (2^x - 13 - k) \times 2$$

$$2^{19} - 13 - k = 2(2^{19} - 13 - k)$$

$$2^{19} - 13 - k = 0 \quad \therefore k = 2^{19} - 13$$

(i), (ii)에서

$$k = 11 \text{ 또는 } k = 2^{19} - 13$$

따라서 k 의 최솟값은 11이므로

$$a = 11$$

$$f(x) = \begin{cases} -2^x + 19 & (x < 4) \\ 2^x - 13 & (x \geq 4) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2^x \ln 2 & (x < 4) \\ 2^x \ln 2 & (x > 4) \end{cases}$$

$$\therefore \frac{f'(a)}{\ln 16} = \frac{f'(11)}{\ln 16} = \frac{2^{11} \ln 2}{4 \ln 2} = 2^9 = 512$$

19 ㉮ $\frac{27}{4e}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=t$ 에서도 연속이다.

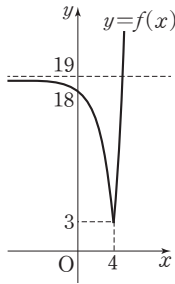
$$\therefore \lim_{x \rightarrow t+} f(x) = \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow t+} kx^3 a^x = \lim_{x \rightarrow t-} x$$

$$kt^3 a^t = t \quad \therefore kt^2 a^t = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^x - 1 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < t) \\ kx^3 a^x & (x \geq t) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^x \ln \frac{1}{a} & (x < 0) \\ 1 & (0 < x < t) \\ 3kx^2 a^x + kx^3 a^x \ln a & (x > t) \end{cases}$$



미분계수 $f'(0)$ 이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} 1 = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{a}\right)^x \ln \frac{1}{a}$$

$$1 = \ln \frac{1}{a} \quad \therefore a = \frac{1}{e}$$

또 미분계수 $f'(t)$ 가 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow t+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow t-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow t+} (3kx^2 a^x + kx^3 a^x \ln a) = \lim_{x \rightarrow t-} 1$$

$$3kt^2 a^t + kt^3 a^t \ln a = 1$$

㉮을 대입하면

$$3 + t \ln a = 1$$

$$3 + t \ln \frac{1}{e} = 1 \quad (\because a = \frac{1}{e})$$

$$3 - t = 1 \quad \therefore t = 2$$

$$a = \frac{1}{e}, t = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$4\left(\frac{1}{e}\right)^2 k = 1 \quad \therefore k = \frac{e^2}{4}$$

따라서 $x \geq 2$ 에서 $f(x) = \frac{e^2}{4} x^3 \left(\frac{1}{e}\right)^x$ 이므로

$$f(3) = \frac{e^2}{4} \times 27 \times \left(\frac{1}{e}\right)^3 = \frac{27}{4e}$$

20 ㉮ ⑤

(㉮), (㉮)에서 $n=1$ 일 때, 즉 $0 \leq x < a$ 일 때,

$$f(x) = f(x-a) + \frac{b}{e^3}$$

$$= (x-a)^3 e^{x-a} + \frac{b}{e^3}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^3 e^x & (-a \leq x < 0) \\ (x-a)^3 e^{x-a} + \frac{b}{e^3} & (0 \leq x < a) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ (x-a)^3 e^{x-a} + \frac{b}{e^3} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0-} x^3 e^x$$

$$-a^3 e^{-a} + \frac{b}{e^3} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 미분계수 $f'(0)$ 이 존재하고

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 e^x + x^3 e^x & (-a < x < 0) \\ 3(x-a)^2 e^{x-a} + (x-a)^3 e^{x-a} & (0 < x < a) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2(x+3)e^x & (-a < x < 0) \\ (x-a)^2(x-a+3)e^{x-a} & (0 < x < a) \end{cases}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x-a)^2(x-a+3)e^{x-a} = \lim_{x \rightarrow 0-} x^2(x+3)e^x$$

$$a^2(3-a)e^{-a} = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=3 \quad (\because e^{-a} > 0)$$

그런데 a 는 양수이므로

$$a=3$$

이를 ㉮에 대입하면

$$-27e^{-3} + \frac{b}{e^3} = 0, \quad \frac{b}{e^3} = 27e^{-3}$$

$$\therefore b=27$$

$$\therefore a+b=3+27=30$$

21 답 8

$$f(x) = \left\lfloor \frac{2x}{e} \right\rfloor \ln x + (ax+b)[\ln x] \text{에서}$$

(i) $e-1 \leq x < e$ 일 때,

$$\frac{2(e-1)}{e} \leq \frac{2x}{e} < 2 \text{이므로}$$

$$1 < 2 - \frac{2}{e} \leq \frac{2x}{e} < 2$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{2x}{e} \right\rfloor = 1$$

$$\text{또 } \ln(e-1) \leq \ln x < 1 \text{이므로}$$

$$0 = \ln 1 < \ln(e-1) \leq \ln x < 1$$

$$\therefore [\ln x] = 0$$

$$\therefore f(x) = \ln x$$

(ii) $e \leq x < e+1$ 일 때,

$$2 \leq \frac{2x}{e} < \frac{2(e+1)}{e} \text{이므로}$$

$$2 \leq \frac{2x}{e} < 2 + \frac{2}{e} < 3$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{2x}{e} \right\rfloor = 2$$

$$\text{또 } 1 \leq \ln x < \ln(e+1) \text{이므로}$$

$$1 \leq \ln x < \ln(e+1) < \ln e^2 = 2$$

$$\therefore [\ln x] = 1$$

$$\therefore f(x) = 2 \ln x + ax + b$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (e-1 \leq x < e) \\ 2 \ln x + ax + b & (e \leq x < e+1) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (e-1 < x < e) \\ \frac{2}{x} + a & (e < x < e+1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=e$ 에서 미분가능하면 $x=e$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} (2 \ln x + ax + b) = \lim_{x \rightarrow e^-} \ln x$$

$$2 + ae + b = 1$$

$$\therefore ae + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

미분계수 $f'(e)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} f'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{2}{x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{e} + a = \frac{1}{e}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{e}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-1 + b = -1$$

$$\therefore b = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \left\lfloor \frac{2x}{e} \right\rfloor \ln x - \frac{1}{e} x [\ln x] \text{이므로}$$

$$f(e^2) = [2e] \ln e^2 - e [\ln e^2]$$

$$= 5 \times 2 - e \times 2$$

$$= -2e + 10$$

따라서 $p = -2$, $q = 10$ 이므로

$$p + q = 8$$

step 3 최고난도 문제

| 52~53쪽

01 ③

02 ③

03 -1

04 ⑤

05 ③

06 ①

07 61

idea

01 답 ③

1단계 a_n 구하기

자연수 m 에 대하여

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(mx)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{mx} + mx)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left\{ e^{mx} \left(1 + \frac{mx}{e^{mx}} \right) \right\}}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx + \ln \left(1 + \frac{mx}{e^{mx}} \right)}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ m + \frac{\ln \left(1 + \frac{mx}{e^{mx}} \right)}{\frac{mx}{e^{mx}}} \times \frac{m}{e^{mx}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (m+1 \times m) = m \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0^+$ 일 때, $\frac{mx}{e^{mx}} \rightarrow 0^+$

$$\therefore a_n = \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x) \times \ln f(2x) \times \ln f(3x) \times \dots \times \ln f(nx)}{2^n x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\ln f(x)}{2x} \times \frac{\ln f(2x)}{2x} \times \frac{\ln f(3x)}{2x} \times \dots \times \frac{\ln f(nx)}{2x} \right\} \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n! \end{aligned}$$

2단계 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1}}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times n!}{n! (n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1-1)n!}{n! (n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{n! (n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right\} = 1 \end{aligned}$$

02 답 ③

1단계 α 의 값 구하기

직선 OP의 기울기는 $\frac{a^t-1}{t}$ 이므로 점 P(t , a^t-1)을 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y - (a^t - 1) = -\frac{t}{a^t - 1}(x - t)$$

이 직선의 x절편이 $g(t)$ 이므로

$$-(a^t - 1) = -\frac{t}{a^t - 1}\{g(t) - t\}$$

$$\therefore g(t) = t + \frac{(a^t - 1)^2}{t}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{t}{a^t - 1} + \frac{a^t - 1}{t} \right) = \frac{1}{\ln a} + \ln a$$

이때 $a > 1$ 에서 $\ln a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{1}{\ln a} + \ln a \geq 2\sqrt{\frac{1}{\ln a} \times \ln a} = 2$$

(단, 등호는 $\frac{1}{\ln a} = \ln a$ 일 때 성립)

$$\frac{1}{\ln a} = \ln a \text{에서 } (\ln a)^2 = 1$$

$$\ln a = 1 \quad (\because \ln a > 0)$$

$$\therefore a = e$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t)}{f(t)}$ 는 $a = e$ 일 때 최솟값 2를 가지므로

$$\alpha = e$$

2단계 β 의 값 구하기

두 곡선 $y = e^x + 1$, $y = \beta^{x-3} + 1$ 이 만나는 점의 x 좌표가 k 이므로

$$e^k + 1 = \beta^{k-3} + 1$$

$$\therefore e^k = \beta^{k-3}$$

(i) $1 < \beta < e$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{e} \right)^x = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta^k (e^x - \beta^x)}{e^k (e^x + \beta^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta^k \left\{ 1 - \left(\frac{\beta}{e} \right)^x \right\}}{\beta^{k-3} \left\{ 1 + \left(\frac{\beta}{e} \right)^x \right\}} = \beta^3$$

$$\text{즉, } \beta^3 = -8e^3 \text{이므로}$$

$$\beta = -2e$$

그런데 $1 < \beta < e$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta = e$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta^k (e^x - \beta^x)}{e^k (e^x + \beta^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^k (e^x - e^x)}{e^k (e^x + e^x)} = 0$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\beta > e$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{\beta} \right)^x = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta^k (e^x - \beta^x)}{e^k (e^x + \beta^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta^k \left\{ \left(\frac{e}{\beta} \right)^x - 1 \right\}}{\beta^{k-3} \left\{ \left(\frac{e}{\beta} \right)^x + 1 \right\}} = -\beta^3$$

$$\text{즉, } -\beta^3 = -8e^3 \text{이므로}$$

$$\beta = 2e$$

(i), (ii), (iii)에서 $\beta = 2e$

3단계 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

$$\therefore \alpha + \beta = e + 2e = 3e$$

03 답 -1

1단계 $f(n)$ 구하기

$0 < k < n$ 인 자연수 k 에 대하여 곡선

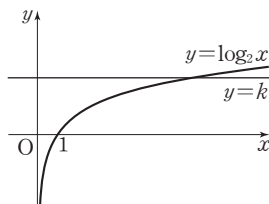
$y = \log_2 x$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\log_2 x = k \quad \therefore x = 2^k$$

이때 곡선 $y = \log_2 x$ 와 직선 $y = n$ 및

x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 내부에

있는 점 중 직선 $y = k$ 위에 있는 점은 $(1, k)$, $(2, k)$, $(3, k)$, ..., $(2^k - 1, k)$ 의 $(2^k - 1)$ 개이다.



$$\begin{aligned} \therefore f(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) \\ &= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n - 1) \\ &= 2^n - n - 1 \end{aligned}$$

2단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) \{ \ln f(n) - n \ln 2 \}}{n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) \{ \ln f(n) - n \ln 2 \}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n - n - 1) \{ \ln(2^n - n - 1) - n \ln 2 \}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - n - 1}{n} \times \ln \frac{2^n - n - 1}{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2^n - n - 1}{n} \times \ln \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2^n - n - 1}{n} \times \left(-\frac{n + 1}{2^n} \right) \times \frac{\ln \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right)}{-\frac{n + 1}{2^n}} \right\} \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n + 1}{n} \times \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right) \times \frac{\ln \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right)}{-\frac{n + 1}{2^n}} \right\} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$-\frac{n+1}{2^n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right) \times \frac{\ln \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right)}{-\frac{n + 1}{2^n}} \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\{ (1 + t) \times \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) \{ \ln f(n) - n \ln 2 \}}{n} &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n + 1}{n} \times \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right) \times \frac{\ln \left(1 - \frac{n + 1}{2^n} \right)}{-\frac{n + 1}{2^n}} \right\} \\ &= -1 \times 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

04 답 ⑤

1단계 $g(x) = e^{-x} f(x)$ 로 놓고 부등식 나타내기

$g(x) = e^{-x} f(x)$ 라 하면

$$|e^{-x-h} f(x+h) - e^{-x+h} f(x-h)| \leq h \ln(1+h) \text{에서}$$

$$|g(x+h) - g(x-h)| \leq h \ln(1+h)$$

이때 $-1 < h < 0$ 이면 $\ln(1+h) < 0$ 이고, $h > 0$ 이면 $\ln(1+h) > 0$ 이므로 $h \ln(1+h) > 0$

$$\therefore -h \ln(1+h) \leq g(x+h) - g(x-h) \leq h \ln(1+h) \quad \dots \textcircled{1}$$

2단계 $f(x)$ 구하기

(i) $-1 < h < 0$ 일 때,

부등식 ①의 각 변을 h 로 나누면

$$\ln(1+h) \leq \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} \leq -\ln(1+h)$$

이때 $\lim_{h \rightarrow 0-} \ln(1+h) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0-} \{-\ln(1+h)\} = 0$ 이므로 함수의 극

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} = 0$$

(ii) $h > 0$ 일 때,

부등식 ㉑의 각 변을 h 로 나누면

$$-\ln(1+h) \leq \frac{g(x+h)-g(x-h)}{h} \leq \ln(1+h)$$

이때 $\lim_{h \rightarrow 0+} \{-\ln(1+h)\} = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0+} \ln(1+h) = 0$ 이므로 함수의 극

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{h} = 0$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{h} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)+g(x)-g(x-h)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(x-h)}{-h} = 0$$

$$2g'(x) = 0 \quad \therefore g'(x) = 0$$

$\therefore g(x) = c$ (단, c 는 상수)

이때 $g(0) = f(0) = e$ 이므로 $g(x) = e$

즉, $e^{-x}f(x) = e$ 이므로 $f(x) = e^{x+1}$

3단계 $f'(1)$ 의 값 구하기

따라서 $f'(x) = e^{x+1}$ 이므로

$$f'(1) = e^2$$

05 답 ③

1단계 두 점 Q, R의 좌표 구하기

곡선 $y = e^x$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면

$$y = e^{x-m} \quad \therefore g(x) = e^{x-m}$$

곡선 $y = e^x$ 을 y 축의 방향으로 e^n 만큼 평행이동하면

$$y = e^x + e^n \quad \therefore h(x) = e^x + e^n$$

점 P(t, e^t)을 지나고 x 축에 수직인 직선은

$x = t$ 이므로 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $x = t$ 가

만나는 점 Q의 y 좌표를 구하면

$$y = e^{t-m}$$

$$\therefore Q(t, e^{t-m})$$

또 점 P를 지나고 y 축에 수직인 직선은

$y = e^t$ 이므로 곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = e^t$

이 만나는 점 R의 x 좌표를 구하면

$$e^x + e^n = e^t, \quad e^x = e^t - e^n$$

$$\therefore x = \ln(e^t - e^n)$$

$$\therefore R(\ln(e^t - e^n), e^t)$$

2단계 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ 구하기

따라서 선분 PQ와 선분 PR를 이웃한 두 변으로 하는 직사각형의 넓이

$S(t)$ 는

$$S(t) = \overline{PQ} \times \overline{PR}$$

$$= (e^t - e^{t-m}) \{t - \ln(e^t - e^n)\}$$

$$= e^t (1 - e^{-m}) \times \left[t - \ln \left\{ e^t \left(1 - \frac{e^n}{e^t} \right) \right\} \right]$$

$$= e^t \left(1 - \frac{1}{e^m} \right) \times \left\{ -\ln \left(1 - \frac{e^n}{e^t} \right) \right\}$$

$$= e^t \left(\frac{1}{e^m} - 1 \right) \times \ln \left(1 - \frac{e^n}{e^t} \right)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ e^t \left(\frac{1}{e^m} - 1 \right) \times \ln \left(1 - \frac{e^n}{e^t} \right) \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ e^t \left(\frac{1}{e^m} - 1 \right) \times \left(-\frac{e^n}{e^t} \right) \times \frac{\ln \left(1 - \frac{e^n}{e^t} \right)}{-\frac{e^n}{e^t}} \right\}$$

$$= e^n \left(1 - \frac{1}{e^m} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{e^n}{e^t} \right)}{-\frac{e^n}{e^t}}$$

$-\frac{e^n}{e^t} = s$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $s \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = e^n \left(1 - \frac{1}{e^m} \right) \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+s)}{-s}$$

$$= e^n \left(1 - \frac{1}{e^m} \right) \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+s)}{s}$$

$$= e^n \left(1 - \frac{1}{e^m} \right) \times 1$$

$$= e^n \left(1 - \frac{1}{e^m} \right)$$

3단계 $m+n$ 의 값 구하기

즉, $e^n \left(1 - \frac{1}{e^m} \right) = e^2 - 1$ 이므로

$$e^n - e^{n-m} = e^2 - 1$$

이때 m, n 이 자연수이므로

$$n=2, n=m \quad \therefore m=2$$

$$\therefore m+n=4$$

idea

06 답 ①

1단계 $h(x)$ 구하기

a 는 양수이므로 $x > 0$ 에서

$f(x) > 0, g(x) \geq 0$

(i) $f(x) < g(x)$ 일 때,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{g(x)\}^{n+1}}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) \times \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}^n + g(x)}{\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}^n + 1}$$

$$= g(x)$$

(ii) $f(x) = g(x)$ 일 때,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{g(x)\}^{n+1}}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\{f(x)\}^{n+1}}{2\{f(x)\}^n}$$

$$= f(x)$$

(iii) $f(x) > g(x)$ 일 때,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^{n+1} + \{g(x)\}^{n+1}}{\{f(x)\}^n + \{g(x)\}^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + g(x) \times \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}^n}{1 + \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}^n}$$

$$= f(x)$$

(i), (ii), (iii)에서

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (f(x) < g(x)) \\ f(x) & (f(x) \geq g(x)) \end{cases}$$

2단계 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1인 조건 알기

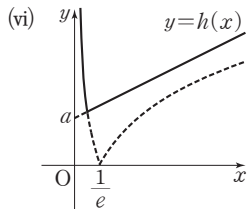
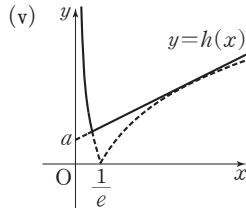
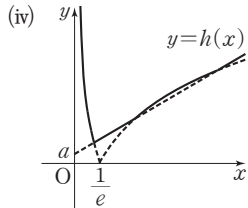
$\ln x + 1 = 0$ 인 x 의 값을 구하면

$$\ln x = -1$$

$$\therefore x = \frac{1}{e}$$

$$\therefore g(x) = |\ln x + 1| = \begin{cases} -\ln x - 1 & (x < \frac{1}{e}) \\ \ln x + 1 & (x \geq \frac{1}{e}) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이 되려면 함수 $y = h(x)$ 의 그래프에서 꺾인 점이 한 개만 존재해야 한다.

즉, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 (v)와 같이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하거나 (vi)와 같이 한 점에서만 만나야 한다.

3단계 양수 a 의 최솟값 구하기

$x \geq \frac{1}{e}$ 에서 $g(x) = \ln x + 1$ 이므로

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

이때 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 접점에서의 기울기는 서로 같고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 접점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \therefore x = 2$$

따라서 $x = 2$ 인 점에서 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 접하거나 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있어야 하므로 $f(2) \geq g(2)$ 에서

$$1 + a \geq \ln 2 + 1$$

$$\therefore a \geq \ln 2$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 $\ln 2$ 이다.

07 답 61

1단계 $h_k(x) = f(x^k)e^{x+1}$ 으로 놓고 $g'(x)$ 구하기

$f(x) = x - 1$ 에서

$$|f(x^2)| = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 1 - x^2 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$h_k(x) = f(x^k)e^{x+1} = (x^k - 1)e^{x+1}$ 이라 하자.

$x < -1$ 일 때, k 가 홀수이면 $h_k(x) < 0$, k 가 짝수이면 $h_k(x) > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= 120|f(x^2)| - \sum_{k=1}^n |h_k(x)| \\ &= 120(x^2 - 1) - \{-h_1(x) + h_2(x) - h_3(x) + \cdots + (-1)^n h_n(x)\} \\ &= 120(x^2 - 1) + h_1(x) - h_2(x) + h_3(x) - \cdots - (-1)^n h_n(x) \end{aligned}$$

$$\therefore g'(x) = 240x + h_1'(x) - h_2'(x) + h_3'(x) - \cdots - (-1)^n h_n'(x)$$

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때, $h_k(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= 120|f(x^2)| - \sum_{k=1}^n |h_k(x)| \\ &= 120(1 - x^2) - \{-h_1(x) - h_2(x) - h_3(x) - \cdots - h_n(x)\} \\ &= 120(1 - x^2) + h_1(x) + h_2(x) + h_3(x) + \cdots + h_n(x) \\ \therefore g'(x) &= -240x + h_1'(x) + h_2'(x) + h_3'(x) + \cdots + h_n'(x) \end{aligned}$$

2단계 n 의 값 구하기

함수 $g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 미분가능하려면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} g'(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -1+} \{-240x + h_1'(x) + h_2'(x) + h_3'(x) + \cdots + h_n'(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \{240x + h_1'(x) - h_2'(x) + h_3'(x) - \cdots - (-1)^n h_n'(x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &240 + h_1'(-1) + h_2'(-1) + h_3'(-1) + \cdots + h_n'(-1) \\ &= -240 + h_1'(-1) - h_2'(-1) + h_3'(-1) - \cdots - (-1)^n h_n'(-1) \end{aligned}$$

..... ㉠

$h_k(x) = (x^k - 1)e^{x+1}$ 에서

$$\begin{aligned} h_k'(x) &= kx^{k-1}e^{x+1} + (x^k - 1)e^{x+1} \\ &= (x^k + kx^{k-1} - 1)e^{x+1} \end{aligned}$$

$$\therefore h_k'(-1) = (-1)^k + k(-1)^{k-1} - 1$$

$$= \begin{cases} k - 2 & (k \text{는 홀수}) \\ -k & (k \text{는 짝수}) \end{cases}$$

(i) $n = 1$ 일 때,

㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $n = 2m$ (m 은 자연수)일 때,

㉠에서

$$480 + 2\{h_2'(-1) + h_4'(-1) + \cdots + h_{2m}'(-1)\} = 0$$

$$480 + 2(-2 - 4 - \cdots - 2m) = 0$$

$$480 - 4(1 + 2 + \cdots + m) = 0$$

$$480 - 4 \times \frac{m(m+1)}{2} = 0$$

$$m^2 + m - 240 = 0$$

$$(m+16)(m-15) = 0$$

$$\therefore m = 15 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

$$\therefore n = 2 \times 15 = 30$$

(iii) $n = 2m + 1$ (m 은 자연수)일 때,

㉠에서

$$480 + 2\{h_2'(-1) + h_4'(-1) + \cdots + h_{2m}'(-1)\} = 0$$

$$480 + 2(-2 - 4 - \cdots - 2m) = 0$$

$$480 - 4(1 + 2 + \cdots + m) = 0$$

$$480 - 4 \times \frac{m(m+1)}{2} = 0$$

$$m^2 + m - 240 = 0, (m+16)(m-15) = 0$$

$$\therefore m = 15 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

$$\therefore n = 2 \times 15 + 1 = 31$$

3단계 n 의 값의 합 구하기

(i), (ii), (iii)에서 자연수 n 의 값은 30, 31이므로 그 합은

$$30 + 31 = 61$$

step ① 핵심 문제

| 54~55쪽

01 ③	02 2	03 $\frac{7}{5}$	04 ②	05 ④	06 $\frac{24}{25}$
07 ⑤	08 ③	09 ⑤	10 2	11 ④	12 6

01 답 ③

$$\begin{aligned}\tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \text{이므로} \\ \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} &= \frac{5}{2} \\ \therefore (\csc \theta + \sec \theta)^2 - \csc^2 \theta \sec^2 \theta &= \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= 2 \times \frac{5}{2} = 5\end{aligned}$$

02 답 2

$$\begin{aligned}\csc \theta \sec \theta \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \dots \dots \textcircled{1} \\ \overline{OA} = \overline{OB} &= 2 \text{이므로} \\ \overline{AP} = \overline{OA} \tan \theta &= 2 \tan \theta \\ \overline{OH} = \overline{OB} \cos \theta &= 2 \cos \theta \\ \overline{BH} = \overline{OB} \sin \theta &= 2 \sin \theta \\ \overline{AP} = \overline{OH} \times \overline{BH} &\text{이므로} \\ 2 \tan \theta &= 2 \cos \theta \times 2 \sin \theta, \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \theta > 0 &\text{이므로 } \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \\ \therefore \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서} \\ \csc \theta \sec \theta \cot \theta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} = 2\end{aligned}$$

03 답 $\frac{7}{5}$

$$\begin{aligned}(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta) &= \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad \dots \dots \textcircled{1} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \alpha + \beta < \pi &\text{이므로} \\ \sin(\alpha + \beta) &> 0 \\ \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서} \\ (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta) &= \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{9}{10} = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

04 답 ②

두 직선 $x - 2y - 3 = 0$, $ax + y + 2 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, $y = -ax - 2$ 가
x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = -a$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$\begin{aligned}\tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{1}{2} - (-a)}{1 + \frac{1}{2} \times (-a)} \right| = \left| \frac{1+2a}{2-a} \right|\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \left| \frac{1+2a}{2-a} \right| = 3 \text{이므로}$$

$$1+2a=3(2-a) \text{ 또는 } 1+2a=-3(2-a)$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1+7=8$$

05 답 ④

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

$$\angle C = \angle B = \beta$$

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로

$$\alpha + 2\beta = \pi \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta = \pi - \beta \text{이므로}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta$$

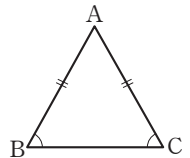
$$\text{즉, } -\tan \beta = -\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \alpha = \pi - 2\beta \text{이므로}$$

$$\tan \alpha = \tan(\pi - 2\beta) = -\tan 2\beta$$

$$= -\frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = -\frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{12}{5}$$

06 답 $\frac{24}{25}$

직각삼각형 AOB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{3}{5}$$

삼각형 OCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{CD}^2}{2 \times \overline{OC} \times \overline{OD}} \\ &= \frac{5^2 + 5^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 5 \times 5} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \beta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{24}{25}$$

07 답 ⑤

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ 에서 $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2}\sin\alpha + 4\cos\beta \\ &= 2\sqrt{2}\sin\alpha + 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ &= 2\sqrt{2}\sin\alpha + 4\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) \\ &= 2\sqrt{2}\sin\alpha + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) \\ &= 4\sqrt{2}\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha \\ &= 2\sqrt{10}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right) \\ &= 2\sqrt{10}\sin(\theta + \alpha) \quad \left(\text{단, } \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \text{이므로} \\ &-2\sqrt{10} \leq 2\sqrt{10}\sin(\theta + \alpha) \leq 2\sqrt{10} \\ &\text{따라서 구하는 최댓값은 } 2\sqrt{10} \text{이다.} \end{aligned}$$

08 답 ③

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2n+1)x - \tan(2n-3)x}{\sin 4nx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{\tan(2n+1)x}{x} - \frac{\tan(2n-3)x}{x} \right\} \times \frac{x}{\sin 4nx} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{\tan(2n+1)x}{(2n+1)x} \times (2n+1) - \frac{\tan(2n-3)x}{(2n-3)x} \times (2n-3) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{4nx}{\sin 4nx} \times \frac{1}{4n} \right] \\ &= \{1 \times (2n+1) - 1 \times (2n-3)\} \times 1 \times \frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{n} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

09 답 ⑤

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$x \neq 0 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{a - 4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - 4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2} = f(0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(a - 4\cos\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \text{에서}$$

$$a - 4 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\left(1 - \cos^2\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2 \times \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2 \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x} \right\} \\ &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} \\ \therefore a \times f(0) &= 4 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

10 답 2

$P(t, \sin t)$ ($0 < t < \pi$), $Q(t, 0)$ 이므로

$$\overline{OQ} = t, \overline{PQ} = \sin t, \overline{OP} = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{t^2 + \sin^2 t}$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ} = \sin t \text{ 이므로}$$

$$\overline{OR} = \overline{OP} - \overline{PR} = \sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t)}{(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t)(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} + \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= \sqrt{1 + 1^2} + 1 = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=1$ 이므로

$$a+b=2$$

11 답 ④

$f(x) = e^x \sin x \cos x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \sin x \cos x + e^x \cos x \cos x - e^x \sin x \sin x \\ &= e^x (\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

방정식 $f(x) = f'(x)$ 에서

$$e^x \sin x \cos x = e^x (\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$e^x \cos 2x = 0 \quad \therefore \cos 2x = 0 \quad (\because e^x > 0)$$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq 2x < 4\pi$ 이므로

$$2x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 2x = \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{5}{2}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{7}{2}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 방정식 $f(x) = f'(x)$ 를 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

12 답 6

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$g(x) = \begin{cases} (\cos x + 1) \sin x & (x \leq 0) \\ x^3 + ax^2 + bx + c & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^3 + ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow 0-} (\cos x + 1) \sin x$$

$\therefore c=0$ 배점 30%

미분계수 $g'(0)$ 이 존재하고,

$$g'(x) = \begin{cases} -\sin^2 x + (\cos x + 1) \cos x & (x < 0) \\ 3x^2 + 2ax + b & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (3x^2 + 2ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{-\sin^2 x + (\cos x + 1) \cos x\}$$

$\therefore b=2$ 배점 30%

$g(-\pi) = g(1)$ 에서

$$0 = 1 + a + 2 \quad \therefore a = -3 \quad \text{..... 배점 30\%}$$

따라서 $g(x) = \begin{cases} (\cos x + 1) \sin x & (x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 2x & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$g(3) = 27 - 27 + 6 = 6 \quad \text{..... 배점 10\%}$$

step 2 고난도 문제

| 56~59쪽

01 $\frac{7}{65}$	02 4	03 ④	04 ③	05 ⑤	06 5
07 ③	08 11	09 12	10 ④	11 20	12 ②
13 8	14 ①	15 4	16 ④	17 $\frac{1}{3}$	18 ④
19 ③	20 ⑤	21 $\pi + 4$			

01 답 $\frac{7}{65}$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 이므로 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

$$(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) = 1$$

이때 $\sec \theta + \tan \theta = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\sec \theta - \tan \theta = \frac{2}{3}$$

위의 식과 $\sec \theta + \tan \theta = \frac{3}{2}$ 을 연립하여 풀면

$$\sec \theta = \frac{13}{12}, \tan \theta = \frac{5}{12} \quad \therefore \cos \theta = \frac{12}{13}, \cot \theta = \frac{12}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{이므로 } \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{5}{12} \cos \theta = \frac{5}{12} \times \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \quad \therefore \csc \theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\csc \theta + \cot \theta} = \frac{\frac{12}{13} - \frac{5}{13}}{\frac{13}{5} + \frac{12}{5}} = \frac{\frac{7}{13}}{\frac{25}{5}} = \frac{7}{65}$$

02 답 4

직선 l 의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y = mx$$

이 직선이 곡선 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ 과 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α ,

β 라 하면 방정식 $mx = -\frac{1}{4}x^2 + 1$, 즉 $x^2 + 4mx - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4m, \alpha\beta = -4 \quad \text{..... } \ominus \quad \text{..... 배점 30\%}$$

$A(\alpha, m\alpha)$, $B(\beta, m\beta)$ 이고 $\overline{AB} = 5$ 에서 $\overline{AB}^2 = 25$ 이므로

$$(\beta - \alpha)^2 + (m\beta - m\alpha)^2 = 25$$

$$(1 + m^2)(\beta - \alpha)^2 = 25$$

$$(1 + m^2)\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = 25$$

$$(1 + m^2)(16m^2 + 16) = 25 \quad (\because \ominus)$$

$$16m^4 + 32m^2 - 9 = 0, (4m^2 + 9)(4m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 > 0 \text{이므로 } m^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore m = \frac{1}{2} \quad (\because m > 0) \quad \text{..... 배점 30\%}$$

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \quad \text{..... 배점 10\%}$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{\csc \theta + \cot \theta} + \frac{\cos \theta}{\csc \theta - \cot \theta}$$

$$= \cos \theta \times \frac{2 \csc \theta}{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta}$$

$$= \cos \theta \times 2 \csc \theta \quad (\because 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta)$$

$$= \cos \theta \times \frac{2}{\sin \theta} = \frac{2}{\tan \theta}$$

$$= 2 \times 2 = 4 \quad \text{..... 배점 30\%}$$

03 답 ④

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로 $\sec \alpha > 0$

$$\therefore \sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{13}{12}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ 에서 $\sin \alpha < 0$ 이므로

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x > 0$ 이므로 $\cos x \leq \sin(x + \alpha) \leq 2 \cos x$ 의 양변을

$\cos x$ 로 나누면

$$1 \leq \frac{\sin(x + \alpha)}{\cos x} \leq 2$$

$$1 \leq \frac{\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha}{\cos x} \leq 2$$

$$1 \leq \tan x \cos \alpha + \sin \alpha \leq 2$$

$$1 \leq \frac{12}{13} \tan x - \frac{5}{13} \leq 2$$

$$\frac{18}{13} \leq \frac{12}{13} \tan x \leq \frac{31}{13}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq \tan x \leq \frac{31}{12}$$

따라서 $\tan x$ 의 최댓값은 $\frac{31}{12}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이므로 그 합은

$$\frac{31}{12} + \frac{3}{2} = \frac{49}{12}$$

04 답 ③

$\sin \alpha - \cos \beta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\cos \alpha + \sin \beta = \sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 4$$

$$2 - 2(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = 4$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = -1$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = -1$$

이때 $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ 에서 $-\pi < \alpha - \beta < \pi$ 이므로

$$\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \quad \therefore \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\sin \alpha - \cos \beta = 1$ 에 대입하면

$$\sin \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1$$

$$\sin \alpha - (-\sin \alpha) = 1$$

$$2 \sin \alpha = 1 \quad \therefore \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) (\because \textcircled{3})$$

$$= \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

05 답 ⑤

$$g\left(-\frac{3}{5}\right) = a, \quad g\left(\frac{12}{13}\right) = \beta \text{라 하면}$$

$$f(\alpha) = -\frac{3}{5}, \quad f(\beta) = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{12}{13}$$

함수 $f(x)$ 가 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 정의되므로

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

즉, $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\theta_1 = g\left(-\frac{3}{5}\right) + g\left(\frac{12}{13}\right) = \alpha + \beta, \quad \theta_2 = g\left(-\frac{3}{5}\right) - g\left(\frac{12}{13}\right) = \alpha - \beta \text{이므로}$$

$$f(\theta_2) - f(\theta_1) = f(\alpha - \beta) - f(\alpha + \beta)$$

$$= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{8}{13}$$

06 답 5

α, β, γ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$3\beta = \pi \quad \therefore \beta = \frac{\pi}{3}$$

$\cos \alpha, 2 \cos \beta, 8 \cos \gamma$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(2 \cos \beta)^2 = \cos \alpha \times 8 \cos \gamma$$

$$\text{이때 } 2 \cos \beta = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{이므로}$$

$$1 = 8 \cos \alpha \cos \gamma \quad \therefore \cos \alpha \cos \gamma = \frac{1}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \alpha + \gamma = 2\beta = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \text{에서}$$

$$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \sin \alpha \sin \gamma (\because \textcircled{3}) \quad \therefore \sin \alpha \sin \gamma = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \tan \alpha \tan \gamma = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \gamma} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}} = 5$$

07 답 ③

두 삼각형 ABE, ABF에서

$$\angle AEB = \angle AFB = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle FAB = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \text{라 하면}$$

직각삼각형 FAB에서

$$\overline{AF} = \overline{AB} \cos \alpha = 5 \cos \alpha$$

직각삼각형 FAD에서

$$\overline{AD} = \overline{AF} \cos \alpha = 5 \cos^2 \alpha$$

이때 $\overline{AC} = 4$ 이고 점 D는 선분 AC의 중점이므로

$$\overline{AD} = 2$$

즉, $5 \cos^2 \alpha = 2$ 이므로

$$\cos^2 \alpha = \frac{2}{5} \quad \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5} \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

또 $\angle EAB = \beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 직각삼각형 EAB에서

$$\overline{AE} = \overline{AB} \cos \beta = 5 \cos \beta$$

직각삼각형 EAC에서

$$\overline{AC} = \overline{AE} \cos \beta = 5 \cos^2 \beta$$

즉, $5 \cos^2 \beta = 4$ 이므로

$$\cos^2 \beta = \frac{4}{5} \quad \therefore \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \left(\because 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \beta > 0$ 이므로

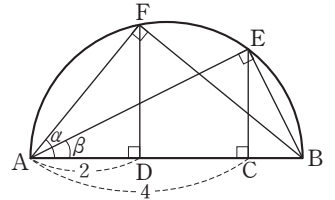
$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\sin \theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5}$$



다른 풀이

반원의 중심을 O라 하자.

$$\overline{AC}=4 \text{이므로 } \overline{AD}=2$$

$$\overline{OA}=\frac{5}{2} \text{이므로 } \overline{OD}=\overline{OA}-\overline{AD}=\frac{1}{2}$$

직각삼각형 FDO에서 $\overline{OF}=\frac{5}{2}$ 이므로

$$\overline{FD}=\sqrt{\overline{OF}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$$

직각삼각형 FAD에서

$$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{FD}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$$

$\angle FAD=\alpha$ 라 하면

$$\sin \alpha=\frac{\overline{FD}}{\overline{AF}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{15}}{5}, \cos \alpha=\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

직각삼각형 EOC에서 $\overline{OE}=\frac{5}{2}, \overline{OC}=\overline{OB}-\overline{BC}=\frac{3}{2}$ 이므로

$$\overline{EC}=\sqrt{\overline{OE}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$$

직각삼각형 EAC에서

$$\overline{EA}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{EC}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

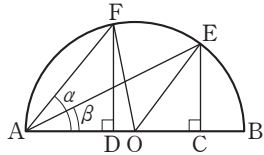
$\angle EAC=\beta$ 라 하면

$$\sin \beta=\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{EA}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때 $\theta=\alpha-\beta$ 이므로

$$\sin \theta=\sin (\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$$



08 답 11

$\angle OPA=\alpha, \angle OPB=\beta$ 라 하자.

두 삼각형 POA, POB에서

$$\angle POA=\angle POB=\frac{\pi}{2},$$

$\overline{AO}=\overline{BO}$, 변 OP는 공통이므로

$\triangle POA \cong \triangle POB$ (RHS 합동)

$$\therefore \angle QPA=\angle QPB=\alpha$$

또 두 삼각형 PRB, POB에서

$$\angle PRB=\angle POB=\frac{\pi}{2},$$

$\overline{BR}=\overline{BO}$, 변 BP는 공통이므로

$\triangle PRB \cong \triangle POB$ (RHS 합동)

$$\therefore \angle RPB=\angle OPB=\beta$$

$$\angle RPQ=\theta=2(\alpha+\beta) \text{이므로 } \tan \theta=\frac{4}{3} \text{에서}$$

$$\tan 2(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}$$

$$\frac{2 \tan (\alpha+\beta)}{1-\tan ^2(\alpha+\beta)}=\frac{4}{3}$$

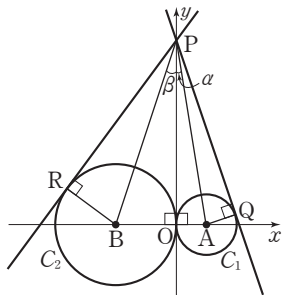
$$\tan (\alpha+\beta)=t \text{로 놓으면}$$

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$$

$$2t^2+3t-2=0$$

$$(t+2)(2t-1)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$



$$0<\theta<\pi \text{이고 } \tan \theta=\frac{4}{3}>0 \text{이므로}$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{4}$$

$$\text{즉, } 0<\tan (\alpha+\beta)<1 \text{에서 } 0<t<1 \text{이므로}$$

$$t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan (\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$$

$\overline{OP}=a$ 이므로 직각삼각형 POA에서

$$\tan \alpha=\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{1}{a}$$

직각삼각형 POB에서

$$\tan \beta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}=\frac{2}{a}$$

$$\therefore \tan (\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{a}}{1-\frac{1}{a} \times \frac{2}{a}}=\frac{3a}{a^2-2}$$

$$\text{즉, } \frac{3a}{a^2-2}=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a^2-6a-2=0, (a-3)^2-11=0$$

$$\therefore (a-3)^2=11$$

idea
09 답 12

그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하고 직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라 하면 $\overline{OH_1}=t, \overline{AH_1}=6$ 이므로

$$\tan \alpha=\frac{\overline{AH_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{6}{t}$$

또 원점을 지나고 직선 l과 평행한 직선을 m이라 할 때, 직선 m이 직선 OA와 이루는 예각의 크기를 β , 점 A에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H_2 라 하자.

직선 l은 원 C_1 에 접하고 직선 m은 원 C_1 의 중심을 지나므로 두 직선 l, m 사이의 거리는 원 C_1 의 반지름의 길이와 같다.

즉, 선분 AH_2 의 길이는 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이의 합과 같으므로 $\overline{AH_2}=3+3=6$

$$\angle AH_1O=\angle AH_2O=\frac{\pi}{2}, \overline{AH_1}=\overline{AH_2}, \text{ 변 OA는 공통이므로}$$

$\triangle OAH_1 \cong \triangle OAH_2$ (RHS 합동)

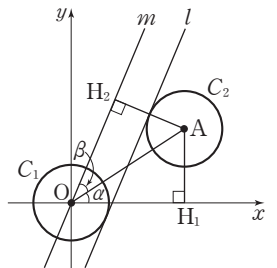
$$\therefore \beta=\alpha$$

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\alpha+\beta=2\alpha$ 이므로 직선 l의 기울기 $f(t)$ 는

$$f(t)=\tan 2\alpha=\frac{2 \tan \alpha}{1-\tan ^2 \alpha}$$

$$=\frac{2 \times \frac{6}{t}}{1-\frac{36}{t^2}}=\frac{12t}{t^2-36}$$

$$\therefore \lim _{t \rightarrow \infty} t f(t)=\lim _{t \rightarrow \infty} \frac{12 t^2}{t^2-36}=12$$



다른 풀이

직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{6}{t}$$

두 직선 l, OA가 이루는 예각의 크기를 β 라 하고 두 직선 l, OA가 만나는 점을 M, 직선 l이 원 C_1 과 만나는 점을 H_1 , 직선 l이 원 C_2 와 만나는 점을 H_2 라 하자.

$$\overline{OH_1} = \overline{AH_2} = 3, \angle OMH_1 = \angle AMH_2, \angle OH_1M = \angle AH_2M = \frac{\pi}{2}$$

므로

$$\triangle OMH_1 \equiv \triangle AMH_2 \text{ (ASA 합동)}$$

따라서 $\overline{OM} = \overline{AM}$ 이고 $\overline{OA} = \sqrt{t^2 + 36}$ 이므로

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{t^2 + 36}}{2}$$

$$\therefore \overline{MH_1} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OH_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{t^2 + 36}}{2}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{t}{2}$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{\overline{OH_1}}{\overline{MH_1}} = \frac{3}{\frac{t}{2}} = \frac{6}{t}$$

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\alpha + \beta$ 이므로

$$f(t) = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{6}{t} + \frac{6}{t}}{1 - \frac{6}{t} \times \frac{6}{t}} = \frac{12t}{t^2 - 36}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} t f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12t^2}{t^2 - 36} = 12$$

10 답 ④

$$f(x) = \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sqrt{2} \sin x \cos x$$

$$= \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right)$$

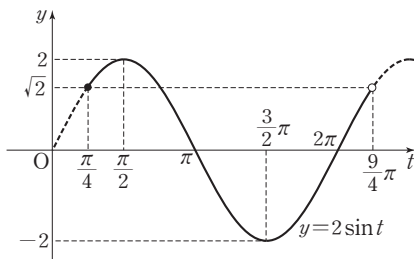
$$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \right)$$

$$= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < \pi \text{에서}$$

$$0 \leq 2x < 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$$

$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$ 에서 함수 $y = 2 \sin t$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 n의 값에 따라 직선 $y = \sqrt{n}$ 을 그어 보면

$$a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = 0, a_9 = 0,$$

$$a_{10} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \\ &= 2 + 2 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

11 답 20

$$\overline{OA} = 1, \overline{OB} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \overline{OA} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\overline{BD} = \overline{OB} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$= 2 \cos \theta$$

$$\therefore \overline{AC} + \overline{BD}$$

$$= \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \theta + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \theta \right)$$

$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \beta) \quad \left(\text{단, } \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$\sin \beta > 0, \cos \beta > 0$ 이므로 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 라 하면

$$0 < \theta + \beta < \pi$$

이때 $\sqrt{5} \sin(\theta + \beta)$ 는 $\sin(\theta + \beta) = 1$, 즉 $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ 일 때 최댓값을 가

지므로

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

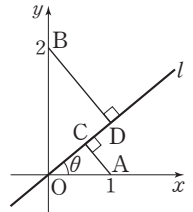
$$\therefore 25 \sin 2\alpha = 25 \sin(\pi - 2\beta)$$

$$= 25 \sin 2\beta$$

$$= 25 \times 2 \sin \beta \cos \beta$$

$$= 25 \times 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= 20$$



12 답 ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} - \sin x}{x^2 \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x^2 \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right)}{x^2 \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)}{x^2 \tan x \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right)}{x^2 \tan x \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^3 \frac{x}{2}}{x^2 \tan x \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 2 \times \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^3} \times \frac{1}{8} \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{1 + \cos \frac{x}{2}} \right\}$$

$$= 2 \times 1^3 \times \frac{1}{8} \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

13 답 8

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n)}{x^4(\sec 2x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times \cos 2x}{x^4 \left(\frac{1}{\cos 2x} - 1 \right) \times \cos 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times \cos 2x}{x^4(1-\cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times \cos 2x (1+\cos 2x)}{x^4(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times \cos 2x (1+\cos 2x)}{x^4(1-\cos^2 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times \cos 2x (1+\cos 2x)}{x^4 \sin^2 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} \times \frac{(2x)^2}{\sin^2 2x} \times \frac{1}{4} \times \cos 2x (1+\cos 2x) \times x^{n-6} \right\} \\
 &= 1 \times 1^2 \times \frac{1}{4} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6}
 \end{aligned}$$

이때 $n > 6$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6} = 0$, $n < 6$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6}$ 의 값이 존재하지 않음

므로

$$n=6$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \text{ 이므로 } a=2$$

$$\therefore a+n=2+6=8$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n)}{x^4(\sec 2x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times (\sec 2x+1)}{x^4(\sec 2x-1)(\sec 2x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times (\sec 2x+1)}{x^4(\sec^2 2x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^n) \times (\sec 2x+1)}{x^4 \tan^2 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} \times \frac{(2x)^2}{\tan^2 2x} \times \frac{1}{4} \times (\sec 2x+1) \times x^{n-6} \right\} \\
 &= 1 \times 1^2 \times \frac{1}{4} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6} = \frac{1}{a} \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-6} = \frac{2}{a}$$

이때 a 는 자연수이므로 $n=6$, $a=2$

$$\therefore a+n=8$$

14 답 ①

(나)에서 삼차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3이고, (b)에서 $f(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있으므로 $f(x)=3x^3+ax$ (a 는 상수)라 하면 (a)에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^3+ax)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^3+ax)}{3x^3+ax} \times (3x^2+a) \right\} \\
 &= 1 \times a = a
 \end{aligned}$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore f(x)=3x^3+2x$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x)}{\tan f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan^3 x + 2 \tan x}{\tan(3x^3+2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (3 \tan^2 x + 2) \times \frac{\tan x}{x} \times \frac{3x^3+2x}{\tan(3x^3+2x)} \times \frac{1}{3x^2+2} \right\} \\
 &= 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

15 답 4

$\overline{OP}=1$ 이므로 점 P의 x 좌표는

$$\overline{OP} \cos \theta = \cos \theta$$

점 P의 y 좌표는

$$\overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\therefore P(\cos \theta, \sin \theta)$$

점 Q의 y 좌표는 점 P의 y 좌표와 같으므로 점 Q의 x 좌표를 구하면

$$\ln x = \sin \theta$$

$$\therefore x = e^{\sin \theta}$$

$$\therefore Q(e^{\sin \theta}, \sin \theta), R(e^{\sin \theta}, 0)$$

$$\therefore \overline{PQ} = e^{\sin \theta} - \cos \theta, \overline{QR} = \sin \theta, \overline{AR} = e^{\sin \theta} - 1$$

한편 삼각형 POA에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}
 \overline{AP}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OP}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OP} \times \cos \theta \\
 &= 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \theta \\
 &= 2 - 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{2(1-\cos \theta)}$$

따라서 사각형 APQR의 둘레의 길이 $l(\theta)$ 는

$$\begin{aligned}
 l(\theta) &= \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{AR} + \overline{AP} \\
 &= e^{\sin \theta} - \cos \theta + \sin \theta + e^{\sin \theta} - 1 + \sqrt{2(1-\cos \theta)} \\
 &= 2e^{\sin \theta} - \cos \theta + \sin \theta - 1 + \sqrt{2(1-\cos \theta)} \\
 \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{l(\theta)}{\theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2e^{\sin \theta} - \cos \theta + \sin \theta - 1 + \sqrt{2(1-\cos \theta)}}{\theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2(e^{\sin \theta} - 1)}{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\sqrt{2(1-\cos \theta)}}{\theta} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2(e^{\sin \theta} - 1)}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta(1 + \cos \theta)} + \frac{\sin \theta}{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{2(1-\cos \theta)(1 + \cos \theta)}}{\theta \sqrt{1 + \cos \theta}} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2(e^{\sin \theta} - 1)}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} + \frac{\sin \theta}{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{2(1-\cos^2 \theta)}}{\theta \sqrt{1 + \cos \theta}} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2(e^{\sin \theta} - 1)}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} + \frac{\sin \theta}{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{2 \sin^2 \theta}}{\theta \sqrt{1 + \cos \theta}} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2(e^{\sin \theta} - 1)}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \frac{\theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} \right\} \\
 &= 2 \times 1 \times 1 + 1^2 \times 0 + 1 + 1 \times 1 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

16 **답** ④

$\overline{OP}=1$ 이므로 직각삼각형 OHP에서

$$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$$

$$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OH}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\angle QPO=\frac{\pi}{2}\text{이므로 } \angle AQR=\frac{\pi}{2}-\theta$$

직각삼각형 OQP에서

$$\overline{OQ}=\frac{\overline{OP}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore \overline{AQ}=\overline{OQ}-\overline{OA}=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}\therefore g(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{AQ}^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)} &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\frac{1}{2}\theta\sin\theta\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{2(1-\cos\theta)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\sin\theta\cos^2\theta} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\sin\theta\cos^2\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{2(1-\cos^2\theta)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\sin\theta\cos^2\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{2\sin\theta\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\cos^2\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\left\{2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta(1+\cos\theta)}\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\} \\ &= 2\times 1\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

17 **답** $\frac{1}{3}$

$\overline{OB}=x(x>0)$ 라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\theta$$

$$3^2=1^2+x^2-2\times 1\times x\times\cos\theta$$

$$x^2-2x\cos\theta-8=0$$

$$\therefore x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}$

즉, $\overline{OB}=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}$ 이므로

$$\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}=4-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OHA에서

$$\overline{AH}=\overline{OA}|\sin\theta|=|\sin\theta|$$

$$\begin{aligned}\therefore S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{BC} \\ &=\frac{1}{2}|\sin\theta|(4-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+8})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{\sin\theta(4-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+8})}{2\theta^3} \quad \rightarrow \theta\rightarrow 0\text{일 때, } \sin\theta>0\text{이다.} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{\sin\theta(4-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+8})(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})}{2\theta^3(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{\sin\theta\{(4-\cos\theta)^2-(\cos^2\theta+8)\}}{2\theta^3(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{8\sin\theta(1-\cos\theta)}{2\theta^3(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{4\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^3(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{4\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\theta^3(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{4\sin^3\theta}{\theta^3(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\left\{\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{4}{(4-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8})(1+\cos\theta)}\right\} \\ &= 1^3\times\frac{4}{6\times 2}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

18 **답** ④

$\overline{AB}=2$, $\angle BPA=\frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$$

$\angle ACP=\pi-3\theta$ 이므로 삼각형 ACP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{PC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}$$

$$\frac{2\cos\theta}{\sin 3\theta}=\frac{\overline{PC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}$$

$$\therefore \overline{PC}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}, \quad \overline{AC}=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}$$

두 삼각형 PEC, AED에서

$$\angle PCE=\angle ADE=\frac{\pi}{2}, \quad \angle PEC=\angle AED\text{이므로}$$

$\triangle PEC\sim\triangle AED$ (AA 답음)

$$\therefore \angle DAE=\angle CPE=2\theta$$

$\angle DAC=3\theta$ 이므로 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AD}=\overline{AC}\cos 3\theta=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$$

직각삼각형 AED에서

$$\overline{ED}=\overline{AD}\tan 2\theta=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta\tan 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\begin{aligned}\therefore S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{ED}\times\overline{PC} \\ &=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta\tan 2\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \\ &=\frac{\sin^2 2\theta\cos\theta\cos 3\theta\tan 2\theta}{\sin^2 3\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{S(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\frac{\sin^2 2\theta\cos\theta\cos 3\theta\tan 2\theta}{\theta\sin^2 3\theta} \\ &= \lim_{\theta\rightarrow 0^+}\left\{\frac{\sin^2 2\theta}{(\theta)^2}\times\frac{(3\theta)^2}{\sin^2 3\theta}\times\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\times\frac{8}{9}\cos\theta\cos 3\theta\right\} \\ &= 1^2\times 1^2\times 1\times\frac{8}{9}\times 1=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

19 답 ③

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^2 \sin x - x^2 \sin t}{t - x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^2 \sin x - x^2 \sin x + x^2 \sin x - x^2 \sin t}{t - x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t^2 - x^2) \sin x + x^2 (\sin x - \sin t)}{t - x} \\
 &= \sin x \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t+x)(t-x)}{t-x} - x^2 \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} \\
 &= \sin x \lim_{t \rightarrow x} (t+x) - x^2 \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} \\
 &= 2x \sin x - x^2 \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} \\
 \text{이때 } g(t) &= \sin t \text{라 하면 } g'(t) = \cos t \text{이므로} \\
 f(x) &= 2x \sin x - x^2 \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} \\
 &= 2x \sin x - x^2 \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t-x} \\
 &= 2x \sin x - x^2 g'(x) = 2x \sin x - x^2 \cos x \\
 \therefore f'(x) &= 2 \sin x + 2x \cos x - (2x \cos x - x^2 \sin x) \\
 &= (x^2 + 2) \sin x \\
 \therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{4} + 2
 \end{aligned}$$

20 답 ⑤

$h - n\pi = t$ 로 놓으면 $h \rightarrow n\pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 a_n &= \lim_{h \rightarrow n\pi} \frac{f(2h + n\pi) - f(4h - n\pi)}{\sin h} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3n\pi + 2t) - f(3n\pi + 4t)}{\sin(n\pi + t)} \quad \begin{matrix} 2h + n\pi = 2(n\pi + t) + n\pi = 3n\pi + 2t \\ 4h - n\pi = 4(n\pi + t) - n\pi = 3n\pi + 4t \end{matrix} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3n\pi + 2t) - f(3n\pi) + f(3n\pi) - f(3n\pi + 4t)}{t} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{t}{\sin(n\pi + t)} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3n\pi + 2t) - f(3n\pi)}{2t} \times 2 - \frac{f(3n\pi + 4t) - f(3n\pi)}{4t} \times 4 \right\} \\
 &\quad \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} \\
 &= \{2f'(3n\pi) - 4f'(3n\pi)\} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} \\
 &= -2f'(3n\pi) \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} \quad \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \sin x + \cos x + x^3 - 2x \text{에서} \\
 f'(x) &= 2x \sin x + x^2 \cos x - \sin x + 3x^2 - 2 \\
 &= (2x - 1) \sin x + x^2 \cos x + 3x^2 - 2 \\
 \therefore f'(3n\pi) &= 9n^2 \pi^2 \cos 3n\pi + 27n^2 \pi^2 - 2
 \end{aligned}$$

(i) n 이 홀수일 때,

$$\begin{aligned}
 \cos 3n\pi &= -1 \text{이므로} \\
 f'(3n\pi) &= 9n^2 \pi^2 \cos 3n\pi + 27n^2 \pi^2 - 2 \\
 &= -9n^2 \pi^2 + 27n^2 \pi^2 - 2 = 18n^2 \pi^2 - 2 \\
 \sin(n\pi + t) &= -\sin t \text{이므로} \\
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\sin t} = -1 \\
 \text{따라서 ①에서} \\
 a_n &= -2f'(3n\pi) \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} \\
 &= -2(18n^2 \pi^2 - 2) \times (-1) = 36n^2 \pi^2 - 4
 \end{aligned}$$

(ii) n 이 짝수일 때,

$$\begin{aligned}
 \cos 3n\pi &= 1 \text{이므로} \\
 f'(3n\pi) &= 9n^2 \pi^2 \cos 3n\pi + 27n^2 \pi^2 - 2 \\
 &= 9n^2 \pi^2 + 27n^2 \pi^2 - 2 = 36n^2 \pi^2 - 2 \\
 \sin(n\pi + t) &= \sin t \text{이므로} \\
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1 \\
 \text{따라서 ①에서} \\
 a_n &= -2f'(3n\pi) \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(n\pi + t)} \\
 &= -2(36n^2 \pi^2 - 2) \times 1 = -72n^2 \pi^2 + 4
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}
 a_n &= \begin{cases} 36n^2 \pi^2 - 4 & (n \text{은 홀수}) \\ -72n^2 \pi^2 + 4 & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \\
 \therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= (36\pi^2 - 4) + (-72 \times 2^2 \pi^2 + 4) + (36 \times 3^2 \pi^2 - 4) \\
 &\quad + (-72 \times 4^2 \pi^2 + 4) \\
 &= 36\pi^2(1 - 2 \times 2^2 + 3^2 - 2 \times 4^2) \\
 &= -30 \times 36\pi^2 \\
 \therefore p &= -30
 \end{aligned}$$

21 답 $\pi + 4$

$g(x) = f(x) \sin x$ 에서

$$g'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x \quad \dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g'(0) = f(0)$$

(*)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{x} = 8$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$ 에서

$$g'(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{x} = 8$ 의 좌변에 ①을 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \sin x + f(x) \cos x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f'(x) \times \frac{\sin x}{x} + \frac{f(x) - f(0)}{x} \times \cos x \right\} \\
 &= f'(0) \times 1 + f'(0) \times 1 \\
 &= 2f'(0)
 \end{aligned}$$

즉, $2f'(0) = 8$ 이므로

$$f'(0) = 4 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$ 이므로 $f(x)$ 는 이차 이상의 함수이다.

(i) $f(x)$ 가 이차함수일 때,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + ax \text{ (a는 상수)라 하면} \\
 f'(x) &= 2x + a \\
 f'(0) &= 4 \text{에서 } a = 4 \\
 \text{따라서 } f(x) &= x^2 + 4x \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 4x) \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \sin x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

이는 (*)를 만족시킨다.

(ii) $f(x)$ 가 삼차 이상의 함수일 때,

3 이상의 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x \quad (a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \text{은 상수})$$

라 하면

$$f'(x) = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$$

$$f'(0) = 4 \text{에서 } a_{n-1} = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + 4x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + 4x) \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{n-3} + a_1x^{n-4} + a_2x^{n-5} + \cdots + 4x^{-2}) \sin x \end{aligned}$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 + 4x$ 배점 40%

따라서 $g(x) = (x^2 + 4x) \sin x$ 이므로

$$g'(x) = (2x + 4) \sin x + (x^2 + 4x) \cos x$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 4 \quad \text{..... 배점 20\%}$$

step 3 최고난도 문제

| 60~61쪽

01 $4 - 2\sqrt{3}$ 02 161 03 ④ 04 2 05 ④
06 50 07 135

01 답 $4 - 2\sqrt{3}$

1단계 직선 PD의 방정식 구하기

그림과 같이 원의 중심 O를 원점으로 하고 정사각형 ABCD의 각 변이 축에 평행하도록 좌표평면 위에 나타내면 원의 반지름의 길이가 1이므로

$$A(1, 1), B(-1, 1), C(-1, -1), D(1, -1)$$

삼각형 OQR은 $OQ = OR$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle QOR$ 의 이등분선이 직선 PD와 만나는 점을 M이라 하면 $OM \perp PD$ 이고, 점 M은 선분 QR의 중점이다.

이때 직선 OM이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)라 하면

직선 OM의 기울기는 $\tan \theta$ 이므로 직선 PD의 기울기는 $-\frac{1}{\tan \theta}$ 이다.

즉, 직선 PD의 방정식은

$$y + 1 = -\frac{1}{\tan \theta}(x - 1)$$

$$\tan \theta(y + 1) = -x + 1$$

$$\therefore x + (\tan \theta)y + \tan \theta - 1 = 0$$

2단계 S^2 구하기

선분 OM의 길이는 원점 O와 직선 PD, 즉 직선

$x + (\tan \theta)y + \tan \theta - 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \frac{|\tan \theta - 1|}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1 - \tan \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta}} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right) \\ &= (1 - \tan \theta) \cos \theta \\ &= \cos \theta - \sin \theta \end{aligned}$$

직각삼각형 OMQ에서

$$\begin{aligned} \overline{MQ} &= \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{1 - (\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{1 - (\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{QR} = 2\overline{MQ} = 2\sqrt{\sin 2\theta}$$

따라서 삼각형 OQR의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{OM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\sin 2\theta} \times (\cos \theta - \sin \theta) \\ &= \sqrt{\sin 2\theta} (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S^2 &= \sin 2\theta (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= \sin 2\theta (\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \sin 2\theta (1 - \sin 2\theta) \\ &= -\sin^2 2\theta + \sin 2\theta \\ &= -\left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3단계 S^2 이 최대가 될 때의 선분 AP의 길이 구하기

따라서 S^2 은 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ 에서

$$2\theta = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{12}$$

한편 직선 PD가 직선 $y = 1$ 과 만나는 점의 x좌표를 구하면

$$x + \tan \theta + \tan \theta - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 - 2 \tan \theta \quad \text{--- 점 P의 x좌표이다.}$$

$$\therefore \overline{AP} = 1 - (1 - 2 \tan \theta) = 2 \tan \theta$$

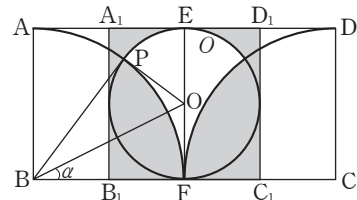
따라서 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 일 때 선분 AP의 길이는

$$\begin{aligned} 2 \tan \frac{\pi}{12} &= 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \times \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \\ &= 2 \times \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\ &= 2 \times \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = 2 \times \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

02 답 161

1단계 선분 EF의 중점을 O라 할 때, $\tan(\angle OBF)$ 의 값 구하기

그림과 같이 선분 EF의 중점을 O, 부채꼴 BAF와 원 O가 만나는 점 중 점 F가 아닌 점을 P라 하자.



$\angle OBF = \alpha$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{BF}} = \frac{1}{2} \quad \text{..... ㉠}$$

2단계 S 구하기

$\overline{OF} = \overline{OP} = 1$, $\overline{BF} = \overline{BP} = 2$, 변 OB는 공통이므로 $\triangle OBF \cong \triangle OBP$ (SSS 합동)

사각형 PBFO의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = 2 \times \triangle OBF = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{OF} \right) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \right) = 2$$

또 $\angle PBF = 2\alpha$ 이므로 중심각이 2α 인 부채꼴 PBF의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 2\alpha = 4\alpha$$

$$\angle BOF = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{이므로}$$

$$\angle FOP = 2\angle BOF = \pi - 2\alpha$$

즉, $\angle POE = 2\alpha$ 이므로 중심각이 2α 인 부채꼴 POE의 넓이를 S_3 이라 하면

$$S_3 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\alpha = \alpha$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= 2 \times \{ \square A_1B_1FE - (S_1 - S_2) - S_3 \} \\ &= 2 \times \{ 2 \times 1 - (2 - 4\alpha) - \alpha \} = 6\alpha \end{aligned}$$

3단계 $\tan S$ 의 값 구하기

㉠에서 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

$$\therefore \tan S = \tan 6\alpha = \tan (2\alpha + 4\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan 4\alpha}{1 - \tan 2\alpha \times \tan 4\alpha}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{24}{7}\right)}{1 - \frac{4}{3} \times \left(-\frac{24}{7}\right)} = -\frac{44}{117}$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=117$, $q=44$ 이므로

$$p+q=161$$

03 답 ④

1단계 $\overline{AP}^2$, $\overline{BP}^2$ 구하기

직선 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$ 이므로 점 P의 x 좌표는

$$\overline{OP} \cos \theta = 2\sqrt{2} \cos \theta$$

점 P의 y 좌표는

$$\overline{OP} \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin \theta$$

$$\therefore P(2\sqrt{2} \cos \theta, 2\sqrt{2} \sin \theta)$$

선분 AP의 길이는 점 P와 직선 $y=\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

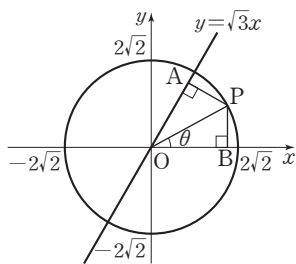
$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= \left\{ \frac{|2\sqrt{6} \cos \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} \right\}^2 = \frac{(2\sqrt{6} \cos \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta)^2}{4} \\ &= (\sqrt{6} \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

또 점 P의 y 좌표가 $2\sqrt{2} \sin \theta$ 이므로

$$\overline{BP}^2 = (2\sqrt{2} \sin \theta)^2$$

2단계 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 식 변형하기

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (\sqrt{6} \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta)^2 + (2\sqrt{2} \sin \theta)^2 \\ &= 6 \cos^2 \theta - 4\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 10 \sin^2 \theta \end{aligned}$$



이때 $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ 에서 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ 이고,

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ 에서 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= 6 \cos^2 \theta - 4\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 10 \sin^2 \theta \\ &= 6 \times \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2\sqrt{3} \sin 2\theta + 10 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 3 + 3 \cos 2\theta - 2\sqrt{3} \sin 2\theta + 5 - 5 \cos 2\theta \\ &= 8 - 2\sqrt{3} \sin 2\theta - 2 \cos 2\theta \\ &= 8 - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \\ &= 8 - 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin 2\theta + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2\theta \right) \\ &= 8 - 4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

3단계 $M+m$ 의 값 구하기

이때 $-1 \leq \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq -4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 4 \quad \therefore 4 \leq 8 - 4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 12$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최댓값은 12, 최솟값은 4이므로

$$M=12, m=4$$

$$\therefore M+m=16$$

04 답 2

1단계 $\overline{AP}^2$, $\overline{PQ}^2$ 구하기

$\overline{OP} = 1$ 이므로 점 P의 x 좌표는

$$\overline{OP} \cos \theta = \cos \theta$$

점 P의 y 좌표는

$$\overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\therefore P(\cos \theta, \sin \theta)$$

이때 $A(r+1, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= (\cos \theta - r - 1)^2 + \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - 2(r+1) \cos \theta + (r+1)^2 + \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2(r+1) \cos \theta + (r+1)^2 \end{aligned}$$

또 $\overline{PQ} \perp \overline{AQ}$ 이므로 직각삼각형 PAQ에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2 = 1 - 2(r+1) \cos \theta + (r+1)^2 - r^2 \\ &= 2 + 2r - 2(r+1) \cos \theta = 2(r+1)(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

2단계 $\overline{QR}^2$ 구하기

$\overline{AQ} = \overline{AR}$, $\angle AQP = \angle ARP = \frac{\pi}{2}$, 변 AP는 공통이므로

$\triangle PAQ \cong \triangle PAR$ (RHS 합동)

사각형 PRAQ의 넓이를 S 라 하면

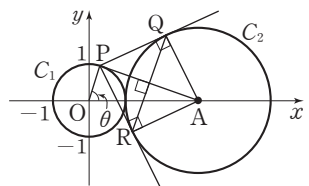
$$S = 2 \times \triangle PAQ = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{AQ} \right) = \overline{PQ} \times \overline{AQ}$$

또 사각형 PRAQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{AP}$ 이므로

$$\overline{PQ} \times \overline{AQ} = \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{AP}$$

따라서 $\overline{QR} = \frac{2 \overline{PQ} \times \overline{AQ}}{\overline{AP}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{QR}^2 &= \frac{4 \overline{PQ}^2 \times \overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} = \frac{4 \times 2(r+1)(1 - \cos \theta) \times r^2}{1 - 2(r+1) \cos \theta + (r+1)^2} \\ &= \frac{8r^2(r+1)(1 - \cos \theta)}{1 - 2(r+1) \cos \theta + (r+1)^2} \end{aligned}$$



3단계 r 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{QR}^2}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8r^2(r+1)(1-\cos\theta)}{\theta^2\{1-2(r+1)\cos\theta+(r+1)^2\}} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{8r^2(r+1)}{1-2(r+1)\cos\theta+(r+1)^2} \times \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \right\} \\
 &= \frac{8r^2(r+1)}{1-2(r+1)+(r+1)^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)} \\
 &= \frac{8r^2(r+1)}{r^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)} \\
 &= 8(r+1) \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \frac{1}{1+\cos\theta} \right) \\
 &= 8(r+1) \times 1^2 \times \frac{1}{2} = 4(r+1)
 \end{aligned}$$

즉, $4(r+1)=12$ 이므로

$$r+1=3 \quad \therefore r=2$$

05 답 ④

1단계 S_n 구하기

정 $2n$ 각형의 한 변의 길이는

$$1 - \cos \frac{\pi}{n}$$

정 $2n$ 각형의 중심과 각 꼭짓점을 이었을 때 합동인 이등변삼각형이 $2n$ 개 만들어지고, 이때 이등변삼각형의 꼭지각의 크기는

$$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

정 $2n$ 각형의 중심에서 정 $2n$ 각형의 한 변에 내린 수선의 길이를 l_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 l_n &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)}{\tan \frac{\pi}{2n}} \\
 \therefore S_n &= 2n \times \left\{ \frac{1}{2} \times \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \times \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)}{\tan \frac{\pi}{2n}} \right\} \\
 &= \frac{n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}{2 \tan \frac{\pi}{2n}}
 \end{aligned}$$

2단계 T_n 구하기

한편 빗변의 길이가 1이고 한 내각의 크기가 $\frac{\pi}{n}$ 인 직각삼각형의 빗변이

아닌 두 변의 길이는 $\cos \frac{\pi}{n}$, $\sin \frac{\pi}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 T_n &= 2n \times \left(\frac{1}{2} \times \cos \frac{\pi}{n} \times \sin \frac{\pi}{n} \right) \\
 &= n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}
 \end{aligned}$$

3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 S_n}{T_n}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 S_n}{T_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}{n \tan \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}{\tan \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{n}}
 \end{aligned}$$

이때 $\frac{\pi}{n}=t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 S_n}{T_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}{\tan \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2 (1 - \cos t)^2}{t^2 \tan \frac{t}{2} \sin 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2 (1 - \cos t)^2 (1 + \cos t)^2}{t^2 \tan \frac{t}{2} \sin 2t (1 + \cos t)^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2 (1 - \cos^2 t)^2}{t^2 \tan \frac{t}{2} \sin 2t (1 + \cos t)^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \sin^4 t}{t^2 \tan \frac{t}{2} \sin 2t (1 + \cos t)^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin^4 t}{t^4} \times \frac{\frac{t}{2}}{\tan \frac{t}{2}} \times \frac{2t}{\sin 2t} \times \frac{\pi^2}{(1 + \cos t)^2} \right\} \\
 &= 1^4 \times 1 \times 1 \times \frac{\pi^2}{2^2} = \frac{\pi^2}{4}
 \end{aligned}$$

06 답 50

1단계 $f(\theta)$ 구하기

직각삼각형 AHP에서 $\angle APH = \theta$ 이므로

$$\angle HAP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

삼각형 OAP는 $\overline{OA} = \overline{OP} = 1$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle AOP = \pi - 2\angle OAP = \pi - 2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2\theta$$

즉, 직각삼각형 OHP에서 $\angle OAP = \angle HAP$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos 2\theta = \cos 2\theta$$

$$\therefore \overline{AH} = 1 - \overline{OH} = 1 - \cos 2\theta$$

$$= 1 - (1 - 2\sin^2 \theta) = 2\sin^2 \theta$$

$$\angle HAQ = \frac{1}{2} \angle HAP = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \text{이므로 직각삼각형 HAQ}$$

에서

$$\overline{HQ} = \overline{AH} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = 2\sin^2 \theta \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HQ} = \frac{1}{2} (2\sin^2 \theta)^2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= 2\sin^4 \theta \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

2단계 $g(\theta)$ 구하기

한편 이등변삼각형 OAP의 꼭짓점 O에서

선분 AP에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\angle POH' = \frac{1}{2} \angle AOP = \theta$$

직각삼각형 PH'O에서

$$\overline{PH'} = \overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\therefore \overline{AP} = 2\overline{PH'} = 2\sin \theta$$

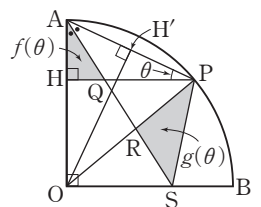
삼각형 AOP에서 $\angle OAP$ 의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{AO} : \overline{AP} = \overline{OR} : \overline{PR}$$

$$1 : 2\sin \theta = \overline{OR} : (1 - \overline{OR})$$

$$2\sin \theta \times \overline{OR} = 1 - \overline{OR}$$

$$\therefore \overline{OR} = \frac{1}{1 + 2\sin \theta}$$



또 직각삼각형 AOS에서 $\angle OAS = \angle HAQ = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\overline{OS} = \overline{OA} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\angle POS = \frac{\pi}{2} - \angle AOP = \frac{\pi}{2} - 2\theta \text{이므로}$$

$$g(\theta) = \triangle OSP - \triangle OSR$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \overline{OP} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) - \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \overline{OR} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times (\overline{OP} - \overline{OR}) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1+2\sin\theta}\right) \times \cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta} \times \cos 2\theta$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \frac{\sin\theta \cos 2\theta}{1+2\sin\theta}$$

3단계 $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)}$ 의 값 구하기

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \frac{\sin\theta \cos 2\theta}{1+2\sin\theta}}{2\sin^4\theta \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^3 \cos 2\theta}{2\sin^3\theta (1+2\sin\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\theta^3}{\sin^3\theta} \times \frac{\cos 2\theta}{2(1+2\sin\theta)} \right\}$$

$$= 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4단계 100k의 값 구하기

따라서 $k = \frac{1}{2}$ 이므로

$$100k = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

07 답 135

1단계 α, β 사이의 관계식 구하기

$$f(x) = a \cos x + x \sin x + b \text{에서}$$

$$f'(x) = -a \sin x + \sin x + x \cos x = (1-a) \sin x + x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } (1-a) \sin x + x \cos x = 0$$

$$x \cos x = (a-1) \sin x$$

이때 $\cos x = 0$ 이면 $\sin x \neq 0$ 이고 $a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore \cos x \neq 0 \text{이므로 } \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x}{a-1}$$

$$\therefore \tan x = \frac{x}{a-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(*)에서 α, β 는 $-\pi < x < \pi$ 에서 방정식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 근이므로 함수

$y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{a-1}$ 가 $-\pi < x < 0, 0 < x < \pi$ 에서 만

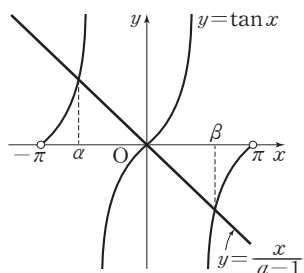
나는 두 점의 x좌표가 각각 α, β 이다.

이때 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{x}{a-1}$ 는 각각 원점에 대하여

대칭이므로

$$\beta = -\alpha \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



2단계 α, β 의 값 구하기

(*)의 $\frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta} = 0$ 에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$\frac{\tan(-\alpha) - \tan \alpha}{-2\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 0, \quad \frac{-2 \tan \alpha}{-2\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\tan \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = -\frac{3}{4}\pi \quad (\because -\pi < \alpha < 0)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $\beta = \frac{3}{4}\pi$

3단계 $f(x)$ 구하기

$\beta = \frac{3}{4}\pi$ 는 방정식 $\textcircled{1}$ 의 한 근이므로

$$\tan \frac{3}{4}\pi = \frac{\frac{3}{4}\pi}{a-1}, \quad -(a-1) = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore a = 1 - \frac{3}{4}\pi$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = c$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) \cos x + x \sin x + b \right\} = 0$$

$$1 - \frac{3}{4}\pi + b = 0 \quad \therefore b = \frac{3}{4}\pi - 1$$

$$\therefore f(x) = \left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) \cos x + x \sin x + \frac{3}{4}\pi - 1$$

4단계 c 의 값 구하기

$$\therefore c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) \cos x + x \sin x + \frac{3}{4}\pi - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{3}{4}\pi\right)(\cos x - 1) + x \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{3}{4}\pi\right)(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{3}{4}\pi\right)(\cos^2 x - 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1 - \frac{3}{4}\pi}{\cos x + 1} + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= -1^2 \times \frac{1 - \frac{3}{4}\pi}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$

5단계 $f\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right) + c$ 의 값 구하기

$$\frac{\beta - \alpha}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right) + c = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi - 1 \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{13}{8}\pi$$

6단계 $120 \times (p+q)$ 의 값 구하기

따라서 $p = -\frac{1}{2}, q = \frac{13}{8}$ 이므로

$$120 \times (p+q) = 120 \times \frac{9}{8} = 135$$

step 1 핵심 문제

| 62~63쪽

01 16 02 ④ 03 2 04 ⑤ 05 -4 06 ⑤

07 $\frac{5}{3}$ 08 ② 09 ⑤ 10 $\frac{1}{2}$ 11 ④ 12 ①

01 답 16

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+8} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+x+8-x(2x+1)}{(x^2+x+8)^2}$$

$$= \frac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2}$$

$$f'(x) > 0 \text{에서}$$

$$\frac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2} > 0$$

$$\text{이때 } (x^2+x+8)^2 = \left\{ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} \right\}^2 > 0 \text{이므로}$$

$$-x^2+8 > 0, x^2 < 8$$

$$\therefore -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = -2\sqrt{2}, \beta = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$$

02 답 ④

$$g(x) = \frac{f(x)}{a+\ln x} \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \times (a+\ln x) - f(x) \times \frac{1}{x}}{(a+\ln x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)}{a+\ln x} - \frac{f(x)}{x(a+\ln x)^2}$$

$$\therefore g(1) = \frac{f(1)}{a}, g'(1) = \frac{f'(1)}{a} - \frac{f(1)}{a^2}$$

$$f(1) = ag(1) \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a-2h)g(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a-2h)g(1+h) - ag(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a\{g(1+h) - g(1)\} - 2hg(1+h)}{h}$$

$$= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} 2g(1+h)$$

$$= ag'(1) - 2g(1)$$

$$\text{즉, } ag'(1) - 2g(1) = 2 + f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) - \frac{f(1)}{a} - 2 \times \frac{f(1)}{a} = 2 + f'(1)$$

$$-\frac{3f(1)}{a} = 2$$

$$\therefore \frac{f(1)}{a} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore g(1) = \frac{f(1)}{a} = -\frac{2}{3}$$

03 답 2

$$f(x) = \frac{\csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-\sin x (\sin x + \cos x) - \cos x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{1 + \sin 2x} \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

$$\text{이때 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < 2x < \pi \text{이므로}$$

$$0 < \sin 2x \leq 1$$

$$1 < 1 + \sin 2x \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \sin 2x} < 1$$

$$-1 < -\frac{1}{1 + \sin 2x} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore -1 < f'(x) \leq -\frac{1}{2} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{따라서 } f'(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$M = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore 8M^2 = 8 \times \frac{1}{4} = 2 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

04 답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)+1\} = 0 \text{에서}$$

$$g(1)+1=0 \quad \therefore g(1)=-1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \text{이므로}$$

$$g'(1)=2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-2}{x-1} = 12 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{h(x)-2\} = 0 \text{에서}$$

$$h(1)-2=0 \quad \therefore h(1)=2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1) \text{이므로}$$

$$h'(1)=12 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{이고 ㉢에서 } h(1)=2 \text{이므로}$$

$$f(g(1))=2$$

$$\therefore f(-1)=2 (\because \text{㉠})$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{이고 ㉣에서 } h'(1)=12 \text{이므로}$$

$$f'(g(1))g'(1)=12$$

$$2f'(-1)=12 (\because \text{㉠, ㉡})$$

$$\therefore f'(-1)=6$$

$$\therefore f(-1) + f'(-1) = 2 + 6 = 8$$

05 답 -4

$f(x)=0$ 에서

$$\frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^6}=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \quad \therefore A=\{1, 2\}$$

$f(x)=\frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^6}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)|=4\ln |x-1|+5\ln |x-2|-6\ln |x|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-2} - \frac{6}{x} \\ &= \frac{4x(x-2)+5x(x-1)-6(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}\end{aligned}$$

$$= \frac{3x^2+5x-12}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x+3)(3x-4)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= f(x) \times \frac{(x+3)(3x-4)}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^6} \times \frac{(x+3)(3x-4)}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(x-1)^3(x-2)^4(x+3)(3x-4)}{x^7}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$\frac{(x-1)^3(x-2)^4(x+3)(3x-4)}{x^7}=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{4}{3} \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore B=\left\{-3, 1, \frac{4}{3}, 2\right\}$$

따라서 $B-A=\left\{-3, \frac{4}{3}\right\}$ 이므로

$$a\beta = -3 \times \frac{4}{3} = -4$$

다른 풀이 함수 $y=x^n$ 의 도함수와 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 구하기

$$f(x)=\frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^6}=x^{-6}(x-1)^4(x-2)^5 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= -6x^{-7}(x-1)^4(x-2)^5 + 4x^{-6}(x-1)^3(x-2)^5 \\ &\quad + 5x^{-6}(x-1)^4(x-2)^4 \\ &= x^{-7}(x-1)^3(x-2)^4\{-6(x-1)(x-2)+4x(x-2) \\ &\quad + 5x(x-1)\} \\ &= x^{-7}(x-1)^3(x-2)^4(3x^2+5x-12) \\ &= \frac{(x-1)^3(x-2)^4(x+3)(3x-4)}{x^7}\end{aligned}$$

06 답 ⑤

$g(x)=\ln f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{10}=10\ln\{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\}$ 에서

$$\begin{aligned}g'(x) &= 10 \times \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x}{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{10}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{10}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

$$\therefore g'(1)=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$$

07 답 $\frac{5}{3}$

$x=t+\frac{1}{t}, y=t-\frac{1}{t}$ 에서

$$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}} = \frac{t^2+1}{t^2-1} \quad (\text{단, } t^2 \neq 1)$$

한편 $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$ 에서

$$2t^2-5t+2=0, (2t-1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$ 에서

$$2t^2-3t-2=0, (2t+1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $t=2$

따라서 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 즉 $t=2$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{4+1}{4-1}=\frac{5}{3}$$

08 답 ②

$x^3+y^3=3xy+4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3y+3x\frac{dy}{dx}, (3x-3y^2)\frac{dy}{dx}=3x^2-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2} \quad (\text{단, } x \neq y^2)$$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기는 $\frac{a^2-b}{a-b^2}$ 이므로

$$\frac{a^2-b}{a-b^2}=-1$$

$$a^2-b=b^2-a, a^2-b^2+a-b=0$$

$$(a-b)(a+b)+a-b=0$$

$$(a-b)(a+b+1)=0$$

$$\therefore a=b \quad (\because a>0, b>0)$$

점 (a, a) 는 곡선 $x^3+y^3=3xy+4$ 위의 점이므로

$$a^3+a^3=3a^2+4, 2a^3-3a^2-4=0$$

$$(a-2)(2a^2+a+2)=0 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

$$\therefore ab=a^2=4$$

09 답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고 $f(-1)=\frac{1}{1+e}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{1+e}\right)=-1$$

$$\therefore g'(f(-1))=g'\left(\frac{1}{1+e}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{1+e}\right)\right)}=\frac{1}{f'(-1)}$$

$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ 에서 $f'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ 이므로

$$g'(f(-1))=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{\frac{e}{(1+e)^2}}=\frac{(1+e)^2}{e}$$

10 답 1/2

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(4)=a$ 라 하면

$$f(a)=4$$

$$a^3-5a^2+10a-4=4$$

$$a^3-5a^2+10a-8=0, (a-2)(a^2-3a+4)=0$$

$$\therefore a=2 (\because a \text{는 실수})$$

$$\therefore g(4)=2$$

$$f(x)=x^3-5x^2+10x-4 \text{에서 } f'(x)=3x^2-10x+10 \text{이므로}$$

$$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(2)} \\ =\frac{1}{12-20+10}=\frac{1}{2}$$

11 답 ④

$$f(x)=e^{ax}(\sin bx+\cos bx) \text{에서}$$

$$f'(x)=ae^{ax}(\sin bx+\cos bx)+e^{ax}(b\cos bx-b\sin bx)$$

$$=e^{ax}\{(a-b)\sin bx+(a+b)\cos bx\}$$

$$f''(x)=ae^{ax}\{(a-b)\sin bx+(a+b)\cos bx\}$$

$$+e^{ax}\{b(a-b)\cos bx-b(a+b)\sin bx\}$$

$$=e^{ax}\{(a^2-2ab-b^2)\sin bx+(a^2+2ab-b^2)\cos bx\}$$

$$13f(x)-6f'(x)+f''(x)=0 \text{에서}$$

$$13e^{ax}(\sin bx+\cos bx)-6e^{ax}\{(a-b)\sin bx+(a+b)\cos bx\}$$

$$+e^{ax}\{(a^2-2ab-b^2)\sin bx+(a^2+2ab-b^2)\cos bx\}=0$$

$$e^{ax}\{(a^2-2ab-b^2-6a+6b+13)\sin bx$$

$$+(a^2+2ab-b^2-6a-6b+13)\cos bx\}=0$$

$e^{ax}>0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 위의 식이 성립하려면

$$a^2-b^2-2ab-6a+6b+13=0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a^2-b^2+2ab-6a-6b+13=0 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-4ab+12b=0$$

$$-4b(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because b>0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$9-b^2-6b-18+6b+13=0$$

$$b^2=4 \quad \therefore b=2 (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

12 답 ①

$$e^{f(x)}=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \text{의 양변에 자연로그를 취하면}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\{\ln(1-\sin x)-\ln(1+\sin x)\}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{-\cos x-\sin x\cos x-(\cos x-\sin x\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=\frac{-\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{-\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=-\frac{1}{\cos x}=-\sec x$$

$$\therefore f''(x)=-\sec x \tan x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\times 1=-\sqrt{2}$$

step 2 고난도 문제

| 64~68쪽

01 ③

02 ③

03 8

04 1

05 5

06 2

07 ④

08 8

09 ①

10 ④

11 1/3

12 ②

13 ①

14 1/2

15 ①

16 4

17 31

18 ①

19 -4

20 ③

21 ②

22 7/6

23 1/9

24 1/5

25 24

26 9/4

27 ④

28 ④

01 답 ③

$$g(x)=\frac{x}{f(x)}+\frac{f(x)}{e^x} \text{에서}$$

$$g'(x)=\frac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}+\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{(e^x)^2}$$

$$\therefore g'(x)=\frac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}+\frac{f'(x)-f(x)}{e^x} \quad \cdots \text{㉠}$$

$f(0)=1, g'(0)=2$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g'(0)=\frac{1}{f(0)}+f'(0)-f(0)$$

$$2=1+f'(0)-1 \quad \therefore f'(0)=2$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$ 이므로

$$f(x)=x^2+ax+1 (a \text{는 상수}) \text{이라 하자.}$$

$$f'(x)=2x+a \text{이므로 } f'(0)=2 \text{에서}$$

$$a=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2+2x+1, f'(x)=2x+2 \text{이므로}$$

$$f(1)=1+2+1=4, f'(1)=2+2=4$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(1)=\frac{f(1)-f'(1)}{\{f(1)\}^2}+\frac{f'(1)-f(1)}{e} \\ =\frac{4-4}{16}+\frac{4-4}{e}=0$$

02 답 ③

원 $x^2+(y+1)^2=1$ 의 중심 C의 좌표는

$$(0, -1)$$

원 $x^2+(y+1)^2=1$ 과 직선 $y=tx$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^2+(tx+1)^2=1$$

$$(t^2+1)x^2+2tx=0, x\{(t^2+1)x+2t\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2t}{t^2+1}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(0, 0)$,

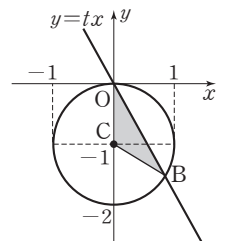
$$\left(-\frac{2t}{t^2+1}, -\frac{2t^2}{t^2+1}\right) \text{이라 하면 삼각형 ABC}$$

의 넓이 $f(t)$ 는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times 1\times\left(-\frac{2t}{t^2+1}\right) \\ =-\frac{t}{t^2+1}$$

$$\therefore f'(t)=-\frac{t^2+1-t\times 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$$

$$\therefore f'(-\sqrt{3})=\frac{3-1}{(3+1)^2}=\frac{1}{8}$$



03 답 8

함수 $f(x)$ 는 첫째항이 a 이고 공비가 $\frac{x}{x^2+b}$ 인 등비급수의 합과 같다.

$$b > 1 \text{에서 } |x| < x^2 + b \text{이므로 } -1 < \frac{x}{x^2+b} < 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= a + \frac{ax}{x^2+b} + \frac{ax^2}{(x^2+b)^2} + \frac{ax^3}{(x^2+b)^3} + \cdots \\ &= \frac{a}{1 - \frac{x}{x^2+b}} = \frac{ax^2+ab}{x^2-x+b} \\ \therefore f'(x) &= \frac{2ax(x^2-x+b) - (ax^2+ab)(2x-1)}{(x^2-x+b)^2} \\ &= \frac{2ax^3 - 2ax^2 + 2abx - (2ax^3 - ax^2 + 2abx - ab)}{(x^2-x+b)^2} \\ &= \frac{a(b-x^2)}{(x^2-x+b)^2} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\} = \frac{1}{2} f'(1) \\ \text{즉, } \frac{1}{2} f'(1) &= \frac{3}{8} \text{이므로 } f'(1) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{a(b-1)}{b^2} = \frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

(나)에서 $f'(2) = 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{a(b-4)}{(b+2)^2} = 0, a(b-4) = 0 \quad \therefore b = 4 \quad (\because a > 1)$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{3}{16}a = \frac{3}{4} \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a + b = 4 + 4 = 8$$

04 답 1

그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하고 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점

$$\angle OBH = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle OCH = \frac{1}{2} \angle ACB = \theta$$

직각삼각형 OBH에서

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{OH}}{\overline{BH}} \quad \therefore \overline{BH} = \frac{r(\theta)}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}r(\theta)$$

직각삼각형 OCH에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{CH}} \quad \therefore \overline{CH} = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$$

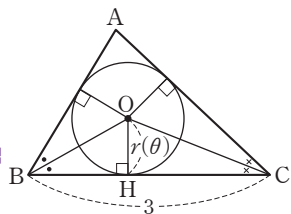
이때 $\overline{BC} = 3$ 에서 $\overline{BH} + \overline{CH} = 3$

$$\sqrt{3}r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = 3 \quad \therefore r(\theta) = \frac{3 \tan \theta}{\sqrt{3} \tan \theta + 1}$$

$$\therefore r'(\theta) = \frac{3 \sec^2 \theta (\sqrt{3} \tan \theta + 1) - 3 \tan \theta \times \sqrt{3} \sec^2 \theta}{(\sqrt{3} \tan \theta + 1)^2}$$

$$= \frac{3 \sec^2 \theta}{(\sqrt{3} \tan \theta + 1)^2}$$

$$\therefore r'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2} = \frac{4}{4} = 1$$



05 답 5

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=t$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow t+} f(x) = \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow t+} \frac{5e \ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow t-} ax$$

$$\frac{5e \ln t}{t^n} = at \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{배점 20\%}$$

$$x > t \text{일 때, } f(x) = \frac{5e \ln x}{x^n} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{5e}{x} \times x^n - 5e \ln x \times nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{5e(1-n \ln x)}{x^{n+1}}$$

미분계수 $f'(t)$ 가 존재하고

$$f'(x) = \begin{cases} a & (x < t) \\ \frac{5e(1-n \ln x)}{x^{n+1}} & (x > t) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow t+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow t-} f'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow t+} \frac{5e(1-n \ln x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow t-} a$$

$$\frac{5e(1-n \ln t)}{t^{n+1}} = a \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{배점 20\%}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{5e \ln t}{t^n} = \frac{5e(1-n \ln t)}{t^n}$$

$$\ln t = 1 - n \ln t, (n+1) \ln t = 1$$

$$\ln t = \frac{1}{n+1} \quad \therefore t = e^{\frac{1}{n+1}} \quad \cdots \text{배점 20\%}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a = \frac{5e \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{e} = \frac{5}{n+1}$$

$$\therefore a(n+1) = 5 \quad \cdots \text{배점 20\%}$$

이때 a, n 이 자연수이므로

$$a = 1, n = 4$$

$$\therefore a + n = 5 \quad \cdots \text{배점 20\%}$$

06 답 2

$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

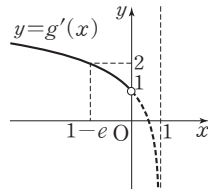
$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{-\frac{1}{1-x} \times x - \ln(1-x)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x(1-x)} - \frac{\ln(1-x)}{x^2} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$f(x)g(x) = xf(x) + x^2(1-x)f'(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + x^2(1-x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= x + x^2(1-x) \left\{ -\frac{1}{x(1-x)} - \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -(1-x) \ln(1-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(x) &= \ln(1-x) - (1-x) \times \frac{-1}{1-x} \\ &= \ln(1-x) + 1 \end{aligned}$$

따라서 $1-e \leq x < 0$ 에서 함수 $g'(x)$ 는 $x=1-e$ 일 때 최댓값 2를 갖는다.



07 답 ④

$g(x)=xf(2x)$ 에서

$$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$$

$$\therefore g'(2)=f(4)+4f'(4) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(가)에서 직선 l 이 제2사분면을 지나지 않으므로 (기울기) >0 , (y 절편) ≤ 0

(나)에서 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형이 넓이가 2인 직각이등변삼각형이므로 x 절편을 a ($a>0$)라 하면

$$\frac{1}{2}a^2=2, a^2=4 \quad \therefore a=2 (\because a>0)$$

따라서 직선 l 의 x 절편이 2, y 절편이 -2 이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1 \quad \therefore y=x-2$$

점 $(4, f(4))$ 는 직선 l 위의 점이므로

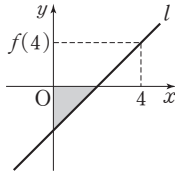
$$f(4)=4-2=2$$

$f'(4)$ 는 직선 l 의 기울기이므로

$$f'(4)=1$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$g'(2)=f(4)+4f'(4) \\ =2+4 \times 1=6$$



08 답 8

(가)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(2x)-\pi}{x}=16$ 에서 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{2f(2x)-\pi\}=0 \text{에서}$$

$$2f(0)-\pi=0 \quad \therefore f(0)=\frac{\pi}{2}$$

이를 (가)의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(2x)-\pi}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(2x)-2f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\{f(2x)-f(0)\}}{2x} \times 2 \\ &= 2f'(0) \times 2 = 4f'(0) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4f'(0)=16 \text{이므로 } f'(0)=4$$

(나)에서

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2-\cos f(2x)}{2+\cos f(2x)} = \frac{4-\{2+\cos f(2x)\}}{2+\cos f(2x)} \\ &= \frac{4}{2+\cos f(2x)} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{-4 \times \{-\sin f(2x)\} \times f'(2x) \times 2}{\{2+\cos f(2x)\}^2}$$

$$= \frac{8f'(2x) \sin f(2x)}{\{2+\cos f(2x)\}^2}$$

$$\therefore g'(0) = \frac{8f'(0) \sin f(0)}{\{2+\cos f(0)\}^2} = \frac{8 \times 4 \times 1}{(2+0)^2} = 8$$

09 답 ①

$\cos 0 = \sec 0 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(\cos x) - f(\sec x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(\cos x) - f(1) + f(1) - f(\sec x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(\cos x) - f(1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(\sec x) - f(1)}{\sec x - 1} \times \frac{\sec x - 1}{x^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(\cos x) - f(1)}{\cos x - 1} \times \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(\sec x) - f(1)}{\sec x - 1} \times \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{x^2(\sec x + 1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(\cos x) - f(1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(\sec x) - f(1)}{\sec x - 1} \times \frac{\sec^2 x - 1}{x^2(\sec x + 1)} \right\} \\ &= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{\cos x + 1} \right) \\ &\quad - f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\tan^2 x}{x^2} \times \frac{1}{\sec x + 1} \right) \end{aligned}$$

$$= f'(1) \times \left(-1^2 \times \frac{1}{2} \right) - f'(1) \times \left(1^2 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= -f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $f(x)=x^{\sin x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \sin x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(\cos x) - f(\sec x)}{x^2} &= -f'(1) \\ &= -\sin 1 \end{aligned}$$

10 답 ④

호 PB에 대한 원주각의 크기가 θ

이므로 중심각의 크기는

$$\angle PAB = 2\theta$$

삼각형 PAB는 이등변삼각형이므로

$$\angle ABP = \frac{\pi - 2\theta}{2}$$

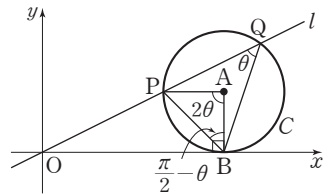
$$= \frac{\pi}{2} - \theta$$

원 C가 점 B에서 x 축과 접하므로

$$\angle OBA = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \angle OBP = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \theta$$

원 C의 중심이 A(3, 1)이고 원 C가 x 축에 접하므로 B(3, 0)이고, 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



삼각형 PBQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PB}}{\sin \theta} = 2 \times 1 \quad \therefore \overline{PB} = 2 \sin \theta$$

삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{PB} \times \cos \theta \\ &= 3^2 + (2 \sin \theta)^2 - 2 \times 3 \times 2 \sin \theta \times \cos \theta \\ &= 4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9 \end{aligned}$$

$$\therefore f(\theta) = \overline{OP} = \sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(\theta) &= \frac{8 \sin \theta \cos \theta - 12 \cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}{2 \sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9}} \\ &= \frac{4 \sin \theta \cos \theta - 6 \cos^2 \theta + 6 \sin^2 \theta}{\sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9}} \end{aligned}$$

따라서 $f(\theta)f'(\theta) = 4 \sin \theta \cos \theta - 6 \cos^2 \theta + 6 \sin^2 \theta$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$$

idea 11 답 1/3

다항식 $f(f(x))$ 를 $f(x)-x$ 로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$ 이고, 나머지를 $h(x)$ 라 하면

$$f(f(x)) = \{f(x)-x\}g(x) + h(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f(x)-x$ 가 삼차식이므로 $h(x)$ 는 이차 이하의 다항식이다.

(가)에서 방정식 $f(x)-x=0$, 즉 $f(x)=x$ 의 서로 다른 세 실근을 α, β, γ 라 하면

$$f(\alpha)=\alpha, f(\beta)=\beta, f(\gamma)=\gamma$$

$x=\alpha$ 를 ①의 양변에 대입하면

$$f(f(\alpha)) = \{f(\alpha)-\alpha\}g(\alpha) + h(\alpha)$$

$$f(\alpha)=h(\alpha) \quad \therefore h(\alpha)=\alpha$$

같은 방법으로 $x=\beta, x=\gamma$ 를 ①의 양변에 각각 대입하여 풀면

$$h(\beta)=\beta, h(\gamma)=\gamma$$

이때 $h(x)$ 는 이차 이하의 다항식이므로 $h(x)=x$

이를 ①에 대입하면

$$f(f(x)) = \{f(x)-x\}g(x) + x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(나)의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 0$ 에서 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-5\} = 0$ 에서

$$f(2)-5=0 \quad \therefore f(2)=5$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ 이므로

$$f'(2)=0$$

②의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(f(2)) = \{f(2)-2\}g(2) + 2$$

$$8 = 3g(2) + 2 \quad (\because \text{가})$$

$$3g(2)=6 \quad \therefore g(2)=2$$

②의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(f(x))f'(x) = \{f'(x)-1\}g(x) + \{f(x)-x\}g'(x) + 1$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(f(2))f'(2) = \{f'(2)-1\}g(2) + \{f(2)-2\}g'(2) + 1$$

$$0 = -2 + 3g'(2) + 1$$

$$3g'(2)=1$$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{3}$$

12 답 ②

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} + \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} \\ &= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} \end{aligned}$$

이때 $e^{2t} > 0, e^{-2t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} \geq \sqrt{e^{2t} \times e^{-2t}} = 1 \quad (\text{단, 등호는 } e^{2t} = e^{-2t}, \text{ 즉 } t=0 \text{일 때 성립})$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \geq 1$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \text{이므로 양변을 } t \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{y} \right) &= \frac{(e^t - e^{-t})^2 - (e^t + e^{-t})^2}{(e^t - e^{-t})^3} \\ &= -\frac{4}{(e^t - e^{-t})^2} \\ \therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{y} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{y} \right) \times \frac{dt}{dx} \\ &= -\frac{4}{(e^t - e^{-t})^2} \times \frac{2}{e^t - e^{-t}} \\ &= -\frac{8}{(e^t - e^{-t})^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ t^3 \times \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{y} \right) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{8t^3}{(e^t - e^{-t})^3} \right\} \\ &= -8 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{e^t - e^{-t}} \right)^3 \\ &= -8 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{te^t}{e^{2t} - 1} \right)^3 \\ &= -8 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2t}{e^{2t} - 1} \times \frac{e^t}{2} \right)^3 \\ &= -8 \times \left(1 \times \frac{1}{2} \right)^3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13 답 ①

$$x = \tan t + \tan^2 t + \tan^3 t + \dots + \tan^n t,$$

$$y = \cot t + \cot^3 t + \cot^5 t + \dots + \cot^{2n-1} t \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sec^2 t + 2 \tan t \sec^2 t + 3 \tan^2 t \sec^2 t + \dots + n \tan^{n-1} t \sec^2 t \\ &= \sec^2 t (1 + 2 \tan t + 3 \tan^2 t + \dots + n \tan^{n-1} t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\csc^2 t - 3 \cot^2 t \csc^2 t - 5 \cot^4 t \csc^2 t \\ &\quad - \dots - (2n-1) \cot^{2n-2} t \csc^2 t \\ &= -\csc^2 t \{1 + 3 \cot^2 t + 5 \cot^4 t + \dots + (2n-1) \cot^{2n-2} t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f_n(t) &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-\csc^2 t \{1 + 3\cot^2 t + 5\cot^4 t + \cdots + (2n-1)\cot^{2n-2} t\}}{\sec^2 t (1 + 2\tan t + 3\tan^2 t + \cdots + n\tan^{n-1} t)}\end{aligned}$$

$$\csc^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2, \sec^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2, \tan \frac{\pi}{4} = 1, \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

이므로

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-2\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}}{2(1+2+3+\cdots+n)} \\ &= -\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n} \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^n k} \\ &= -\frac{2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= -\frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = -2$$

14 답 1/2

$\overline{OP}=1$ 이므로 점 P의 x 좌표는

$$\overline{OP} \cos \theta = \cos \theta$$

점 P의 y 좌표는

$$\overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\therefore P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\text{즉, } \frac{a}{4} = \cos \theta \text{ 이므로}$$

$$a = 4 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \frac{2b}{a} = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$b = \frac{1}{2} a \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \cos \theta \times \sin \theta \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\therefore \frac{da}{d\theta} = -4 \sin \theta, \frac{db}{d\theta} = 2 \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{db}{d\theta}\right)^2 &= (-4 \sin \theta)^2 + (2 \cos 2\theta)^2 \\ &= 16 \sin^2 \theta + 4(1 - 2 \sin^2 \theta)^2 \\ &= 16 \sin^4 \theta + 4\end{aligned}$$

이때 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로 $\left(\frac{da}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{db}{d\theta}\right)^2$ 의 값이 최대하려면 $\sin \theta = 1$ 이어야 한다.

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$

점 (a, b) 가 나타내는 곡선 C 의 접선의 기울기는

$$\frac{db}{da} = \frac{\frac{db}{d\theta}}{\frac{da}{d\theta}} = \frac{2 \cos 2\theta}{-4 \sin \theta} = -\frac{\cos 2\theta}{2 \sin \theta}$$

따라서 곡선 C 위의 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\cos \pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

15 답 ①

$e^x - e^y = y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x - e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$(1 + e^y) \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^y}$$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{e^a}{1 + e^b} = 1$$

$$\therefore e^a = 1 + e^b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (a, b) 는 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점이므로

$$e^a - e^b = b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$1 + e^b - e^b = b$$

$$\therefore b = 1$$

이를 ①에 대입하면

$$e^a = 1 + e$$

$$\therefore a = \ln(e + 1)$$

$$\therefore a + b = 1 + \ln(e + 1)$$

16 답 4

점 $A(a, 0)$ 은 곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점이므로

$$a^3 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

$x^3 - y^3 = e^{xy}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 3y^2 \frac{dy}{dx} = e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$(xe^{xy} + 3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - ye^{xy}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2} \quad (\text{단, } xe^{xy} \neq -3y^2)$$

곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점 $A(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기를 m_1 이라 하면

$$m_1 = \frac{3}{1} = 3$$

또 $x^2 + kxy + y^2 = x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + ky + kx \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$(kx + 2y) \frac{dy}{dx} = 1 - 2x - ky$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - ky}{kx + 2y} \quad (\text{단, } kx \neq -2y)$$

곡선 $x^2 + kxy + y^2 = x$ 위의 점 $A(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기를 m_2 라 하면

$$m_2 = \frac{1 - 2}{k} = -\frac{1}{k}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 $m_1 m_2 = -1$ 에서

$$3 \times \left(-\frac{1}{k}\right) = -1 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore a + k = 1 + 3 = 4$$

17 답 31

곡선 $2(x^2-1)y^3=x^2+nx-2$ 와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$2(x^2-1)=x^2+nx-2$$

$$x^2-nx=0$$

$$x(x-n)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=n$$

이때 $a=0$, $b=n$ 이라 하자.

$2(x^2-1)y^3=x^2+nx-2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4xy^3+2(x^2-1) \times 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x+n$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x+n-4xy^3}{6y^2(x^2-1)} \quad (\text{단, } x^2 \neq 1, y \neq 0)$$

$$\therefore f(n) = \frac{2x+n-4xy^3}{6y^2(x^2-1)}$$

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기 $f(a)$ 는

$$f(a) = \frac{n}{6 \times (-1)} = -\frac{n}{6}$$

점 $(n, 1)$ 에서의 접선의 기울기 $f(b)$ 는

$$f(b) = \frac{2n+n-4n}{6(n^2-1)} = -\frac{n}{6(n^2-1)}$$

$$\therefore g(n) = 36f(a)f(b)$$

$$= 36 \times \left(-\frac{n}{6}\right) \times \left\{-\frac{n}{6(n^2-1)}\right\}$$

$$= \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{10} \ln g(n)$$

$$= \sum_{n=2}^{10} \ln \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{10} \ln \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) + \ln \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) + \ln \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) + \cdots + \ln \left(\frac{10}{9} \times \frac{10}{11} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{10}{9} \times \frac{10}{11} \right)$$

$$= \ln \frac{20}{11}$$

따라서 $p=11$, $q=20$ 이므로

$$p+q=31$$

18 답 ①

$f(x)+f(4-x)=5$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)+f(3)=5$$

$$7+f(3)=5 \quad \therefore f(3)=-2$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(-2)=3$$

$f(x)+f(4-x)=5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)-f'(4-x)=0$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)-f'(3)=0$$

$$4-f'(3)=0 \quad \therefore f'(3)=4$$

$$\therefore g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))}$$

$$= \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{4}$$

19 답 -4

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g\left(xf(x)-\frac{x-1}{e^x+1}\right)=x \text{에서}$$

$$xf(x)-\frac{x-1}{e^x+1}=f(x), \quad (x-1)f(x)=\frac{x-1}{e^x+1}$$

$$x \neq 1 \text{이므로 } f(x)=\frac{1}{e^x+1} \quad \cdots \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=a \text{라 하면 } f(a)=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{e^a+1}=\frac{1}{2}$$

$$e^a+1=2, \quad e^a=1 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

$$f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \text{이므로}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}=-4 \quad \cdots \cdots \cdots \text{배점 40\%}$$

20 답 ③

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2} = b$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2} g(x)=0 \text{에서 } g(-2)=0$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)} = g'(-2)$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(-2)=0$ 에서 $f(0)=-2$

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{a}\right) \text{에서 } f(0)=\ln \frac{1}{a} \text{이므로}$$

$$\ln \frac{1}{a} = -2, \quad \ln a = 2 \quad \therefore a = e^2$$

$$\therefore b = g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} = \frac{1}{f'(0)} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{e^2}\right)=\ln(\sec x + \tan x) - 2 \text{이므로}$$

$$f'(x)=\frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

$$\text{따라서 ㉠에서 } b = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$$\therefore ab = e^2 \times 1 = e^2$$

★ idea

21 답 ②

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(1)=2$ 에서 $f(2)=1$

$$f'(x)=3+\{f(x)\}^4 \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$f'(2)=3+\{f(2)\}^4=3+1=4$$

$$f'(x)=3+\{f(x)\}^4 \text{에서 } x \text{ 대신 } g(x) \text{를 대입하면}$$

$$f'(g(x))=3+\{f(g(x))\}^4$$

$$\therefore f'(g(x))=3+x^4$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(g(2))=3+16=19$$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{19}$$

$$\therefore f'(2)g'(2)=4 \times \frac{1}{19} = \frac{4}{19}$$

22 답 $\frac{7}{6}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = 2$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-1\} = 0$ 에서

$$f(3)-1=0 \quad \therefore f(3)=1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$ 이므로

$$f'(3)=2$$

함수 $f(3x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f(3x) = g^{-1}(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(3) = g^{-1}(1), \quad g^{-1}(1)=1$$

$$\therefore g(1)=1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-a}{x-1} = b$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-a\} = 0$ 에서

$$g(1)-a=0 \quad \therefore a=g(1)=1$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3f'(3x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f'(3) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))}$$

$$6 = \frac{1}{g'(1)}$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{6}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a+b = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

다른 풀이

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = 2 \text{에서 } f(3)=1, f'(3)=2$$

함수 $f(3x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(3x)) = x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(f(3)) = 1 \quad \therefore g(1)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-a}{x-1} = b \text{에서}$$

$$a=g(1)=1, b=g'(1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(3x)) \times 3f'(3x) = 1$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(3)) \times 3f'(3) = 1$$

$$g'(1) \times 3 \times 2 = 1 \quad \therefore g'(1) = \frac{1}{6}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a+b = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

23 답 $\frac{1}{9}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x+f(x)} = 1 \text{에서 } f(0) \neq 0 \text{이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x+f(x)} = \frac{f(0)+g(0)}{f(0)} \text{이므로}$$

$$\frac{f(0)+g(0)}{f(0)} = 1$$

$$f(0)+g(0)=f(0) \quad \therefore g(0)=0$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $f(0)=0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore f(0)=0, g(0)=0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x+f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x}}{1 + \frac{f(x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{g(x)-g(0)}{x}}{1 + \frac{f(x)-f(0)}{x}} \\ &= \frac{f'(0)+g'(0)}{1+f'(0)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f'(0)+g'(0)}{1+f'(0)} = 1 \text{이므로}$$

$$f'(0)+g'(0)=1+f'(0)$$

$$\therefore g'(0)=1$$

$$\therefore f'(0) = \frac{1}{g'(f(0))} = \frac{1}{g'(0)} = 1$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(0)=1 \text{이므로 } b=1$$

$$g(3)=1 \text{에서 } f(1)=3 \text{이므로}$$

$$1+a+1=3$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore f(x) = x^3 + x^2 + x, \quad f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$g(-6)=k \text{라 하면 } f(k)=-6 \text{이므로}$$

$$k^3 + k^2 + k = -6, \quad k^3 + k^2 + k + 6 = 0$$

$$(k+2)(k^2-k+3)=0$$

$$\therefore k=-2 \quad (\because k \text{는 실수})$$

$$\therefore g(-6) = -2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(-6) &= \frac{1}{f'(g(-6))} = \frac{1}{f'(-2)} \\ &= \frac{1}{12-4+1} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

24 답 $\frac{1}{5}$

㉞의 식의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0)\sqrt{1+\{f(0)\}^2} + f(0)\sqrt{1+\{f(0)\}^2}$$

$$f(0)[2\sqrt{1+\{f(0)\}^2} - 1] = 0$$

$$\therefore f(0)=0 \text{ 또는 } \sqrt{1+\{f(0)\}^2} = \frac{1}{2}$$

그런데 $1+\{f(0)\}^2 \geq 1$ 이므로 $\sqrt{1+\{f(0)\}^2} \geq 1$

$$\therefore f(0)=0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)\sqrt{1+\{f(h)\}^2} + f(h)\sqrt{1+\{f(x)\}^2} - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x) \times \frac{\sqrt{1+\{f(h)\}^2} - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} \times \sqrt{1+\{f(x)\}^2} \right] \\
 &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{1+\{f(h)\}^2} - 1][\sqrt{1+\{f(h)\}^2} + 1]}{h[\sqrt{1+\{f(h)\}^2} + 1]} \\
 &\quad + \sqrt{1+\{f(x)\}^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\
 &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(h)\}^2}{h[\sqrt{1+\{f(h)\}^2} + 1]} + \sqrt{1+\{f(x)\}^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\
 &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h) - f(0)}{h} \times \frac{f(h)}{\sqrt{1+\{f(h)\}^2} + 1} \right] \\
 &\quad + \sqrt{1+\{f(x)\}^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
 &= f(x) \times f'(0) \times 0 + \sqrt{1+\{f(x)\}^2} \times f'(0) \\
 &= 4\sqrt{1+\{f(x)\}^2} \quad (\because \text{㉞})
 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고 ㉞에서 $f(\ln 2) = \frac{3}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{3}{4}\right) &= \ln 2 \\
 \therefore g'\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{3}{4}\right)\right)} = \frac{1}{f'(\ln 2)} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{1+\{f(\ln 2)\}^2}} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{1+\frac{9}{16}}} \\
 &= \frac{1}{4 \times \frac{5}{4}} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

25 답 24

㉞에서 $f(g(x)) = 2x + \ln(1+x^3)$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 2 + \frac{3x^2}{1+x^3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉞의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f'(g(0))g'(0) = 2$$

$$f'(3) \times \frac{1}{2} = 2 \quad (\because \text{㉞})$$

$$\therefore f'(3) = 4$$

$h(x) = f'(g(x))$ 라 하면 $h'(x) = f''(g(x))g'(x)$ 이고

$$h(0) = f'(g(0)) = f'(3) = 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(g(x)) - 4}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \\
 &= h'(0) \\
 &= f''(g(0))g'(0) \\
 &= \frac{1}{2}f''(3) \quad (\because \text{㉞}) \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

㉞의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x) = \frac{6x(1+x^3) - 3x^2 \times 3x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$\therefore f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x) = \frac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f''(g(0))\{g'(0)\}^2 + f'(g(0))g''(0) = 0$$

$$\frac{1}{4}f''(3) - 3f'(3) = 0 \quad (\because \text{㉞})$$

$$\therefore f''(3) = 12f'(3) = 12 \times 4 = 48$$

따라서 ㉞에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(g(x)) - 4}{x} = \frac{1}{2}f''(3) = \frac{1}{2} \times 48 = 24$$

idea 26 답 9/4

$$3f(x) - f(3-x) = \frac{3^x}{(\ln 3)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉞의 양변에 x 대신 $3-x$ 를 대입하면

$$3f(3-x) - f(x) = \frac{3^{3-x}}{(\ln 3)^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉞ $\times 3 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$8f(x) = \frac{3^{x+1} + 3^{3-x}}{(\ln 3)^2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3^{x+1} + 3^{3-x}}{8(\ln 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3^{x+1} \ln 3 - 3^{3-x} \ln 3}{8(\ln 3)^2} = \frac{3^{x+1} - 3^{3-x}}{8 \ln 3} \text{이므로}$$

$$f''(x) = \frac{3^{x+1} \ln 3 + 3^{3-x} \ln 3}{8 \ln 3} = \frac{3^{x+1} + 3^{3-x}}{8}$$

이때 $3^{x+1} > 0$, $3^{3-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f''(x) = \frac{3^{x+1} + 3^{3-x}}{8} \geq \frac{2\sqrt{3^{x+1} \times 3^{3-x}}}{8} = \frac{9}{4}$$

(단, 등호는 $3^{x+1} = 3^{3-x}$, 즉 $x=1$ 일 때 성립)

따라서 함수 $f''(x)$ 의 최솟값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

27 답 ④

$$f(x) = \sin(2x + 2k|x|) - \frac{2}{k}|x| \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2-2k)x + \frac{2}{k}x & (x < 0) \\ \sin(2+2k)x - \frac{2}{k}x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} (2-2k)\cos(2-2k)x + \frac{2}{k} & (x < 0) \\ (2+2k)\cos(2+2k)x - \frac{2}{k} & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서도 미분 가능하다.

즉, 미분계수 $f'(0)$ 이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$ 에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ (2+2k)\cos(2+2k)x - \frac{2}{k} \right\} \\
 = \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ (2-2k)\cos(2-2k)x + \frac{2}{k} \right\}
 \end{aligned}$$

$$2+2k - \frac{2}{k} = 2-2k + \frac{2}{k}$$

$$4k - \frac{4}{k} = 0, \quad k^2 - 1 = 0$$

$$(k+1)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -(2-2k)^2 \sin(2-2k)x & (x < 0) \\ -(2+2k)^2 \sin(2+2k)x & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{8}\right) = -(2+2k)^2 \sin \frac{(1+k)\pi}{4}$$

㉠에서

$$k = -1 \text{ 일 때, } f''\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$k = 1 \text{ 일 때, } f''\left(\frac{\pi}{8}\right) = -16 \sin \frac{\pi}{2} = -16$$

$$\text{그런데 } f''\left(\frac{\pi}{8}\right) = -16 \text{ 이므로 } k = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0) \\ \sin 4x - 2x & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3}\pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi$$

28 답 ④

(가)의 $f(1) = e$ 에서

$$(1+a+b)e = e, \quad 1+a+b=1$$

$$\therefore b = -a$$

$$f(x) = (x^2 + ax - a)e^x \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = (2x+a)e^x + (x^2+ax-a)e^x = \{x^2 + (a+2)x\}e^x$$

(가)의 $f'(1) = e$ 에서

$$(a+3)e = e, \quad a+3=1$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x, \quad f'(x) = x^2 e^x$$

$$h(x) = f^{-1}(x)g(x) \text{ 에서}$$

$$h'(x) = (f^{-1})'(x)g(x) + f^{-1}(x)g'(x)$$

(가)의 $f(1) = e$ 에서 $f^{-1}(e) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore h'(e) &= (f^{-1})'(e)g(e) + f^{-1}(e)g'(e) \\ &= \frac{g(e)}{f'(f^{-1}(e))} + g'(e) \\ &= \frac{g(e)}{f'(1)} + g'(e) \\ &= \frac{g(e)}{e} + g'(e) \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

(나)의 $g(f(x)) = f'(x)$ 에서 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(f(1)) = f'(1) \quad \therefore g(e) = e$$

(나)의 $g(f(x)) = f'(x)$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = f''(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(1))f'(1) = f''(1)$$

$$g'(e) \times e = f''(1) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$f'(x) = x^2 e^x \text{ 에서}$$

$$f''(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$$

$$\therefore f''(1) = 3e$$

이를 ㉡에 대입하면

$$g'(e) \times e = 3e \quad \therefore g'(e) = 3$$

따라서 ㉠에서

$$h'(e) = \frac{g(e)}{e} + g'(e) = \frac{e}{e} + 3 = 4$$

step 3 최고난도 문제

| 69~71쪽

01 ③

02 11

03 ②

04 ⑤

05 6

06 ⑤

07 15

08 ①

09 3

10 ③

01 답 ③

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

$$\neg. f_2(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{2}{(2x+1)^3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -\frac{2(2x+1) \times 2}{(2x+1)^4} - \frac{2 \times 3(2x+1)^2 \times 2}{(2x+1)^6} \\ &= -\frac{4}{(2x+1)^3} - \frac{12}{(2x+1)^4} \end{aligned}$$

$$\therefore f_2'(1) = -\frac{4}{27} - \frac{4}{27} = -\frac{8}{27}$$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

$$\neg. f_n(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{2}{(2x+1)^3} + \dots + \frac{n}{(2x+1)^{n+1}} \text{ 이므로}$$

$$f_n(0) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left\{ \frac{k}{(2x+1)^{k+1}} \right\}' = -\frac{k(k+1)(2x+1)^k \times 2}{(2x+1)^{2k+2}} = -\frac{2k(k+1)}{(2x+1)^{k+2}} \text{ 이므로}$$

$$f_n'(x) = -\frac{4}{(2x+1)^3} - \frac{12}{(2x+1)^4} - \dots - \frac{2n(n+1)}{(2x+1)^{n+2}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} f_n'(0) &= \sum_{k=1}^n \{-2k(k+1)\} = -2 \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= -2 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= -\frac{2n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f_n'(0)}{f_n(0)} = \frac{-\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}}{\frac{n(n+1)}{2}} = -\frac{4}{3}(n+2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{f_n'(0)}{f_n(0)} &= -\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{10} (n+2) = -\frac{4}{3} \times \left(\frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 \right) \\ &= -\frac{4}{3} \times (55 + 20) = -100 \end{aligned}$$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

$$\neg. \text{㉠에서 } f_n'(-1) = \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{2k(k+1)}{(-1)^{k+2}} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{2k(k+1)}{(-1)^{k+1}}$$

자연수 m 에 대하여

(i) $n = 2m - 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f_{2m-1}'(-1) &= 2\{1 \times 2 - 2 \times 3 + 3 \times 4 - 4 \times 5 + \dots + (2m-3)(2m-2) \\ &\quad - (2m-2)(2m-1)\} + 2(2m-1) \times 2m \\ &= 2[2(1-3) + 4(3-5) + \dots + (2m-2)\{2m-3 - (2m-1)\}] \\ &\quad + 4m(2m-1) \\ &= 2 \times 2 \times (-2) \times \{1+2+3+\dots+(m-1)\} + 4m(2m-1) \\ &= -8 \times \frac{(m-1)m}{2} + 4m(2m-1) \\ &= -4m(m-1) + 4m(2m-1) = 4m^2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f_n'(-1) > 100 \text{ 에서 } 4m^2 > 100, \quad m^2 - 25 > 0$$

$$(m+5)(m-5) > 0 \quad \therefore m < -5 \text{ 또는 } m > 5$$

그런데 m 은 자연수이므로 m 의 최솟값은 6이다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

(ii) $n=2m$ 일 때,

$$\begin{aligned} f_{2m}'(-1) &= 2\{1 \times 2 - 2 \times 3 + 3 \times 4 - 4 \times 5 \\ &\quad + \cdots + (2m-1) \times 2m - 2m(2m+1)\} \\ &= 2\{2(1-3) + 4(3-5) + \cdots + 2m\{2m-1 - (2m+1)\}\} \\ &= 2 \times 2 \times (-2) \times (1+2+3+\cdots+m) \\ &= -8 \times \frac{m(m+1)}{2} = -4m(m+1) \end{aligned}$$

이때 m 은 자연수이므로

$$f_{2m}'(-1) = -4m(m+1) < 0$$

즉, 주어진 부등식을 만족시키는 m 의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

02 답 11

1단계 $f(t)$ 의 식 세우기

곡선 $y = \ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$ 과 직선 $y=x+t$ 가 만나는 두 점의 좌표를 $(\alpha, \alpha+t)$, $(\beta, \beta+t)$ ($\alpha < \beta$)라 하면

$$f(t) = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\alpha)^2} = \sqrt{2}(\beta-\alpha) \quad (\because \alpha < \beta)$$

2단계 곡선과 직선이 만나는 점의 x 좌표 구하기

$$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t \text{에서}$$

$$1+e^{2x}-e^{-2t} = e^{x+t} \quad \therefore e^{2x}-e^x \times e^t + 1 - e^{-2t} = 0$$

$e^x = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$k^2 - e^t k + 1 - e^{-2t} = 0 \quad \therefore k = \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$\text{즉, } e^x = \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2} \text{이므로}$$

$$x = \ln \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이때 α, β 는 방정식 $\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$ 의 서로 다른 두 실근이므로

$$\alpha = \ln \frac{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}, \quad \beta = \ln \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

3단계 $f'(\ln 2)$ 의 값 구하기

이때 $g(t) = \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}$ 라 하면

$$\alpha = \ln \frac{e^t - g(t)}{2}, \quad \beta = \ln \frac{e^t + g(t)}{2} \text{이므로}$$

$$f(t) = \sqrt{2}(\beta - \alpha) = \sqrt{2}[\ln\{e^t + g(t)\} - \ln\{e^t - g(t)\}]$$

$$\therefore f'(t) = \sqrt{2} \left\{ \frac{e^t + g'(t)}{e^t + g(t)} - \frac{e^t - g'(t)}{e^t - g(t)} \right\}$$

$$\therefore f'(\ln 2) = \sqrt{2} \left\{ \frac{2+g'(\ln 2)}{2+g(\ln 2)} - \frac{2-g'(\ln 2)}{2-g(\ln 2)} \right\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(t) = \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4} \text{에서}$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 4e^{-2t} - 4)^{-\frac{1}{2}}(2e^{2t} - 8e^{-2t}) = \frac{e^{2t} - 4e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}$$

$$\therefore g(\ln 2) = \sqrt{4 + 4 \times \frac{1}{4} - 4} = 1, \quad g'(\ln 2) = \frac{4 - 4 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{4 + 4 \times \frac{1}{4} - 4}} = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$f'(\ln 2) = \sqrt{2} \left(\frac{2+3}{2+1} - \frac{2-3}{2-1} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{5}{3} + 1 \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=3, q=8$ 이므로 $p+q=11$

03 답 ②

1단계 a, b 의 값 구하기

$f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ 에서

$$f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + (x-a)^m \times n(x-b)^{n-1}$$

$$= (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\{m(x-b) + n(x-a)\}$$

$$= (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\{(m+n)x - bm - an\}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-a)^m(x-b)^n}{(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\{(m+n)x - bm - an\}} \\ &= \frac{(x-a)(x-b)}{(m+n)x - bm - an} \end{aligned}$$

㉠에서 $g(2)=0$ 이므로

$$\frac{(2-a)(2-b)}{2(m+n)-bm-an} = 0, \quad \frac{(2-a)(2-b)}{(2-b)m+(2-a)n} = 0$$

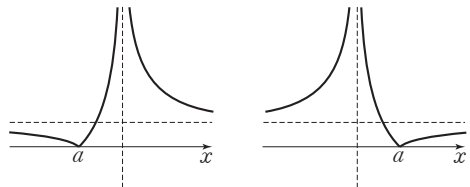
$$\therefore a=2 \text{ 또는 } b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\frac{g(x)}{x-b} = \frac{x-a}{(m+n)x-bm-an}$ 이므로 함수 $y = \frac{g(x)}{x-b}$ 의 그래프는 점

$(a, 0)$ 을 지나고, 점근선은 두 직선 $x = \frac{bm+an}{m+n}, y = \frac{1}{m+n}$ 이다.

이때 m, n 이 자연수이므로 $\frac{1}{m+n} > 0$

따라서 함수 $y = \left| \frac{g(x)}{x-b} \right|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



㉡에서 함수 $\left| \frac{g(x)}{x-b} \right|$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않으므로

$$a=1$$

따라서 ①에서 $b=2$

2단계 m, n 의 값 구하기

㉡에서 함수 $\left| \frac{g(x)}{x-b} \right|$ 는 $x = \frac{7}{5}$ 에서 함수값이 존재하지 않으므로

$$\frac{bm+an}{m+n} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \frac{2m+n}{m+n} = \frac{7}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉢에서 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^m(x-2)^n}{(x-1)^3}$ 의 극한값이 존재하지 않

으므로

$$m < 3$$

그런데 m 은 자연수이므로

$$m=1 \text{ 또는 } m=2$$

(i) $m=1$ 일 때,

$$\textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{2+n}{1+n} = \frac{7}{5}$$

$$10+5n=7+7n, \quad 2n=3 \quad \therefore n = \frac{3}{2}$$

그런데 n 은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=2$ 일 때,

$$\textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{4+n}{2+n} = \frac{7}{5}$$

$$20+5n=14+7n, \quad 2n=6 \quad \therefore n=3$$

(i), (ii)에서 $m=2, n=3$

3단계 $g'(n-m)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \text{따라서 } g(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{5x-7} = \frac{x^2-3x+2}{5x-7} \text{이므로} \\ g'(x) &= \frac{(2x-3)(5x-7) - (x^2-3x+2) \times 5}{(5x-7)^2} \\ &= \frac{5x^2-14x+11}{(5x-7)^2} \\ \therefore g'(n-m) &= g'(1) = \frac{5-14+11}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

개념 NOTE

유리함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad-bc \neq 0$)의 정의역은 $\{x \mid x \neq -\frac{d}{c} \text{인 실수}\}$ 이고
그래프의 점근선은 두 직선 $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$ 이다.

idea

04 답 ⑤

1단계 ab 에 대한 식 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos x$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos y \\ &= 25 - 24 \cos y \end{aligned}$$

즉, $a^2 + b^2 - 2ab \cos x = 25 - 24 \cos y$ 이므로

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2ab \sin x = 24 \sin y \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{ab \sin x}{12 \sin y} \quad \dots\dots ㉑$$

(가)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = 2$ 이므로

$$\frac{ab \sin x}{12 \sin y} = 2 \quad \therefore ab = \frac{24 \sin y}{\sin x} \quad \dots\dots ㉒$$

2단계 $x+y$ 의 값 구하기

사각형 ABCD의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} ab \sin x + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin y \\ &= \frac{1}{2} ab \sin x + 6 \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dS}{dy} &= \frac{1}{2} ab \cos x \frac{dx}{dy} + 6 \cos y \\ &= \frac{1}{2} ab \cos x \times \frac{12 \sin y}{ab \sin x} + 6 \cos y \quad (\because ㉑) \\ &= \frac{6 \cos x \sin y}{\sin x} + 6 \cos y \\ &= \frac{6(\cos x \sin y + \sin x \cos y)}{\sin x} \\ &= \frac{6 \sin(x+y)}{\sin x} \end{aligned}$$

(나)에서 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{dS}{dy} = \frac{dS}{dy} = 0$ 이므로

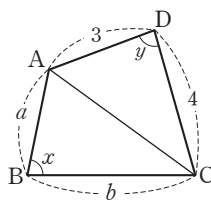
$$\frac{6 \sin(x+y)}{\sin x} = 0 \quad \therefore \sin(x+y) = 0$$

이때 $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ 에서 $0 < x+y < 2\pi$ 이므로
 $x+y = \pi$

3단계 ab 의 값 구하기

따라서 $y = \pi - x$ 이므로 이를 ㉒에 대입하면

$$ab = \frac{24 \sin(\pi - x)}{\sin x} = \frac{24 \sin x}{\sin x} = 24$$



05 답 6

1단계 곡선 C의 방정식 구하기

두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A' , B' 이라 하자.

$A(a, e^a - 1)$, $B(b, e^b - 1)$ 이므로 삼각형

OAB의 넓이를 S라 하면

$$S = \triangle OBB' - \triangle OAA' - \square AA'B'B$$

$$= \frac{1}{2} b(e^b - 1) - \frac{1}{2} a(e^a - 1)$$

$$- \frac{1}{2} (b-a)(e^a - 1 + e^b - 1)$$

$$= \frac{1}{2} b(e^b - 1) - \frac{1}{2} a(e^a - 1) - \frac{1}{2} b(e^a - 1) - \frac{1}{2} b(e^b - 1)$$

$$+ \frac{1}{2} a(e^a - 1) + \frac{1}{2} a(e^b - 1)$$

$$= \frac{1}{2} a(e^b - 1) - \frac{1}{2} b(e^a - 1)$$

즉, $\frac{1}{2} a(e^b - 1) - \frac{1}{2} b(e^a - 1) = k$ 이므로

$$a(e^b - 1) - b(e^a - 1) = 2k$$

따라서 점 (a, b) 가 나타내는 곡선 C의 방정식은

$$x(e^y - 1) - y(e^x - 1) = 2k \quad \dots\dots ㉑$$

2단계 p 의 값 구하기

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^y - 1 + x e^y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} (e^x - 1) - y e^x = 0$$

$$(x e^y - e^x + 1) \frac{dy}{dx} = y e^x - e^y + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y e^x - e^y + 1}{x e^y - e^x + 1} \quad (\text{단, } x e^y - e^x + 1 \neq 0)$$

즉, 점 $Q(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2e - e^2 + 1}{e^2 - e + 1}$ 이고, 직선 PQ의 기

울기는 $\frac{2}{1-p}$ 이므로

$$\frac{2e - e^2 + 1}{e^2 - e + 1} \times \frac{2}{1-p} = -1, \quad p - 1 = \frac{4e - 2e^2 + 2}{e^2 - e + 1}$$

$$\therefore p = \frac{4e - 2e^2 + 2}{e^2 - e + 1} + 1 = \frac{-e^2 + 3e + 3}{e^2 - e + 1}$$

3단계 $2k$ 의 값 구하기

점 $Q(1, 2)$ 는 곡선 C 위의 점이므로 ㉑에 $x=1$, $y=2$ 를 대입하면

$$e^2 - 1 - 2(e - 1) = 2k$$

$$\therefore 2k = e^2 - 2e + 1$$

4단계 $m+n$ 의 값 구하기

$$\therefore p \times (2k + e) = \frac{-e^2 + 3e + 3}{e^2 - e + 1} \times (e^2 - e + 1) = -e^2 + 3e + 3$$

따라서 $m=3$, $n=3$ 이므로 $m+n=6$

06 답 ⑤

1단계 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 조건 구하기

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1 \text{에서}$$

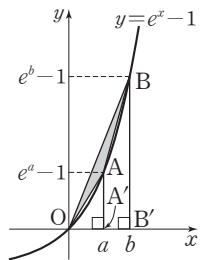
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 역함수가 존재하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0, \quad a(a-3) \leq 0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $0 < a \leq 3 \quad \dots\dots ㉑$



2단계 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(h(x))}{x-1} \geq -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(h(x))}{x-1}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} g(h(x)) = 0$ 에서 $g(h(1)) = 0$

이때 $h(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}}$ 에서 $h(1) = 1$ 이므로 $g(1) = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(h(x))}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(h(x)) - g(h(1))}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(h(x)) - g(h(1))}{h(x) - h(1)} \times \frac{h(x) - h(1)}{x-1} \right\} \\ &= g'(h(1))h'(1) = g'(1)h'(1) \\ &= \frac{1}{f'(g(1))} \times h'(1) \\ &= \frac{1}{f'(0)} \times h'(1) \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$ 에서 $f'(0) = a$

$h(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}} = \frac{x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ 에서

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x^2-1)^{\frac{1}{2}} - x \times \frac{1}{2}(2x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \times 4x}{2x^2-1} \\ &= \frac{\sqrt{2x^2-1} - \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2-1}}}{2x^2-1} \end{aligned}$$

$$\therefore h'(1) = \frac{1-2}{1} = -1$$

따라서 $\textcircled{A}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(h(x))}{x-1} = \frac{1}{f'(0)} \times h'(1) = \frac{1}{a} \times (-1) = -\frac{1}{a}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{a} \geq -\frac{1}{3} \text{이므로 } a < 0 \text{ 또는 } a \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

3단계 a 의 값 구하기

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서 $a = 3$

07 답 15

1단계 함수 $h(x)$ 가 연속임을 이용하기

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$, $x=1$ 에서도 연속이다.

(i) 함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi} \sin \pi x = \lim_{x \rightarrow 0-} f(g^{-1}(x))$$

$$\therefore f(g^{-1}(0)) = 0$$

이때 $g^{-1}(0) = \alpha$ 라 하면 $f(\alpha) = 0$ 이므로

$$\alpha^3 - \alpha = 0, \alpha(\alpha+1)(\alpha-1) = 0$$

$$\therefore \alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(ii) 함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\pi} \sin \pi x$$

$$\therefore f(g^{-1}(1)) = 0$$

이때 $g(0) = 1$ 이므로 $g^{-1}(1) = 0$

$$\therefore f(g^{-1}(1)) = f(0) = 0$$

2단계 함수 $h(x)$ 가 미분가능함을 이용하기

또 함수 $h(x)$ 가 $x=0$, $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$h'(x) = \begin{cases} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ \cos \pi x & (0 < x < 1) \end{cases} \text{에서 미분계수}$$

$h'(0)$, $h'(1)$ 이 존재한다.

(iii) 미분계수 $h'(0)$ 이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos \pi x = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$$

$$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = 1$$

$$f'(g^{-1}(0)) \times \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = 1$$

$$f'(a) \times \frac{1}{g'(a)} = 1 \quad (\because g^{-1}(0) = a)$$

$$\therefore f'(a) = g'(a)$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 1$, $g'(x) = 3ax^2 + 2x + b$ 이므로

$$3a^2 - 1 = 3aa^2 + 2a + b \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(iv) 미분계수 $h'(1)$ 이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \cos \pi x$$

$$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1) = -1$$

$$f'(g^{-1}(1)) \times \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = -1$$

$$f'(0) \times \frac{1}{g'(0)} = -1 \quad (\because g^{-1}(1) = 0)$$

$$\therefore f'(0) = -g'(0)$$

$$\text{이때 } f'(0) = -1 \text{이므로 } g'(0) = 1 \quad \therefore b = 1$$

3단계 $g(x)$ 구하기

한편 삼차함수 $g(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일함수이고,

$g'(0) = 1 > 0$ 이므로 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값도 증가한다.

이때 $g^{-1}(0) = a$ 에서 $g(a) = 0$ 이고, $g(0) = 1$ 이므로

$$g(a) < g(0) \quad \therefore a < 0$$

따라서 $\textcircled{A}$ 에서 $a = -1$

$b = 1$, $a = -1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$3 - 1 = 3a - 2 + 1, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

4단계 $g(a+b)$ 의 값 구하기

$$\therefore g(a+b) = g(2) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

08 답 ①

1단계 $f(10)f'(10)$ 을 α , β 를 이용하여 나타내기

$$f(t) = \alpha(t) - \beta(t) \text{이므로}$$

$$f'(t) = \alpha'(t) - \beta'(t)$$

$$\therefore f(10)f'(10) = \{\alpha(10) - \beta(10)\} \{\alpha'(10) - \beta'(10)\} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

2단계 $\alpha(10)$, $\beta(10)$ 의 값 구하기

곡선 $y = x^3 + 4x^2 - 60x + 10$ 과 직선 $y = 10$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 + 4x^2 - 60x + 10 = 10, x(x^2 + 4x - 60) = 0$$

$$x(x+10)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -10 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

이때 x 좌표가 가장 큰 점의 x 좌표가 $\alpha(10)$ 이므로 $\alpha(10) = 6$

x 좌표가 가장 작은 점의 x 좌표가 $\beta(10)$ 이므로 $\beta(10) = -10$

3단계 $\alpha'(10), \beta'(10)$ 의 값 구하기

$g(x) = x^3 + 4x^2 - 60x + 10$ 이라 하면

$$g'(x) = 3x^2 + 8x - 60$$

이때 두 점 $A(\alpha(t), t), B(\beta(t), t)$ 는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

$$g(\alpha(t)) = t, g(\beta(t)) = t$$

즉, 두 함수 $g(t), \alpha(t)$ 는 서로 역함수 관계이고, 두 함수 $g(t), \beta(t)$ 도 서로 역함수 관계이다.

$$\alpha(10) = 6, \beta(10) = -10 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(10) &= \frac{1}{g'(\alpha(10))} \\ &= \frac{1}{g'(6)} \\ &= \frac{1}{108 + 48 - 60} = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'(10) &= \frac{1}{g'(\beta(10))} \\ &= \frac{1}{g'(-10)} \\ &= \frac{1}{300 - 80 - 60} = \frac{1}{160} \end{aligned}$$

4단계 $f(10)f'(10)$ 의 값 구하기

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} f(10)f'(10) &= \{\alpha(10) - \beta(10)\} \{\alpha'(10) - \beta'(10)\} \\ &= \{6 - (-10)\} \left\{ \frac{1}{96} - \frac{1}{160} \right\} \\ &= 16 \times \frac{1}{240} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

09 답 3

1단계 $t, g(t)$ 를 s 에 대한 식으로 나타내기

$P(t, 0), Q(s, f(s))$ 라 하면 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 Q 에서의 접선과 직선 PQ 가 서로 수직이다.

$$f(x) = e^x + x \text{에서 } f'(x) = e^x + 1$$

즉, 점 Q 에서의 접선의 기울기는 $f'(s) = e^s + 1$

$$\text{직선 } PQ \text{의 기울기는 } \frac{f(s)}{s-t} = \frac{e^s + s}{s-t} \text{이므로}$$

$$(e^s + 1) \times \frac{e^s + s}{s-t} = -1$$

$$(e^s + 1)(e^s + s) = t - s$$

$$\therefore t = (e^s + 1)(e^s + s) + s \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f(s)$ 의 값이 $g(t)$ 이므로

$$g(t) = e^s + s \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

2단계 $g'(t)$ 구하기

함수 $g(t)$ 의 역함수가 $h(t)$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면 $g(k) = 1$

$e^s + s = 1$ 을 만족시키는 s 의 값은 $s = 0$ 이므로 이때 k 의 값은 ㉠에서

$$k = (1 + 1) \times 1 + 0 = 2$$

즉, $g(2) = 1, h(1) = 2$ 이므로

$$h'(1) = \frac{1}{g'(h(1))} = \frac{1}{g'(2)} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉠의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$g'(t) = (e^s + 1) \frac{ds}{dt}$$

이때 ㉠의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$1 = \{e^s(e^s + s) + (e^s + 1)^2 + 1\} \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{1}{e^s(e^s + s) + (e^s + 1)^2 + 1}$$

$$\therefore g'(t) = (e^s + 1) \frac{ds}{dt} = \frac{e^s + 1}{e^s(e^s + s) + (e^s + 1)^2 + 1}$$

3단계 $h'(1)$ 의 값 구하기

$s = 0$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$g'(2) = \frac{1 + 1}{1 + 2^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

따라서 ㉢에서

$$h'(1) = \frac{1}{g'(2)} = 3$$

★ idea

10 답 ③

1단계 $f'(1)$ 의 값 구하기

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 4}{x - 1}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f'(x) - 4\} = 0$ 에서

$$f'(1) - 4 = 0 \quad \therefore f'(1) = 4$$

2단계 $f'(x)$ 구하기

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{y} + xf\left(\frac{1}{y}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠의 양변에 $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1) \quad \therefore f(1) = 0$$

또 ㉠의 양변에 $\frac{1}{y}$ 대신 $1 + \frac{h}{x}$ 를 대입하면

$$f\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) = f(x)\left(1 + \frac{h}{x}\right) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\therefore f(x+h) = f(x) + \frac{h}{x}f(x) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{h}{x}f(x) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x} + \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \right\} \\ &= \frac{f(x)}{x} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \\ &= \frac{f(x)}{x} + f'(1) \\ &= \frac{f(x)}{x} + 4 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

3단계 $f''(8)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore f''(x) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{x\left\{ \frac{f(x)}{x} + 4 \right\} - f(x)}{x^2} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \frac{4}{x} \\ \therefore f''(8) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

step ① 핵심 문제

| 72~73쪽

01 $\frac{29}{20}$	02 -14	03 2	04 2	05 ④	06 7
07 ③	08 96	09 6	10 ④	11 ④	12 $\frac{e}{4}$
13 ⑤	14 4				

01 답 $\frac{29}{20}$

곡선 $x^2 + 2ye^x + y^3 = 3$ 과 y 축이 만나는 점 A의 x 좌표는 0이므로 y 좌표를 구하면

$$2y + y^3 = 3, y^3 + 2y - 3 = 0$$

$$(y-1)(y^2+y+3)=0$$

$$\therefore y=1 (\because y \text{는 실수})$$

$$\therefore A(0, 1)$$

$x^2 + 2ye^x + y^3 = 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2e^x \frac{dy}{dx} + 2ye^x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2e^x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = -2x - 2ye^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2ye^x}{2e^x + 3y^2}$$

점 A(0, 1)에서의 접선 l 의 기울기는

$$-\frac{2}{2+3} = -\frac{2}{5}$$

따라서 점 A에서의 접선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{2}{5}x + 1$$

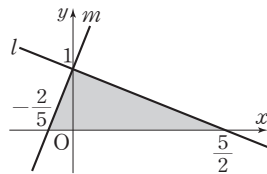
한편 점 A를 지나고 직선 l 에 수직인 직선 m 의 기울기는 $\frac{5}{2}$ 이므로 직선

m 의 방정식은

$$y = \frac{5}{2}x + 1$$

따라서 두 직선 l, m 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5} \right) \times 1 = \frac{29}{20}$$



02 답 -14

$$x = \frac{1}{1+t}, y = 3t - 4 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+t)^2}, \frac{dy}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{-\frac{1}{(1+t)^2}} = -3(1+t)^2$$

접선의 기울기가 -12이므로

$$-3(1+t)^2 = -12, (1+t)^2 = 4$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

(i) $t = -3$ 일 때,

$$x = -\frac{1}{2}, y = -13 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y + 13 = -12\left(x + \frac{1}{2}\right) \therefore y = -12x - 19$$

$$\therefore k = -19$$

(ii) $t = 1$ 일 때,

$$x = \frac{1}{2}, y = -1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y + 1 = -12\left(x - \frac{1}{2}\right) \therefore y = -12x + 5$$

$$\therefore k = 5$$

(i), (ii)에서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-19 + 5 = -14$$

03 답 2

곡선 $y = \frac{x^2}{e^{x-1}} + 1$ 이 y 축과 만나는 점이 B이므로 $x=0$ 을 대입하면

$$y = 1 \therefore B(0, 1)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x-1}} + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^{x-1} - x^2e^{x-1}}{(e^{x-1})^2} = \frac{2x - x^2}{e^{x-1}}$$

$$A\left(t, \frac{t^2}{e^{t-1}} + 1\right) \text{이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는 } f'(t) = \frac{2t - t^2}{e^{t-1}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \left(\frac{t^2}{e^{t-1}} + 1\right) = \frac{2t - t^2}{e^{t-1}}(x - t)$$

이 직선이 점 B(0, 1)을 지나므로

$$1 - \left(\frac{t^2}{e^{t-1}} + 1\right) = \frac{2t - t^2}{e^{t-1}} \times (-t)$$

$$-\frac{t^2}{e^{t-1}} = -\frac{2t^2 - t^3}{e^{t-1}}$$

$$t^2 = 2t^2 - t^3, t^3 - t^2 = 0$$

$$t^2(t-1) = 0 \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 1$$

그런데 점 B의 x 좌표가 0이므로 A(1, 2)

두 점 A(1, 2), B(0, 1)을 지나는 직선의 기울기는 1이고, 선분 AB의

중점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \therefore y = -x + 2$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선의 y 절편은 2이다.

04 답 2

$$f(x) = \sin x - 1, g(x) = \sin^2 x + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \cos x, g'(x) = 2 \sin x \cos x$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 $x=t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$$f'(t) = g'(t), f(t) = g(t)$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$\cos t = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos t (2 \sin t - 1) = 0$$

이때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos t > 0$ 이므로

$$\sin t = \frac{1}{2} \therefore t = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)\text{에서}$$

$$\frac{1}{2}-1=\left(\frac{1}{2}\right)^2+a \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

두 곡선 $y=\sin x-1$, $y=\sin^2 x-\frac{3}{4}$ 의 공통인 접선은 점 $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ 을

지나고 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } m=\frac{\sqrt{3}}{2}, n=-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} amn &= -\frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{32}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } p=\frac{3}{32}, q=\frac{3}{16}\text{이므로 } \frac{q}{p}=2$$

05 답 ④

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x+\frac{a}{x}\text{에서}$$

$$f'(x)=-x+6-\frac{a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x>0$ 에서 감소하려면 $x>0$ 에서 $f'(x)\leq 0$ 이어야 하므로

$$-x+6-\frac{a}{x^2}\leq 0$$

$$\therefore x^3-6x^2+a\geq 0 \quad (\because x^2>0)$$

이때 $g(x)=x^3-6x^2+a$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$

$$g'(x)=0\text{인 } x\text{의 값은 } x=4 \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	$a-32$ 극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 의 최솟값이 $a-32$ 이므로 $x>0$ 에서 $g(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$a-32\geq 0 \quad \therefore a\geq 32$$

따라서 a 의 최솟값은 32이다.

06 답 7

$$f(x)=ax+\frac{b}{x}+8\ln x+4\text{에서}$$

$$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}+\frac{8}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값 6을 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=6$$

$$f'(1)=0\text{에서 } a-b+8=0 \quad \therefore a-b=-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1)=6\text{에서 } a+b+4=6 \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3, b=5$

$$\therefore a+2b=-3+10=7$$

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값 b 를 가지면

$$f'(a)=0, f(a)=b$$

07 답 ③

$f(x)=x-2\cos x$ 라 하면

$$f'(x)=1+2\sin x$$

$$f''(x)=2\cos x$$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \quad (\because 0<x<2\pi)$$

이때 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $f''(x)>0$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ 에서 $f''(x)<0$,

$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 열린구간

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ 에서 아래로 볼록하고, 열린구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 에서 위로 볼록하다.

$$\text{따라서 } a=\frac{\pi}{2}, b=\frac{3}{2}\pi\text{이므로}$$

$$b-a=\pi$$

08 답 96

$$f(x)=\frac{2}{x^2+b}\text{라 하면}$$

$$f'(x)=-\frac{2\times 2x}{(x^2+b)^2}=-\frac{4x}{(x^2+b)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4(x^2+b)^2+4x\times 2(x^2+b)\times 2x}{(x^2+b)^4}=\frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

점 $(2, a)$ 가 변곡점이므로

$$f(2)=a, f''(2)=0$$

$$f(2)=a\text{에서 } \frac{2}{4+b}=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f''(2)=0\text{에서 } \frac{48-4b}{(4+b)^3}=0$$

$$48-4b=0 \quad \therefore b=12$$

이를 ①에 대입하면

$$a=\frac{2}{4+12}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{12}{\frac{1}{8}}=96$$

비법 NOTE

점 (a, b) 가 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이면

$$f(a)=b, f''(a)=0$$

09 답 6

$g(x)=\ln(\sin x+2)$ 라 하면

$$g'(x)=\frac{\cos x}{\sin x+2}$$

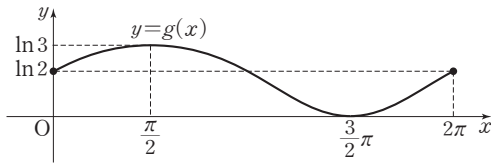
$g'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \quad (\because 0\leq x\leq 2\pi)$$

$0\leq x\leq 2\pi$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 3$ 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	$\ln 2$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 $f(0)=1$
 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=\ln 2$ 와 서로 다른 세 점에서 만나므로 $f(\ln 2)=3$
 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(1)=2 \rightarrow \ln 2 < 1 = \ln e < \ln 3$
 $\therefore f(0)+f(\ln 2)+f(1)=1+3+2=6$

10 답 ④

점 $P(t, 2e^{-t})$ 에서 y 축에 내린 수선의 발이 A이므로
 $A(0, 2e^{-t})$
 $f(x)=2e^{-x}$ 이라 하면
 $f'(x)=-2e^{-x}$
 점 $P(t, 2e^{-t})$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$
 $\therefore y=-2e^{-t}x+2te^{-t}+2e^{-t}$
 $\therefore B(0, 2te^{-t}+2e^{-t})$
 $\overline{AB}=2te^{-t}, \overline{AP}=t$ 이므로 삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$ 라 하면
 $S(t)=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP}$
 $=\frac{1}{2} \times 2te^{-t} \times t$
 $=t^2e^{-t}$
 $S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=-t(t-2)e^{-t}$
 $S'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=2$ ($\because t>0, e^{-t}>0$)
 $t>0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	2	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $S(t)$ 는 $t=2$ 일 때 최대이므로 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t 의 값은 2이다.

11 답 ④

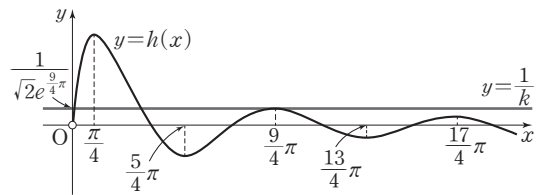
$f(x)=g(x)$ 에서 $e^x=k \sin x$
 $\therefore \frac{\sin x}{e^x}=\frac{1}{k}$
 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=\frac{\sin x}{e^x}$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{k}$ 이 만나는 점의 개수와 같다.
 $h(x)=\frac{\sin x}{e^x}$ 라 하면
 $h'(x)=\frac{\cos x \times e^x - \sin x \times e^x}{(e^x)^2}=\frac{\cos x - \sin x}{e^x}$
 $h'(x)=0$ 에서 $\cos x = \sin x$
 이때 $x>0$ 이므로
 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{9}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{4}\pi \dots$

$x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{9}{4}\pi$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0
$h(x)$		↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ 극대	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$ 극소	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$ 극대

x	...	$\frac{13}{4}\pi$	...	$\frac{17}{4}\pi$	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$ 극소	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{17}{4}\pi}}$ 극대	↘

$x>0$ 에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 세 점에서 만나도록 직선 $y=\frac{1}{k}$ 을 그어 보면
 $\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$
 $\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

12 답 e/4

$f(x) \geq g(x)$ 에서
 $\sqrt{x} \geq a \ln 4x$
 $\sqrt{x}-a \ln 4x \geq 0$
 $h(x)=\sqrt{x}-a \ln 4x$ 라 하면
 $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}$
 $=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$
 $h'(x)=0$ 에서
 $\sqrt{x}-2a=0 \quad \therefore x=4a^2$

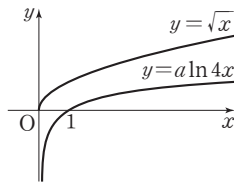
$x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$4a^2$	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		↘	$2a(1-\ln 4a)$ 극소	↗

함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $2a(1-\ln 4a)$ 이므로 $x>0$ 에서 $h(x) \geq 0$ 이 성립 하려면
 $2a(1-\ln 4a) \geq 0$
 $1-\ln 4a \geq 0$ ($\because a>0$)
 $\ln 4a \leq 1$
 $\therefore 0 < a \leq \frac{e}{4}$ ($\because a>0$)
 따라서 양수 a 의 최댓값은 $\frac{e}{4}$ 이다.

다른 풀이

$x > 0$ 에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하려면 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 가 곡선 $y = a \ln 4x$ 보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = a \ln 4x$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{a}{x}$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 $t (t > 0)$ 라 하면 $x = t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t) = g(t)$ 에서

$$\sqrt{t} = a \ln 4t \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x = t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{a}{t} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln 4t, \quad \ln 4t = 2 \quad (\because t > 0)$$

$$4t = e^2 \quad \therefore t = \frac{e^2}{4}$$

이를 ㉡에 대입하면 $a = \frac{e}{4}$

따라서 $0 < a \leq \frac{e}{4}$ 이므로 양수 a 의 최댓값은 $\frac{e}{4}$ 이다.

13 답 ⑤

시각 t 에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = f'(t)$$

$$= \frac{2(2t-5)}{t^2-5t+7} - 2(t-2)$$

$$= \frac{4t-10-(2t-4)(t^2-5t+7)}{t^2-5t+7}$$

$$= \frac{-2t^3+14t^2-30t+18}{t^2-5t+7}$$

$$a(t) = f''(t)$$

$$= \frac{(-6t^2+28t-30)(t^2-5t+7)-(-2t^3+14t^2-30t+18)(2t-5)}{(t^2-5t+7)^2}$$

$$= \frac{-6t^4+58t^3-212t^2+346t-210-(-4t^4+38t^3-130t^2+186t-90)}{(t^2-5t+7)^2}$$

$$= \frac{-2t^4+20t^3-82t^2+160t-120}{(t^2-5t+7)^2}$$

ㄱ. $v(t) = 0$ 에서

$$2t^3-14t^2+30t-18=0$$

$$t^3-7t^2+15t-9=0$$

$$(t-1)(t-3)^2=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 점 P의 속도가 0이 되는 시각은 1 또는 3이다.

ㄴ. $a(t) = 0$ 에서

$$2t^4-20t^3+82t^2-160t+120=0$$

$$t^4-10t^3+41t^2-80t+60=0$$

$$(t-2)(t-3)(t^2-5t+10)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3 \quad (\because t \geq 0)$$

따라서 점 P의 가속도가 0이 되는 t 의 값은 2, 3이므로 그 합은

$$2+3=5$$

ㄷ. 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$f'(t)$		+	0	-	0	-
$f(t)$	$2\ln 7-4$	/	$2\ln 3-1$ 극대	\	-1	\

이때 $e > 2.7$ 에서 $7 < (2.7)^2 < e^2$ 이므로

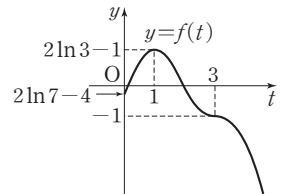
$$\ln 7 < 2$$

$$2\ln 7 < 4 \quad \therefore 2\ln 7-4 < 0$$

또 $f(1) = 2\ln 3-1 > 0$ 이므로 함수

$y = f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 t 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 P는 원점을 두 번 지난다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 4

$x = \sin \{ \ln (t^2+1) \}$, $y = \cos \{ \ln (t^2+1) \}$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2+1} \cos \{ \ln (t^2+1) \}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2t}{t^2+1} \sin \{ \ln (t^2+1) \} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 \cos^2 \{ \ln (t^2+1) \} + \left(-\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 \sin^2 \{ \ln (t^2+1) \}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 [\sin^2 \{ \ln (t^2+1) \} + \cos^2 \{ \ln (t^2+1) \}]}$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

점 P의 속력이 $\frac{1}{2}$ 이면 $\frac{2t}{t^2+1} = \frac{1}{2}$ 에서

$$t^2+1=4t$$

$$t^2-4t+1=0$$

$$\therefore t=2 \pm \sqrt{3}$$

따라서 점 P의 속력이 $\frac{1}{2}$ 이 되는 모든 t 의 값의 합은

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \quad \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

step 2 고난도 문제

| 74~78쪽

01 10	02 ③	03 ①	04 ④	05 $5\sqrt{2}$	06 25
07 ③	08 $\frac{3}{16}$	09 49	10 17	11 ④	12 3
13 ③	14 ③	15 6	16 ⑤	17 424	18 e^6
19 $\frac{2}{3}$	20 ③	21 e	22 -42	23 ②	24 ④
25 e	26 $0 < a \leq 1$	27 ②	28 ⑤		

01 답 10

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{\pi}{6}}{x - 1} = k$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ f(x) - \frac{\pi}{6} \right\} = 0 \text{에서}$$

$$f(1) - \frac{\pi}{6} = 0 \quad \therefore f(1) = \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{\pi}{6}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) \text{라 하면}$$

$$h(1) = (g \circ f)(1) = g(f(1))$$

$$= g\left(\frac{\pi}{6}\right) (\because \textcircled{㉠})$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sin x \text{에서 } g'(x) = \cos x \text{이고 } h(x) = (g \circ f)(x) \text{에서}$$

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \text{이므로 함수 } y = h(x) \text{의 그래프 위의 점}$$

$$(1, (g \circ f)(1)), \text{ 즉 } \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{에서의 접선의 기울기는}$$

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1)$$

$$= g'\left(\frac{\pi}{6}\right)k (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

$$\text{점 } \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{에서의 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}k(x - 1)$$

$$\text{이 직선이 원점을 지나므로}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}k \quad \therefore k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 30k^2 = 30 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 10$$

02 답 ③

$$f(x) = x^2 e^{-x} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x}$$

$$\text{점 } A(a, 0) \text{에서 곡선 } y = f(x) \text{에 그은 접선의 접점의 좌표를 } (t, t^2 e^{-t})$$

$$\text{이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는}$$

$$f'(t) = (2t - t^2) e^{-t}$$

$$\text{점 } (t, t^2 e^{-t}) \text{에서의 접선의 방정식은}$$

$$y - t^2 e^{-t} = (2t - t^2) e^{-t} (x - t)$$

$$\text{이 직선이 점 } A \text{를 지나므로}$$

$$-t^2 e^{-t} = (2t - t^2) e^{-t} (a - t)$$

$$-t^2 e^{-t} = \{t^3 - (a+2)t^2 + 2at\} e^{-t}$$

$$\therefore t\{t^2 - (a+1)t + 2a\} e^{-t} = 0$$

$$\text{그런데 } e^{-t} > 0 \text{이므로}$$

$$t = 0 \text{ 또는 } t^2 - (a+1)t + 2a = 0$$

$$\text{이때 } t = 0 \text{이면 } f'(0) = 0 \text{이므로 접선은 } x \text{축이다.}$$

$$\text{따라서 이차방정식 } t^2 - (a+1)t + 2a = 0 \text{의 두 실근을 } \alpha, \beta \text{라 하면}$$

$$f'(\alpha) = m_1, f'(\beta) = m_2 \quad \text{--- } D = (a+1)^2 - 8a = a^2 - 6a + 1 > 0 (\because a < 0)$$

$$\text{이차방정식 } t^2 - (a+1)t + 2a = 0 \text{에서 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\alpha + \beta = a + 1, \alpha\beta = 2a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\therefore m_1 m_2 = f'(\alpha) f'(\beta)$$

$$= (2\alpha - \alpha^2) e^{-\alpha} \times (2\beta - \beta^2) e^{-\beta}$$

$$= \alpha\beta(\alpha - 2)(\beta - 2) e^{-\alpha - \beta}$$

$$= \alpha\beta\{\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4\} e^{-(\alpha + \beta)}$$

$$= 2a\{2a - 2(a + 1) + 4\} e^{-(a + 1)} (\because \textcircled{㉠})$$

$$= 4ae^{-(a + 1)}$$

$$\text{즉, } 4ae^{-(a + 1)} = -4 \text{이므로}$$

$$a = -1$$

idea

03 답 ①

두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

이때 직선 $y = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{a}{4}\right)$ 가 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 의 접선이므로 직선

$y = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{a}{4}\right)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선은 곡선

$y = f(x)$ 의 접선이다.

$$y = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{a}{4}\right) \text{에서 } x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면}$$

$$x = \frac{2}{\pi}\left(y + \frac{a}{4}\right), y + \frac{a}{4} = \frac{\pi}{2}x \quad \therefore y = \frac{\pi}{2}x - \frac{a}{4}$$

$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2}x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2 \sin \frac{\pi}{2}x \times \cos \frac{\pi}{2}x \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \sin \pi x$$

직선 $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{a}{4}$ 가 곡선 $y = f(x)$ 의 접선이므로 접점의 좌표를

$$\left(t, \sin^2 \frac{\pi}{2}t\right) (0 \leq t \leq 1) \text{라 하면 } f'(t) = \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$\frac{\pi}{2} \sin \pi t = \frac{\pi}{2}, \sin \pi t = 1$$

$$\text{이때 } 0 \leq t \leq 1 \text{에서 } 0 \leq \pi t \leq \pi \text{이므로}$$

$$\pi t = \frac{\pi}{2} \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \sin^2 \frac{\pi}{4}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고 이 점은 직선

$$y = \frac{\pi}{2}x - \frac{a}{4} \text{ 위의 점이므로}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{4}, \frac{a}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \therefore a = \pi - 2$$

다른 풀이

$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2}x \text{에서 } f'(x) = \frac{\pi}{2} \sin \pi x$$

직선 $y = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{a}{4}\right)$ 는 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 의 접선이므로 접점의 x 좌표를

$t (0 \leq t \leq 1)$ 라 하면

$$(f^{-1})'(t) = \frac{2}{\pi}$$

$$f^{-1}(t) = k \text{라 하면 } (f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{f'(k)} = \frac{2}{\pi}, f'(k) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \sin \pi k = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \sin \pi k = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(t) = k \text{에서 } f(k) = t \text{이므로 } \sin^2 \frac{\pi}{2}k = t$$

$$\cos \pi k = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}k \text{에서 } \sin^2 \frac{\pi}{2}k = \frac{1 - \cos \pi k}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1 - \cos \pi k}{2} = t \quad \therefore \cos \pi k = 1 - 2t \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\sin^2 \pi k + \cos^2 \pi k = 1$ 이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$$1^2 + (1-2t)^2 = 1$$

$$(2t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, 곡선 } y=f^{-1}(x) \text{와 직선 } y=\frac{2}{\pi}\left(x+\frac{a}{4}\right) \text{의 접점의 좌표는 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

이다.

따라서 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 은 직선 $y=\frac{2}{\pi}\left(x+\frac{a}{4}\right)$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{a}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \pi - 2$$

04 답 ④

$$f(x) = \frac{2x}{x-2} \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)-2x}{(x-2)^2} = -\frac{4}{(x-2)^2}$$

$P\left(t, \frac{2t}{t-2}\right) (t > 2)$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -\frac{4}{(t-2)^2}$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{2t}{t-2} = -\frac{4}{(t-2)^2}(x-t)$$

$$\therefore y = -\frac{4}{(t-2)^2}x + \frac{2t^2}{(t-2)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 ㉠이 직선 $x=2$ 와 만나는 점 A의 y좌표를 구하면

$$y = \frac{-8+2t^2}{(t-2)^2} = \frac{2(t+2)(t-2)}{(t-2)^2}$$

$$= \frac{2t+4}{t-2} = 2 + \frac{8}{t-2}$$

$$\therefore A\left(2, 2 + \frac{8}{t-2}\right)$$

또 직선 ㉡이 직선 $y=2$ 와 만나는 점 B의 x좌표를 구하면

$$2 = -\frac{4}{(t-2)^2}x + \frac{2t^2}{(t-2)^2}$$

$$\frac{4}{(t-2)^2}x = \frac{2t^2}{(t-2)^2} - 2, \quad \frac{4}{(t-2)^2}x = \frac{8t-8}{(t-2)^2}$$

$$\therefore x = 2t-2$$

$$\therefore B(2t-2, 2)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2t-4)^2 + \left(-\frac{8}{t-2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4(t-2)^2 + \frac{64}{(t-2)^2}}$$

이때 $t > 2$ 에서 $t-2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4(t-2)^2 + \frac{64}{(t-2)^2} \geq 2\sqrt{4(t-2)^2 \times \frac{64}{(t-2)^2}} = 2 \times 16 = 32$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 4(t-2)^2 = \frac{64}{(t-2)^2} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\overline{AB} \geq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

05 답 $5\sqrt{2}$

두 직선 l, m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 모두 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

두 직선 l, m 의 기울기는

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

$$x = 3\cos t - 1, y = 4\sin t + 2 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 4\cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos t}{-3\sin t} = -\frac{4}{3\tan t} \quad (\text{단, } \tan t \neq 0)$$

$$\text{즉, } -\frac{4}{3\tan t} = 1 \text{이므로}$$

$$\tan t = -\frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$\tan t < 0$ 이므로 t 는 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각이다.

(i) t 가 제2사분면의 각일 때,

$$\tan t = -\frac{4}{3} \text{에서 } \sin t = \frac{4}{5}, \cos t = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore x = 3\cos t - 1 = -\frac{9}{5} - 1 = -\frac{14}{5}, y = 4\sin t + 2 = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

따라서 점 $\left(-\frac{14}{5}, \frac{26}{5}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{26}{5} = x + \frac{14}{5} \quad \therefore y = x + 8 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

(ii) t 가 제4사분면의 각일 때,

$$\tan t = -\frac{4}{3} \text{에서 } \sin t = -\frac{4}{5}, \cos t = \frac{3}{5}$$

$$\therefore x = 3\cos t - 1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, y = 4\sin t + 2 = -\frac{16}{5} + 2 = -\frac{6}{5}$$

따라서 점 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + \frac{6}{5} = x - \frac{4}{5} \quad \therefore y = x - 2 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

(i), (ii)에서 두 직선 l, m 은 $y = x + 8, y = x - 2$ 이고 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 $x - y + 8 = 0$ 과 직선 $y = x - 2$ 위의 점 $(0, -2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

06 답 25

함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족시키므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소한다.

$$\therefore f'(x) \geq 0 \text{ 또는 } f'(x) \leq 0$$

$$f(x) = \frac{a}{4}x + 2\cos x(\sin x - 1) \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{a}{4} - 2\sin x(\sin x - 1) + 2\cos^2 x$$

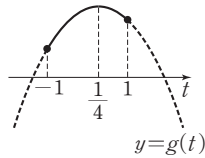
$$= \frac{a}{4} - 2\sin^2 x + 2\sin x + 2(1 - \sin^2 x)$$

$$= -4\sin^2 x + 2\sin x + \frac{a}{4} + 2$$

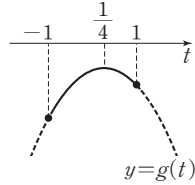
이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 $f'(x) = -4t^2 + 2t + \frac{a}{4} + 2$ 이므로

$$\text{로 } g(t) = -4t^2 + 2t + \frac{a}{4} + 2 = -4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{a}{4} + \frac{9}{4} \text{라 하자.}$$

- (i) $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \geq 0$ 일 때,
 $g(-1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{a}{4} - 4 \geq 0$
 $\therefore a \geq 16$



- (ii) $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \leq 0$ 일 때,
 $g(\frac{1}{4}) \leq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{a}{4} + \frac{9}{4} \leq 0$
 $\therefore a \leq -9$



- (i), (ii)에서 $a \leq -9$ 또는 $a \geq 16$
따라서 $p = -9$, $q = 16$ 이므로
 $q - p = 25$

07 답 ③

ㄱ. $f(x) = e^x \cos x$ 라 하면

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 $e^x > 0$, $\cos x > \sin x$ 이므로

$$f'(x) > 0$$

따라서 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$ 인 α ,

β 에 대하여

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

$$\therefore e^\alpha \cos \alpha < e^\beta \cos \beta$$

ㄴ. $g(x) = \tan x - x$ 라 하면

$$g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan^2 x > 0$ 이므로

$$g'(x) > 0$$

따라서 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가하므로 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 인 α ,

β 에 대하여

$$g(\alpha) < g(\beta)$$

$$\tan \alpha - \alpha < \tan \beta - \beta$$

$$\therefore \tan \alpha - \tan \beta < \alpha - \beta$$

ㄷ. $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ 라 하면

$$h'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

이때 $p(x) = x \cos x - \sin x$ 라 하면

$$p'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

$0 < x < \pi$ 에서 $0 < \sin x \leq 1$ 이므로 $-x \sin x < 0$

$$\therefore p'(x) < 0$$

따라서 $0 < x < \pi$ 에서 함수 $p(x)$ 는 감소하고 $p(0) = 0$ 이므로

$$p(x) < 0 \quad \therefore h'(x) < 0$$

따라서 $0 < x < \pi$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소하므로 $0 < \alpha < \beta < \pi$ 인 α ,

β 에 대하여

$$h(\alpha) > h(\beta)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 답 $\frac{3}{16}$

$$f(x) = \frac{-tx + t^2 + 1}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = \frac{-t(x^2 - 4) - (-tx + t^2 + 1) \times 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{tx^2 - 2(t^2 + 1)x + 4t}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{(tx - 2)(x - 2t)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{2}{t} \text{ 또는 } x = 2t$$

(i) $\frac{2}{t} < 2t$ 일 때,

$$t > 0 \text{이므로 } 2 < 2t^2, t^2 > 1 \quad \therefore t > 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	$\frac{2}{t}$	...	2	...	$2t$	...
$f'(x)$	+		+	0	-		-	0	+
$f(x)$	/		/	극대	\		\	극소	/

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = 2t$ 에서 극소이고 극솟값은

$$g(t) = f(2t) = \frac{-2t^2 + t^2 + 1}{4t^2 - 4} = \frac{-(t^2 - 1)}{4(t^2 - 1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore g(5) = -\frac{1}{4}$$

(ii) $\frac{2}{t} > 2t$ 일 때,

$$t > 0 \text{이므로 } 2 > 2t^2, t^2 < 1 \quad \therefore 0 < t < 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	$2t$	...	2	...	$\frac{2}{t}$	...
$f'(x)$	+		+	0	-		-	0	+
$f(x)$	/		/	극대	\		\	극소	/

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{2}{t}$ 에서 극소이고 극솟값은

$$g(t) = f\left(\frac{2}{t}\right) = \frac{-2 + t^2 + 1}{\frac{4}{t^2} - 4} = \frac{t^2(t^2 - 1)}{4 - 4t^2} = -\frac{t^2}{4}$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$$

(i), (ii)에서

$$g\left(\frac{1}{2}\right) - g(5) = -\frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

09 답 49

(가)에서 이차함수 $f(x)$ 는 극댓값을 가지므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라 하면

$$k < 0$$

또 $x = a$ 에서 극댓값 0을 갖는다고 하면

$$f(a) = 0, f'(a) = 0$$

$$\therefore f(x) = k(x - a)^2$$

$$g(x) = e^x f(x) = ke^x(x - a)^2 \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = ke^x(x - a)^2 + ke^x \times 2(x - a)$$

$$= ke^x(x - a)(x - a + 2)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = a - 2 \text{ 또는 } x = a$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-2$	...	a	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	\	극소	/	극대	\

(나)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$a-2=1 \quad \therefore a=3$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{k(x-3)^2}{x} \text{이라 하면}$$

$$h'(x)=\frac{2k(x-3) \times x - k(x-3)^2}{x^2}$$

$$=\frac{k(x-3)(x+3)}{x^2}$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...	3	...
$h'(x)$	-	0	+		+	0	-
$h(x)$	\	극소	/		/	극대	\

함수 $h(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극소이고 극솟값은

$$h(-3)=\frac{36k}{-3}=-12k$$

(다)에서 함수 $h(x)$ 의 극솟값이 12이므로

$$-12k=12 \quad \therefore k=-1$$

따라서 $f(x)=-(x-3)^2$ 이므로

$$|f(10)|=|-49|=49$$

10 답 17

$$f(x)=t(\ln x)^2-x^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=\frac{2t \ln x}{x}-2x=\frac{2t \ln x-2x^2}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극대이므로 $f'(k)=0$ 에서

$$\frac{2t \ln k-2k^2}{k}=0, \quad 2t \ln k-2k^2=0$$

$$\therefore t \ln k=k^2$$

이때 실수 k 의 값이 $g(t)$ 이므로

$$t \ln g(t)=\{g(t)\}^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $t=a$ 를 대입하면

$$a \ln g(a)=\{g(a)\}^2$$

$$2a=e^4 \quad (\because g(a)=e^2)$$

$$\therefore a=\frac{e^4}{2}$$

①의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\ln g(t)+t \times \frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)g'(t)$$

양변에 $t=a$ 를 대입하면

$$\ln g(a)+a \times \frac{g'(a)}{g(a)}=2g(a)g'(a)$$

$$2+\frac{e^4}{2} \times \frac{g'(a)}{e^2}=2e^2 g'(a) \quad (\because a=\frac{e^4}{2}, g(a)=e^2)$$

$$\frac{3}{2}e^2 g'(a)=2 \quad \therefore g'(a)=\frac{4}{3e^2}$$

$$\therefore a \times \{g'(a)\}^2=\frac{e^4}{2} \times \frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$$

따라서 $p=9, q=8$ 이므로 $p+q=17$

11 답 ④

$$f(x)=\frac{a}{4} \sin 4x-8a \sin^2 x-bx-5 \text{에서}$$

$$f'(x)=a \cos 4x-16a \sin x \cos x-b$$

$$=a(1-2 \sin^2 2x)-8a \sin 2x-b$$

$$=-2a \sin^2 2x-8a \sin 2x+a-b$$

이때 $\sin 2x=t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 $f'(x)=-2at^2-8at+a-b$

이므로 $g(t)=-2at^2-8at+a-b=-2a(t+2)^2+9a-b$ 라 하자.

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \geq 0$ 또는 $g(t) \leq 0$ 이어야 한다.

(i) $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \geq 0$ 일 때,

$g(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-9a-b \geq 0 \quad \therefore b \leq -9a$$

이때 a, b 는 $1 \leq a \leq 20, -20 \leq b \leq 20$

인 정수이므로

$a=1$ 일 때, b 는 $-20, -19, -18, \dots, -9$ 의 12개이다.

$a=2$ 일 때, b 는 $-20, -19, -18$ 의 3개이다.

$3 \leq a \leq 20$ 일 때, $b \leq -27$ 이므로 b 는 존재하지 않는다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$12+3=15$$

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \leq 0$ 일 때,

$g(-1) \leq 0$ 이어야 하므로

$$7a-b \leq 0 \quad \therefore b \geq 7a$$

이때 a, b 는 $1 \leq a \leq 20, -20 \leq b \leq 20$ 인 정수이므로

$a=1$ 일 때, b 는 $7, 8, 9, \dots, 20$ 의 14개이다.

$a=2$ 일 때, b 는 $14, 15, 16, \dots, 20$ 의 7개이다.

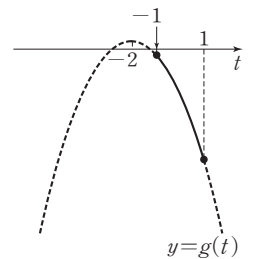
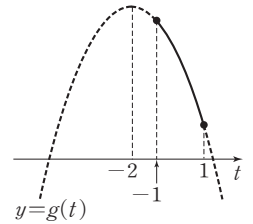
$3 \leq a \leq 20$ 일 때, $b \geq 21$ 이므로 b 는 존재하지 않는다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$14+7=21$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$15+21=36$$



12 답 3

$$f(x)=9\sqrt{\frac{x}{4a-x}}=9x^{\frac{1}{2}}(4a-x)^{-\frac{1}{2}} \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=9 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(4a-x)^{-\frac{1}{2}}+9x^{\frac{1}{2}} \times \left\{-\frac{1}{2}(4a-x)^{-\frac{3}{2}} \times (-1)\right\}$$

$$=\frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}(4a-x)^{-\frac{3}{2}}(4a-x+x)$$

$$=18ax^{-\frac{1}{2}}(4a-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=18a \times \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)(4a-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+18ax^{-\frac{1}{2}} \times \left\{-\frac{3}{2}(4a-x)^{-\frac{5}{2}} \times (-1)\right\}$$

$$=-9ax^{-\frac{3}{2}}(4a-x)^{-\frac{5}{2}}\{(4a-x)-3x\}$$

$$=36ax^{-\frac{3}{2}}(4a-x)^{-\frac{5}{2}}(x-a)$$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=a$ ($\because 0 < x < 4a$)

이때 $0 < x < a$ 에서 $f''(x) < 0$, $a < x < 4a$ 에서 $f''(x) > 0$

따라서 $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$$A(a, 3\sqrt{3})$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선 l 의 기울기는

$$f'(a)=18a \times a^{-\frac{1}{2}} \times (3a)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{a}$$

점 A에서의 접선 l 의 방정식은

$$y-3\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{a}(x-a)$$

$$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{a}x+\sqrt{3}$$

따라서 직선 l 은 양수 a 의 값에 관계없이 점 $(0, \sqrt{3})$ 을 지나므로

$$a=0, \beta=\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2+\beta^2=3$$

13 답 ③

ㄱ. $3\{f'(x)\}^2+f(x)f''(x) < 0$ 에서 $\{f'(x)\}^2 \geq 0$ 이므로

$$f(x)f''(x) < 0$$

이때 어떤 열린구간에서 $f(x) > 0$ 이면

$$f''(x) < 0$$

따라서 그 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ㄴ. $g(x)=\{f(x)\}^4$ 이라 하면

$$g'(x)=4\{f(x)\}^3f'(x)$$

$$g''(x)=12\{f(x)\}^2\{f'(x)\}^2+4\{f(x)\}^3f''(x) \\ =4\{f(x)\}^2[3\{f'(x)\}^2+f(x)f''(x)]$$

이때 어떤 열린구간에서 $f(x) \neq 0$ 이면 $\{f(x)\}^2 > 0$ 이고,

$$3\{f'(x)\}^2+f(x)f''(x) < 0$$
이므로

$$g''(x) < 0$$

따라서 그 구간에서 곡선 $y=g(x)$, 즉 $y=\{f(x)\}^4$ 은 위로 볼록하다. ㉠

ㄷ. $g(x)=\{f(x)\}^4$ 이라 하면 $f(3)=1$, $f(8)=2$ 에서

$$g(3)=1, g(8)=16$$

두 점 $(3, 1)$, $(8, 16)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{15}{5}(x-3)$$

$$\therefore y=3x-8$$

이때 ㉠에서 곡선 $y=\{f(x)\}^4$ 은 위로 볼록하므로 열린구간 $(3, 8)$

에서 곡선 $y=\{f(x)\}^4$ 은 직선 $y=3x-8$ 보다 위쪽에 있다.

$$\therefore \{f(x)\}^4 > 3x-8$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 답 ③

$$f(x)=ae^{3x}+be^x$$
에서

$$f'(x)=3ae^{3x}+be^x, f''(x)=9ae^{3x}+be^x$$

(가)에서 $x_1 < \ln \frac{2}{3} < x_2$ 를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f''(x_1)f''(x_2) < 0$$
이므로 $f''(x_1)$ 과 $f''(x_2)$ 의 부호가 서로 다르다.

즉, 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=\ln \frac{2}{3}$ 에서 변곡점을 가지므로

$$f''\left(\ln \frac{2}{3}\right)=0$$

$$9a \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + b \times \frac{2}{3} = 0, \frac{8}{3}a + \frac{2}{3}b = 0 \quad \therefore b = -4a$$

$$f'(x)=3ae^{3x}-4ae^x=ae^x(3e^{2x}-4)$$
이므로

$$f'(x)=0$$
에서 $3e^{2x}-4=0$ ($\because e^x > 0$)

$$e^{2x}=\frac{4}{3}, 2x=\ln \frac{4}{3}$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}\ln \frac{4}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{2}\ln \frac{4}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/

이때 (나)에서 구간 $[k, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 구간

$[k, \infty)$ 에서 $f(x)$ 는 항상 증가하거나 감소해야 한다.

함수 $f(x)$ 는 구간 $\left[\frac{1}{2}\ln \frac{4}{3}, \infty\right)$ 에서 증가하므로

$$k \geq \frac{1}{2}\ln \frac{4}{3}$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}\ln \frac{4}{3}$$

$$f(x)=ae^{3x}-4ae^x$$
에서

$$f(2m)=f\left(\ln \frac{4}{3}\right)=a \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4a \times \frac{4}{3} = -\frac{80}{27}a$$

$$\text{즉, } -\frac{80}{27}a = -\frac{80}{9} \text{이므로 } a=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=3e^{3x}-12e^x \text{이므로}$$

$$f(0)=3-12=-9$$

15 답 6

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2+2x+2}$$
에서

$$f'(x)=\frac{4x(x^2+2x+2)-2x^2(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\frac{4x^2+8x}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{4x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

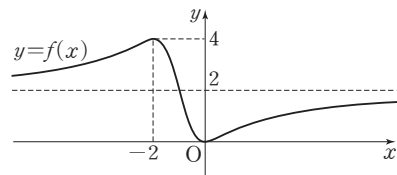
$$f'(x)=0$$
인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	4 극대	\	0 극소	/

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=2, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=2$$
이므로 점근선은 직선 $y=2$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수 $g(t)$ 는

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t < 0 \text{ 또는 } t > 4) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=2 \text{ 또는 } t=4) \\ 2 & (0 < t < 2 \text{ 또는 } 2 < t < 4) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 값은 0, 2, 4이므로 그 합은 $0+2+4=6$

16 **답** ⑤

ㄱ. $f(x) = \frac{x^n}{\ln x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1} \ln x - x^n \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x^{n-1}(n \ln x - 1)}{(\ln x)^2} \dots\dots ㉠$$

$f'(x)=0$ 에서
 $x^{n-1}(n \ln x - 1) = 0$
 $n \ln x - 1 = 0$ ($\because x > 1$)
 $\ln x = \frac{1}{n}$

$\therefore x = e^{\frac{1}{n}}$
 $x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	$e^{\frac{1}{n}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^{\frac{1}{n}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $n=1$ 일 때, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

㉠에서 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ 이므로

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

$f''(x)=0$ 에서
 $2 - \ln x = 0, \ln x = 2$
 $\therefore x = e^2$

이때 $1 < x < e^2$ 에서 $f''(x) > 0$, $x > e^2$ 에서 $f''(x) < 0$
 따라서 $x = e^2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$$\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$$

$\alpha = e^2, f(\alpha) = \frac{e^2}{2}$ 이므로
 $\alpha = 2f(\alpha)$

ㄷ. $n=2$ 일 때, $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

㉠에서 $f'(x) = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

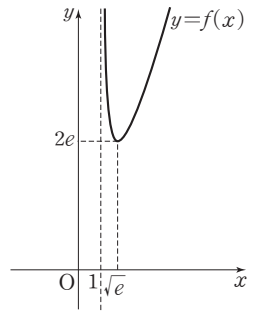
$f'(x)=0$ 에서
 $x(2 \ln x - 1) = 0$
 $2 \ln x - 1 = 0$ ($\because x > 1$)
 $\ln x = \frac{1}{2} \therefore x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2e$ 극소	$\nearrow$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 만나지 않으려면
 $k < 2e$
 이를 만족시키는 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 **답** 424

$A(t, e^{nt-3}+4)$ 라 하면 선분 AB의 길이의 최솟값은 점 A와 직선 $y=nx-3$ 사이의 거리의 최솟값과 같다.

점 A와 직선 $y=nx-3$, 즉 $nx-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|nt - (e^{nt-3}+4) - 3|}{\sqrt{n^2 + (-1)^2}} = \frac{|nt - e^{nt-3} - 7|}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{e^{nt-3} - nt + 7}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$f(t) = e^{nt-3} - nt + 7$ 이라 하면

$$f'(t) = ne^{nt-3} - n = n(e^{nt-3} - 1)$$

$f'(t)=0$ 에서
 $e^{nt-3} - 1 = 0, e^{nt-3} = 1$

$nt - 3 = 0 \therefore t = \frac{3}{n}$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$\frac{3}{n}$	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\	$\frac{5}{\sqrt{n^2+1}}$ 극소	/

함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{3}{n}$ 에서 최솟값 5를 가지므로 선분 AB의 길이의 최솟값

은 $\frac{5}{\sqrt{n^2+1}}$ 이다.

따라서 $a_n = \frac{5}{\sqrt{n^2+1}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 \frac{50}{a_n^2} &= 2 \sum_{n=1}^8 (n^2 + 1) \\ &= 2 \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 8 \times 1 \right) \\ &= 2 \times 212 \\ &= 424 \end{aligned}$$

18 **답** e^6

$f(x) = \frac{x^3}{a^x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 a^x - x^3 a^x \ln a}{(a^x)^2} \\ &= \frac{3x^2 - x^3 \ln a}{a^x} \\ &= \frac{x^2(3 - x \ln a)}{a^x} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$x=0$ 또는 $x = \frac{3}{\ln a}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{3}{\ln a}$	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{\ln a}$ 에서 최댓값 $f\left(\frac{3}{\ln a}\right)$ 을 가지므로

$$a = \frac{3}{\ln a}$$

$$\beta = f\left(\frac{3}{\ln a}\right) = \frac{\left(\frac{3}{\ln a}\right)^3}{a^{\frac{3}{\ln a}}}$$

$$= \frac{27}{(\ln a)^3 \times a^{3 \log_a e}} = \frac{27}{e^3 (\ln a)^3} \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - x^3 \ln a}{a^x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x - 3x^2 \ln a)a^x - (3x^2 - x^3 \ln a)a^x \ln a}{(a^x)^2} \\ &= \frac{6x - 3x^2 \ln a - (3x^2 - x^3 \ln a) \ln a}{a^x} \\ &= \frac{x\{6 - 6x \ln a + x^2 (\ln a)^2\}}{a^x} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서}$$

$$x\{6 - 6x \ln a + x^2 (\ln a)^2\} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } (\ln a)^2 x^2 - 6x \ln a + 6 = 0$$

이때 이차방정식 $(\ln a)^2 x^2 - 6x \ln a + 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9(\ln a)^2 - 6(\ln a)^2 = 3(\ln a)^2 > 0$$

즉, 이차방정식 $(\ln a)^2 x^2 - 6x \ln a + 6 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 $x = 0$ 은 이차방정식 $(\ln a)^2 x^2 - 6x \ln a + 6 = 0$ 의 근이 아니므로 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점은 3개이다.

이차방정식 $(\ln a)^2 x^2 - 6x \ln a + 6 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$-\frac{-6 \ln a}{(\ln a)^2} = \frac{6}{\ln a}$$

곡선 $y = f(x)$ 의 모든 변곡점의 x 좌표의 합은

$$\gamma = 0 + \frac{6}{\ln a} = \frac{6}{\ln a} \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\therefore \frac{\beta \gamma}{a^3} = \frac{\frac{27}{e^3 (\ln a)^3} \times \frac{6}{\ln a}}{\left(\frac{3}{\ln a}\right)^3} = \frac{6}{e^3 \ln a}$$

$$\text{즉, } \frac{6}{e^3 \ln a} \leq \frac{1}{e^3} \text{이므로}$$

$$\ln a \geq 6 \quad \therefore a \geq e^6$$

따라서 a 의 최솟값은 e^6 이다. $\dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

★ idea
19 $\frac{2}{3}$

$$0 < a < b \text{에서 } \frac{b}{a} > 1$$

$$\frac{b}{a} = t \text{로 놓으면 } t > 1 \text{이고}$$

$$\frac{b^2 - a^2 + 2ab}{b^2 + 3a^2} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1 + 2 \times \frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3} = \frac{t^2 - 1 + 2t}{t^2 + 3}$$

$$f(t) = \frac{t^2 - 1 + 2t}{t^2 + 3} \text{라 하면}$$

$$f'(t) = \frac{(2t + 2)(t^2 + 3) - (t^2 - 1 + 2t) \times 2t}{(t^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{-2t^2 + 8t + 6}{(t^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{-2(t^2 - 4t - 3)}{(t^2 + 3)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은}$$

$$t = 2 + \sqrt{7} \quad (\because t > 1)$$

$t > 1$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	$2 + \sqrt{7}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	극대	↘

함수 $f(t)$ 는 $t = 2 + \sqrt{7}$ 에서 최댓값 $f(2 + \sqrt{7})$ 을 가지므로

$$\begin{aligned} f(2 + \sqrt{7}) &= \frac{(2 + \sqrt{7})^2 - 1 + 2(2 + \sqrt{7})}{(2 + \sqrt{7})^2 + 3} \\ &= \frac{14 + 6\sqrt{7}}{14 + 4\sqrt{7}} = \frac{7 + 3\sqrt{7}}{7 + 2\sqrt{7}} \\ &= \frac{(7 + 3\sqrt{7})(7 - 2\sqrt{7})}{(7 + 2\sqrt{7})(7 - 2\sqrt{7})} \\ &= \frac{7 + 7\sqrt{7}}{21} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ 이므로

$$p + q = \frac{2}{3}$$

다른 풀이

$$0 < a < b \text{에서 } 0 < \frac{a}{b} < 1$$

$$\frac{a}{b} = t \text{로 놓으면 } 0 < t < 1 \text{이고}$$

$$\frac{b^2 - a^2 + 2ab}{b^2 + 3a^2} = \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2 \times \frac{a}{b}}{1 + 3 \times \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{1 - t^2 + 2t}{1 + 3t^2}$$

$$f(t) = \frac{1 - t^2 + 2t}{1 + 3t^2} \text{라 하면}$$

$$f'(t) = \frac{(-2t + 2)(1 + 3t^2) - (1 - t^2 + 2t) \times 6t}{(1 + 3t^2)^2}$$

$$= \frac{-6t^2 - 8t + 2}{(1 + 3t^2)^2}$$

$$= \frac{-2(3t^2 + 4t - 1)}{(1 + 3t^2)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은}$$

$$t = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \quad (\because 0 < t < 1)$$

$0 < t < 1$ 에서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$ 에서 최댓값 $f\left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right)$ 을 가지므로

$$f\left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right) = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$$

따라서 $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ 이므로

$$p + q = \frac{2}{3}$$

20 답 ③

ㄱ. $f(x)=x^n-1$, $g(x)=\log_3(x^4+2n)$ 에서

$$f'(x)=nx^{n-1}, g'(x)=\frac{4x^3}{(x^4+2n)\ln 3}$$

$h(x)=g(f(x))$ 에서 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 이므로

$$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(0)\times n=0\times n=0$$

$$\text{ㄴ. } h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\frac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{\{(x^n-1)^4+2n\}\ln 3}$$

$0<x<1$ 일 때 $x^{n-1}>0$ 이고 $-1<x^n-1<0$ 이므로

$$(x^n-1)^3<0 \quad \therefore h'(x)<0$$

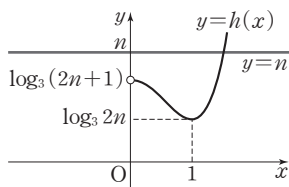
따라서 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소한다.

ㄷ. $h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		\	$\log_3 2n$ 극소	/

이때 $h(0)=\log_3(2n+1)$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



자연수 n 에 대하여 $n=\log_3 3^n \geq \log_3(2n+1)$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=n$ 이 만나는 점의 개수는 1이다.

즉, $x>0$ 일 때 방정식 $h(x)=n$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 답 e

방정식 $e^x=x^a$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 성립하지 않으므로 이 방정식은 1을 근으로 갖지 않는다.

$x>0$ 일 때 $e^x=x^a$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$x=a \ln x \quad \therefore \frac{x}{\ln x}=a$$

즉, 방정식 $e^x=x^a$ 의 양의 실근은 $x>0$, $x \neq 1$ 에서 함수 $y=\frac{x}{\ln x}$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 점의 x 좌표와 같다.

$f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=e$

$x>0$, $x \neq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	e	...
$f'(x)$		—		—	0	+
$f(x)$		↘		↘	e 극소	↗

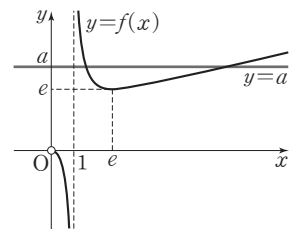
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=\infty$ 이므로 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 존재하도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $a \geq e$

그런데 $a>0$ 이므로 $a \geq e$

따라서 양수 a 의 최솟값은 e 이다.



[참고] $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1+t}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{t}{\ln(1+t)} \times \frac{1+t}{t} \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\ln(1+t)}=1, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1+t}{t}=\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) = \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1+t}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{t}{\ln(1+t)} \times \frac{1+t}{t} \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{\ln(1+t)}=1, \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1+t}{t}=\lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) = -\infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

22 답 -42

(i) $\sin x=0$ 일 때,

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } x=\pi$$

$x=\pi$ 일 때, k 의 값에 관계없이 방정식

$x \sin x + \sin 2x + 3 \tan x = k \sin x$ 가 성립하므로 $x=\pi$ 는 주어진 방정식의 실근이다.

(ii) $\sin x \neq 0$ 일 때,

방정식 $x \sin x + \sin 2x + 3 \tan x = k \sin x$ 에서

$$x \sin x + 2 \sin x \cos x + \frac{3 \sin x}{\cos x} = k \sin x$$

양변을 $\sin x$ 로 나누면

$$x + 2 \cos x + \frac{3}{\cos x} = k$$

따라서 함수 $y=x+2 \cos x + \frac{3}{\cos x}$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=x+2 \cos x + \frac{3}{\cos x}=x+2 \cos x + 3 \sec x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=1-2 \sin x + 3 \sec x \tan x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$1-2 \sin x + \frac{3 \sin x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos^2 x + 3 \sin x = 0 \quad (\because \cos^2 x > 0)$$

$$(1-\sin^2 x) - 2 \sin x(1-\sin^2 x) + 3 \sin x = 0$$

$$2 \sin^3 x - \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$\sin x=t$ 로 놓으면 $-1 < t < 1$ 이고

$$2t^3 - t^2 + t + 1 = 0$$

$$(2t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2} \quad (\because -1 < t < 1)$$

즉, $\sin x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$x = \frac{7}{6}\pi \left(\because \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \right)$$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		+		+	0	-	
$f(x)$		↗		↗	극대	↘	

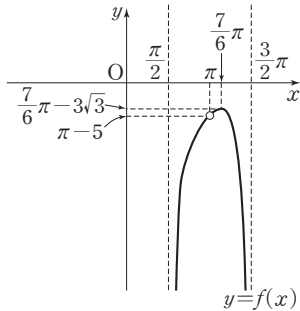
$$f(\pi) = \pi - 2 - 3 = \pi - 5,$$

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{7}{6}\pi - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \frac{7}{6}\pi - 3\sqrt{3} \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} f(x) = -\infty \text{이므로 점근선은 직선}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi \text{이다.}$$

이때 $\frac{7}{6}\pi - 3\sqrt{3} < \frac{7 \times 3.6}{6} - 3 \times \frac{3}{2} < 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 한 점에서 만나도록 직선 $y = k$ 를 그어 보면 k 의 최댓값은

$$k = \frac{7}{6}\pi - 3\sqrt{3}$$

(i), (ii)에서 k 의 최댓값은 $\frac{7}{6}\pi - 3\sqrt{3}$ 이므로

$$a = \frac{7}{6}, b = -3$$

$$\therefore 12ab = 12 \times \frac{7}{6} \times (-3) = -42$$

23 답 ②

1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = e$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e$ 에서 최댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

2. $x > e$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

$$\text{즉, } e < \alpha < \beta \text{이면 } f(\beta) < f(\alpha) \quad \therefore \frac{\ln \beta}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\alpha}$$

$$\text{이때 } 1 < \ln \alpha < \ln \beta \text{ 이므로 } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$$

$$\text{또 } 1 < \ln \alpha < \ln \beta \text{ 에서 } \frac{1}{\ln \beta} < \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} < 1$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$e < \alpha < \beta \text{ 에서 } \frac{e}{\alpha} < 1 < \frac{\beta}{\alpha} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} < \frac{\beta}{\alpha}$$

3. $x > 0$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq -\sin x \leq 1 \quad \therefore k-1 \leq -\sin x + k \leq k+1$$

이때 $x > 0$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립하려면

$(f(x) \text{의 최댓값}) \leq (g(x) \text{의 최솟값})$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{e} \leq k-1 \quad \therefore k \geq \frac{1}{e} + 1$$

따라서 k 의 최솟값은 $\frac{1}{e} + 1$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 답 ④

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax \text{에서}$$

$$f'(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + e^{x+1}(2x + n - 2) + a$$

$$= e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$ 이므로 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \geq 0$, 즉 $e^{x+1}(x^2 + nx + 1) \geq -a$ 가 성립해야 한다.

$$h(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) \text{이라 하면}$$

$$h'(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + e^{x+1}(2x + n)$$

$$= e^{x+1}\{x^2 + (n+2)x + n + 1\}$$

$$= e^{x+1}(x + n + 1)(x + 1)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -n-1 \text{ 또는 } x = -1 (\because e^{x+1} > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{n+2}{e^n}$ 극대	↘	$2-n$ 극소	↗

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \text{이}$$

므로 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림

과 같다.

따라서 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $2-n$

이므로 $h(x) \geq -a$ 가 성립하려면

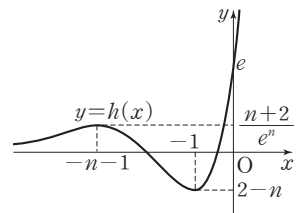
$$2-n \geq -a \quad \therefore a \geq n-2$$

실수 a 의 최솟값이 $n-2$ 이므로 $g(n) = n-2$

$$1 \leq g(n) \leq 8 \text{에서 } 1 \leq n-2 \leq 8 \quad \therefore 3 \leq n \leq 10$$

따라서 자연수 n 의 값은 3, 4, 5, ..., 10이므로 모든 n 의 값의 합은

$$3 + 4 + 5 + \cdots + 10 = \frac{8(3+10)}{2} = 52$$



25 답 e

$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

이때 $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$ 이라 하면

$$g'(x) = 1 - \ln(x+1) - (x+1) \times \frac{1}{x+1} = -\ln(x+1)$$

$x > 0$ 에서 $g'(x) < 0$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 는 감소하고 $g(0) = 0$ 이므로

$$g(x) < 0$$

$$\therefore f'(x) < 0$$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하고

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그

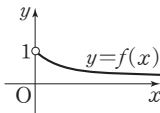
림과 같다.

$x > 0$ 에서 $f(x) < 1$ 이므로 $f(x) < \ln a$ 가 성립하려면

$$\ln a \geq 1$$

$$\therefore a \geq e$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 e 이다.



다른 풀이

$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 1}{(x+1) - 1} \end{aligned}$$

이때 $g(x) = \ln x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, x+1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, x+1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{g(x+1) - g(1)}{(x+1) - 1} = g'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (1, x+1) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

$$g(x) = \ln x \text{에서 } g'(x) = \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$g'(c) = \frac{1}{c}$$

또 $1 < c < x+1$ 이므로

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 1}{(x+1) - 1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{c} < 0$$

즉, $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하고 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 이므로

$$f(x) < 1$$

$x > 0$ 에서 $f(x) < \ln a$ 가 성립하려면

$$\ln a \geq 1$$

$$\therefore a \geq e$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 e 이다.

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

26 답 $0 < a \leq 1$

$f(t) = (t-2)^2 e^{at^2}$ 에서 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$f'(t) = 2(t-2)e^{at^2} + 2at(t-2)^2 e^{at^2} = 2(t-2)(at^2 - 2at + 1)e^{at^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } (t-2)(at^2 - 2at + 1) = 0 \quad (\because e^{at^2} > 0)$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } at^2 - 2at + 1 = 0$$

이때 $t = 2$ 를 이차방정식 $at^2 - 2at + 1 = 0$ 에 대입하면 성립하지 않으므로 이차방정식 $at^2 - 2at + 1 = 0$ 은 2를 근으로 갖지 않는다.

점 P는 $f'(t) = 0$ 인 t 의 값의 좌우에서 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P가 운동 방향을 한 번만 바꾸려면 이차방정식 $at^2 - 2at + 1 = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $at^2 - 2at + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a \leq 0, \quad a(a-1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 1$

27 답 ②

시각 t 에서의 점 P의 위치를 (a, b) 라 하면 점 P는 곡선 $y = x^2 e^{x-1}$ 위의 점이므로

$$b = a^2 e^{a-1}$$

$$\therefore \frac{db}{dt} = 2ae^{a-1} \frac{da}{dt} + a^2 e^{a-1} \frac{da}{dt} = (a^2 + 2a)e^{a-1} \frac{da}{dt}$$

시각 t 에서의 점 P(a, b)의 속도는 $\left(\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}\right)$ 이므로

$$\left(\frac{da}{dt}, (a^2 + 2a)e^{a-1} \frac{da}{dt}\right)$$

점 P의 속력이 v_0 이므로

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left\{(a^2 + 2a)e^{a-1} \frac{da}{dt}\right\}^2} \\ &= \sqrt{\{1 + a^2(a+2)^2 e^{2a-2}\} \left(\frac{da}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + a^2(a+2)^2 e^{2a-2}} \frac{da}{dt} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{da}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + a^2(a+2)^2 e^{2a-2}}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = x^2 e^{x-1} \text{에서 } y' = 2xe^{x-1} + x^2 e^{x-1} = x(x+2)e^{x-1}$$

곡선 $y = x^2 e^{x-1}$ 위의 점 P($a, a^2 e^{a-1}$)에서의 접선 l 의 방정식은

$$y - a^2 e^{a-1} = a(a+2)e^{a-1}(x - a)$$

$$\therefore y = a(a+2)e^{a-1}x - a^2(a+1)e^{a-1}$$

접선 l 과 x 축이 만나는 점 Q의 x 좌표를 구하면

$$0 = a(a+2)e^{a-1}x - a^2(a+1)e^{a-1}$$

$$(a+2)x = a(a+1) \quad \therefore x = \frac{a^2 + a}{a+2}$$

$$Q\left(\frac{a^2 + a}{a+2}, 0\right) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{a^2 + a}{a+2}\right) &= \frac{(2a+1)(a+2) - (a^2 + a)}{(a+2)^2} \times \frac{da}{dt} \\ &= \frac{a^2 + 4a + 2}{(a+2)^2} \times \frac{v_0}{\sqrt{1 + a^2(a+2)^2 e^{2a-2}}} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$a = 1$ 일 때 시각 t 에서의 점 Q의 속도는 $\left(\frac{7v_0}{9\sqrt{10}}, 0\right)$ 이므로 점 Q의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{7v_0}{9\sqrt{10}}\right)^2 + 0} = \frac{7v_0}{9\sqrt{10}}$$

$$\text{즉, } \frac{7v_0}{9\sqrt{10}} = \frac{7}{9} \text{이므로 } v_0 = \sqrt{10}$$

28 답 ⑤

점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 점 B를 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 t 초 후의 호 AP의 길이는

$$t \left(\text{단, } 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

이때 부채꼴 POA의 반지름의 길이가 1이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$1 \times \theta = t \quad \therefore \theta = t$$

$$\therefore P(\cos t, \sin t)$$

직선 OP의 기울기는 $\tan t$ 이므로 직선 OP의 방정식은

$$y = (\tan t)x$$

또 두 점 A(1, 0), B(0, 1)을 지나는 직선 AB의 방정식은

$$x + y = 1$$

$$\therefore y = -x + 1$$

두 직선 $y = (\tan t)x$, $y = -x + 1$ 이 만나는 점 Q의 x 좌표를 구하면

$$(\tan t)x = -x + 1$$

$$(1 + \tan t)x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{1 + \tan t}$$

$$Q\left(\frac{1}{1 + \tan t}, \frac{\tan t}{1 + \tan t}\right) \text{이므로}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1 + \tan t}\right) = -\frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\tan t}{1 + \tan t}\right) &= \frac{\sec^2 t(1 + \tan t) - \tan t \times \sec^2 t}{(1 + \tan t)^2} \\ &= \frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2} \end{aligned}$$

따라서 t 초 후의 점 Q의 속도는

$$\left(-\frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2}, \frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2}\right)$$

점 P의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 이므로

$$\cos t = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sec t = \frac{5}{4}$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin t > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin t &= \sqrt{1 - \cos^2 t} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{4}$$

점 P의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 인 순간 점 Q의 속도는

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2}, \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2}\right) \\ &\therefore \left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49}\right) \end{aligned}$$

따라서 $a = -\frac{25}{49}$, $b = \frac{25}{49}$ 이므로

$$b - a = \frac{50}{49}$$

step 3 최고난도 문제

| 79~81쪽

01 5

02 ③

03 ⑤

04 5

05 ③

06 43

07 24

08 ①

09 2

10 30

11 ③

01 답 5

1단계 두 점 A, B의 좌표 구하기

$$h(x) = e^x \text{이라 하면 } h'(x) = e^x$$

곡선 $y = h(x)$ 위의 점 $P(t, e^t)$ 에서의 접선 l 의 기울기는 $h'(t) = e^t$ 이

므로 접선 l 의 방정식은

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \therefore y = e^t x + (1 - t)e^t$$

직선 l 과 x 축이 만나는 점 A의 x 좌표를 구하면

$$0 = e^t x + (1 - t)e^t \quad \therefore x = t - 1$$

$$\therefore A(t - 1, 0)$$

원 C와 x 축은 점 B에서 접하고 원 C의 중심이 $C(f(t), g(t))$ 이므로

$$B(f(t), 0)$$

2단계 $f(t)$, $g(t)$ 구하기

원 C와 직선 l 은 점 P에서 접하므로

$$\overline{AB} = \overline{AP}$$

$$\overline{AB} = f(t) - (t - 1),$$

$$\overline{AP} = \sqrt{1^2 + (e^t)^2} = \sqrt{1 + e^{2t}} \text{이므로}$$

$$f(t) - (t - 1) = \sqrt{1 + e^{2t}}$$

$$\therefore f(t) = \sqrt{1 + e^{2t}} + t - 1$$

또 직선 l 과 직선 CP가 서로 수직이므로

$$e^t \times \frac{g(t) - e^t}{f(t) - t} = -1$$

$$g(t) - e^t = -\frac{f(t) - t}{e^t}$$

$$\therefore g(t) = e^t - \frac{f(t) - t}{e^t} = e^t - \frac{1}{e^t}(\sqrt{1 + e^{2t}} - 1)$$

3단계 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{10\{f(t) + g(t) - t\}}{\theta}$ 의 값 구하기

$\angle PAB = \theta$ 는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기와 같으므로 $\tan \theta = e^t$

$$\therefore f(t) + g(t) - t = \sqrt{1 + e^{2t}} - 1 + e^t - \frac{1}{e^t}(\sqrt{1 + e^{2t}} - 1)$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 \theta} - 1 + \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}(\sqrt{1 + \tan^2 \theta} - 1)$$

$$= \sqrt{\sec^2 \theta} - 1 + \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}(\sqrt{\sec^2 \theta} - 1)$$

$$= \sec \theta - 1 + \tan \theta - \frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{10\{f(t) + g(t) - t\}}{\theta}$$

$$= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sec \theta - 1}{\theta} + \frac{\tan \theta}{\theta} - \frac{\sec \theta - 1}{\theta \tan \theta} \right)$$

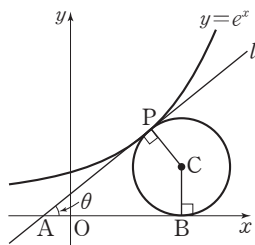
$$= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sec^2 \theta - 1}{\theta(\sec \theta + 1)} + \frac{\tan \theta}{\theta} - \frac{\sec^2 \theta - 1}{\theta \tan \theta(\sec \theta + 1)} \right\}$$

$$= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\tan^2 \theta}{\theta(\sec \theta + 1)} + \frac{\tan \theta}{\theta} - \frac{\tan \theta}{\theta(\sec \theta + 1)} \right\}$$

$$= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \times \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} + \frac{\tan \theta}{\theta} - \frac{\tan \theta}{\theta} \times \frac{1}{\sec \theta + 1} \right)$$

$$= 10 \left(1 \times 0 + 1 - 1 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= 10 \times \frac{1}{2} = 5$$



02 답 ③

1단계 $f(n)$ 구하기

$$g(x) = (x-n)e^x \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = e^x + (x-n)e^x = (x-n+1)e^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t-n)e^t)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$g'(t) = (t-n+1)e^t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t-n)e^t = (t-n+1)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-(t-n)e^t = (t-n+1)e^t(a-t)$$

$$t-n = (t-n+1)(t-a) \quad (\because e^t > 0)$$

$$\therefore t^2 - (n+a)t + an + n - a = 0 \quad \dots\dots ①$$

방정식 ①의 실근이 접점의 x 좌표이므로 방정식 ①의 서로 다른 실근의 개수가 $f(n)$ 이다.

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = (n+a)^2 - 4(an+n-a)$$

$$= n^2 - 2an + a^2 - 4n + 4a$$

$$= (n-a)^2 - 4(n-a)$$

$$= (n-a)(n-a-4)$$

$$\therefore f(n) = \begin{cases} 2 & (n < a \text{ 또는 } n > a+4) \\ 1 & (n = a \text{ 또는 } n = a+4) \\ 0 & (a < n < a+4) \end{cases}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $a=0$ 일 때,

$$f(n) = \begin{cases} 2 & (n < 0 \text{ 또는 } n > 4) \\ 1 & (n = 0 \text{ 또는 } n = 4) \\ 0 & (0 < n < 4) \end{cases}$$

$$\therefore f(4) = 1$$

3단계 $\perp$ 이 옳은지 확인하기

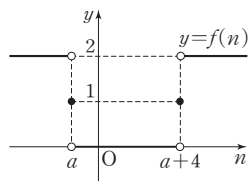
$\perp$. $f(n)=1$ 인 정수 n 은 $a, a+4$ 이므로 $f(n)=1$ 인 정수 n 의 개수는 2이다.

즉, $f(n)=1$ 인 정수 n 의 개수가 1인 정수 a 는 존재하지 않는다.

4단계 $\supset$ 이 옳은지 확인하기

$\supset$. $f(n)$ 이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이므로 $\sum_{n=1}^5 f(n) = 5$ 를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

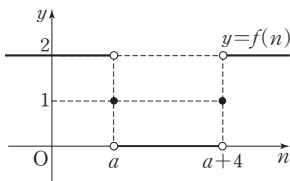
(i) $f(1)=0, f(2)=0, f(3)=1, f(4)=2, f(5)=2$ 인 경우



$$f(3) = f(a+4) = 1 \text{이어야 하므로}$$

$$3 = a+4 \quad \therefore a = -1$$

(ii) $f(1)=2, f(2)=2, f(3)=1, f(4)=0, f(5)=0$ 인 경우



$$f(3) = f(a) = 1 \text{이어야 하므로}$$

$$a = 3$$

(i), (ii)에서 $a = -1$ 또는 $a = 3$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다.

idea

03 답 ⑤

1단계 $f\left(\frac{1}{2}\right), f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값 구하기

함수 $g(x)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값 0을 가지므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 0, g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = 0$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

즉, 두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $x = \frac{1}{2}$ 인 점에서 만난다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같으므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2단계 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값 구하기

$$g(x) = x \{ f(x) - f^{-1}(x) \} - \frac{3}{8} \ln 2x \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) - f^{-1}(x) + x \{ f'(x) - (f^{-1})'(x) \} - \frac{3}{8x}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{에서}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left\{ f'\left(\frac{1}{2}\right) - (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) \right\} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left\{ f'\left(\frac{1}{2}\right) - (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{3}{4} \quad \left(\because f\left(\frac{1}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{3}{2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \quad \left(\because f'(x) > 0 \text{이므로 } f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \right)$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

3단계 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값 구하기

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

04 답 5

1단계 $f(x)$ 의 모든 극값의 곱이 유리수일 조건 구하기

$$f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x} \\ = \{-ax^2 + (2a - b)x + b\}e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$ax^2 - (2a - b)x - b = 0 \quad (\because e^{-x} > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 두 실근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{2a - b}{a}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x = \alpha, x = \beta$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극값을 가지므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱은

$$f(\alpha)f(\beta) = (a\alpha^2 + b\alpha)e^{-\alpha} \times (a\beta^2 + b\beta)e^{-\beta} \\ = a\beta(a\alpha + b)(a\beta + b)e^{-\alpha - \beta} \\ = a\beta\{a^2\alpha\beta + ab(\alpha + \beta) + b^2\}e^{-(\alpha + \beta)} \\ = -\frac{b}{a} \left\{ a^2 \times \left(-\frac{b}{a}\right) + ab \times \frac{2a - b}{a} + b^2 \right\} e^{-\frac{2a - b}{a}} \quad (\because \textcircled{2}) \\ = -\frac{b}{a} \times ab \times e^{-\frac{2a - b}{a}} \\ = -b^2 e^{-\frac{2a - b}{a}}$$

이때 $-b^2 e^{-\frac{2a - b}{a}}$ 이 유리수이므로

$$b = 0 \text{ 또는 } \frac{2a - b}{a} = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 2a$$

2단계 $f(2)$ 의 최댓값 구하기

(i) $b = 0$ 일 때,

$$f(x) = ax^2 e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (-ax^2 + 2ax)e^{-x}$$

$$= -ax(x - 2)e^{-x}$$

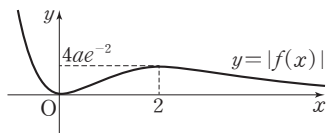
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	$4ae^{-2}$ 극대	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 와 만나는 점의 개수 $g(k)$ 는

$$g(k) = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 1 & (k = 0 \text{ 또는 } k > 4ae^{-2}) \\ 3 & (0 < k < 4ae^{-2}) \\ 2 & (k = 4ae^{-2}) \end{cases}$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시킨다.

(나)에서 $g(k) = 3$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수가 4이므로

$$4 < 4ae^{-2} \leq 5$$

따라서 $f(2) = 4ae^{-2}$ 의 최댓값은 5이다.

(ii) $b = 2a$ 일 때,

$$f(x) = (ax^2 + 2ax)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (-ax^2 + 2a)e^{-x} \\ = -a(x^2 - 2)e^{-x}$$

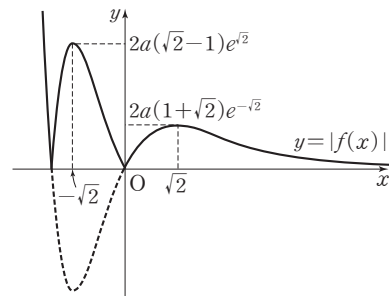
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$-\sqrt{2}$	$\dots$	$\sqrt{2}$	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$2a(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ 극소	$\nearrow$	$2a(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$ 극대	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이므로 점근선은 x 축이고, $f(0) = 0$ 이다.

따라서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



그런데 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 와 만나는 점의 개수, 즉 $g(k)$ 의 값이 4 이상인 경우가 있으므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(2)$ 의 최댓값은 5이다.

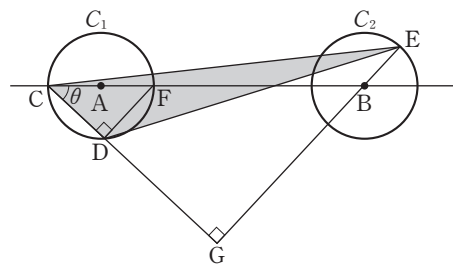
05 답 ③

1단계 삼각형 CDE의 넓이에 대한 식 세우기

삼각형 CDE의 밑변을 선분 CD라 하자.

삼각형 CDE의 넓이가 최대가 되려면 밑변 CD에 대하여 삼각형 CDE의 높이가 최대가 되어야 한다.

즉, 삼각형 CDE의 높이는 직선 CD와 직선 BE가 그림과 같이 서로 수직일 때 최대가 되므로 이때 삼각형 CDE의 넓이도 최대가 된다.



$\angle BCD = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하고, 직선 AB와 원 C_1 이 만나는 두 점 중

점 C가 아닌 점을 F라 하면 $\angle CDF = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{CD} = \overline{CF} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

또 두 직선 CD, BE가 서로 수직일 때 만나는 점을 G라 하면

$$\overline{BG} = \overline{BC} \sin \theta = (\overline{AB} + 1) \sin \theta = 6 \sin \theta$$

$$\therefore \overline{EG} = \overline{BG} + 1 = 6 \sin \theta + 1$$

따라서 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 2 \cos \theta \times (6 \sin \theta + 1) \\ = \cos \theta (6 \sin \theta + 1)$$

2단계 삼각형 CDE의 넓이의 최댓값 구하기

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= -\sin \theta (6 \sin \theta + 1) + 6 \cos^2 \theta \\ &= -6 \sin^2 \theta - \sin \theta + 6(1 - \sin^2 \theta) \\ &= -12 \sin^2 \theta - \sin \theta + 6 \\ &= -(4 \sin \theta + 3)(3 \sin \theta - 2) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $0 < \sin \theta < 1$ 이므로 $S'(\theta) = 0$ 에서 $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $S'(\theta) = 0$, 즉 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ 를 만족시키는 θ 의 값을 θ_1 이라고 하고 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	...	θ_1	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(\theta)$ 는 $\theta = \theta_1$ 일 때 최대이므로 삼각형 CDE의 넓이의 최댓값은

$$S(\theta_1) = \cos \theta_1 (6 \sin \theta_1 + 1)$$

$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta_1 > 0$ 이고 $\sin \theta_1 = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore S(\theta_1) = \cos \theta_1 (6 \sin \theta_1 + 1) = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(6 \times \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

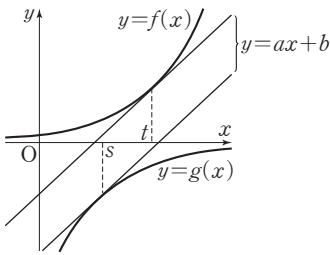
06 답 43

1단계 주어진 부등식에서 곡선과 직선의 위치 관계 파악하기

$-e^{-x+1} \leq ax + b \leq e^{x-2}$ 에서 $f(x) = e^{x-2}$, $g(x) = -e^{-x+1}$ 이라 하면 직선 $y = ax + b$ 는 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 사이에 있거나 두 곡선에 접해야 한다.

2단계 ab 의 값의 범위 구하기

그림과 같이 기울기가 a 인 직선이 $x = t$ 인 점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하고, $x = s$ 인 점에서 곡선 $y = g(x)$ 에 접한다고 하자.



$$f(x) = e^{x-2} \text{에서 } f'(x) = e^{x-2}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (t, e^{t-2}) 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = e^{t-2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{t-2} = e^{t-2}(x - t) \quad \therefore y = e^{t-2}x + (1-t)e^{t-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(x) = -e^{-x+1} \text{에서 } g'(x) = e^{-x+1}$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(s, -e^{-s+1})$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(s) = e^{-s+1} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y + e^{-s+1} = e^{-s+1}(x - s) \quad \therefore y = e^{-s+1}x - (s+1)e^{-s+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

두 접선 ①, ②의 기울기가 같으므로 $e^{t-2} = e^{-s+1}$ 에서

$$t - 2 = -s + 1 \quad \therefore s = -t + 3$$

$$\text{이를 ②에 대입하면 } y = e^{t-2}x + (t-4)e^{t-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ③에서

$$a = e^{t-2}, (t-4)e^{t-2} \leq b \leq (1-t)e^{t-2}$$

$$\therefore (t-4)e^{2t-4} \leq ab \leq (1-t)e^{2t-4} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

3단계 $|M \times m^3|$ 의 값 구하기

그림과 같이 두 직선 ①, ②이 일치하면 $(1-t)e^{t-2} = (t-4)e^{t-2}$

$$e^{t-2}(2t-5) = 0$$

$$\therefore t = \frac{5}{2} (\because e^{t-2} > 0)$$

즉, $t = \frac{5}{2}$ 일 때 두 접선이 일치하므로

$$t \leq \frac{5}{2}$$

③에서 $h(t) = (1-t)e^{2t-4}$ 이라 하면

$$h'(t) = -e^{2t-4} + 2(1-t)e^{2t-4} = (1-2t)e^{2t-4}$$

$$h'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = \frac{1}{2} (\because e^{2t-4} > 0)$$

$t \leq \frac{5}{2}$ 에서 함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{5}{2}$
$h'(t)$	+	0	-	
$h(t)$	↗	$\frac{1}{2}e^{-3}$ 극대	↘	$-\frac{3}{2}e$

따라서 함수 $h(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{1}{2}e^{-3}$ 을 가지므로

$$M = \frac{1}{2}e^{-3}$$

또 ③에서 $k(t) = (t-4)e^{2t-4}$ 이라 하면

$$k'(t) = e^{2t-4} + 2(t-4)e^{2t-4} = (2t-7)e^{2t-4}$$

$t \leq \frac{5}{2}$ 에서 $k'(t) < 0$ 이므로 함수 $k(t)$ 는 감소한다.

따라서 $t \leq \frac{5}{2}$ 에서 함수 $k(t)$ 는 $t = \frac{5}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{3}{2}e$ 를 가지므로

$$m = -\frac{3}{2}e$$

$$\therefore |M \times m^3| = \left| \frac{1}{2}e^{-3} \times \left(-\frac{3}{2}e\right)^3 \right| = \frac{27}{16}$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p = 16$, $q = 27$ 이므로

$$p + q = 43$$

07 답 24

1단계 주어진 조건 파악하기

$$g(x) = \{f(x) + 2\}e^{f(x)} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{f(x)} + \{f(x) + 2\}e^{f(x)} \times f'(x) \\ &= f'(x)\{f(x) + 3\}e^{f(x)} \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } f'(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) + 3 = 0 (\because e^{f(x)} > 0)$$

한편 함수 $g(x) = \{f(x) + 2\}e^{f(x)}$ 이 최댓값을 가지려면 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이어야 한다.

그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의

꼭짓점의 x 좌표를 c , $f(x) + 3 = 0$ 을 만족시

키는 x 의 값을 $c_1, c_2 (c_1 < c_2)$ 라 하면

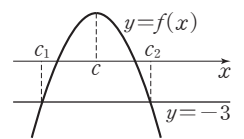
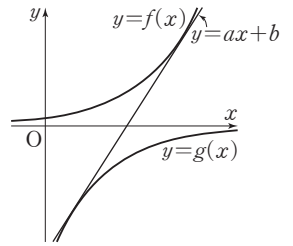
$$f'(c) = 0, f(c_1) + 3 = 0, f(c_2) + 3 = 0$$

$x < c_1$ 일 때, $f'(x) > 0$, $f(x) + 3 < 0$ 이므로 $g'(x) < 0$

$c_1 < x < c$ 일 때, $f'(x) > 0$, $f(x) + 3 > 0$ 이므로 $g'(x) > 0$

$c < x < c_2$ 일 때, $f'(x) < 0$, $f(x) + 3 > 0$ 이므로 $g'(x) < 0$

$x < c_2$ 일 때, $f'(x) < 0$, $f(x) + 3 < 0$ 이므로 $g'(x) > 0$



함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	c_1	...	c	...	c_2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=c$ 에서 최대이고 $x=c_1$, $x=c_2$ 에서 최소이므로
(가), (나)에 의하여

$$f'(a)=0, f(b)+3=0, f(b+6)+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $f(x)$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $k(k<0)$ 라 하면 $\textcircled{1}$ 에서 방정식

$$f(x)+3=0 \text{의 두 근이 } b, b+6 \text{이므로}$$

$$f(x)+3=k(x-b)(x-b-6)$$

$$\therefore f(x)=k(x-b)(x-b-6)-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(x)=k(x-b-6)+k(x-b)=2k(x-b-3) \text{이고, } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$f'(a)=0 \text{이므로 } 2k(a-b-3)=0$$

$$a-b-3=0 \quad (\because k<0) \quad \therefore b=a-3$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } f(x)=k(x-a+3)(x-a-3)-3$$

(가)의 $f(a)=6$ 에서

$$-9k-3=6, 9k=-9 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore f(x)=-(x-a+3)(x-a-3)-3$$

3단계 $(\alpha-\beta)^2$ 의 값 구하기

방정식 $f(x)=0$ 에서

$$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0$$

$$(x-a)^2=6 \quad \therefore x=a-\sqrt{6} \text{ 또는 } x=a+\sqrt{6}$$

따라서 두 근 α, β 가 $a-\sqrt{6}, a+\sqrt{6}$ 이므로

$$(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$$

다른 풀이 **3단계** $(\alpha-\beta)^2$ 의 값 구하기

방정식 $f(x)=0$ 에서

$$-\{(x-a)^2-9\}-3=0, x^2-2ax+a^2-6=0$$

이 이차방정식의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a, \alpha\beta=a^2-6$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=(2a)^2-4(a^2-6)=24$$

08 답 ①

1단계 주어진 함수를 $\sin x + \cos x = t$ 로 치환하여 나타내기

$$2\sin^3 x + 2\cos^3 x - 3\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2(\sin^3 x + \cos^3 x) - 3\sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$-3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=2(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - 3(\sin x + \cos x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\sin x + \cos x = t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$$

$$2\sin x \cos x = t^2 - 1 \quad \therefore \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) - 3t = -t - t(t^2 - 1) = -t^3$$

또 $\sin 2x = 2\sin x \cos x = t^2 - 1$ 이므로

$$f(x) = \left\{2\sin^3 x + 2\cos^3 x - 3\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\} e^{-\sin 2x} \\ = -t^3 e^{1-t^2}$$

2단계 모든 α 의 값 구하기

$$g(t) = -t^3 e^{1-t^2} \text{이라 하자.}$$

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{이므로}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{에서 } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$g'(t) = -3t^2 e^{1-t^2} + 2t^4 e^{1-t^2} = t^2(2t^2 - 3)e^{1-t^2} \text{이므로}$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 또는 } t=0 \text{ 또는 } t=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because e^{1-t^2} > 0)$$

$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$-\sqrt{2}$	...	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	-	0	-	0	+	
$g(t)$		/	극대	\		\	극소	/	

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다.

$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 최댓값을 가지므로

$$\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ 이므로

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } \alpha = \frac{17}{12}\pi$$

3단계 $M-m$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } M = \frac{17}{12}\pi, m = \frac{13}{12}\pi \text{이므로}$$

$$M-m = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$$

09 답 2

1단계 b, c 를 a 에 대한 식으로 나타내기

$$f_1(x) = \frac{2(x+1)^2}{x^2+1}, f_2(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

$$f_1'(x) = \frac{4(x+1)(x^2+1) - 2(x+1)^2 \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ = \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f_2'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f_1(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x^3 + ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2(x+1)^2}{x^2+1}$$

$$1+a+b+c=4 \quad \therefore a+b+c=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f_1'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (3x^2 + 2ax + b) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$3+2a+b=0 \quad \therefore b=-2a-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a-2a-3+c=3 \quad \therefore c=a+6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

2단계 $g(0)=2$ 를 만족시키는 조건 알기

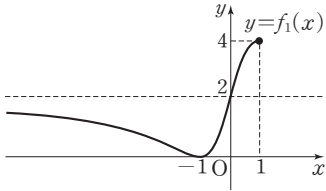
$f_1'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x \leq 1$ 에서 함수 $f_1(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	4

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)=2$ 이므로 점근선은 직선 $y=2$ 이고, $f_1(0)=2$ 이다.

따라서 함수 $y=f_1(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

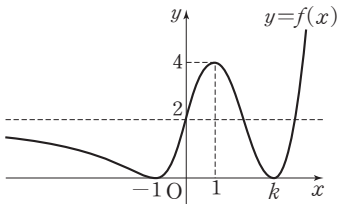


방정식 $f(x)=t$ 의 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.

이때 $g(0)=2$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$x \leq 1$ 에서 함수 $y=f_1(x)$ 의 그래프와 x 축은 한 점에서 만나므로 $x > 1$ 에서 함수 $y=f_2(x)$ 의 그래프와 x 축은 한 점에서 만나야 한다.

이때 함수 $f_2(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고 $x=1$ 에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x > 1$ 에서 x 축과 만나는 점의 x 좌표를

k ($k > 1$)라 하면

$$f_2(k)=0, f_2'(k)=0$$

3단계 a, b, c 의 값 구하기

㉠, ㉡에서

$$f_2(x)=x^3+ax^2-(2a+3)x+a+6, f_2'(x)=3x^2+2ax-2a-3$$

$$f_2(k)=0 \text{에서 } k^3+ak^2-(2a+3)k+a+6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$f_2'(k)=0 \text{에서 } 3k^2+2ak-2a-3=0$$

$$(3k+2a+3)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-\frac{2a+3}{3} \quad (\because k > 1)$$

이를 ㉢에 대입하면

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2a+3}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a+3}{3}\right)^2 - (2a+3)\left(-\frac{2a+3}{3}\right) + a+6=0 \\ & -\frac{8a^3+36a^2+54a+27}{27} + \frac{4a^3+12a^2+9a}{9} + \frac{4a^2+12a+9}{3} + a+6=0 \\ & -8a^3-36a^2-54a-27 + (12a^3+36a^2+27a) + (36a^2+108a+81) \\ & \quad + (27a+162)=0 \end{aligned}$$

$$4a^3+36a^2+108a+216=0$$

$$4(a+6)(a^2+3a+9)=0$$

$$\therefore a=-6 \quad (\because a \text{는 실수})$$

이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$b=12-3=9, c=-6+6=0$$

4단계 $f(2)$ 의 값 구하기

따라서 $x > 1$ 에서 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 이므로

$$f(2)=8-24+18=2$$

10 답 30

1단계 a 의 값 구하기

방정식 $f(x)=-x+k$ 에서

$$x+\frac{2a^2}{x-1}=-x+k$$

$$\therefore 2x+\frac{2a^2}{x-1}=k$$

방정식 $f(x)=-x+k$ 의 실근의 개수 $g(k)$ 는 함수 $y=2x+\frac{2a^2}{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 점의 개수와 같다.

$$h(x)=2x+\frac{2a^2}{x-1} \text{이라 하면}$$

$$h'(x)=2-\frac{2a^2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)^2-2a^2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1+a)(x-1-a)}{(x-1)^2}$$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=-a+1 \text{ 또는 } x=a+1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a+1$	$\cdots$	1	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$-4a+2$ 극대	$\searrow$		$\searrow$	$4a+2$ 극소	$\nearrow$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)=-\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)=\infty$ 이므로 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $g(k)=0$ 이라면 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나지 않아야 한다.

즉, $g(k)=0$ 인 자연수 k 의 개수가 9이려면

$$9 < 4a+2 \leq 10$$

$$7 < 4a \leq 8$$

$$\therefore \frac{7}{4} < a \leq 2$$

그런데 a 는 자연수이므로

$$a=2$$

2단계 b^2-2b 의 값 구하기

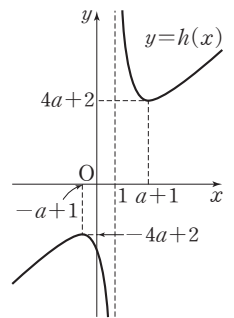
$$f(x)=x+\frac{8}{x-1} \text{이므로}$$

$$f'(x)=1-\frac{8}{(x-1)^2}$$

점 $P(0, b)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 두 접선의 접점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 접선의 방정식은 각각

$$y-\left(\alpha+\frac{8}{\alpha-1}\right)=\left\{1-\frac{8}{(\alpha-1)^2}\right\}(x-\alpha)$$

$$y-\left(\beta+\frac{8}{\beta-1}\right)=\left\{1-\frac{8}{(\beta-1)^2}\right\}(x-\beta)$$



이 두 직선이 점 P(0, b)를 지나므로

$$b - \left(\alpha + \frac{8}{\alpha - 1}\right) = \left\{1 - \frac{8}{(\alpha - 1)^2}\right\}(-\alpha) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b - \left(\beta + \frac{8}{\beta - 1}\right) = \left\{1 - \frac{8}{(\beta - 1)^2}\right\}(-\beta)$$

①에서

$$b - \frac{8}{\alpha - 1} - \frac{8\alpha}{(\alpha - 1)^2} = 0$$

$$b(\alpha - 1)^2 - 8(\alpha - 1) - 8\alpha = 0$$

$$b(\alpha - 1)^2 - 16(\alpha - 1) - 8 = 0$$

즉, $\alpha - 1$ 은 이차방정식 $bx^2 - 16x - 8 = 0$ 의 한 실근이다.

같은 방법으로 하면 $\beta - 1$ 도 이차방정식 $bx^2 - 16x - 8 = 0$ 의 한 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = \frac{16}{b}, (\alpha - 1)(\beta - 1) = -\frac{8}{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\left\{1 - \frac{8}{(\alpha - 1)^2}\right\} \left\{1 - \frac{8}{(\beta - 1)^2}\right\} = -1$$

$$\frac{8}{(\alpha - 1)^2} + \frac{8}{(\beta - 1)^2} - \frac{64}{(\alpha - 1)^2(\beta - 1)^2} - 2 = 0$$

$$\frac{4\{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2\} - 32}{\{(\alpha - 1)(\beta - 1)\}^2} - 1 = 0$$

$$\frac{4\{[(\alpha - 1) + (\beta - 1)]^2 - 2(\alpha - 1)(\beta - 1)\} - 32}{\{(\alpha - 1)(\beta - 1)\}^2} - 1 = 0$$

②을 대입하면

$$\frac{4\left\{\left(\frac{16}{b}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{8}{b}\right)\right\} - 32}{\left(-\frac{8}{b}\right)^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\frac{4 \times 16^2}{b^2} + \frac{4 \times 16}{b} - 32}{\frac{64}{b^2}} - 1 = 0$$

$$16 + b - \frac{b^2}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore b^2 - 2b = 30$$

idea 11 답 ③

1단계 $|v(t)|$ 구하기

그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원을 생각하자.

시계의 시침과 분침이 $t=0$ 일 때 12시 정각에서 동시에 출발하여 $t=12$ 일 때 다시 12시 정각이 되었으므로 t 의 단위는 시간이다.

따라서 시침은 한 시간에 $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ 만큼 회전하

고 분침은 한 시간에 2π 만큼 회전하므로 시각 t 에 대하여 시침, 분침은

각각 $\frac{\pi}{6}t, 2\pi t$ 만큼씩 회전한 위치에 있다.

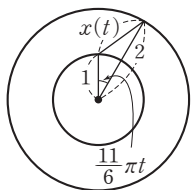
즉, 시침과 분침이 이루는 각의 크기는

$$2\pi t - \frac{\pi}{6}t = \frac{11}{6}\pi t$$

시침과 분침의 끝 점 사이의 거리가 $x(t)$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\{x(t)\}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \frac{11}{6}\pi t = 5 - 4 \cos \frac{11}{6}\pi t$$

$$x(t) > 0 \text{이므로 } x(t) = \sqrt{5 - 4 \cos \frac{11}{6}\pi t}$$



$$\therefore v(t) = x'(t)$$

$$= \frac{4 \sin \frac{11}{6}\pi t \times \frac{11}{6}\pi}{2 \sqrt{5 - 4 \cos \frac{11}{6}\pi t}}$$

$$= \frac{\frac{11}{3}\pi \sin \frac{11}{6}\pi t}{\sqrt{5 - 4 \cos \frac{11}{6}\pi t}}$$

$$\therefore |v(t)| = \left| \frac{\frac{11}{3}\pi \sin \frac{11}{6}\pi t}{\sqrt{5 - 4 \cos \frac{11}{6}\pi t}} \right|$$

2단계 $|v(t)|$ 가 최댓값을 갖는 조건 알기

$\cos \frac{11}{6}\pi t = s$ 로 놓으면 $2 \leq t \leq 3$ 에서

$$\frac{11}{3}\pi \leq \frac{11}{6}\pi t \leq \frac{11}{2}\pi$$

$$-1 \leq \cos \frac{11}{6}\pi t \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq s \leq 1$$

또 $\left| \sin \frac{11}{6}\pi t \right| = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{11}{6}\pi t} = \sqrt{1 - s^2}$ 이므로

$$|v(t)| = \frac{11}{3}\pi \sqrt{\frac{1 - s^2}{5 - 4s}}$$

$$f(s) = \frac{1 - s^2}{5 - 4s} \text{이라 하면}$$

$$f'(s) = \frac{-2s(5 - 4s) - (1 - s^2) \times (-4)}{(5 - 4s)^2}$$

$$= \frac{4s^2 - 10s + 4}{(5 - 4s)^2}$$

$$= \frac{2(2s - 1)(s - 2)}{(5 - 4s)^2}$$

$f'(s) = 0$ 인 s 의 값은

$$s = \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq s \leq 1)$$

$-1 \leq s \leq 1$ 에서 함수 $f(s)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

s	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(s)$		+	0	-	
$f(s)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(s)$ 는 $s = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값을 가지므로 $|v(t)|$ 가 최댓값을

가지려면 $\cos \frac{11}{6}\pi t = \frac{1}{2}$ 이어야 한다.

3단계 모든 t 의 값의 곱 구하기

$$2\pi + \frac{5}{3}\pi \leq \frac{11}{6}\pi t \leq 4\pi + \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi t = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{11}{6}\pi t = 2\pi + \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi t = 4\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{11}{6}\pi t = \frac{11}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi t = \frac{13}{3}\pi$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = \frac{26}{11}$$

따라서 모든 t 의 값의 곱은

$$2 \times \frac{26}{11} = \frac{52}{11}$$

01 ⑤	02 $1-\sqrt{2}$	03 ②	04 ④	05 50
06 ⑤	07 ①	08 1	09 $\frac{7}{2}$	10 ③
11 $\frac{5}{2}$	12 ③	13 4	14 $2\sqrt{11}$	

01 답 ⑤

ㄱ. $c=1$ 일 때, 점 $P(b, 1)$ 은 함수 $g(x)=\ln \frac{b^2}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로
로 $g(b)=1$ 에서

$$\ln b=1 \quad \therefore b=e \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $P(e, 1)$ 은 함수 $f(x)=a+\ln x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $f(e)=1$ 에서

$$a+1=1 \quad \therefore a=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a+b=0+e=e$$

ㄴ. $f(x)=a+\ln x$ 에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 이므로 점 $P(b, c)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(b)=\frac{1}{b}$

$$g(x)=\ln \frac{b^2}{x}=\ln b^2-\ln x \text{에서 } g'(x)=-\frac{1}{x} \text{이므로 점 } P(b, c) \text{에}$$

$$\text{서의 접선의 기울기는 } g'(b)=-\frac{1}{b}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 P 에서의 각각의 접선이 서로 수직이므로 $f'(b)g'(b)=-1$ 에서

$$\frac{1}{b} \times \left(-\frac{1}{b}\right)=-1, \quad \frac{1}{b^2}=1$$

$$b^2=1 \quad \therefore b=1 (\because b>0)$$

점 $P(1, c)$ 는 함수 $g(x)=\ln \frac{1}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$g(1)=c \text{에서 } c=0$$

점 $P(1, 0)$ 은 함수 $f(x)=a+\ln x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $f(1)=0$ 에서 $a=0$

$$\therefore a+b+c=0+1+0=1$$

ㄷ. $c=1$ 이면 ①, ②에서 $a=0$, $b=e$ 이므로

$$P(e, 1), f(x)=\ln x, g(x)=\ln \frac{e^2}{x}=2-\ln x$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 P 에

서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{1}{e}$ 이고

e 보다 큰 실수 t 에 대하여 두 점

$P(e, 1)$, $(t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$0 < \frac{f(t)-1}{t-e} < \frac{1}{e} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는

$g'(e)=-\frac{1}{e}$ 이고 e 보다 큰 실수 t 에 대하여 두 점 $P(e, 1)$,

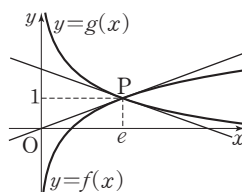
$(t, g(t))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{e} < \frac{g(t)-1}{t-e} < 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③, ④에서

$$-\frac{1}{e^2} < \frac{\{f(t)-1\}\{g(t)-1\}}{(t-e)^2} < 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



02 답 $1-\sqrt{2}$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 $d(d>0)$ 라 하면
 $\beta=\alpha+d, \gamma=\alpha+2d, \delta=\alpha+3d$

$$\therefore \alpha+\delta=\beta+\gamma \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

사각형 ABCD의 네 내각의 크기의 합은 2π 이므로

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \alpha+\delta=\pi, \beta+\gamma=\pi$$

$$\therefore \delta=\pi-\alpha, \gamma=\pi-\beta \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$-2\sqrt{2}+\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma, 2-\tan \delta$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r 라 하면

$$\tan \beta=r(-2\sqrt{2}+\tan \alpha) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\tan \gamma=r \tan \beta \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$2-\tan \delta=r \tan \gamma \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

③에서 $\gamma=\pi-\beta$ 를 ⑤에 대입하면

$$\tan (\pi-\beta)=r \tan \beta$$

$$-\tan \beta=r \tan \beta, (r+1) \tan \beta=0$$

이때 $\tan \beta=0$ 이면 $\beta=\pi$ 이므로 $\gamma=0$

이는 조건을 만족시키지 않으므로 $r=-1$

이를 ⑥에 대입하면 $\tan \beta=2\sqrt{2}-\tan \alpha$

$$\tan \alpha+\tan \beta=2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$r=-1 \text{을 } \textcircled{4} \text{에 대입하면 } 2-\tan \delta=-\tan \gamma$$

$$\tan \delta-\tan \gamma=2$$

$$\textcircled{7} \text{을 대입하면 } \tan (\pi-\alpha)-\tan (\pi-\beta)=2$$

$$\tan \beta-\tan \alpha=2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$\tan \alpha=\sqrt{2}-1, \tan \beta=\sqrt{2}+1$$

③에서 $\gamma=\pi-\beta$ 이므로

$$\tan (\alpha+\beta-\gamma)=\tan \{-\pi+(\alpha+2\beta)\}=\tan (\alpha+2\beta)$$

$$=\frac{\tan \alpha+\tan 2\beta}{1-\tan \alpha \tan 2\beta}$$

$$\tan \beta=\sqrt{2}+1 \text{에서}$$

$$\tan 2\beta=\frac{2 \tan \beta}{1-\tan ^2 \beta}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{-2\sqrt{2}-2}=-1$$

$$\therefore \tan (\alpha+\beta-\gamma)=\frac{\tan \alpha+\tan 2\beta}{1-\tan \alpha \tan 2\beta}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)-1}{1-(\sqrt{2}-1) \times(-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$$

03 답 ②

$\angle OPA=\alpha, \angle OPB=\beta$ 라 하자.

두 삼각형 POA, PQA에서

$$\angle POA=\angle PQA=\frac{\pi}{2},$$

$\overline{AO}=\overline{AQ}$, 변 AP는 공통이므로

$\triangle POA \cong \triangle PQA$ (RHS 합동)

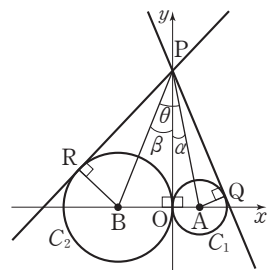
$$\therefore \angle QPA=\angle OPA=\alpha$$

또 두 삼각형 PRB, POB에서

$$\angle PRB=\angle POB=\frac{\pi}{2}, \overline{BR}=\overline{BO}, \text{ 변 BP는 공통이므로}$$

$\triangle PRB \cong \triangle POB$ (RHS 합동)

$$\therefore \angle RPB=\angle OPB=\beta$$



$$\tan 2\theta = \frac{12}{5} \text{에서}$$

$$\tan 2(\alpha + \beta) = \frac{12}{5}, \frac{2 \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{12}{5}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = t \text{로 놓으면}$$

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{12}{5}, 6t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$(2t+3)(3t-2)=0 \quad \therefore t = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}$$

$$0 < 2(\alpha + \beta) < \pi \text{이고 } \tan 2(\alpha + \beta) = \frac{12}{5} > 0 \text{이므로}$$

$$0 < 2(\alpha + \beta) < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 0 < \tan(\alpha + \beta) < 1 \text{에서 } 0 < t < 1 \text{이므로}$$

$$t = \frac{2}{3} \quad \therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$$

$$\overline{OP} = a \text{이므로 직각삼각형 POA에서 } \tan \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{2}{a}$$

$$\text{직각삼각형 POB에서 } \tan \beta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{4}{a}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{2}{a} + \frac{4}{a}}{1 - \frac{2}{a} \times \frac{4}{a}} = \frac{6a}{a^2 - 8}$$

$$\therefore \frac{6a}{a^2 - 8} = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$9a = a^2 - 8 \quad \therefore a^2 - 9a = 8$$

04 [답] ④

$$\angle POB = \theta \text{이므로 } \angle AOP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\angle OAS = \alpha \text{라 하면 삼각형 AOP는}$$

$$\overline{OA} = \overline{OP} = 1 \text{인 이등변삼각형이므로}$$

$$\angle OPA = \angle OAP = 2\alpha$$

$$\therefore \angle AOP = \pi - 4\alpha$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} - \theta = \pi - 4\alpha \text{이므로}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}$$

$$\text{직각삼각형 PHO에서}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\therefore \overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 1 - \sin \theta$$

$$\text{직각삼각형 AHQ에서}$$

$$\overline{HQ} = \overline{AH} \tan \alpha = (1 - \sin \theta) \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right)$$

한편 이등변삼각형 AOP의 꼭짓점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\angle POH' = \frac{1}{2} \angle AOP = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

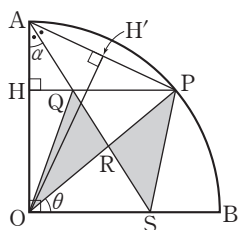
$$\text{직각삼각형 PH'O에서}$$

$$\overline{PH'} = \overline{OP} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{AP} = 2\overline{PH'} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

삼각형 AOP에서 $\angle OAP$ 의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{AO} : \overline{AP} = \overline{OR} : \overline{PR}$$



$$1 : 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \overline{OR} : (1 - \overline{OR})$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \overline{OR} = 1 - \overline{OR}$$

$$\therefore \overline{OR} = \frac{1}{1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\therefore f(\theta) = \triangle AOR - \triangle AOQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OR} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{HQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\cos \theta}{1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{2} (1 - \sin \theta) \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right)$$

$$\text{또 직각삼각형 AOS에서 } \angle OAS = \frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{OS} = \overline{OA} \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right)$$

$$\therefore g(\theta) = \triangle POS - \triangle ROS$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OS} \times \sin \theta - \frac{1}{2} \times \overline{OR} \times \overline{OS} \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \sin \theta \times (\overline{OP} - \overline{OR})$$

$$= \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right) \sin \theta \times \left\{ 1 - \frac{1}{1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \right\}$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = t \text{로 놓으면 } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{일 때 } t \rightarrow 0 + \text{이므로}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos \theta}{1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} - (1 - \sin \theta) \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right) \sin \theta \times \left\{ 1 - \frac{1}{1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \right\}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{1 + 2 \sin \frac{t}{2}} - \left\{ 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right\} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times \left(1 - \frac{1}{1 + 2 \sin \frac{t}{2}} \right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sin t}{1 + 2 \sin \frac{t}{2}} - (1 - \cos t) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right) \times \cos t \times \frac{2 \sin \frac{t}{2}}{1 + 2 \sin \frac{t}{2}}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right) \times \cos t \times 2 \sin \frac{t}{2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sin t}{t} \times \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right) \times \cos t} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 - 1^2 \times 1 \times 0 = 1$$

05 **답** 50

$$f(x) = x \cos x + a \sin x + b \text{에서}$$

$$f'(x) = \cos x - x \sin x + a \cos x = (1+a) \cos x - x \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } (1+a) \cos x - x \sin x = 0$$

$$x \sin x = (1+a) \cos x$$

이때 $\cos x \neq 0$, $x \neq 0$ 이므로

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+a}{x}$$

$$\therefore \tan x = \frac{a+1}{x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(가)에서 α, β 는 $-\pi < x < \pi$ 에서 방정식 ①을 만족시키는 근이므로 두 함수 $y = \tan x$, $y = \frac{a+1}{x}$ 의 그래프가 $-\pi < x < 0$, $0 < x < \pi$ 에서 만나는 두 점의 x 좌표가 각각 α, β 이다.

이때 두 함수 $y = \tan x$, $y = \frac{a+1}{x}$ 의 그래프는 각각 원점에 대하여 대칭이므로

$$\beta = -\alpha \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{(나)의 } \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\sqrt{3}}{\beta} = 0 \text{에 } \textcircled{2} \text{을 대}$$

입하면

$$\frac{\tan(-\alpha) - \tan \alpha}{-2\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} = 0$$

$$\frac{-2 \tan \alpha}{-2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}, \tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}\pi \quad (\because -\pi < \alpha < 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \beta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\beta = \frac{2}{3}\pi \text{는 방정식 } \textcircled{1} \text{의 한 근이므로}$$

$$\tan \frac{2}{3}\pi = \frac{a+1}{\frac{2}{3}\pi}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi = a+1$$

$$\therefore a = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x} = c$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - a\} = 0 \text{에서}$$

$$f(0) = a \quad \therefore b = a$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \text{이므로}$$

$$f'(0) = c$$

$$f'(x) = (1+a) \cos x - x \sin x \text{에서}$$

$$c = a+1$$

$$\frac{\beta - \alpha}{8} = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

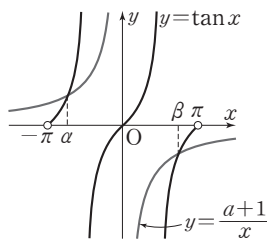
$$f\left(\frac{\beta - \alpha}{8}\right) - c = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - a - 1$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}a + a \right) - a - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2}a - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \right) - 1 \quad (\because \textcircled{3})$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$



따라서 $p = -\frac{3}{2}$, $q = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$40(q-p) = 40 \times \frac{5}{4} = 50$$

06 **답** ⑤

(가)의 $f(e) = e^2$ 에서

$$e^2 + ae + b = e^2$$

$$\therefore b = -ae$$

$$f(x) = (x^2 + ax - ae) \ln x \text{이므로}$$

$$f'(x) = (2x+a) \ln x + (x^2 + ax - ae) \times \frac{1}{x}$$

$$= (2x+a) \ln x + x + a - \frac{ae}{x}$$

(가)의 $f'(e) = 2e$ 에서

$$2e + a + e + a - a = 2e$$

$$\therefore a = -e$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - ex + e^2) \ln x,$$

$$f'(x) = (2x - e) \ln x + x - e + \frac{e^2}{x}$$

$h(x) = f^{-1}(x)g(x)$ 에서

$$h'(x) = (f^{-1})'(x)g(x) + f^{-1}(x)g'(x)$$

(나)의 $f(e) = e^2$ 에서

$$f^{-1}(e^2) = e$$

$$\therefore h'(e^2) = (f^{-1})'(e^2)g(e^2) + f^{-1}(e^2)g'(e^2)$$

$$= \frac{g(e^2)}{f'(f^{-1}(e^2))} + eg'(e^2)$$

$$= \frac{g(e^2)}{f'(e)} + eg'(e^2)$$

$$= \frac{g(e^2)}{2e} + eg'(e^2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나)의 $g(f(x)) = f'(x)$ 에서 양변에 $x = e$ 를 대입하면

$$g(f(e)) = f'(e)$$

$$\therefore g(e^2) = 2e$$

(나)의 $g(f(x)) = f'(x)$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = f''(x)$$

양변에 $x = e$ 를 대입하면

$$g'(f(e))f'(e) = f''(e)$$

$$2eg'(e^2) = f''(e) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(x) = (2x - e) \ln x + x - e + \frac{e^2}{x} \text{에서}$$

$$f''(x) = 2 \ln x + (2x - e) \times \frac{1}{x} + 1 - \frac{e^2}{x^2}$$

$$= 2 \ln x - \frac{e}{x} - \frac{e^2}{x^2} + 3$$

$$\therefore f''(e) = 2 - 1 - 1 + 3 = 3$$

이를 ②에 대입하면

$$2eg'(e^2) = 3$$

$$\therefore g'(e^2) = \frac{3}{2e}$$

따라서 ①에서

$$h'(e^2) = \frac{g(e^2)}{2e} + eg'(e^2)$$

$$= \frac{2e}{2e} + e \times \frac{3}{2e}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

07 답 ①

곡선 $y = \ln(1 + e^{2\sqrt{3}x} + e^{-2t})$ 과 직선 $y = \sqrt{3}x + t$ 가 만나는 두 점의 좌표를 $(\alpha, \sqrt{3}\alpha + t)$, $(\beta, \sqrt{3}\beta + t)$ ($\alpha < \beta$)라 하면

$$f(t) = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 3(\beta - \alpha)^2} = 2(\beta - \alpha) \quad (\because \alpha < \beta)$$

$$\ln(1 + e^{2\sqrt{3}x} + e^{-2t}) = \sqrt{3}x + t \text{에서}$$

$$1 + e^{2\sqrt{3}x} + e^{-2t} = e^{\sqrt{3}x + t}$$

$$\therefore e^{2\sqrt{3}x} - e^{\sqrt{3}x} \times e^t + 1 + e^{-2t} = 0$$

$$e^{\sqrt{3}x} = k \quad (k > 0) \text{로 놓으면}$$

$$k^2 - e^t k + 1 + e^{-2t} = 0$$

$$\therefore k = \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$\therefore e^{\sqrt{3}x} = \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}}{2} \text{이므로}$$

$$\sqrt{3}x = \ln \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이때 α, β 는 방정식 $\ln(1 + e^{2\sqrt{3}x} + e^{-2t}) = \sqrt{3}x + t$ 의 서로 다른 두 실근이므로

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{e^t - \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이때 $g(t) = \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}$ 라 하면

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{e^t - g(t)}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{e^t + g(t)}{2} \text{이므로}$$

$$f(t) = 2(\beta - \alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3} [\ln \{e^t + g(t)\} - \ln \{e^t - g(t)\}]$$

$$\therefore f'(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \frac{e^t + g'(t)}{e^t + g(t)} - \frac{e^t - g'(t)}{e^t - g(t)} \right\}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\ln 6}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \frac{\sqrt{6} + g'\left(\frac{\ln 6}{2}\right)}{\sqrt{6} + g\left(\frac{\ln 6}{2}\right)} - \frac{\sqrt{6} - g'\left(\frac{\ln 6}{2}\right)}{\sqrt{6} - g\left(\frac{\ln 6}{2}\right)} \right\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(t) = \sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4} \text{에서}$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 4e^{-2t} - 4)^{-\frac{1}{2}}(2e^{2t} + 8e^{-2t}) = \frac{e^{2t} + 4e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} - 4e^{-2t} - 4}} \text{이므로}$$

$$g\left(\frac{\ln 6}{2}\right) = \sqrt{6 - 4 \times \frac{1}{6} - 4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$g'\left(\frac{\ln 6}{2}\right) = \frac{6 + 4 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{6 - 4 \times \frac{1}{6} - 4}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\ln 6}{2}\right) &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{6} + \frac{10\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}} - \frac{\sqrt{6} - \frac{10\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3\sqrt{2} + 10}{3\sqrt{2} + 2} - \frac{3\sqrt{2} - 10}{3\sqrt{2} - 2} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{(3\sqrt{2} + 10)(3\sqrt{2} - 2) - (3\sqrt{2} - 10)(3\sqrt{2} + 2)}{(3\sqrt{2} + 2)(3\sqrt{2} - 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{24\sqrt{2}}{7} \\ &= \frac{16\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

따라서 $p=7, q=16$ 이므로

$$p+q=23$$

08 답 1

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1, x=0$ 에서도 연속이다.

(i) 함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} h(x) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \left(-\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(g^{-1}(x))$$

$$\therefore f(g^{-1}(-1)) = 0$$

$$\text{이때 } g(0) = -1 \text{이므로 } g^{-1}(-1) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

(ii) 함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right)$$

$$\therefore f(g^{-1}(0)) = 0$$

$$\text{이때 } g^{-1}(0) = \alpha \text{라 하면 } f(\alpha) = 0 \text{이므로}$$

$$\alpha^3 - \alpha = 0, \alpha(\alpha+1)(\alpha-1) = 0$$

$$\therefore \alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 함수 $h(x)$ 가 $x=-1, x=0$ 에서 미분가능하므로

$$h'(x) = \begin{cases} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) & (x < -1 \text{ 또는 } x > 0) \\ -\cos \pi x & (-1 < x < 0) \end{cases} \text{에서 미분계수}$$

$h'(-1), h'(0)$ 이 존재한다.

(iii) 미분계수 $h'(-1)$ 이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} (-\cos \pi x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$$

$$f'(g^{-1}(-1))(g^{-1})'(-1) = 1$$

$$f'(g^{-1}(-1)) \times \frac{1}{g'(g^{-1}(-1))} = 1$$

$$f'(0) \times \frac{1}{g'(0)} = 1 \quad (\because g^{-1}(-1) = 0)$$

$$\therefore f'(0) = g'(0)$$

$$\text{이때 } f'(x) = 3x^2 - 1, g'(x) = 3ax^2 - 2x + b \text{이므로}$$

$$b = -1$$

(iv) 미분계수 $h'(0)$ 이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-\cos \pi x)$$

$$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = -1$$

$$f'(g^{-1}(0)) \times \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = -1$$

$$f'(a) \times \frac{1}{g'(a)} = -1 \quad (\because g^{-1}(0) = a)$$

$$f'(a) = -g'(a)$$

$$\therefore 3a^2 - 1 = -3aa^2 + 2a - b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편 삼차함수 $g(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일대응이고,

$$g'(0) = -1 < 0 \text{이므로 } x \text{의 값이 증가하면 } g(x) \text{의 값은 감소한다.}$$

$$\text{이때 } g^{-1}(0) = a \text{에서 } g(a) = 0 \text{이고, } g(0) = -1 \text{이므로}$$

$$g(0) < g(a) \quad \therefore a < 0$$

따라서 ②에서 $a = -1$

$$b = -1, a = -1 \text{을 ②에 대입하면}$$

$$3 - 1 = -3a - 2 + 1, 3a = -3 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore ab = -1 \times (-1) = 1$$

09 답 $\frac{7}{2}$

P(t, 0), Q(s, f(s))라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 직선 PQ가 서로 수직이다.

$$f(x)=e^x+x+1 \text{에서}$$

$$f'(x)=e^x+1$$

즉, 점 Q에서의 접선의 기울기는

$$f'(s)=e^s+1$$

$$\text{직선 PQ의 기울기는 } \frac{f(s)}{s-t} = \frac{e^s+s+1}{s-t} \text{이므로}$$

$$(e^s+1) \times \frac{e^s+s+1}{s-t} = -1$$

$$(e^s+1)(e^s+s+1)=t-s$$

$$\therefore t=(e^s+1)(e^s+s+1)+s \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 f(s)의 값이 g(t)이므로

$$g(t)=e^s+s+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$h(t)=g^{-1}(t) \text{이므로 } h(2)=k \text{라 하면 } g^{-1}(2)=k$$

$$\therefore g(k)=2$$

$e^s+s+1=2$ 를 만족시키는 s의 값은 $s=0$ 이므로 이때 k의 값은 ①에서

$$k=(1+1) \times (1+1)=4$$

즉, $g(4)=2, h(2)=4$ 이므로

$$h'(2)=\frac{1}{g'(h(2))}=\frac{1}{g'(4)} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}$$

이때 ③의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$1=\{e^s(e^s+s+1)+(e^s+1)^2+1\}\frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \frac{ds}{dt}=\frac{1}{e^s(e^s+s+1)+(e^s+1)^2+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(t) &= (e^s+1)\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{e^s+1}{e^s(e^s+s+1)+(e^s+1)^2+1} \end{aligned}$$

$s=0$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$g'(4)=\frac{1+1}{2+2^2+1}=\frac{2}{7}$$

따라서 ③에서

$$h'(2)=\frac{1}{g'(4)}=\frac{7}{2}$$

10 답 ③

ㄱ. $f(x)=e^{nx}, g(x)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}x+2n\right)$ 에서

$$f'(x)=ne^{nx}, g'(x)=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}{\sin\frac{\pi}{2}x+2n}$$

$$h(x)=g(f(x)) \text{에서 } h'(x)=g'(f(x))f'(x) \text{이므로}$$

$$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$$

$$=ng'(1)=n \times 0=0$$

$$\text{ㄴ. } h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{nx}\right) \times ne^{nx}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{nx}\right)+2n}$$

이때 모든 실수 x에서 $ne^{nx}>0$

$x<0$ 에서 $0<e^{nx}<1$ 이므로

$$0<\frac{\pi}{2}e^{nx}<\frac{\pi}{2}$$

이때 $0<\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{nx}\right)<1, 0<\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{nx}\right)<1$ 이므로

$$2n<\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{nx}\right)+2n<2n+1, 0<\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{nx}\right)<\frac{\pi}{2}$$

따라서 $x<0$ 에서 $h'(x)>0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 증가한다.

ㄷ. $n=2$ 일 때,

$$h(x)=\ln\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{2x}\right)+4\right\}$$

$$h'(x)=\frac{\pi e^{2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{2x}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{2x}\right)+4}$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } \pi e^{2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{2x}\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}e^{2x}\right)=0 \quad (\because e^{2x}>0)$$

$$0<x<\frac{\ln 5}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}e^{2x}<\frac{5}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2}e^{2x}=\frac{3}{2}\pi, e^{2x}=3 \quad \therefore x=\frac{\ln 3}{2}$$

$0<x<\frac{\ln 5}{2}$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\ln 3}{2}$	...	$\frac{\ln 5}{2}$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		$\searrow$	$\ln 3$ 극소	$\nearrow$	

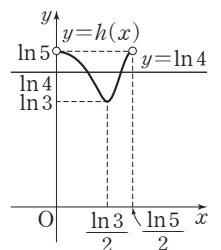
이때 $h(0)=\ln 5, h\left(\frac{\ln 5}{2}\right)=\ln 5$ 이므로 함

수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 $0<x<\frac{\ln 5}{2}$ 에서 함수 $y=h(x)$ 의

그래프와 직선 $y=\ln 4$ 가 만나는 점의 개수는 2이므로 방정식 $h(x)=\ln 4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



11 답 $\frac{5}{2}$

점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 점 B를 향해 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 t초 후의 호 AP의 길이는

$$t \quad \left(\text{단, } 0<t<\frac{\pi}{2} \right)$$

이때 부채꼴 POA의 반지름의 길이가 1이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$1 \times \theta = t \quad \therefore \theta = t$$

$$\therefore P(\cos t, \sin t)$$

직선 OP의 기울기는 $\tan t$ 이므로 직선 OP의 방정식은

$$y=(\tan t)x$$

곡선 $y=(x-1)^2$ 과 직선 $y=(\tan t)x$ 가 만나는 점 Q의 x좌표를 구하면

$$(x-1)^2=(\tan t)x$$

$$x^2-(2+\tan t)x+1=0$$

$$\therefore x=\frac{2+\tan t \pm \sqrt{\tan^2 t+4 \tan t}}{2}$$

이때 $0 < x < 1$ 이므로

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\tan t - \sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t})$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\sec^2 t - \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan t \sec^2 t + 4 \sec^2 t}{\sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sec^2 t \left(1 - \frac{\tan t + 2}{\sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t}} \right) \end{aligned}$$

또 점 Q는 곡선 $y = (x-1)^2$ 위의 점이므로 점 Q의 y좌표는

$$y = \frac{1}{4}(\tan t - \sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t})^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{4} \times 2(\tan t - \sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t}) \\ &\quad \times \left(\sec^2 t - \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan t \sec^2 t + 4 \sec^2 t}{\sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sec^2 t (\tan t - \sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t}) \left(1 - \frac{\tan t + 2}{\sqrt{\tan^2 t + 4 \tan t}} \right) \end{aligned}$$

점 P의 x좌표가 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\cos t = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \therefore \sec t = \sqrt{5}$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan t > 0$ 이므로

$$\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} = 2$$

따라서 점 P의 x좌표가 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때의 점 Q의 속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ 가 (a, b)

이므로

$$a = \frac{1}{2} \times (\sqrt{5})^2 \times \left(1 - \frac{2+2}{\sqrt{4+8}} \right)$$

$$= \frac{5}{2} \times \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$b = \frac{1}{2} \times (\sqrt{5})^2 \times (2 - \sqrt{4+8}) \left(1 - \frac{2+2}{\sqrt{4+8}} \right)$$

$$= \frac{5}{2} (2 - 2\sqrt{3}) \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= 15 - \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore b - 5a = 15 - \frac{25\sqrt{3}}{3} - 5 \left(\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= 15 - \frac{25}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

12 답 ③

$g(x) = (x+n)e^x$ 이라 하면

$$g'(x) = e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t+n)e^t)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$g'(t) = (t+n+1)e^t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t+n)e^t = (t+n+1)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-(t+n)e^t = (t+n+1)e^t(a-t)$$

$$t+n = (t+n+1)(t-a) \quad (\because e^t > 0)$$

$$\therefore t^2 + (n-a)t - an - n - a = 0 \quad \dots\dots ①$$

방정식 ①의 실근이 접점의 x좌표이므로 방정식 ①의 서로 다른 실근의 개수가 $f(n)$ 이다.

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = (n-a)^2 - 4(-an-n-a)$$

$$= n^2 + 2an + a^2 + 4n + 4a$$

$$= (n+a)^2 + 4(n+a)$$

$$= (n+a)(n+a+4)$$

$$\therefore f(n) = \begin{cases} 2 & (n < -a-4 \text{ 또는 } n > -a) \\ 1 & (n = -a-4 \text{ 또는 } n = -a) \\ 0 & (-a-4 < n < -a) \end{cases}$$

ㄱ. $a = -4$ 일 때,

$$f(n) = \begin{cases} 2 & (n < 0 \text{ 또는 } n > 4) \\ 1 & (n = 0 \text{ 또는 } n = 4) \\ 0 & (0 < n < 4) \end{cases}$$

$$\therefore f(0) + f(5) = 1 + 2 = 3$$

ㄴ. $f(n) = 0$ 이라면 $-a-4 < n < -a$

이때 a 는 정수이므로 정수 n 의 값은

$$-a-3, -a-2, -a-1$$

모든 정수 n 의 값의 합이 3이므로

$$-a-3 + (-a-2) + (-a-1) = 3$$

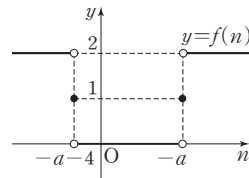
$$-3a-6=3$$

$$\therefore a = -3$$

ㄷ. $f(n)$ 이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이므로 $\sum_{n=1}^6 f(n) = 7$ 을 만족시

키는 경우는 다음과 같다.

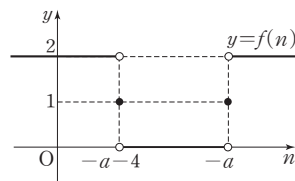
(i) $f(1)=0, f(2)=0, f(3)=1, f(4)=2, f(5)=2, f(6)=2$ 인 경우



$$f(3) = f(-a) = 1 \text{이어야 하므로}$$

$$3 = -a \quad \therefore a = -3$$

(ii) $f(1)=2, f(2)=2, f(3)=2, f(4)=1, f(5)=0, f(6)=0$ 인 경우



$$f(4) = f(-a-4) = 1 \text{이어야 하므로}$$

$$4 = -a-4 \quad \therefore a = -8$$

(i), (ii)에서 $a = -8$ 또는 $a = -3$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$-8 + (-3) = -11$$

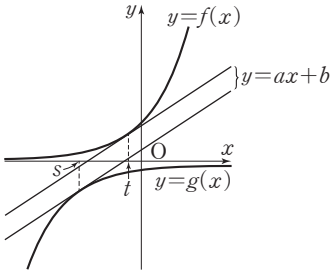
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13 답 4

$-e^{-x-2} \leq ax+b \leq e^x$ 에서 $f(x) = e^x, g(x) = -e^{-x-2}$ 이라 하면 직선

$y = ax+b$ 는 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 사이에 있거나 두 곡선에 접해야 한다.

그림과 같이 기울기가 a 인 직선이 $x=t$ 인 점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고, $x=s$ 인 점에서 곡선 $y=g(x)$ 에 접한다고 하자.



$$f(x)=e^x \text{에서 } f'(x)=e^x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (t, e^t) 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

$$\therefore y=e^t x+(1-t)e^t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$g(x)=-e^{-x-2} \text{에서 } g'(x)=e^{-x-2}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(s, -e^{-s-2})$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(s)=e^{-s-2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y+e^{-s-2}=e^{-s-2}(x-s)$$

$$\therefore y=e^{-s-2}x-(s+1)e^{-s-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

두 접선 ㉠, ㉡의 기울기가 같으므로 $e^t=e^{-s-2}$ 에서

$$t=-s-2$$

$$\therefore s=-t-2$$

이를 ㉡에 대입하면

$$y=e^t x+(t+1)e^t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢에서

$$a=e^t, (t+1)e^t \leq b \leq (1-t)e^t$$

$$\therefore (t+1)e^{3t} \leq a^2 b \leq (1-t)e^{3t} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

그림과 같이 두 직선 ㉠, ㉢이 일치하면

$$(1-t)e^t=(t+1)e^t$$

$$2te^t=0$$

$$\therefore t=0 \quad (\because e^t>0)$$

즉, $t=0$ 일 때 두 접선이 일치하므로

$$t \leq 0$$

㉢에서 $h(t)=(1-t)e^{3t}$ 이라 하면

$$h'(t)=-e^{3t}+3(1-t)e^{3t}$$

$$=(2-3t)e^{3t}$$

$t \leq 0$ 에서 $h'(t)>0$ 이므로 함수 $h(t)$ 는 증가한다.

따라서 함수 $h(t)$ 는 $t=0$ 에서 최댓값 1을 가지므로

$$M=1$$

또 ㉣에서 $k(t)=(t+1)e^{3t}$ 이라 하면

$$k'(t)=e^{3t}+3(t+1)e^{3t}$$

$$=(3t+4)e^{3t}$$

$$k'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=-\frac{4}{3} \quad (\because e^{3t}>0)$$

$t \leq 0$ 에서 함수 $k(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0
$k'(t)$	$-$	0	$+$	
$k(t)$	$\searrow$	$-\frac{1}{3e^4}$ 극소	$\nearrow$	1

따라서 $t \leq 0$ 일 때 함수 $k(t)$ 는 $t=-\frac{4}{3}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{3e^4}$ 을 가지므로

$$m=-\frac{1}{3e^4}$$

$$\therefore \ln \left| \frac{M}{3m} \right| = \ln |-e^4| = 4$$

14 답 $2\sqrt{11}$

$$g(x)=\{4-f(x)\}e^{-f(x)} \text{에서}$$

$$g'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}-\{4-f(x)\}e^{-f(x)} \times f'(x)$$

$$=f'(x)\{f(x)-5\}e^{-f(x)}$$

$$g'(x)=0 \text{에서}$$

$$f'(x)=0 \text{ 또는 } f(x)-5=0 \quad (\because e^{-f(x)}>0)$$

그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표를 c , $f(x)-5=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 $c_1, c_2 (c_1 < c_2)$ 라 하면

$$f'(c)=0, f(c_1)-5=0, f(c_2)-5=0$$

$x < c_1$ 일 때, $f'(x) < 0, f(x)-5 > 0$ 이므로

$$g'(x) < 0$$

$c_1 < x < c$ 일 때, $f'(x) < 0, f(x)-5 < 0$ 이므로 $g'(x) > 0$

$c < x < c_2$ 일 때, $f'(x) > 0, f(x)-5 < 0$ 이므로 $g'(x) < 0$

$x < c_2$ 일 때, $f'(x) > 0, f(x)-5 > 0$ 이므로 $g'(x) > 0$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	c_1	$\cdots$	c	$\cdots$	c_2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=c$ 에서 최대이고 $x=c_1, x=c_2$ 에서 최소이므로 ㉢, ㉣에 의하여

$$f'(b)=0, f(a)-5=0, f(a+8)-5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $k (k > 0)$ 라 하면 ㉤에서 방정식

$$f(x)-5=0 \text{의 두 근이 } a, a+8 \text{이므로}$$

$$f(x)-5=k(x-a)(x-a-8)$$

$$\therefore f(x)=k(x-a)(x-a-8)+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉥}$$

$$f'(x)=k(x-a-8)+k(x-a)=2k(x-a-4) \text{이고, ㉤에서}$$

$$f'(b)=0 \text{이므로}$$

$$2k(b-a-4)=0$$

$$b-a-4=0 \quad (\because k>0)$$

$$\therefore a=b-4$$

이를 ㉥에 대입하면

$$f(x)=k(x-b+4)(x-b-4)+5$$

$$\textcircled{㉥} \text{의 } f(b)=-11 \text{에서}$$

$$-16k+5=-11$$

$$-16k=-16$$

$$\therefore k=1$$

$$\therefore f(x)=(x-b+4)(x-b-4)+5$$

방정식 $f(x)=0$ 에서

$$(x-b+4)(x-b-4)+5=0$$

$$(x-b)^2=11$$

$$\therefore x=b-\sqrt{11} \text{ 또는 } x=b+\sqrt{11}$$

따라서 두 근 α, β 가 $b-\sqrt{11}, b+\sqrt{11}$ 이므로

$$|\alpha-\beta|=|(b-\sqrt{11})-(b+\sqrt{11})|=2\sqrt{11}$$

step 1 핵심 문제

| 88~89쪽

- 01 0 02 $\frac{1}{e^2}+1$ 03 $\pi+\frac{1}{2}$ 04 ⑤
 05 $\frac{8}{15}$ 06 ③ 07 1 08 ③ 09 35 10 ③
 11 2 12 15 13 ③ 14 ③ 15 $6\ln 2-3$

01 답 0

$x>0$ 에서 $0<\frac{1}{x+1}<1$ 이므로

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = x + \ln x + C$$

이때 $f(1) = -e$ 에서

$$1+C = -e \quad \therefore C = -e-1$$

따라서 $f(x) = x + \ln x - e - 1$ 이므로

$$f(e) = e + 1 - e - 1 = 0$$

02 답 $\frac{1}{e^2}+1$

(i) $x<0$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C_1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

(ii) $x>0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{8^x - 2^x}{2^x + 1} dx = \int \frac{2^x(2^x + 1)(2^x - 1)}{2^x + 1} dx = \int (4^x - 2^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + C_2 = \frac{4^x}{2\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + C_2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(1) = \frac{1}{2\ln 2} \text{에서}$$

$$\frac{4}{2\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} + C_2 = \frac{1}{2\ln 2} \quad \therefore C_2 = \frac{1}{2\ln 2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4^x}{2\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x + C_1 & (x < 0) \\ \frac{4^x}{2\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{4^x}{2\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} (e^x - x + C_1)$$

$$\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} = 1 + C_1 \quad \therefore C_1 = -1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 $x<0$ 에서 $f(x) = e^x - x - 1$ 이므로

$$f(-2) = \frac{1}{e^2} + 2 - 1 = \frac{1}{e^2} + 1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

03 답 $\pi + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx = \int (1 + \cos x) dx \\ &= x + \sin x + C \end{aligned}$$

$$f(x) \leq x \text{에서 } x + \sin x + C \leq x \quad \therefore \sin x \leq -C$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 이를 만족시키는 x 의 값의 범위가 $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$-C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = x + \sin x + \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(\pi) = \pi + 0 + \frac{1}{2} = \pi + \frac{1}{2}$$

[비밀] NOTE

삼각함수를 포함하는 피적분함수가 간단히 적분되지 않으면 다음과 같은 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 덧셈정리 등을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 구한다.

$$\bullet \sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\bullet \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{복부호 동순})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{복부호 동순})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{복부호 동순})$$

04 답 ⑤

$$\sqrt{x-1} f'(x) = 3x-4 \text{에서 } f'(x) = \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$x-1=t \text{로 놓으면 } 1 = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{3(t+1)-4}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int \frac{3t-1}{\sqrt{t}} dt = \int (3t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt \\ &= 2t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2(x-1)^{\frac{3}{2}} - 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\therefore f(5) - f(2) = (2 \times 8 - 2 \times 2 + C) - (2 - 2 + C) = 12$$

05 답 $\frac{8}{15}$

$$f(x) = \int (-\cos x + \cos^5 x) dx = \int \cos x (\cos^4 x - 1) dx$$

$$= \int \cos x \{ (1 - \sin^2 x)^2 - 1 \} dx$$

$$= \int \cos x (\sin^4 x - 2\sin^2 x) dx$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } \cos x = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \cos x (\sin^4 x - 2\sin^2 x) dx = \int (t^4 - 2t^2) dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + 1 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$$

06 답 ③

$$f'(x) = \frac{4x-5}{x^2-x-2} \text{에서}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{4x-5}{x^2-x-2} dx$$

이때 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ 이므로

$$\frac{4x-5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad (A, B \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$\frac{4x-5}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)}$$

따라서 $A+B=4, -2A+B=-5$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$A=3, B=1$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{4x-5}{x^2-x-2} dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= 3 \ln |x+1| + \ln |x-2| + C$$

이때 $f(0)=0$ 에서

$$\ln 2 + C = 0 \quad \therefore C = -\ln 2$$

따라서 $f(x) = 3 \ln |x+1| + \ln |x-2| - \ln 2$ 이므로

$$f(1) = 3 \ln 2 - \ln 2 = 2 \ln 2$$

07 답 1

$$f'(x) = \sin(\ln x) \text{에서}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sin(\ln x) dx$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $x = e^t$ 이고 $1 = e^t \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int \sin(\ln x) dx = \int e^t \sin t dt$$

$g(t) = \sin t, h'(t) = e^t$ 이라 하면 $g'(t) = \cos t, h(t) = e^t$ 이므로

$$\int e^t \sin t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt \quad \dots\dots ①$$

$\int e^t \cos t dt$ 에서 $u(t) = \cos t, v'(t) = e^t$ 이라 하면 $u'(t) = -\sin t,$

$v(t) = e^t$ 이므로

$$\int e^t \cos t dt = e^t \cos t + \int e^t \sin t dt$$

이를 ①에 대입하면

$$\int e^t \sin t dt = e^t \sin t - (e^t \cos t + \int e^t \sin t dt)$$

$$2 \int e^t \sin t dt = e^t (\sin t - \cos t)$$

$$\therefore \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C$$

$$\therefore f(x) = \int e^t \sin t dt$$

$$= \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2} x \{ \sin(\ln x) - \cos(\ln x) \} + C$$

이때 $f(1) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{2} (0-1) + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} x \{ \sin(\ln x) - \cos(\ln x) \} + 1$ 이므로

$$f(e^{\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 = 1$$

08 답 ③

$$f(|x-2|) = \begin{cases} \sqrt{-x+2} & (x \leq 2) \\ \sqrt{x-2} & (x \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(|x-2|) dx &= \int_0^2 \sqrt{-x+2} dx + \int_2^3 \sqrt{x-2} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3} (-x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}+2}{3} \end{aligned}$$

09 답 35

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \tan^4 x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x (1 - \tan^2 x) dx \end{aligned}$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=0, x=\frac{\pi}{6}$ 일 때

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \tan^4 x) dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sec^2 x (1 - t^2) dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \end{aligned}$$

따라서 $p=27, q=8$ 이므로

$$p+q=35$$

10 답 ③

$x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 라 하면 $1 = 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dx}$ 이고 $x=0$ 일 때

$\theta=0, x=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos \theta}{2 \sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

11 답 2

$u(x) = \ln x, v'(x) = f'(x)$ 라 하면 $u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e f'(x) \ln x dx &= \left[f(x) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \\ &= f(e) - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \\ &= 3 - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \end{aligned}$$

즉, $3 - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1$ 이므로

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 2$$

12 답 15

$\int_0^1 e^t f(t) dt = a$ (a 는 상수)로 놓으면 $f(x) = x^2 + a$
 $\int_0^1 e^t f(t) dt = a$ 에서 $\int_0^1 (t^2 + a)e^t dt = a$
 $g(t) = t^2 + a$, $h'(t) = e^t$ 이라 하면 $g'(t) = 2t$, $h(t) = e^t$ 이므로
 $\int_0^1 (t^2 + a)e^t dt = \left[(t^2 + a)e^t \right]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt$
 $= (1+a)e - a - 2 \int_0^1 te^t dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\int_0^1 te^t dt$ 에서 $u(t) = t$, $v'(t) = e^t$ 이라 하면 $u'(t) = 1$, $v(t) = e^t$ 이므로
 $\int_0^1 te^t dt = \left[te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$
 $= e - \left[e^t \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\int_0^1 (t^2 + a)e^t dt = (1+a)e - a - 2$
 즉, $(1+a)e - a - 2 = a$ 이므로
 $(e-2)a = -e+2 \quad \therefore a = -1$
 따라서 $f(x) = x^2 - 1$ 이므로
 $f(-4) = 16 - 1 = 15$

13 답 ③

$\int_0^{\ln t} f(x) dx = (t \ln t + a)^2 - a$ 의 양변에 $t=1$ 을 대입하면
 $0 = a^2 - a$, $a(a-1) = 0$
 $\therefore a = 1$ ($\because a \neq 0$)
 따라서 $\int_0^{\ln t} f(x) dx = (t \ln t + 1)^2 - 1$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면
 $f(\ln t) \times \frac{1}{t} = 2(t \ln t + 1) \times \left(\ln t + t \times \frac{1}{t} \right)$
 $f(\ln t) = 2t(t \ln t + 1)(\ln t + 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\ln t = 1$ 인 t 의 값은 $t = e$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $t = e$ 를 대입하면
 $f(1) = 2e(e+1) \times 2 = 4e^2 + 4e$

비법 NOTE

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} f(x) dx &= \frac{d}{dt} \{F(g(t)) - F(a)\} \\
 &= F'(g(t))g'(t) \\
 &= f(g(t))g'(t)
 \end{aligned}$$

14 답 ③

$f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = \frac{1}{2}$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 을 가지므로
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1} dt$
 $= \left[\ln(t^2-t+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3}{4}$

15 답 $6\ln 2 - 3$

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-2h}^{2+h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2) - F(2-2h) + F(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2-2h) - F(2)}{-2h} \times 2 \\
 &= F'(2) + 2F'(2) = 3F'(2) \\
 &= 3f(2) \quad \dots\dots \text{배점 40\%}
 \end{aligned}$$

$f'(x) = x \ln x$ 에서

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x \ln x dx$$

$u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$ 라 하면 $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) = \int x \ln x dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx \\
 &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \quad \dots\dots \text{배점 40\%}
 \end{aligned}$$

이때 $f(1) = -\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{4} + C = -\frac{1}{4} \quad \therefore C = 0 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-2h}^{2+h} f(x) dx = 3f(2) = 3(2 \ln 2 - 1) = 6 \ln 2 - 3 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

step 2 고난도 문제

| 90~94쪽

01 ②	02 ④	03 $\frac{5}{2}$	04 ⑤	05 ①	06 0
07 $\frac{e^9}{6}$	08 ②	09 $\frac{1}{2}$	10 72	11 ①	12 -2
13 ②	14 52	15 0	16 $1 + \frac{3}{\pi}$	17 $\frac{16}{15}$	
18 ③	19 $\frac{4}{3} - 2\sqrt{3}$	20 ⑤	21 $\frac{\pi}{12 \ln 3}$		
22 ①	23 105	24 ②	25 $3e^2 + 3$	26 4	
27 2	28 $6e$	29 ⑤			

01 답 ②

$x > 0$ 일 때, $f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$ 에서

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int \left(2 - \frac{3}{x^2} \right) dx \\
 &= \int (2 - 3x^{-2}) dx = 2x + \frac{3}{x} + C_1
 \end{aligned}$$

이때 $f(1)=5$ 에서

$$2+3+C_1=5 \quad \therefore C_1=0$$

$$\therefore f(x)=2x+\frac{3}{x} \quad (\text{단, } x>0)$$

(가)에서 $x<0$ 일 때,

$$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}$$

$$\therefore g(x)=\int g'(x)dx=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=2x+\frac{3}{x}+C_2$$

(나)의 $f(2)+g(-2)=9$ 에서

$$\left(4+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{3}{2}+C_2\right)=9 \quad \therefore C_2=9$$

따라서 $x<0$ 에서 $g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$ 이므로

$$g(-3)=-6-1+9=2$$

02 답 ④

$f'(x)=e^{-x}+e^{-2x}$ 에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$$

$$=\frac{e^{-x}}{\ln e^{-1}}+\frac{e^{-2x}}{\ln e^{-2}}+C=-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(n)+f(n) &= e^{-n}+e^{-2n}+\left(-e^{-n}-\frac{1}{2}e^{-2n}+C\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2n}+C \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\{f'(n)+f(n)\}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty}\{f'(n)+f(n)\}=0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2n}+C\right)=0 \quad \therefore C=0 \quad \left(\because 0<\frac{1}{e^2}<1\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \sum_{n=1}^{\infty}\{f'(n)+f(n)\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{1}{2e^2-2} \end{aligned}$$

03 답 $\frac{5}{2}$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x=g(t)$ 이므로 $f'(f(x))+\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\{f(x)\}^2}$ 에서

$$f'(t)+\frac{1}{f'(g(t))}=\frac{1}{t^2}$$

역함수의 미분법에 의하여 $\frac{1}{f'(g(t))}=g'(t)$ 이므로

$$f'(t)+g'(t)=\frac{1}{t^2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\text{즉, } \int\{f'(t)+g'(t)\}dt=\int t^{-2}dt \text{이므로}$$

$$f(t)+g(t)=-\frac{1}{t}+C$$

양변에 $t=1$ 을 대입하면

$$f(1)+g(1)=-1+C$$

이때 $f(1)=1$ 에서 $g(1)=1$ 이므로

$$1+1=-1+C \quad \therefore C=3 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

따라서 $f(t)+g(t)=-\frac{1}{t}+3$ 이므로

$$f(2)+g(2)=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

04 답 ⑤

$$f(x)=\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

$\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x)=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$= -\int \frac{1}{(t+1)(t-1)} dt = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|t+1|-\ln|t-1|)+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C$$

이때 $f(0)=\frac{\ln 2}{2}$ 에서 $C=\frac{\ln 2}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+\frac{\ln 2}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}\right|+\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 3}{2}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 6}{2}$$

다른 풀이

$$f(x)=\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x \tan x}{\tan x+\sec x} dx = \int \frac{(\tan x+\sec x)'}{\tan x+\sec x} dx$$

$$= \ln|\tan x+\sec x|+C$$

이때 $f(0)=\frac{\ln 2}{2}$ 에서 $C=\frac{\ln 2}{2}$

따라서 $f(x)=\ln|\tan x+\sec x|+\frac{\ln 2}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|+\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 3}{2}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 6}{2}$$

05 답 ①

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{1-2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\left\{1-2f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx$$

$\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $-\frac{1}{x^2}=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2}\left\{1-2f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx$$

$$= \int \{-1+2f(t)\}dt$$

$$= -t+2F(t)+C$$

$$= -\frac{1}{x}+2F\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

$F(x)=-\frac{1}{x}+2F\left(\frac{1}{x}\right)+C$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$F(1)=-1+2F(1)+C$$

이때 $F(1)=1$ 에서

$$1=-1+2+C \quad \therefore C=0$$

따라서 $F(x)=-\frac{1}{x}+2F\left(\frac{1}{x}\right)$ 이므로

$$F(-1)=1+2F(-1)$$

$$\therefore F(-1)=-1$$

06 답 0

$$xf(x)f'(x)=3(\ln x)^2+1 \text{에서}$$

$$f(x)f'(x)=\frac{1}{x}\{3(\ln x)^2+1\}$$

$$2f(x)f'(x)=\frac{2}{x}\{3(\ln x)^2+1\}$$

$$[\{f(x)\}^2]'=\frac{2}{x}\{3(\ln x)^2+1\}$$

$$\therefore \{f(x)\}^2=\int \frac{2}{x}\{3(\ln x)^2+1\} dx$$

$$\ln x=t \text{로 놓으면 } \frac{1}{x}=\frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\{f(x)\}^2=\int \frac{2}{x}\{3(\ln x)^2+1\} dx=\int 2(3t^2+1) dt$$

$$=\int (6t^2+2) dt=2t^3+2t+C$$

$$=2(\ln x)^3+2\ln x+C$$

$$\{f(x)\}^2=2(\ln x)^3+2\ln x+C \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$\{f(1)\}^2=C$$

$$\text{이때 } f(1)=2 \text{에서 } C=4$$

$$\text{따라서 } \{f(x)\}^2=2(\ln x)^3+2\ln x+4 \text{이므로}$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{e}\right)\right\}^2=-2-2+4=0 \quad \therefore f\left(\frac{1}{e}\right)=0$$

07 답 $\frac{e^9}{6}$

(㉞)의 $\int \ln f'(x) dx = \int \ln(x+1) dx + x^3 + 3x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\ln f'(x) = \ln(x+1) + 3x^2 + 6x$$

$$\ln \frac{f'(x)}{x+1} = 3x^2 + 6x, \quad \frac{f'(x)}{x+1} = e^{3x^2+6x}$$

$$\therefore f'(x) = (x+1)e^{3x^2+6x}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (x+1)e^{3x^2+6x} dx$$

$$3x^2+6x=t \text{로 놓으면 } 6x+6=\frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int (x+1)e^{3x^2+6x} dx = \int \frac{1}{6} e^t dt$$

$$= \frac{1}{6} e^t + C = \frac{1}{6} e^{3x^2+6x} + C$$

$x \geq 0$ 일 때, $3x^2+6x=3(x+1)^2-3$ 은 $x=0$ 에서 최솟값 0을 가지므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 $\frac{1}{6}+C$ 를 갖는다.

$$\text{즉, (㉞)에서 } \frac{1}{6}+C=\frac{1}{6} \text{이므로 } C=0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{6} e^{3x^2+6x} \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{e^9}{6}$$

08 답 ②

$$3\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(3x-1)\}^2 f'(3x-1) \text{에서}$$

$$\int 3\{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int \{f(3x-1)\}^2 f'(3x-1) dx \quad \dots\dots ㉠$$

$$\textcircled{1} \text{의 좌변에서 } f(x)=t \text{로 놓으면 } f'(x)=\frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\int 3\{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int 3t^2 dt = t^3 + C_1 = \{f(x)\}^3 + C_1$$

$$\textcircled{1} \text{의 우변에서 } f(3x-1)=s \text{로 놓으면 } 3f'(3x-1)=\frac{ds}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \{f(3x-1)\}^2 f'(3x-1) dx &= \int \frac{1}{3} s^2 ds = \frac{1}{9} s^3 + C_2 \\ &= \frac{1}{9} \{f(3x-1)\}^3 + C_2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \{f(x)\}^3 + C_1 = \frac{1}{9} \{f(3x-1)\}^3 + C_2 \text{이므로}$$

$$9\{f(x)\}^3 = \{f(3x-1)\}^3 + C_3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{2} \text{의 양변에 } x=-\frac{1}{3} \text{을 대입하면}$$

$$9\left\{f\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^3 = \{f(-2)\}^3 + C_3$$

$$\text{이때 } f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \{f(-2)\}^3 + C_3$$

$$\therefore \{f(-2)\}^3 = \frac{1}{3} - C_3 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\textcircled{3} \text{의 양변에 } x=-2 \text{를 대입하면}$$

$$9\{f(-2)\}^3 = \{f(-7)\}^3 + C_3$$

$$9\left(\frac{1}{3} - C_3\right) = \{f(-7)\}^3 + C_3 \quad (\because ㉢)$$

$$\therefore \{f(-7)\}^3 = 3 - 10C_3 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\textcircled{4} \text{의 양변에 } x=-7 \text{을 대입하면}$$

$$9\{f(-7)\}^3 = \{f(-22)\}^3 + C_3$$

$$9(3 - 10C_3) = \{f(-22)\}^3 + C_3 \quad (\because ㉣)$$

$$\text{이때 } f(-22) = -4 \text{에서}$$

$$91C_3 = 91 \quad \therefore C_3 = 1$$

$$\text{따라서 } 9\{f(x)\}^3 = \{f(3x-1)\}^3 + 1 \text{이므로 양변에 } x=\frac{1}{2} \text{을 대입하면}$$

$$9\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^3 + 1, \quad 8\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = 1$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

idea
09 답 $\frac{1}{2}$

$$\textcircled{1} \text{의 } f(x) = -f'(x) = f''(x) \text{에서}$$

$$f(x) = -f'(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(x) = -f''(x) \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면}$$

$$f(x) - f'(x) = -f'(x) + f''(x)$$

$$\textcircled{2} \text{의 } f(x) > f'(x) \text{에서 } f(x) - f'(x) > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{f'(x) - f''(x)}{f(x) - f'(x)} = -1$$

$$\frac{\{f(x) - f'(x)\}'}{f(x) - f'(x)} = -1$$

$$\text{즉, } \int \frac{\{f(x) - f'(x)\}'}{f(x) - f'(x)} dx = - \int dx \text{이므로}$$

$$\ln \{f(x) - f'(x)\} = -x + C$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f'(x) = -f(x) \text{이므로}$$

$$\ln \{2f(x)\} = -x + C$$

$$\text{이때 } f(0)=1 \text{에서 } C=\ln 2$$

$$\text{따라서 } \ln \{2f(x)\} = -x + \ln 2 \text{이므로 } 2f(x) = e^{-x+\ln 2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^{-x+\ln 2} \quad \therefore f(\ln 2) = \frac{1}{2}$$

10 답 72

(나)의 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=xe^x$ 에서

$$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=xe^x \quad \therefore \frac{f(x)}{x}=\int xe^x dx$$

$u(x)=x, v'(x)=e^x$ 이라 하면 $u'(x)=1, v(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

이때 $f(1)=0$ 에서 $C=0$

$$\therefore \frac{f(x)}{x} = (x-1)e^x$$

따라서 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = (x^2-x)e^x$ 이므로

$$f(3) \times f(-3) = 6e^3 \times 12e^{-3} = 72$$

11 답 ①

(i) $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 1) dx = x^3 + 2x^2 + x + C_1$$

(ii) $x > 1$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \ln x dx$$

$$u(x) = \ln x, v'(x) = 1 \text{이라 하면 } u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + C_1 & (x < 1) \\ x \ln x - x + C_2 & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 미분가능하면 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)\}^2 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x \ln x - x + C_2)^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^3 + 2x^2 + x + C_1)^2$$

$$\therefore (C_2 - 1)^2 = (C_1 + 4)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 미분가능하면 $x=1$ 에서의 미분계수가 존재하고

$$[\{f(x)\}^2]' = 2f(x)f'(x) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} 2f(x)f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 2f(x)f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} 2(x \ln x - x + C_2) \ln x = \lim_{x \rightarrow 1-} 2(x^3 + 2x^2 + x + C_1)(3x^2 + 4x + 1)$$

$$0 = 2(C_1 + 4) \times 8$$

$$C_1 + 4 = 0 \quad \therefore C_1 = -4$$

이를 ①에 대입하면

$$(C_2 - 1)^2 = 0 \quad \therefore C_2 = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x - 4 & (x < 1) \\ x \ln x - x + 1 & (x > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(0) + f(e^2) = -4 + (2e^2 - e^2 + 1) = e^2 - 3$$

idea
12 답 -2

(나)의 $2f(x+y) = -f(x)f(y) + xy(xy - 2x - 2y)$ 의 양변에 $x=0,$

$y=0$ 을 대입하면

$$2f(0) = -\{f(0)\}^2$$

$$f(0)\{f(0)+2\}=0$$

$$\therefore f(0) = -2 \text{ 또는 } f(0) = 0$$

그런데 (가)에서 $f(x) < 0$ 이므로 $f(0) = -2$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x+h) - 2f(x)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x)f(h) + xh(xh - 2x - 2h) + f(0)f(x)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x)\{f(h) - f(0)\} + x^2h^2 - 2x^2h - 2xh^2}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h) - f(0)}{h} \times \{-f(x)\} + x^2h - 2x^2 - 2xh \right] \\ &= \frac{1}{2} \{-f'(0)f(x) - 2x^2\} \\ &= -f(x) - x^2 \quad (\because f'(0) = 2)\end{aligned}$$

즉, $f'(x) = -f(x) - x^2$ 이므로

$$f(x) + f'(x) = -x^2$$

양변에 e^x 을 곱하면

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = -x^2 e^x$$

$$\therefore \{e^x f(x)\}' = -x^2 e^x$$

$$\therefore e^x f(x) = \int (-x^2 e^x) dx = -\int x^2 e^x dx$$

$g(x) = x^2, h'(x) = e^x$ 이라 하면 $g'(x) = 2x, h(x) = e^x$ 이므로

$$e^x f(x) = -\int x^2 e^x dx = -x^2 e^x + \int 2x e^x dx$$

$u(x) = 2x, v'(x) = e^x$ 이라 하면 $u'(x) = 2, v(x) = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}e^x f(x) &= -x^2 e^x + \int 2x e^x dx \\ &= -x^2 e^x + 2x e^x - \int 2e^x dx \\ &= -x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x + C\end{aligned}$$

$e^x f(x) = -x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x + C$ 에서 $e^x > 0$ 이므로

$$f(x) = -x^2 + 2x - 2 + \frac{C}{e^x}$$

이때 $f(0) = -2$ 에서

$$-2 + C = -2$$

$$\therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ 이므로

$$f(2) = -4 + 4 - 2 = -2$$

13 답 ②

$$2f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x) = x + x^2$$

$x > 0$ 이므로 양변을 $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$\frac{3}{2} f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln x - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3} x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

14 답 52

$f(x)=0$ 인 x 의 값을 구하면

$$ae^x - 2 = 0, e^x = \frac{2}{a} \quad \therefore x = \ln \frac{2}{a}$$

$$\therefore |f(x)| = |ae^x - 2| = \begin{cases} -ae^x + 2 & (x \leq \ln \frac{2}{a}) \\ ae^x - 2 & (x \geq \ln \frac{2}{a}) \end{cases}$$

이때 $a > 1$ 이면 $\frac{2}{a} < 2$ 이므로

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_0^{\ln 2} |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\ln \frac{2}{a}} (-ae^x + 2) dx + \int_{\ln \frac{2}{a}}^{\ln 2} (ae^x - 2) dx \\ &= \left[-ae^x + 2x \right]_0^{\ln \frac{2}{a}} + \left[ae^x - 2x \right]_{\ln \frac{2}{a}}^{\ln 2} \\ &= \left(-2 + 2 \ln \frac{2}{a} + a \right) + \left(2a - 2 \ln 2 - 2 + 2 \ln \frac{2}{a} \right) \\ &= 3a - 4 \ln a + 2 \ln 2 - 4 \quad \dots \dots \dots \text{배점 50\%} \end{aligned}$$

$$\therefore g'(a) = 3 - \frac{4}{a}$$

$g'(a)=0$ 인 a 의 값은 $a=\frac{4}{3}$

$a > 1$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	1	...	$\frac{4}{3}$	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a=\frac{4}{3}$ 에서 극솟값 $g(\frac{4}{3})$ 를 가지므로

$$\begin{aligned} g\left(\frac{4}{3}\right) &= 4 - 4 \ln \frac{4}{3} + 2 \ln 2 - 4 \\ &= -4 \ln 4 + 4 \ln 3 + 2 \ln 2 \\ &= -8 \ln 2 + 4 \ln 3 + 2 \ln 2 \\ &= -6 \ln 2 + 4 \ln 3 \quad \dots \dots \dots \text{배점 40\%} \end{aligned}$$

따라서 $p = -6$, $q = 4$ 이므로

$$p^2 + q^2 = 36 + 16 = 52 \quad \dots \dots \dots \text{배점 10\%}$$

15 답 0

$$f'(x) = f'(-x) \text{에서 } \int f'(x) dx = \int f'(-x) dx$$

$$\therefore f(x) = \int f'(-x) dx$$

$$-x=t \text{로 놓으면 } -1 = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(-x) dx = - \int f'(t) dt \\ &= -f(t) + C = -f(-x) + C \end{aligned}$$

즉, $f(x) = -f(-x) + C$ 이므로 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = -f(0) + C$$

이때 $f(0)=0$ 에서 $C=0$

따라서 $f(x) = -f(-x)$ 이므로 $g(x) = \{\cos x + f'(x)\}f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} g(-x) &= \{\cos(-x) + f'(-x)\}f(-x) \\ &= \{\cos x + f'(x)\} \times \{-f(x)\} = -g(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \{\cos x + f'(x)\}f(x) dx = 0$$

16 답 $1 + \frac{3}{\pi}$

$$f(x) + f(-x) = 1 + \cos \frac{\pi}{6} x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{f(x) + f(-x)\} dx &= \int_{-1}^1 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} x\right) dx \\ \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx &= \int_{-1}^1 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} x\right) dx \quad \dots \dots \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f(-x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(-x) dx$$

$$\text{즉, ㉠에서 } 2 \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} x\right) dx \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^1 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} x\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} x\right) dx \\ &= \left[x + \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} x \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

17 답 $\frac{16}{15}$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{1}{e^t - e^{-t}} dt - \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{e^{-t}}{e^t - e^{-t}} dt \\ &= \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{1 - e^{-t}}{e^t - e^{-t}} dt = \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{e^t - 1}{e^{2t} - 1} dt \\ &= \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{e^t - 1}{(e^t + 1)(e^t - 1)} dt \\ &= \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{1}{e^t + 1} dt \end{aligned}$$

$e^t + 1 = s$ 로 놓으면 $e^t = \frac{ds}{dt}$, 즉 $s - 1 = \frac{ds}{dt}$ 이고 $t = \ln 3$ 일 때 $s = 4$,

$t = \ln x$ 일 때 $s = x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{1}{e^t + 1} dt \\ &= \int_4^{x+1} \frac{1}{s(s-1)} ds \\ &= \int_4^{x+1} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) ds \\ &= \left[\ln(s-1) - \ln s \right]_4^{x+1} \\ &= \ln x - \ln(x+1) - \ln 3 + \ln 4 \\ &= \ln \frac{4x}{3(x+1)} \end{aligned}$$

$$\therefore f(4) - g(4) = \ln \frac{16}{15}$$

$$\therefore k = \frac{16}{15}$$

18 답 ㉢

(㉢)의 $\int_{-1}^1 (x+2n)^2 f(x) dx = n^2$ 에서 $x+2n=t$ 로 놓으면 $1 = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x=-1$ 일 때 $t=2n-1$, $x=1$ 일 때 $t=2n+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+2n)^2 f(x) dx &= \int_{2n-1}^{2n+1} t^2 f(t-2n) dt \\ &= \int_{2n-1}^{2n+1} t^2 f(t) dt \quad (\because \text{㉠}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{즉, } \int_{2n-1}^{2n+1} x^2 f(x) dx = n^2 \text{이므로} \\
&\int_0^{21} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^3 x^2 f(x) dx + \int_3^5 x^2 f(x) dx \\
&\quad + \int_5^7 x^2 f(x) dx + \cdots + \int_{19}^{21} x^2 f(x) dx \\
&= 2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{10} k^2 \\
&= 2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\
&= 2 + 385 = 387
\end{aligned}$$

19 답 $\frac{4}{3} - 2\sqrt{3}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f(0)=\frac{\pi}{3}$, $f(3)=\frac{\pi}{4}$
 $f(x)=t$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=\frac{\pi}{3}$, $x=3$ 일 때
 $t=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{f'(x)}{\cos^4 f(x)} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 t} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 t dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t (1 + \tan^2 t) dt \\
&\text{tan } t = s \text{로 놓으면 } \sec^2 t = \frac{ds}{dt} \text{이고 } t = \frac{\pi}{3} \text{일 때 } s = \sqrt{3}, t = \frac{\pi}{4} \text{일 때} \\
&s = 1 \text{이므로} \\
\int_0^3 \frac{f'(x)}{\cos^4 f(x)} dx &= \int_{\sqrt{3}}^1 \sec^2 t (1 + \tan^2 t) dt \\
&= \int_{\sqrt{3}}^1 (1 + s^2) ds \\
&= \left[s + \frac{1}{3}s^3 \right]_{\sqrt{3}}^1 \\
&= \frac{4}{3} - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{f'(x)}{\cos^4 f(x)} dx &= \int_0^3 f'(x) \sec^4 f(x) dx \\
&= \int_0^3 f'(x) \sec^2 f(x) \{1 + \tan^2 f(x)\} dx \\
&\text{tan } f(x) = t \text{로 놓으면 } f'(x) \sec^2 f(x) = \frac{dt}{dx} \text{이고 } x=0 \text{일 때} \\
&t = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, x=3 \text{일 때 } t = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로} \\
\int_0^3 \frac{f'(x)}{\cos^4 f(x)} dx &= \int_0^3 f'(x) \sec^2 f(x) \{1 + \tan^2 f(x)\} dx \\
&= \int_{\sqrt{3}}^1 (1 + t^2) dt \\
&= \left[t + \frac{1}{3}t^3 \right]_{\sqrt{3}}^1 \\
&= \frac{4}{3} - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

20 답 ⑤

ㄱ. $f(1+x)=f(1-x)$, $f(2+x)=f(2-x)$ 이므로
 $f(x+2)=f(2-x)=f(1+(1-x))$
 $=f(1-(1-x))$
 $=f(x) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$

ㄴ. $\int_2^5 f'(x) dx = 4$ 에서 $f(5)-f(2)=4$
 이때 ㉠의 $f(x+2)=f(x)$ 에서
 $f(5)=f(3)=f(1)$, $f(2)=f(0)$
 $\therefore f(1)-f(0)=4 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$

ㄷ. $\int_0^1 f(f(x))f'(x) dx = 6$ 에서 $f(x)=t$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이고
 $x=0$ 일 때 $t=f(0)$, $x=1$ 일 때 $t=f(1)$ 이다.
 이때 $f(0)=k$ 라 하면 ㉡에서 $f(1)=k+4$ 이므로
 $\int_0^1 f(f(x))f'(x) dx = \int_k^{k+4} f(t) dt$
 $= \int_k^{k+2} f(t) dt + \int_{k+2}^{k+4} f(t) dt$
 $= \int_0^2 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt \quad (\because \text{㉠})$
 $= 2 \int_0^2 f(t) dt$
 즉, $2 \int_0^2 f(t) dt = 6$ 이므로 $\int_0^2 f(t) dt = 3$
 $\int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt = 3$
 이때 $f(1+x)=f(1-x)$ 에서 $\int_0^1 f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt$ 이므로
 $\int_1^2 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt = 3$
 $2 \int_1^2 f(t) dt = 3 \quad \therefore \int_1^2 f(t) dt = \frac{3}{2}$
 $\therefore \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx$
 $\quad + \int_6^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx$
 $= \int_1^2 f(x) dx + 4 \int_0^2 f(x) dx \quad (\because \text{㉠})$
 $= \frac{3}{2} + 4 \times 3 = \frac{27}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 답 $\frac{\pi}{12 \ln 3}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3^{-x}+3^x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx \\
3^x &= t \text{로 놓으면 } 3^x \ln 3 = \frac{dt}{dx} \text{이고 } x=0 \text{일 때 } t=1, x=\frac{1}{2} \text{일 때} \\
&t=\sqrt{3} \text{이므로} \\
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3^{-x}+3^x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx \\
&= \frac{1}{\ln 3} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \cdots \cdots \text{㉠} \\
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt &\text{에서 } t = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } 1 = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \\
\text{이고 } t=1 \text{일 때 } \theta &= \frac{\pi}{4}, t=\sqrt{3} \text{일 때 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{이므로} \\
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3^{-x}+3^x} dx = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12 \ln 3}$$

따라서 $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 3xe^x dx$ 에서 $u(x)=3x$, $v'(x)=e^x$ 이라 하면 $u'(x)=3$, $v(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 3xe^x dx \\ &= \left[3xe^x \right]_0^2 - \int_0^2 3e^x dx \\ &= 6e^2 - \left[3e^x \right]_0^2 \\ &= 6e^2 - (3e^2 - 3) = 3e^2 + 3\end{aligned}$$

다른 풀이

$\int_{ke}^{2ke^2} f^{-1}(x) dx$ 에서 $f^{-1}(x)=t$ 로 놓으면 $x=f(t)$ 이므로

$$1 = f'(t) \frac{dt}{dx} \text{이다.}$$

$f(x)=kxe^x$ 에서 $f(1)=ke$, $f(2)=2ke^2$ 이므로
 $f^{-1}(ke)=1$, $f^{-1}(2ke^2)=2$
 즉, $x=ke$ 일 때 $t=1$, $x=2ke^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{ke}^{2ke^2} f^{-1}(x) dx &= \int_1^2 tf'(t) dt \\ \therefore \int_1^2 f(x) dx + \int_{ke}^{2ke^2} f^{-1}(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 xf'(x) dx \\ &= \int_1^2 \{f(x) + xf'(x)\} dx \\ &= \int_1^2 \{xf(x)\}' dx \\ &= \left[xf(x) \right]_1^2 \\ &= 2f(2) - f(1) \\ &= 4ke^2 - ke\end{aligned}$$

즉, $4ke^2 - ke = 12e^2 - 3e$ 이므로 $k=3$
 $\therefore f(x)=3xe^x$

26 답 4

$f(t)=2^{t+b} \cos t$ 라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 ax - 1} \int_0^x 2^{t+b} \cos t dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(0)}{\sec^2 ax - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(0)}{\tan^2 ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x^2) - F(0)}{x^2} \times \left(\frac{ax}{\tan ax} \right)^2 \times \frac{1}{a^2} \right\} \\ &= F'(0) \times 1^2 \times \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} f(0) = \frac{2^b}{a^2}\end{aligned}$$

이때 a, b 는 소수이고 $\frac{2^b}{a^2}$ 이 자연수이므로
 $a=2, b=2, 3, 5, 7, \dots$
 따라서 $a+b$ 의 최솟값은 $2+2=4$

27 답 2

$\int_{f(1)}^{f(x)} f(t) dt = xf(x) - 1 - \int_1^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f(f(x))f'(x) &= f(x) + xf'(x) - f(x) \\ f(f(x))f'(x) &= xf'(x) \\ \therefore f(f(x)) &= x \quad (\because f'(x) > 0)\end{aligned}$$

즉, $f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

$g(x)=f(x)$

역함수의 미분법에 의하여 $\frac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{f'(g(x))} dx &= \int_1^3 g'(x) dx = \int_1^3 f'(x) dx \\ &= f(3) - f(1) \\ &= 3 - f(1) \quad (\because f(3)=3)\end{aligned}$$

$\int_{f(1)}^{f(x)} f(t) dt = xf(x) - 1 - \int_1^x f(t) dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $0 = f(1) - 1 \quad \therefore f(1) = 1$

$$\therefore \int_1^3 \frac{1}{f'(g(x))} dx = 3 - f(1) = 3 - 1 = 2$$

28 답 6e

$\int_x^{x+1} tf(t-x) dt$ 에서 $t-x=s$ 로 놓으면 $1=\frac{ds}{dt}$ 이고 $t=x$ 일 때

$s=0$, $t=x+1$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} tf(t-x) dt &= \int_0^1 (s+x)f(s) ds \\ &= \int_0^1 sf(s) ds + x \int_0^1 f(s) ds\end{aligned}$$

$\int_0^1 f(s) ds = a$, $\int_0^1 sf(s) ds = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$f(x)=e^x+ax+b$ 배점 20%

$\int_0^1 f(s) ds = a$ 에서

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s) ds &= \int_0^1 (e^s + as + b) ds = \left[e^s + \frac{a}{2}s^2 + bs \right]_0^1 \\ &= e + \frac{a}{2} + b - 1\end{aligned}$$

즉, $e + \frac{a}{2} + b - 1 = a$ 이므로 $\frac{a}{2} - b = e - 1$ ㉠ 배점 20%

$\int_0^1 sf(s) ds = b$ 에서

$$\begin{aligned}\int_0^1 sf(s) ds &= \int_0^1 (se^s + as^2 + bs) ds \\ &= \int_0^1 se^s ds + \int_0^1 (as^2 + bs) ds\end{aligned}$$

$\int_0^1 se^s ds$ 에서 $u(s)=s$, $v'(s)=e^s$ 이라 하면 $u'(s)=1$, $v(s)=e^s$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 sf(s) ds &= \int_0^1 se^s ds + \int_0^1 (as^2 + bs) ds \\ &= \left[se^s \right]_0^1 - \int_0^1 e^s ds + \left[\frac{a}{3}s^3 + \frac{b}{2}s^2 \right]_0^1 \\ &= e - \left[e^s \right]_0^1 + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \\ &= e - (e - 1) + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \\ &= 1 + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}\end{aligned}$$

즉, $1 + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = b$ 이므로 $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} = -1$ ㉡ 배점 30%

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -6e - 6$, $b = -4e - 2$ 배점 10%

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 (1-3x)f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 xf(x) dx \\ &= a - 3b = -6e - 6 - 3(-4e - 2) \\ &= 6e \quad \dots\dots \text{배점 20\%}\end{aligned}$$

29 답 ⑤

(나)의 $\ln f(x) + 2 \int_0^x (x-t)f(t) dt = 0$ 에서

$$\ln f(x) + 2x \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x t f(t) dt = 0$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + 2 \int_0^x f(t) dt + 2xf(x) - 2xf(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \int_0^x f(t) dt$$

$$\therefore f'(x) = -2f(x) \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. (가)에서 $f(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $\int_0^x f(t) dt > 0$

따라서 $x > 0$ 에서 $f'(x) = -2f(x) \int_0^x f(t) dt < 0$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. ㉑에서 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$\square +$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$x < 0$ 에서 $f(x) > 0$ 이고
 $\int_0^x f(t) dt = -\int_x^0 f(t) dt < 0$ 이므로
 $f'(x) > 0$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 $f(0)$ 을 갖는다.

(나)의 $\ln f(x) + 2 \int_0^x (x-t)f(t) dt = 0$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\ln f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.

$$\text{ㄷ. } F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $F'(x) = f(x)$

따라서 ㉑에서

$$f'(x) = -2f(x) \int_0^x f(t) dt = -2F'(x)F(x) = -[F(x)]^2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = -[F(x)]^2 + C$$

이때 ㉑의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $F(0) = 0$ 이므로

$$f(0) = C$$

㉑에서 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = -[F(x)]^2 + 1$ 이므로

$$f(1) = -[F(1)]^2 + 1 \quad \therefore f(1) + [F(1)]^2 = 1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

step 3 최고난도 문제

| 95~97쪽

- 01 ① 02 $\frac{2}{5}$ 03 ⑤ 04 3π 05 115 06 ④
 07 30 08 ③ 09 32 10 10 11 ④

01 답 ①

1단계 $f_n(2)$ 구하기

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^n (2-k)x^{1-k} = 1 + 0 - x^{-2} - 2x^{-3} - \dots - (n-2)x^{1-n}$$

$$f_n(1) = n-4$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$f_1'(x) = 1 \text{이므로}$$

$$f_1(x) = \int f_1'(x) dx = \int dx = x + C_1$$

이때 $f_1(1) = -3$ 이므로

$$1 + C_1 = -3 \quad \therefore C_1 = -4$$

따라서 $f_1(x) = x - 4$ 이므로 $f_1(2) = -2$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$f_2'(x) = 1 \text{이므로}$$

$$f_2(x) = \int f_2'(x) dx = \int dx = x + C_2$$

이때 $f_2(1) = -2$ 이므로

$$1 + C_2 = -2 \quad \therefore C_2 = -3$$

따라서 $f_2(x) = x - 3$ 이므로 $f_2(2) = -1$

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$f_n'(x) = 1 + 0 - x^{-2} - 2x^{-3} - \dots - (n-2)x^{1-n} \text{이므로}$$

$$f_n(x) = \int f_n'(x) dx$$

$$= \int \{1 - x^{-2} - 2x^{-3} - \dots - (n-2)x^{1-n}\} dx$$

$$= x + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-(n-2)} + C_3$$

이때 $f_n(1) = n-4$ 이므로

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + C_3 = n-4$$

$$n-1 + C_3 = n-4 \quad \therefore C_3 = -3$$

따라서 $f_n(x) = x + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-(n-2)} - 3$ 이므로

$$f_n(2) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - 3 = -1 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= -1 + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f_n(2) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

2단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(2)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \right\} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= -\frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \end{aligned}$$

02 답 $\frac{2}{5}$

1단계 두 점 P, Q의 좌표 구하기

점 $(t, f(t))$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{f'(t)}x + \frac{t}{f'(t)} + f(t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉑에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{f'(t)}x + \frac{t}{f'(t)} + f(t)$$

$$\frac{1}{f'(t)}x = \frac{t}{f'(t)} + f(t)$$

$$\therefore x = t + f(t)f'(t) \quad \therefore P(t + f(t)f'(t), 0)$$

㉑에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = \frac{t}{f'(t)} + f(t) \quad \therefore Q\left(0, \frac{t}{f'(t)} + f(t)\right)$$

2단계 $f(t)$ 구하기

(가)에서 $f(t) > 0, f'(t) > 0$ 이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\{t+f(t)f'(t)\}\left\{\frac{t}{f'(t)}+f(t)\right\}=\frac{1}{2f'(t)}\{t+f(t)f'(t)\}^2$$

(나)에서

$$\frac{1}{2f'(t)}\{t+f(t)f'(t)\}^2=\frac{1}{2}f'(t)$$

$$\{t+f(t)f'(t)\}^2=\{f'(t)\}^2$$

$$\{t+f(t)f'(t)\}^2-\{f'(t)\}^2=0$$

$$\{t+f(t)f'(t)+f'(t)\}\{t+f(t)f'(t)-f'(t)\}=0$$

이때 $0 < t < 1$ 에서 $f(t) > 0, f'(t) > 0$ 이므로

$$t+f(t)f'(t)+f'(t) > 0$$

따라서 $t+f(t)f'(t)-f'(t)=0$ 이므로

$$f(t)f'(t)=f'(t)-t$$

$$2f(t)f'(t)=2f'(t)-2t$$

$$[\{f(t)\}^2]' = 2f'(t) - 2t$$

$$\text{즉, } \{f(t)\}^2 = \int \{2f'(t) - 2t\} dt \text{이므로}$$

$$\{f(t)\}^2 = 2f(t) - t^2 + C$$

$$(다)에서 f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$\left\{f\left(\frac{3}{5}\right)\right\}^2 = 2f\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{9}{25} + C$$

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} + C$$

$$\therefore C = 0$$

따라서 $\{f(t)\}^2 = 2f(t) - t^2$ 이므로

$$\{f(t)\}^2 - 2f(t) + t^2 = 0$$

$$\therefore f(t) = 1 \pm \sqrt{1-t^2}$$

그런데 (다)의 $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$ 을 만족시키려면

$$f(t) = 1 - \sqrt{1-t^2}$$

3단계 $f(x)$ 의 최댓값 구하기

(가)에서 $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{4}{5}$ 일 때 최댓값 $f\left(\frac{4}{5}\right)$ 를 가지므로

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

03 답 ⑤

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$ 의 양변에 x 대신 $g(x)$ 를 대입하면

$$f'(g(x)) = \frac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}$$

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 역함수 관계이면 $f(g(x)) = x$ 이고, 역함수

의 미분법에 의하여 $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$ 이므로

$$\frac{1}{g'(x)} = \frac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2} \quad \dots\dots ①$$

이때 $f(1) = 2$ 에서 $g(2) = 1$ 이므로

$$g'(2) = \frac{4\{g(2)\}^3}{1-8\{g(2)\}^2} = \frac{4}{1-8} = -\frac{4}{7}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. ①의 $g'(x) = \frac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}$ 에서

$$g'(x)[1-x^3\{g(x)\}^2] = x^2\{g(x)\}^3$$

$$g'(x) = x^2g'(x)\{g(x)\}^2 + x^2\{g(x)\}^3 \\ = x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x) + g(x)\}$$

$$\therefore g(x) = \int g'(x) dx = \int x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x) + g(x)\} dx$$

$xg(x) = t$ 로 놓으면 $g(x) + xg'(x) = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$g(x) = \int x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x) + g(x)\} dx$$

$$= \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}\{xg(x)\}^3 + C$$

이때 $g(2) = 1$ 이므로

$$g(2) = \frac{1}{3}\{2g(2)\}^3 + C$$

$$1 = \frac{8}{3} + C \quad \therefore C = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3} \quad \dots\dots ②$$

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. ②의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = \frac{1}{3}\{g(1)\}^3 - \frac{5}{3}$$

$$\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$$

$$g(1) = s \text{로 놓으면 } s^3 - 3s - 5 = 0$$

$$h(s) = s^3 - 3s - 5 \text{라 하면}$$

$$h'(s) = 3s^2 - 3 = 3(s+1)(s-1)$$

$$h'(s) = 0 \text{인 } s \text{의 값은 } s = -1 \text{ 또는 } s = 1$$

함수 $h(s)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

s	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$h'(s)$	+	0	-	0	+
$h(s)$	$\nearrow$	-3 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y = h(s)$ 의 그래프는 그림과 같다.

한편 함수 $h(s)$ 는 닫힌구간 $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ 에서 연속

이고 $h(2) = -3 < 0, h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{8} > 0$ 이므로

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(s) = 0$ 은 열린구간 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그런데 함수 $y = h(s)$ 의 그래프는 s 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $h(s) = 0$ 의 근은 $g(1)$ 뿐이다.

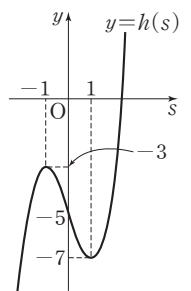
$$\therefore 2 < g(1) < \frac{5}{2}$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$ 일 때, 사잇값의 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



04 답 3π

1단계 $f(x)+g(x)$ 의 식 세우기

(나)에서

$$f'(x)=g(x)\sin x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g'(x)=f(x)\sin x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$f'(x)+g'(x)=\{f(x)+g(x)\}\sin x$$

(가)의 $f(x)>g(x)>0$ 에서 $f(x)+g(x)>0$ 이므로

$$\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=\sin x$$

$$\text{즉, } \int \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)} dx = \int \sin x dx \text{이므로}$$

$$\ln \{f(x)+g(x)\} = -\cos x + C_1$$

$$\therefore f(x)+g(x) = e^{-\cos x + C_1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

2단계 $f(x)-g(x)$ 의 식 세우기

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$f'(x)-g'(x)=-\{f(x)-g(x)\}\sin x$$

(가)의 $f(x)>g(x)>0$ 에서 $f(x)-g(x)>0$ 이므로

$$\frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}=-\sin x$$

$$\text{즉, } \int \frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)} dx = \int (-\sin x) dx \text{이므로}$$

$$\ln \{f(x)-g(x)\} = \cos x + C_2$$

$$\therefore f(x)-g(x) = e^{\cos x + C_2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

3단계 $f'(x)$ 구하기

$\textcircled{3}+\textcircled{4}$ 을 하면

$$2f(x) = e^{-\cos x + C_1} + e^{\cos x + C_2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{-\cos x + C_1} + e^{\cos x + C_2})$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \frac{1}{2}(e^{-\cos x + C_1} \sin x - e^{\cos x + C_2} \sin x) \\ &= \frac{1}{2} \sin x (e^{-\cos x + C_1} - e^{\cos x + C_2}) \end{aligned}$$

(다)에서 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 을 지나고 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서의 접선의 기울기가 0이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}(e^{C_1} + e^{C_2})=1$$

$$\therefore e^{C_1} + e^{C_2}=2 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}(e^{C_1} - e^{C_2})=0$$

$$e^{C_1}=e^{C_2} \quad \therefore C_1=C_2$$

이를 $\textcircled{5}$ 에 대입하면

$$e^{C_1} + e^{C_1}=2, e^{C_1}=1 \quad \therefore C_1=0$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2} \sin x (e^{-\cos x} - e^{\cos x})$$

4단계 극값을 갖는 모든 x 의 값의 합 구하기

$f'(x)=0$ 에서

$$\sin x=0 \text{ 또는 } e^{-\cos x} - e^{\cos x}=0$$

$$\sin x=0 \text{에서 } x=\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$$e^{-\cos x} - e^{\cos x}=0 \text{에서 } e^{-\cos x}=e^{\cos x}$$

$$-\cos x=\cos x, \cos x=0$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

따라서 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 이고 각각의 값의 좌우에서

$f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{2}, x=\pi, x=\frac{3}{2}\pi$ 에서 극값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

05 답 115

1단계 $f(x)$ 의 식 세우기

(가)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi \times f(x)) = 0 \text{에서}$$

$$\sin(\pi f(0)) = 0 \quad \therefore f(0) = n \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 9이므로

$$f(x) = 9x^3 + ax^2 + bx + n \quad (a, b \text{는 상수}) \text{이라 하자.}$$

2단계 $f(x)$ 구하기

$h(x) = \sin(\pi \times f(x))$ 라 하면 $h(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

$$\therefore h'(0) = 0$$

$$h'(x) = \cos(\pi \times f(x)) \times \pi f'(x) \text{이고 } f'(x) = 27x^2 + 2ax + b \text{이므로}$$

$$h'(0) = \cos n\pi \times b\pi$$

$$\cos n\pi \times b\pi = 0$$

$$\therefore b = 0 \quad (\because \cos n\pi \neq 0)$$

$$\therefore f(x) = 9x^3 + ax^2 + n$$

함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x)=f(x)$ 이고 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \quad (\because g(x+1)=g(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (9x^3 + ax^2 + n) = \lim_{x \rightarrow 1-} (9x^3 + ax^2 + n)$$

$$n = 9 + a + n \quad \therefore a = -9$$

따라서 $f(x) = 9x^3 - 9x^2 + n$ 이므로

$$f'(x) = 27x^2 - 18x = 9x(3x - 2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	n 극대	$\searrow$	$n-\frac{4}{3}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대값 n 을 갖고, $x=\frac{2}{3}$ 에서 극솟값

$n-\frac{4}{3}$ 를 갖는다.

(나)에서 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱이 5이므로

$$n\left(n-\frac{4}{3}\right)=5, \quad 3n^2-4n-15=0$$

$$(3n+5)(n-3)=0$$

$$\therefore n=3 \quad (\because n \text{은 정수})$$

$$\therefore f(x)=9x^3-9x^2+3$$

3단계 $\int_0^5 xg(x)dx$ 의 값 구하기

$0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x)=f(x)=9x^3-9x^2+3$ 이고 $g(x+1)=g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^5 xg(x)dx &= \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \int_2^3 xg(x)dx + \int_3^4 xg(x)dx \\ &\quad + \int_4^5 xg(x)dx \\ &= \int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x+1)dx + \int_0^1 (x+2)g(x+2)dx \\ &\quad + \int_0^1 (x+3)g(x+3)dx + \int_0^1 (x+4)g(x+4)dx \\ &= \int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x)dx + \int_0^1 (x+2)g(x)dx \\ &\quad + \int_0^1 (x+3)g(x)dx + \int_0^1 (x+4)g(x)dx \\ &= \int_0^1 (5x+10)g(x)dx \\ &= \int_0^1 (5x+10)(9x^3-9x^2+3)dx \\ &= \int_0^1 (45x^4+45x^3-90x^2+15x+30)dx \\ &= \left[9x^5 + \frac{45}{4}x^4 - 30x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 30x \right]_0^1 \\ &= \frac{111}{4} \end{aligned}$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=4$, $q=111$ 이므로

$$p+q=115$$

비밀 NOTE

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수 $y=f(x-p)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p)dx$$

06 답 ④

1단계 $\int_{-a}^a \ln f(x)dx$ 를 구간을 나누어 나타내기

$$\int_{-a}^a \ln f(x)dx = 8 \text{에서}$$

$$\int_{-a}^0 \ln f(x)dx + \int_0^a \ln f(x)dx = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $\int_{-a}^0 \ln f(x)dx$ 변형하기

$$\int_{-a}^0 \ln f(x)dx \text{에서 } x=-t \text{로 놓으면 } 1=-\frac{dt}{dx} \text{이고 } x=-a \text{일 때}$$

$$t=a, \quad x=0 \text{일 때 } t=0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \ln f(x)dx &= -\int_a^0 \ln f(-t)dt \\ &= \int_0^a \ln f(-t)dt \end{aligned}$$

3단계 a 의 값 구하기

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \ln f(x)dx + \int_0^a \ln f(x)dx &= \int_0^a \ln f(-x)dx + \int_0^a \ln f(x)dx \\ &= \int_0^a \{\ln f(-x) + \ln f(x)\}dx = \int_0^a \ln f(-x)f(x)dx \\ &= \int_0^a \ln e^x dx = \int_0^a x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^a = \frac{1}{2}a^2 \\ \text{즉, } \frac{1}{2}a^2 &= 8 \text{이므로} \\ a^2 &= 16 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

07 답 30

1단계 a 의 값 구하기

$\left| \int_k^x \{f(t)+b\}dt \right| = \int_k^x |f(t)+b|dt$ 를 만족시키려면 $x < k$ 또는

$x > k$ 에서 $f(x)+b$ 의 부호가 바뀌지 않아야 한다. $\dots\dots \textcircled{1}$

$f(x)=a(x^3-x)e^{x^2}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(3x^2-1)e^{x^2} + a(x^3-x)e^{x^2} \times 2x \\ &= a(2x^4+x^2-1)e^{x^2} = a(x^2+1)(2x^2-1)e^{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\dots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{a}{4}\sqrt{2}e$ 극대	$\searrow$	$-\frac{a}{4}\sqrt{2}e$ 극소	$\nearrow$

$f(-x)=a(-x^3+x)e^{x^2}=-a(x^3-x)e^{x^2}=-f(x)$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $\textcircled{1}$ 을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-b$ 가 서로 다른 두 점에서 만나거나 한 점에서만 만나야 하므로 $\rightarrow$ 접하는 점의 좌우에서는 $f(x)+b$ 의 부호가 바뀌지 않는다.

$$-b \leq -\frac{a}{4}\sqrt{2}e \text{ 또는 } -b \geq \frac{a}{4}\sqrt{2}e$$

$$\therefore b \leq -\frac{a}{4}\sqrt{2}e \text{ 또는 } b \geq \frac{a}{4}\sqrt{2}e$$

이때 b 의 값의 범위가 $b \leq -\sqrt{2}e$ 또는 $b \geq \sqrt{2}e$ 이므로

$$a=4$$

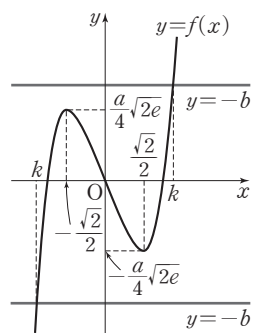
2단계 $\int_1^a f(x)dx$ 의 값 구하기

따라서 $f(x)=4(x^3-x)e^{x^2}$ 이므로

$$\int_1^a f(x)dx = \int_1^4 4(x^3-x)e^{x^2}dx = \int_1^4 4x(x^2-1)e^{x^2}dx$$

$x^2=s$ 로 놓으면 $2x=\frac{ds}{dx}$ 이고 $x=1$ 일 때 $s=1$, $x=4$ 일 때 $s=16$ 이므로

$$\int_1^a f(x)dx = \int_1^4 4x(x^2-1)e^{x^2}dx = \int_1^{16} 2(s-1)e^s ds$$



$$\begin{aligned}
 u(s) &= 2(s-1), \quad v'(s) = e^s \text{이라 하면 } u'(s) = 2, \quad v(s) = e^s \text{이므로} \\
 \int_1^a f(x) dx &= \int_1^{16} 2(s-1)e^s ds \\
 &= \left[2(s-1)e^s \right]_1^{16} - \int_1^{16} 2e^s ds \\
 &= 30e^{16} - \left[2e^s \right]_1^{16} \\
 &= 30e^{16} - (2e^{16} - 2e) \\
 &= 28e^{16} + 2e
 \end{aligned}$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=28, q=2$ 이므로

$$p+q=30$$

08 답 ③

1단계 $\{f(x)\}^2$ 구하기

$$2xf(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) - \{f(x)\}^2 = (x+1)^3 e^x \text{에서}$$

$$2(x+1)f(x)f'(x) - \{f(x)\}^2 = (x+1)^3 e^x$$

$$\frac{2(x+1)f(x)f'(x) - \{f(x)\}^2}{(x+1)^2} = (x+1)e^x$$

$$\left[\frac{\{f(x)\}^2}{x+1} \right]' = (x+1)e^x$$

$$\therefore \frac{\{f(x)\}^2}{x+1} = \int (x+1)e^x dx$$

$$g(x) = x+1, \quad h'(x) = e^x \text{이라 하면 } g'(x) = 1, \quad h(x) = e^x \text{이므로}$$

$$\frac{\{f(x)\}^2}{x+1} = \int (x+1)e^x dx$$

$$= (x+1)e^x - \int e^x dx$$

$$= (x+1)e^x - e^x + C$$

$$= xe^x + C$$

$$\text{이때 } f(0)=1 \text{에서 } \{f(0)\}^2 = C \quad \therefore C=1$$

$$\text{따라서 } \frac{\{f(x)\}^2}{x+1} = xe^x + 1 \text{이므로}$$

$$\{f(x)\}^2 = (x^2+x)e^x + x+1$$

2단계 $\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx$ 의 값 구하기

$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx = \int_0^2 \{(x^2+x)e^x + x+1\} dx$$

$$= \int_0^2 (x^2+x)e^x dx + \int_0^2 (x+1) dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^2 (x^2+x)e^x dx \text{에서 } u_1(x) = x^2+x, \quad v_1'(x) = e^x \text{이라 하면}$$

$$u_1'(x) = 2x+1, \quad v_1(x) = e^x \text{이므로}$$

$$\int_0^2 (x^2+x)e^x dx = \left[(x^2+x)e^x \right]_0^2 - \int_0^2 (2x+1)e^x dx$$

$$= 6e^2 - \int_0^2 (2x+1)e^x dx$$

$$\int_0^2 (2x+1)e^x dx \text{에서 } u_2(x) = 2x+1, \quad v_2'(x) = e^x \text{이라 하면}$$

$$u_2'(x) = 2, \quad v_2(x) = e^x \text{이므로}$$

$$\int_0^2 (x^2+x)e^x dx = 6e^2 - \int_0^2 (2x+1)e^x dx$$

$$= 6e^2 - \left[(2x+1)e^x \right]_0^2 + \int_0^2 2e^x dx$$

$$= 6e^2 - (5e^2 - 1) + \left[2e^x \right]_0^2$$

$$= e^2 + 1 + (2e^2 - 2)$$

$$= 3e^2 - 1$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \{f(x)\}^2 dx &= 3e^2 - 1 + \int_0^2 (x+1) dx \\
 &= 3e^2 - 1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^2 \\
 &= 3e^2 - 1 + 4 = 3e^2 + 3
 \end{aligned}$$

09 답 32

1단계 $\int_1^4 \frac{x^2}{\{g(x)\}^2} dx$ 의 값 구하기

$$\int_1^4 \frac{\{xf(x)\}^2 + x\{g(x)\}^2}{\{f(x)g(x)\}^2} dx$$

$$= \int_1^4 \frac{x^2}{\{g(x)\}^2} dx + \int_1^4 \frac{x}{\{f(x)\}^2} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{의 } \{g(x)\}^2 \{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)\} = x\{f(x)\}^2 \text{에서}$$

$$\frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2} = \frac{x}{\{g(x)\}^2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}' = \frac{x}{\{g(x)\}^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{의 } \int_1^4 \frac{x^2}{\{g(x)\}^2} dx = \int_1^4 \left(x \times \frac{x}{\{g(x)\}^2} \right) dx \text{에서 } u(x) = x,$$

$$v'(x) = \frac{x}{\{g(x)\}^2} \text{라 하면 } u'(x) = 1, \quad \textcircled{2} \text{에서 } v(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \text{이므로}$$

$$\int_1^4 \frac{x^2}{\{g(x)\}^2} dx = \int_1^4 \left(x \times \frac{x}{\{g(x)\}^2} \right) dx$$

$$= \left[x \times \frac{g(x)}{f(x)} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

$$= \frac{4g(4)}{f(4)} - \frac{g(1)}{f(1)} - \int_1^4 \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

$$= \frac{4 \times 4f(4)}{f(4)} - \frac{f(1)}{f(1)} - 4 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= 16 - 1 - 4 = 11$$

2단계 $\int_1^4 \frac{x}{\{f(x)\}^2} dx$ 의 값 구하기

$$\textcircled{1} \text{의 } \int_1^4 \frac{x}{\{f(x)\}^2} dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\{g(x)\}^2} \times \frac{\{g(x)\}^2}{\{f(x)\}^2} \right) dx \text{에서}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = t \text{로 놓으면 } \textcircled{2} \text{에서 } \frac{x}{\{g(x)\}^2} = \frac{dt}{dx} \text{이고 } x=1 \text{일 때}$$

$$t = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{f(1)}{f(1)} = 1, \quad x=4 \text{일 때 } t = \frac{g(4)}{f(4)} = \frac{4f(4)}{f(4)} = 4 \text{이므로}$$

$$\int_1^4 \frac{x}{\{f(x)\}^2} dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\{g(x)\}^2} \times \frac{\{g(x)\}^2}{\{f(x)\}^2} \right) dx$$

$$= \int_1^4 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_1^4 = 21$$

3단계 $\int_1^4 \frac{\{xf(x)\}^2 + x\{g(x)\}^2}{\{f(x)g(x)\}^2} dx$ 의 값 구하기

따라서 ①에서

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{\{xf(x)\}^2 + x\{g(x)\}^2}{\{f(x)g(x)\}^2} dx &= \int_1^4 \frac{x^2}{\{g(x)\}^2} dx + \int_1^4 \frac{x}{\{f(x)\}^2} dx \\
 &= 11 + 21 = 32
 \end{aligned}$$

10 답 10

1단계 $f(x), f'(x), f''(x)$ 사이의 관계식 구하기

$$\textcircled{1} \text{의 } \frac{1}{2}f(x) = \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}f(x) = \int_0^x f(t) (\cos x \cos t + \sin x \sin t) dt$$

$$\frac{1}{2}f(x) = \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f'(x) &= -\sin x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + f(x) \cos^2 x \\ &\quad + \cos x \int_0^x f(t) \sin t \, dt + f(x) \sin^2 x \\ \frac{1}{2}f'(x) &= -\sin x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + \cos x \int_0^x f(t) \sin t \, dt \\ &\quad + (\sin^2 x + \cos^2 x)f(x)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}f'(x) = -\sin x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + \cos x \int_0^x f(t) \sin t \, dt + f(x)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f''(x) &= -\cos x \int_0^x f(t) \cos t \, dt - f(x) \sin x \cos x \\ &\quad - \sin x \int_0^x f(t) \sin t \, dt + f(x) \sin x \cos x + f'(x)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}f''(x) = -\cos x \int_0^x f(t) \cos t \, dt - \sin x \int_0^x f(t) \sin t \, dt + f'(x)$$

$$\frac{1}{2}f''(x) = -\frac{1}{2}f(x) + f'(x) \quad (\because \textcircled{a})$$

$$f''(x) = -f(x) + 2f'(x)$$

$$\therefore f'(x) - f''(x) = f(x) - f'(x)$$

2단계 $f(x) - f''(x)$ 구하기

$\textcircled{a}$ 의 $f(x) > f'(x)$ 에서 $f(x) - f'(x) > 0$ 이므로

$$\frac{f'(x) - f''(x)}{f(x) - f'(x)} = 1$$

$$\text{즉, } \int \frac{f'(x) - f''(x)}{f(x) - f'(x)} dx = \int dx \text{이므로}$$

$$\ln \{f(x) - f'(x)\} = x + C$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\ln \{f(0) - f'(0)\} = C \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

$\textcircled{a}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

또 $f'(0) = -1$ 이므로 $\textcircled{b}$ 에 대입하면

$$C = 0$$

따라서 $\ln \{f(x) - f'(x)\} = x$ 이므로

$$f(x) - f'(x) = e^x \quad \dots\dots \textcircled{c}$$

$$f'(x) - f''(x) = e^x \quad \dots\dots \textcircled{d}$$

$\textcircled{c} + \textcircled{d}$ 을 하면

$$f(x) - f''(x) = 2e^x$$

3단계 $f(\ln 5) - f''(\ln 5)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(\ln 5) - f''(\ln 5) = 2 \times 5 = 10$$

11 답 ④

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$F(1) = \int_0^1 f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$\textcircled{a}$ 에서

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \{f(x) - x\} dx \quad (\because \textcircled{a})$$

$$= \int_0^1 f(x) dx - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = e - 2$$

따라서 $\textcircled{a}$ 에서

$$F(1) = \int_0^1 f(t) dt = e - 2 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\neg. \int_0^1 xF(x) dx = \int_0^1 x\{f(x) - x\} dx \quad (\because \textcircled{b})$$

$$= \int_0^1 \{xf(x) - x^2\} dx$$

$$= \int_0^1 xf(x) dx - \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 xf(x) dx - \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{c}$$

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

$\int_0^1 xf(x) dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = f(x)$ 라 하면 $u'(x) = 1$,

$v(x) = F(x)$ 이므로

$$\int_0^1 xf(x) dx = \left[xF(x) \right]_0^1 - \int_0^1 F(x) dx$$

$$= F(1) - \left(e - \frac{5}{2} \right) \quad (\because \textcircled{b})$$

$$= (e - 2) - \left(e - \frac{5}{2} \right) \quad (\because \textcircled{c})$$

$$= \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{c}$ 에 대입하면

$$\int_0^1 xF(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{d}$$

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\neg. \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \int_0^1 F(x)\{f(x) - x\} dx \quad (\because \textcircled{d})$$

$$= \int_0^1 F(x)f(x) dx - \int_0^1 xF(x) dx$$

$$= \int_0^1 F(x)f(x) dx - \frac{1}{6} \quad (\because \textcircled{d}) \quad \dots\dots \textcircled{e}$$

$\int_0^1 F(x)f(x) dx$ 에서 $F(x) = s$ 로 놓으면 $f(x) = \frac{ds}{dx}$ 이다.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } F(0) = 0$$

즉, $x=0$ 일 때 $s = F(0) = 0$, $x=1$ 일 때 $\textcircled{b}$ 에서 $s = F(1) = e - 2$ 이

므로

$$\int_0^1 F(x)f(x) dx = \int_0^{e-2} s ds$$

$$= \left[\frac{1}{2}s^2 \right]_0^{e-2}$$

$$= \frac{1}{2}(e-2)^2$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + 2$$

이를 $\textcircled{e}$ 에 대입하면

$$\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}e^2 - 2e + 2 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

Step 1 핵심 문제

| 98~99쪽

01 ④ 02 ④ 03 $\frac{e^3}{2}$ 04 ② 05 $\frac{e^2}{2} - e$

06 $\ln 2$ 07 $\frac{2}{3}$ 08 $\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$ 09 ② 10 2

11 ③ 12 ②

01 답 ④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \right)$$

$$\neg. a=2, b=6, \Delta x = \frac{6-2}{n} = \frac{4}{n}, x_k = 2 + \frac{4k}{n} \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) &= \frac{1}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k}{n} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) \times \frac{4}{n} \\ &= \frac{1}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - 2) f(x_k) \Delta x \\ &= \frac{1}{16} \int_2^6 (x-2) f(x) dx \end{aligned}$$

$$\cup. a=0, b=4, \Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}, x_k = \frac{4k}{n} \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) &= \frac{1}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k}{n} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) \times \frac{4}{n} \\ &= \frac{1}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k f(2+x_k) \Delta x \\ &= \frac{1}{16} \int_0^4 x f(2+x) dx \end{aligned}$$

$$\cap. a=1, b=3, \Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, x_k = 1 + \frac{2k}{n} \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - 1) f(2x_k) \Delta x \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 (x-1) f(2x) dx \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.

02 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n^2} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x dx \end{aligned}$$

$$u(x) = x - \frac{\pi}{2}, v'(x) = \cos x \text{라 하면 } u'(x) = 1, v(x) = \sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n^2} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \times (-\pi) - \frac{1}{\pi} \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= -1 - \frac{1}{\pi} \times 0 = -1 \end{aligned}$$

03 답 $\frac{e^3}{2}$

$$x_k = 1 + \frac{2k}{n} \text{이므로 } f(x_k) = e^{1+\frac{2k}{n}}$$

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \times x_k \times f(x_k) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k}{n}\right) e^{1+\frac{2k}{n}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k}{n}\right) e^{1+\frac{2k}{n}} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right) e^{1+\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 x e^x dx \end{aligned}$$

$$u(x) = x, v'(x) = e^x \text{이라 하면 } u'(x) = 1, v(x) = e^x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{1}{4} \int_1^3 x e^x dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x e^x \right]_1^3 - \frac{1}{4} \int_1^3 e^x dx \\ &= \frac{1}{4} (3e^3 - e) - \frac{1}{4} \left[e^x \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4} (3e^3 - e) - \frac{1}{4} (e^3 - e) \\ &= \frac{e^3}{2} \end{aligned}$$

04 답 ②

$$x > 0 \text{에서 } \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{곡선 } y = \frac{1}{x} \text{과 두 직선 } x=1, x=2 \text{ 및}$$

x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln x \right]_1^2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$$\text{곡선 } y = \frac{1}{x} \text{과 두 직선 } x=1, x=a \text{ 및}$$

x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_a^1 = -\ln a$$

이 넓이가 2S이므로

$$-\ln a = 2 \ln 2$$

$$\ln a = -2 \ln 2$$

$$\therefore a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

(ii) $a > 1$ 일 때,

$$\text{곡선 } y = \frac{1}{x} \text{과 두 직선 } x=1, x=a \text{ 및}$$

x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^a = \ln a$$

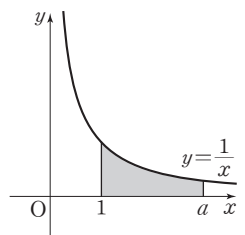
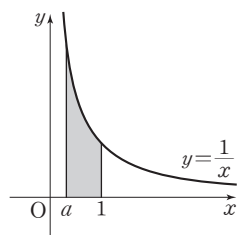
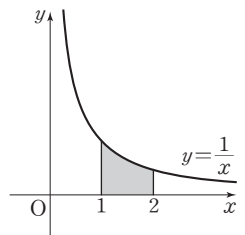
이 넓이가 2S이므로

$$\ln a = 2 \ln 2$$

$$\therefore a = 2^2 = 4$$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$$\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$



05 답 $\frac{e^2}{2} - e$

곡선 $y=a^x$ ($a>1$)과 직선 $y=x$ 가 접하는 점의 x 좌표를 t 라 하자.

$$y=a^x \text{에서 } y'=a^x \ln a$$

이때 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 1
이므로

$$a^t \ln a = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

접점 (t, t) 가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$$t=a^t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$t \ln a = 1, \ln a = \frac{1}{t}$$

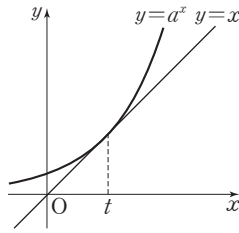
$$\therefore a = e^{\frac{1}{t}} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③을 ②에 대입하면 $t = (e^{\frac{1}{t}})^t = e$

이를 ③에 대입하면 $a = e^{\frac{1}{e}}$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^e (e^{\frac{1}{e}x} - x) dx = \left[e \times e^{\frac{1}{e}x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^e = \frac{e^2}{2} - e$$



06 답 $\ln 2$

$f(x-1) = \frac{1}{x-1}$ 이고 $x>1$ 에서 $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x}$ 이므로

$$A_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\ln(x-1) - \ln x \right]_n^{n+1}$$

$$= \ln n - \ln(n+1) - \ln(n-1) + \ln n$$

$$= \ln \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \quad \cdots \cdots \text{배점 50\%}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n A_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{2^2}{1 \times 3} + \ln \frac{3^2}{2 \times 4} + \ln \frac{4^2}{3 \times 5} + \cdots + \ln \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n}{n+1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \ln 2 \quad \cdots \cdots \text{배점 50\%}$$

07 답 $\frac{2}{3}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{4x-3} = x, 4x-3=x^2$$

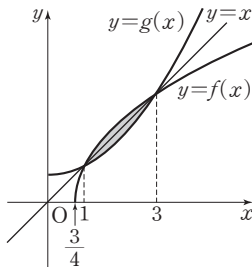
$$x^2-4x+3=0, (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $\sqrt{4x-3} \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_1^3 (\sqrt{4x-3} - x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



08 답 $\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$

$f(x) = x \ln x$ 에서

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$x \geq 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 1$ 에서 증가한다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x \ln x = x, x(\ln x - 1) = 0$$

$$\therefore x = e \quad (\because x \geq 1)$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선

$y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 그림에

서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.

$$\therefore \int_0^e g(x) dx = e^2 - \int_1^e f(x) dx$$

$$= e^2 - \int_1^e x \ln x dx$$

$u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$ 라 하면

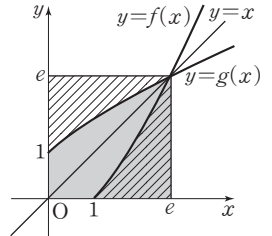
$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{이므로}$$

$$\int_0^e g(x) dx = e^2 - \int_1^e x \ln x dx$$

$$= e^2 - \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2}x dx$$

$$= e^2 - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} + \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$



09 답 ②

점 $(x, 0)$ ($0 \leq x \leq k$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} \right)^2 = \frac{e^x}{e^x+1}$$

따라서 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^k S(x) dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$= \int_0^k \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = \left[\ln(e^x+1) \right]_0^k$$

$$= \ln(e^k+1) - \ln 2 = \ln \frac{e^k+1}{2}$$

$$\text{즉, } \ln \frac{e^k+1}{2} = \ln 7 \text{이므로}$$

$$\frac{e^k+1}{2} = 7, e^k+1=14$$

$$e^k=13 \quad \therefore k=\ln 13$$

10 답 2

두 점 P, Q가 만날 때의 위치가 같으므로 두 점이 만나는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$0 + \int_0^a v_P(t) dt = 0 + \int_0^a v_Q(t) dt$$

$$\int_0^a \cos t dt = \int_0^a \sin t dt$$

$$\left[\sin t \right]_0^a = \left[-\cos t \right]_0^a$$

$$\sin a = -\cos a + 1$$

$$\sin a + \cos a = 1$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos a\right) = 1$$

$$\sqrt{2}\left(\sin a \cos \frac{\pi}{4} + \cos a \sin \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $a > 0$ 에서 $a + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$a + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } a + \frac{\pi}{4} = \frac{9}{4}\pi \text{ 또는 } a + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{4}\pi \dots$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } a = 2\pi \text{ 또는 } a = \frac{5}{2}\pi \dots$$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만날 때의 시각은 $t = \frac{\pi}{2}$ 이다.

시각 $t=0$ 에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |v_P(t)| dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \\ &= \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

시각 $t=0$ 에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |v_Q(t)| dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만날 때까지 두 점이 움직인 거리의 합은

$$1+1=2$$

11 답 ③

$x=t, y=\ln(1-t^2)$ 을 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=-\frac{2t}{1-t^2}$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t = \frac{1}{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2t}{1-t^2}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1-t^2)^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{(1-t^2)^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{(1-t^2)^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2+1}{1-t^2} dt \quad (\because 0 \leq t < 1) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{t^2-1} - 1\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{2}{(t-1)(t+1)} - 1 \right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - 1\right) dt \\ &= \left[-\ln|t-1| + \ln(t+1) - t \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

12 답 ②

$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}e^{2x} - e^{-2x}$$

$0 \leq x \leq \ln a$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^{\ln a} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}e^{2x} - e^{-2x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln a} \sqrt{\frac{1}{16}e^{4x} + \frac{1}{2} + e^{-4x}} dx \\ &= \int_0^{\ln a} \sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x} + e^{-2x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln a} \left(\frac{1}{4}e^{2x} + e^{-2x}\right) dx \quad \left(\because \frac{1}{4}e^{2x} + e^{-2x} > 0\right) \\ &= \left[\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln a} \\ &= \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{2a^2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{2a^2} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0, (a^2+1)(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

step 2 고난도 문제

| 100~103쪽

01 ③	02 ①	03 10	04 ②	05 ③	06 ③
07 ③	08 $\frac{e}{2}$	09 ①	10 $2-\sqrt{2}$		11 ①
12 24	13 $\frac{\pi}{2} + 2 - 2\sqrt{2}$	14 4	15 ⑤	16 6	
17 ①	18 ④	19 ②			

01 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2kn}{k^3 + 3k^2n + n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 \times \frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x^3 + 3x^2 + 1)'}{3(x^3 + 3x^2 + 1)} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln(x^3 + 3x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{\ln 5}{3} \end{aligned}$$

02 답 ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \times n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \\ &= \ln e \times \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \end{aligned}$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=\ln 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{(\ln 2)^2}{2}\end{aligned}$$

03 답 10

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f' \left(\frac{4k}{n} \right) &= -\frac{1}{2} \text{에서} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f' \left(\frac{4k}{n} \right) &= \frac{1}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k}{n} f' \left(\frac{4k}{n} \right) \times \frac{4}{n} \\ &= \frac{1}{16} \int_0^4 x f'(x) dx \\ \text{즉, } \frac{1}{16} \int_0^4 x f'(x) dx &= -\frac{1}{2} \text{이므로 } \int_0^4 x f'(x) dx = -8 \\ u(x) = x, v'(x) = f'(x) \text{라 하면 } u'(x) = 1, v(x) = f(x) \text{이므로} \\ \int_0^4 x f'(x) dx &= \left[x f(x) \right]_0^4 - \int_0^4 f(x) dx \\ &= 4f(4) - \int_0^4 f(x) dx \\ &= -\int_0^4 f(x) dx \quad (\because f(4)=0) \\ \text{즉, } -\int_0^4 f(x) dx &= -8 \text{이므로 } \int_0^4 f(x) dx = 8 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{3k}{n} \right) &= 3 \text{에서} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{3k}{n} \right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{3k}{n} \right) \times \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx \\ \text{즉, } \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx &= 3 \text{이므로 } \int_0^3 f(x) dx = 9 \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ \textcircled{7} - \textcircled{8} \text{을 하면} \\ \int_0^4 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx &= -1 \\ \int_0^4 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx &= -1 \\ \therefore \int_3^4 f(x) dx &= -1 \\ \therefore \int_0^4 |f(x)| dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx \\ &= 9 - (-1) \\ &= 10\end{aligned}$$

04 답 ②

반원의 호 AB를 $2n$ 등분 하였으므로 반원의 중심을 O라 하면
 $\angle AOP_k = \frac{k\pi}{2n}$, $\angle BOP_{2n-k} = \frac{k\pi}{2n}$
 $\therefore \angle P_k O P_{2n-k} = \pi - 2 \times \frac{k\pi}{2n} = \pi - \frac{k\pi}{n}$

삼각형 AOP_k 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

삼각형 $P_k O P_{2n-k}$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \left(\pi - \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{n}$$

사각형 $AP_k P_{2n-k} B$ 의 넓이 S_k 는

$$\begin{aligned}S_k &= 2 \times \triangle AOP_k + \triangle P_k O P_{2n-k} \\ &= \sin \frac{k\pi}{2n} + \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{2n} + \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \times \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \times \frac{\pi}{n} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \times 1 + \frac{1}{2\pi} \times 2 = \frac{3}{\pi}\end{aligned}$$

다른 풀이

반원의 호 AB를 $2n$ 등분 하였으므로 반원의 중심을 O라 하면

$$\angle AOP_n = \frac{\pi}{2}, \angle AOP_k = \frac{k\pi}{2n}, \angle BOP_{2n-k} = \frac{k\pi}{2n}$$

두 점 P_k, P_{2n-k} 는 직선 OP_n 에 대하여 대칭이므로 선분 $P_k P_{2n-k}$ 는 선분 AB에 평행하다.

직선 OP_n 이 선분 $P_k P_{2n-k}$ 와 만나는 점을 H라 하면 직각삼각형 OHP_k 에서

$$\angle HOP_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n} \text{이므로}$$

$$\overline{HP_k} = \overline{OP_k} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n} \right) = \cos \frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore \overline{P_k P_{2n-k}} = 2 \overline{HP_k} = 2 \cos \frac{k\pi}{2n}$$

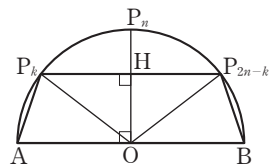
또 $\overline{OH} = \overline{OP_k} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n} \right) = \sin \frac{k\pi}{2n}$ 이므로 사각형 $AP_k P_{2n-k} B$ 의 넓이 S_k 는

$$\begin{aligned}S_k &= \frac{1}{2} \times (\overline{P_k P_{2n-k}} + \overline{AB}) \times \overline{OH} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(2 \cos \frac{k\pi}{2n} + 2 \right) \times \sin \frac{k\pi}{2n} \\ &= \left(\cos \frac{k\pi}{2n} + 1 \right) \sin \frac{k\pi}{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{k\pi}{2n} + 1 \right) \sin \frac{k\pi}{2n} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{k\pi}{2n} + 1 \right) \sin \frac{k\pi}{2n} \times \frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1) \sin x dx\end{aligned}$$

$\cos x + 1 = t$ 로 놓으면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k &= \frac{2}{\pi} \int_2^1 (\cos x + 1) \sin x dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_2^1 t dt = \frac{2}{\pi} \int_1^2 t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^2 = \frac{2}{\pi} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{\pi}\end{aligned}$$



05 답 ③

$A = \int_0^1 2xf(x^2)dx$ 에서 $x^2=t$ 로 놓으면 $2x = \frac{dt}{dx}$ 이고 $x=0$ 일 때

$t=0$, $x=1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$A = \int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래

프는 그림과 같고 두 함수 $y=f(x)$,

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하

여 서로 대칭이므로

$$B = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$$

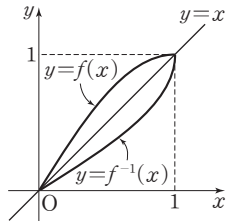
$$= 1 \times 1 - \int_0^1 f(x)dx = 1 - A$$

$$\therefore A+B=1$$

$$C = \int_0^1 \frac{f(x)+f^{-1}(x)}{2}dx = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2} \text{이므로 } C \text{는 직선 } y=x \text{와}$$

x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$\therefore B < C < A$$



06 답 ③

$g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ 는 곡선 $f(x) = x \sin x$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식이다.

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \text{이므로}$$

$$g(x) = (\sin a + a \cos a)(x-a) + a \sin a$$

$$\therefore g(x) = (\sin a + a \cos a)x - a^2 \cos a$$

$$(*) \text{의 } g(0) = 0 \text{에서 } -a^2 \cos a = 0$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < a < 2\pi)$$

(i) $a = \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$$g(x) = x \text{이므로}$$

$$f(x) - g(x) = x \sin x - x = x(\sin x - 1)$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{에서 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

$$f(x) - g(x) \leq 0 \quad \therefore f(x) \leq g(x)$$

이는 (*)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a = \frac{3}{2}\pi$ 일 때,

$$g(x) = -x \text{이므로}$$

$$f(x) - g(x) = x \sin x + x = x(\sin x + 1)$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{에서 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \therefore f(x) \geq g(x)$$

이는 (*)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a = \frac{3}{2}\pi$, $g(x) = -x$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만

나는 점의 x 좌표를 구하면

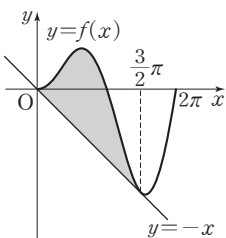
$$x \sin x = -x, \quad x(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{x \sin x - (-x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x \sin x dx + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x dx \quad \dots\dots ㉑$$



$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} x \sin x dx \text{에서 } u(x)=x, \quad v'(x)=\sin x \text{라 하면 } u'(x)=1,$$

$$v(x) = -\cos x \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} x \sin x dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx$$

$$= 0 + \left[\sin x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= -1$$

이를 ㉑에 대입하면

$$S = -1 + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x dx$$

$$= -1 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= -1 + \frac{9}{8}\pi^2$$

idea

07 답 ③

두 곡선 $y=e^{-x+2}-1$, $y=\ln(x+1)$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C 라 하면

$$A+C = \int_0^2 (e^{-x+2}-1)dx \quad \dots\dots ㉑$$

$$B+C = \int_0^2 \ln(x+1)dx \quad \dots\dots ㉒$$

㉑-㉒을 하면

$$A-B = \int_0^2 (e^{-x+2}-1)dx - \int_0^2 \ln(x+1)dx \quad \dots\dots ㉓$$

$$㉓ \text{의 } \int_0^2 (e^{-x+2}-1)dx \text{에서}$$

$$\int_0^2 (e^{-x+2}-1)dx = \left[-e^{-x+2}-x \right]_0^2$$

$$= e^2 - 3$$

$$㉓ \text{의 } \int_0^2 \ln(x+1)dx \text{에서 } u(x)=\ln(x+1), \quad v'(x)=1 \text{이라 하면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad v(x) = x \text{이므로}$$

$$\int_0^2 \ln(x+1)dx = \left[x \ln(x+1) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{x+1}dx$$

$$= 2 \ln 3 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{x+1} + 1 \right) dx$$

$$= 2 \ln 3 - \left[-\ln(x+1) + x \right]_0^2$$

$$= 2 \ln 3 - (-\ln 3 + 2) = 3 \ln 3 - 2$$

따라서 ㉓에서

$$A-B = \int_0^2 (e^{-x+2}-1)dx - \int_0^2 \ln(x+1)dx$$

$$= e^2 - 3 - (3 \ln 3 - 2) = e^2 - 1 - 3 \ln 3$$

08 답 $\frac{e}{2}$

곡선 $y=ke^x$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y=x$ 이다.

$$f(x) = ke^x \text{이라 하면 } f'(x) = ke^x$$

점 P의 x 좌표를 t 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$ke^t = 1 \quad \dots\dots ㉑$$

점 P(t, t)가 곡선 $y=ke^x$ 위의 점이므로

$$t = ke^t \quad \dots\dots ㉒$$

$$㉑, ㉒ \text{에서 } t=1, \quad k = \frac{1}{e}$$

$$f(x) = \frac{1}{e} \times e^x = e^{x-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^{x-1} - x) dx \\ &= \left[e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

직선 l 의 x 절편을 p 라 하면

$$B = A + \frac{1}{2} \times p \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{p}{2}$$

$$2A = B \text{에서}$$

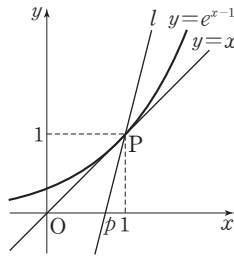
$$2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{p}{2}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

$$\therefore p = 1 - \frac{2}{e}$$

따라서 직선 l 은 두 점 $\left(1 - \frac{2}{e}, 0\right)$, $(1, 1)$ 을 지나므로 직선 l 의 기울기는

$$\frac{1-0}{1-\left(1-\frac{2}{e}\right)} = \frac{e}{2}$$



09 답 ①

$$f(x) = 27 \sin x, g(x) = \tan x + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 27 \cos x, g'(x) = \sec^2 x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=\alpha$ 인 점에서 접하므로

$$f'(\alpha) = g'(\alpha), f(\alpha) = g(\alpha)$$

$$f'(\alpha) = g'(\alpha) \text{에서}$$

$$27 \cos \alpha = \sec^2 \alpha, \cos^3 \alpha = \frac{1}{27}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{3} (\because \cos \alpha > 0)$$

이때 $\sin \alpha \geq 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{2}$$

$$f(\alpha) = g(\alpha) \text{에서}$$

$$27 \sin \alpha = \tan \alpha + a$$

$$\therefore a = 27 \sin \alpha - \tan \alpha$$

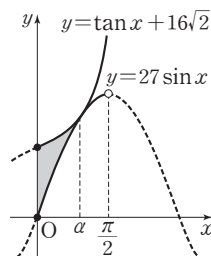
$$= 27 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$0 \leq x \leq \alpha$ 에서 $27 \sin x \leq \tan x + 16\sqrt{2}$ 이므로

두 곡선 $y=27 \sin x$, $y=\tan x + 16\sqrt{2}$ 및 y 축
으로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha (\tan x + 16\sqrt{2} - 27 \sin x) dx \\ &= \int_0^\alpha \left(-\frac{\sin x}{\cos x} + 16\sqrt{2} - 27 \sin x \right) dx \\ &= \left[-\ln(\cos x) + 16\sqrt{2}x + 27 \cos x \right]_0^\alpha \\ &= -\ln(\cos \alpha) + 16\sqrt{2}\alpha + 27 \cos \alpha - 27 \\ &= -\ln \frac{1}{3} + 16\sqrt{2}\alpha + 27 \times \frac{1}{3} - 27 \\ &= \ln 3 - 18 + 16\sqrt{2}\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore S - 16\sqrt{2}\alpha = \ln 3 - 18$$



10 답 $2 - \sqrt{2}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 두 곡선 $y=2 \sin x \cos x$, $y=k \sin x$ 가 만나는 점의 x

좌표값 α 라 하면

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = k \sin \alpha$$

$$\sin \alpha (2 \cos \alpha - k) = 0$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{k}{2} (\because \sin \alpha > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=2 \sin x \cos x$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1$$

두 곡선 $y=2 \sin x \cos x$, $y=k \sin x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라
하면

$$S_2 = \int_0^\alpha (2 \sin x \cos x - k \sin x) dx$$

$$= \int_0^\alpha (\sin 2x - k \sin x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + k \cos x \right]_0^\alpha$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + k \cos \alpha + \frac{1}{2} - k$$

$$= -\frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) + k \cos \alpha + \frac{1}{2} - k$$

$$= -\cos^2 \alpha + k \cos \alpha + \frac{1}{2} - k$$

$$= -\frac{k^2}{4} + k \times \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - k (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{k^2}{4} - k + \frac{1}{2}$$

$$S_1 = 2S_2 \text{이므로}$$

$$1 = 2 \left(\frac{k^2}{4} - k + \frac{1}{2} \right)$$

$$1 = \frac{k^2}{2} - 2k + 2, k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\therefore k = 2 \pm \sqrt{2}$$

그런데 $0 < k < 2$ 이므로 $\rightarrow \textcircled{1}$ 에서 $k = 2 \cos \alpha$ 이고 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$k = 2 - \sqrt{2} \quad 0 < k < 2$$

11 답 ①

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합
에서 증가한다.

점 $A(t, f(t))$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{f'(t)}x + \frac{t}{f'(t)} + f(t)$$

$y=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{f'(t)}x + \frac{t}{f'(t)} + f(t)$$

$$\frac{1}{f'(t)}x = \frac{t}{f'(t)} + f(t)$$

$$\therefore x = t + f(t)f'(t)$$

$$\therefore C(t + f(t)f'(t), 0)$$

$B(t, 0)$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times f(t)f'(t) \times f(t) = \frac{1}{2} \{f(t)\}^2 f'(t)$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \{f(t)\}^2 f'(t) = \frac{1}{2} (e^{3t} - 2e^{2t} + e^t) \text{이므로}$$

$$\{f(t)\}^2 f'(t) = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$$

이때 $[\{f(t)\}^3]' = 3\{f(t)\}^2 f'(t)$ 이므로

$$\frac{1}{3} [\{f(t)\}^3]' = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$$

$$\text{즉, } \int \frac{1}{3} [\{f(t)\}^3]' dt = \int (e^{3t} - 2e^{2t} + e^t) dt \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \{f(t)\}^3 = \frac{1}{3} e^{3t} - e^{2t} + e^t + C$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{3} \{f(0)\}^3 = \frac{1}{3} - 1 + 1 + C$$

$$\text{이때 } f(0)=0 \text{에서 } 0 = \frac{1}{3} + C \quad \therefore C = -\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{3} \{f(t)\}^3 = \frac{1}{3} e^{3t} - e^{2t} + e^t - \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\{f(t)\}^3 = e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1 = (e^t - 1)^3$$

$$\therefore f(t) = e^t - 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^1 = e - 2$$

12 답 24

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 $f(x)$ 는 일대일 대응이고, (가)에서

$f(1) < f(3) < f(7)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $1 \leq x \leq 7$ 에서 증가한다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같고 (가)에서 $f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(7)=7$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(7, 7)$ 이다.

또 (나)에서 $x \neq 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) < 0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 $1 \leq x \leq 7$ 에서 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림

과 같다.

$$A = \int_1^3 f(x) dx, B = \int_1^3 g(x) dx$$

라 하면 (다)에서 $B=3$ 이므로

$$A = \int_1^3 f(x) dx = 3 \times 3 - 1 \times 1 - B = 9 - 1 - 3 = 5$$

$$(다)의 \int_1^7 f(x) dx = 27 \text{에서}$$

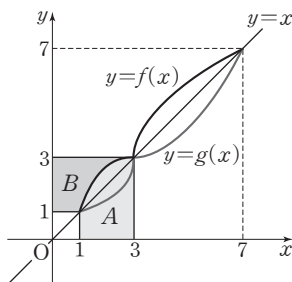
$$\int_1^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx = 27$$

$$5 + \int_3^7 f(x) dx = 27 \quad \therefore \int_3^7 f(x) dx = 22$$

이때 $3 \leq x \leq 7$ 에서 $f(x) \geq x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_3^7 |f(x) - x| dx &= \int_3^7 \{f(x) - x\} dx \\ &= \int_3^7 f(x) dx - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_3^7 \\ &= 22 - 20 = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore 12 \int_3^7 |f(x) - x| dx = 12 \times 2 = 24$$



idea 13 답 $\frac{\pi}{2} + 2 - 2\sqrt{2}$

$$f(\alpha) = t, g(\beta) = t \text{이므로}$$

$$\alpha = f^{-1}(t), \beta = g^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 |\beta - \alpha| dt &= \int_0^1 |g^{-1}(t) - f^{-1}(t)| dt \\ &= \int_0^1 |g^{-1}(y) - f^{-1}(y)| dy \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 그림과 같이 두 곡

선 $x=g^{-1}(y)$, $x=f^{-1}(y)$, 즉 두 곡선

$y=g(x)$, $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=0$,

$y=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

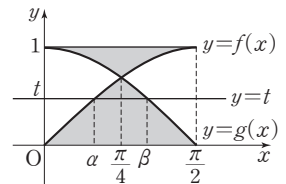
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는

점의 x 좌표를 구하면

$$\sin x = \cos x$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 |\beta - \alpha| dt &= \frac{\pi}{2} \times 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - (\sqrt{2} - 1) - (-1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



14 답 4

곡선 $y=\sqrt{2x}$ 와 직선 $y=ax$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{2x} = ax$$

$$2x = a^2 x^2$$

$$x(a^2 x - 2) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{a^2}$$

점 $(x, 0) \left(0 \leq x \leq \frac{2}{a^2} \right)$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의

넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= (\sqrt{2x} - ax)^2 \\ &= 2x - 2ax\sqrt{2x} + a^2 x^2 \end{aligned}$$

입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{2}{a^2}} S(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{a^2}} (2x - 2ax\sqrt{2x} + a^2 x^2) dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{a^2}} (2x - 2\sqrt{2}ax^{\frac{3}{2}} + a^2 x^2) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{4\sqrt{2}}{5} ax^{\frac{5}{2}} + \frac{a^2}{3} x^3 \right]_0^{\frac{2}{a^2}} \\ &= \frac{4}{15a^4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{15a^4} = 15 \text{이므로}$$

$$a^4 = \frac{4}{15^2}, a^2 = \frac{2}{15} \quad (\because a^2 > 0)$$

$$\therefore 30a^2 = 30 \times \frac{2}{15} = 4$$

15 답 ⑤

구의 중심을 원점으로 하고, 원점을 지나고 구를 자른 평면에 수직인 직선을 x 축, 평행한 직선을 y 축으로 하자.

점 $(x, 0)$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 구를 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{9-x^2}$ 인 원이므로 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \pi(\sqrt{9-x^2})^2 \\ = \pi(9-x^2)$$

두 입체도형 중 크기가 작은 입체도형의 부피를 V_1 이라 하면

$$V_1 = \int_2^3 S(x) dx \\ = \int_2^3 \pi(9-x^2) dx \\ = \pi \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_2^3 \\ = \frac{8}{3}\pi$$

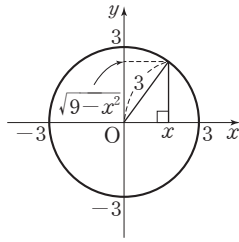
이때 반지름의 길이가 3인 구의 부피는 $\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi$ 이므로 두 입체

도형 중 크기가 큰 입체도형의 부피를 V_2 라 하면

$$V_2 = 36\pi - V_1 \\ = 36\pi - \frac{8}{3}\pi \\ = \frac{100}{3}\pi$$

따라서 두 입체도형의 부피의 차는

$$\frac{100}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{92}{3}\pi$$



16 답 6

입체도형 A를 밑면의 중심을 포함하고 밑면에 수직인 평면으로 자른 단면이 나타내는 포물선의 식을

$y=ax^2$ ($a>0$)이라 하자.

이 단면을 포함하는 평면이 원뿔을 자를 때 모선을 포함하는 직선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기는 4이므로 이 직선의 방정식을 $y=4x+b$ ($b<0$)라 하자.

원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 2, 원뿔의 높이가 8이다.

그릇에 남아 있는 물의 양이 최소이려면 포물선 $y=ax^2$

과 직선 $y=4x+b$ 가 접해야 하므로 이차방정식 $ax^2=4x+b$, 즉

$ax^2-4x-b=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = 4+ab=0$$

$$ab=-4$$

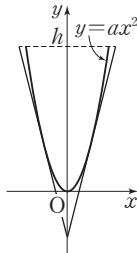
$$\therefore b=-\frac{4}{a}$$

$$\therefore h=8-\frac{4}{a}$$

한편 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 8 = \frac{32}{3}\pi$ 이고 남아 있는 물의 양의 최

솟값이 $\frac{5}{3}\pi$ 이므로 입체도형 A의 부피는

$$\frac{32}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = 9\pi$$



입체도형 A를 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 x 인 원이므로 입체도형 A의 부피는

$$\int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^{8-\frac{4}{a}} \frac{\pi}{a} y dy \quad (\because y=ax^2) \\ = \frac{\pi}{a} \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{8-\frac{4}{a}} \\ = \frac{\pi}{a} \times \frac{1}{2} \left(8-\frac{4}{a} \right)^2 \\ = \frac{\pi}{2a} \left(8-\frac{4}{a} \right)^2$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{2a} \left(8-\frac{4}{a} \right)^2 = 9\pi \text{이므로}$$

$$\left(8-\frac{4}{a} \right)^2 = 18a, \quad 16(2a-1)^2 = 18a^3$$

$$8(4a^2-4a+1) = 9a^3, \quad 9a^3-32a^2+32a-8=0$$

$$(a-2)(9a^2-14a+4)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=\frac{7 \pm \sqrt{13}}{9}$$

이때 $h=8-\frac{4}{a}$ 가 자연수이므로 $a=2$ 일 때,

$$h=8-2=6$$

17 답 ①

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를

α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$, 즉 $x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=t^2$$

이때 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 중

점의 x 좌표는

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{t^2}{2}$$

이 중점은 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$ 위의 점이므로 y 좌표는

$$y=t^2 \times \frac{t^2}{2} - \frac{\ln t}{8} = \frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}$$

따라서 점 P의 위치 (x, y) 는

$$x=\frac{t^2}{2}, \quad y=\frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=t, \quad \frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$$

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_1^e \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t} \right)^2} dt \\ = \int_1^e \sqrt{t^2 + 4t^6 - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{64t^2}} dt \\ = \int_1^e \sqrt{4t^6 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{64t^2}} dt \\ = \int_1^e \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t} \right)^2} dt \\ = \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t} \right) dt \\ = \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8} \ln t \right]_1^e \\ = \frac{e^4}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$$

18 답 ④

(가)에서

$$\int_0^t \sqrt{1+\{g'(x)\}^2} dx = 2 \int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1+\{g'(t)\}^2} = 2\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}$$

$$1+\{g'(t)\}^2 = 4+4\{f'(t)\}^2$$

$$\therefore \{g'(t)\}^2 = 3+4\{f'(t)\}^2$$

$$\therefore \int_1^2 f''(x)\{g'(x)\}^2 dx$$

$$= \int_1^2 f''(x)[3+4\{f'(x)\}^2] dx$$

$$= 3 \int_1^2 f''(x) dx + 4 \int_1^2 f''(x)\{f'(x)\}^2 dx$$

$$f'(x)=s \text{로 놓으면 } f''(x)=\frac{ds}{dx} \text{이고 } x=1 \text{일 때 } s=f'(1)=3, x=2$$

일 때 $s=f'(2)=6$ 이므로

$$\int_1^2 f''(x)\{g'(x)\}^2 dx = 3 \int_1^2 f''(x) dx + 4 \int_1^2 f''(x)\{f'(x)\}^2 dx$$

$$= 3 \int_1^2 f''(x) dx + 4 \int_3^6 s^2 ds$$

$$= 3 \left[f'(x) \right]_1^2 + 4 \left[\frac{1}{3} s^3 \right]_3^6$$

$$= 3\{f'(2)-f'(1)\} + 4 \times 63$$

$$= 3(6-3) + 252$$

$$= 261$$

19 답 ②

$f(x)>0$ 이므로 $f(x)=\{1-f(x)\}\{f'(x)\}^2$ 의 양변을 $f(x)$ 로 나누면

$$1 = \left\{ \frac{1}{f(x)} - 1 \right\} \{f'(x)\}^2$$

$$1 = \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)} - \{f'(x)\}^2$$

$$\therefore 1 + \{f'(x)\}^2 = \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)}$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \quad (\because f(x)>0, f'(x)>0)$$

$$f(x)=t \text{로 놓으면 } f'(x)=\frac{dt}{dx} \text{이고 } x=0 \text{일 때 } t=f(0), x=1 \text{일 때}$$

$t=f(1)$ 이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int_{f(0)}^{f(1)} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \left[2\sqrt{t} \right]_{f(0)}^{f(1)} = 2\sqrt{f(1)} - 2\sqrt{f(0)}$$

$$\text{즉, } 2\sqrt{f(1)} - 2\sqrt{f(0)} = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$\sqrt{f(1)} - \sqrt{f(0)} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x)=\{1-f(x)\}\{f'(x)\}^2$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)=\{1-f(0)\}\{f'(0)\}^2$$

$$f(0)=\{1-f(0)\}\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)^2 \quad (\because f'(0)=\frac{\sqrt{15}}{15})$$

$$15f(0)=1-f(0), 16f(0)=1$$

$$\therefore f(0)=\frac{1}{16}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\sqrt{f(1)} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3}, \sqrt{f(1)} = \frac{11}{12}$$

$$\therefore f(1) = \frac{121}{144}$$

따라서 $p=144, q=121$ 이므로

$$p+q=265$$

step 3 최고난도 문제

| 104~105쪽

01 ④

02 ④

03 $e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$

04 143

05 ①

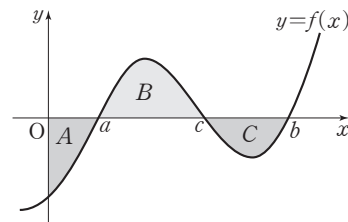
06 15

07 ①

01 답 ④

1단계 $a \leq x \leq b$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이 구하기

곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 세 점의 x 좌표 중 a, b 가 아닌 점의 x 좌표를 c 라 하고, $0 \leq x \leq a$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , $a \leq x \leq c$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B , $c \leq x \leq b$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C 라 하자.



$$\int_a^b f(x) dx = 2 \text{에서 } B - C = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = 8 \text{에서 } B + C = 8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$B=5, C=3$$

2단계 $\int_0^a |f(x)| dx$ 의 값 구하기

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{라 하자.}$$

$F(0)=0$ 이고 $F'(x)=f(x)$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...	c	...	b	...
$F'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$F(x)$	0	\	극소	/	극대	\	극소	/

이때 $x \geq 0$ 에서 방정식 $F(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖고 함수 $y=F(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 함수 $y=F(x)$ 의 그래프는 $x>0$ 에서 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(i) 함수 $y=F(x)$ 의 그래프가 $x=c$ 에서 x 축에 접할 때,

함수 $y=F(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

즉, $F(c)=0$ 이므로

$$\int_0^c f(t) dt = 0$$

$$\int_0^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = 0$$

$$-A+B=0$$

이때 $B=5$ 이므로

$$-A+5=0 \quad \therefore A=5$$

(ii) 함수 $y=F(x)$ 의 그래프가 $x=b$ 에서 x 축에 접할 때,

함수 $y=F(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

즉, $F(b)=0$ 이므로

$$\int_0^b f(t) dt = 0$$

$$\int_0^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$$

$$+ \int_c^b f(x) dx = 0$$

$$-A+B-C=0$$

이때 $B=5, C=3$ 이므로

$$-A+5-3=0 \quad \therefore A=2$$

(i), (ii)에서 $A=2$ 또는 $A=5$

3단계 $\int_1^e \left| \frac{f(\ln x)}{x} \right| dx$ 의 최댓값 구하기

$\int_1^e \left| \frac{f(\ln x)}{x} \right| dx$ 에서 $\ln x=s$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{ds}{dx}$ 이고 $x=1$ 일 때

$s=0, x=e^b$ 일 때 $s=b$ 이므로

$$\int_1^e \left| \frac{f(\ln x)}{x} \right| dx = \int_0^b |f(s)| ds = A+B+C$$

$A=2$ 일 때, $A+B+C=2+5+3=10$

$A=5$ 일 때, $A+B+C=5+5+3=13$

따라서 $\int_1^e \left| \frac{f(\ln x)}{x} \right| dx$ 의 최댓값은 13이다.

02 답 ④

1단계 넓이가 최대일 때, t 의 값 구하기

$f(x) = -xe^x$ 에서

$$f'(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

$$f''(x) = -e^x - (x+1)e^x = -(x+2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1$$

$$f''(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e^2}$ 변곡점	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ 극대	$\searrow$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-te^t) = -(t+1)e^t(x-t)$$

$$\therefore y = -(t+1)e^t x + t^2 e^t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접선의 y 절편을 $g(t)$ 라 하면 $g(t) = t^2 e^t$ 이므로

$$g'(t) = 2te^t + t^2 e^t = t(t+2)e^t$$

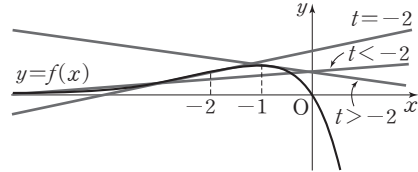
$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=-2 \quad (\because t < 0)$$

$t < 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-2	...	0
$g'(t)$	+	0	-	
$g(t)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

즉, 접선의 y 절편은 $t=-2$ 일 때 최대이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선은 그림과 같고, 곡선 $y=f(x)$ 와 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $t=-2$ 일 때 최대이다.



2단계 넓이의 최댓값 구하기

$t=-2$ 일 때, 접선의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서

$$y = \frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$$

이때 구하는 넓이의 최댓값을 S 라 하면

$$S = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} + xe^x \right) dx$$

$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} \right) dx + \int_{-2}^0 xe^x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\int_{-2}^0 xe^x dx$ 에서 $u(x)=x, v'(x)=e^x$ 이라 하면 $u'(x)=1, v(x)=e^x$

이므로

$$\int_{-2}^0 xe^x dx = [xe^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^x dx$$

$$= \frac{2}{e^2} - [e^x]_{-2}^0$$

$$= \frac{2}{e^2} - \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

$$= \frac{3}{e^2} - 1$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$S = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} \right) dx + \frac{3}{e^2} - 1$$

$$= \left[\frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{4}{e^2}x \right]_{-2}^0 + \frac{3}{e^2} - 1$$

$$= \frac{6}{e^2} + \frac{3}{e^2} - 1$$

$$= \frac{9}{e^2} - 1$$

03 답 $e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$

1단계 S, T 의 식 세우기

점 P 의 x 좌표를 $t (t > 0)$ 라 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$\therefore y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$$

$y=0$ 을 대입하면

$$f'(t)x - tf'(t) + f(t) = 0$$

$$f'(t)x = tf'(t) - f(t)$$

$$\therefore x = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$$

$$\therefore Q\left(t - \frac{f(t)}{f'(t)}, 0\right)$$

이때 $P(t, f(t))$, $R(t, 0)$ 이므로

$$\overline{QR} = \frac{f(t)}{f'(t)}, \overline{PR} = f(t)$$

삼각형 PQR의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{f(t)}{f'(t)} \times f(t) = \frac{\{f(t)\}^2}{2f'(t)}$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축, y 축 및 선분 PR로 둘러싸인 부분의 넓이 T는

$$T = \int_0^t f(x) dx$$

2단계 $f(t)$ 구하기

$T=2S$ 에서

$$\int_0^t f(x) dx = \frac{\{f(t)\}^2}{f'(t)}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f(t) = \frac{2f(t)\{f'(t)\}^2 - \{f(t)\}^2 f''(t)}{\{f'(t)\}^2}$$

$$f(t)\{f'(t)\}^2 = 2f(t)\{f'(t)\}^2 - \{f(t)\}^2 f''(t)$$

$$f(t)\{f'(t)\}^2 = \{f(t)\}^2 f''(t)$$

이때 $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$ 이므로 양변을 $\{f(t)\}^2 f'(t)$ 로 나누면

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{f''(t)}{f'(t)}$$

$$\text{즉, } \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int \frac{f''(t)}{f'(t)} dt \text{이므로}$$

$$\ln f(t) = \ln f'(t) + C_1$$

$$\ln f(t) - \ln f'(t) = C_1$$

$$\ln \frac{f(t)}{f'(t)} = C_1$$

$$\therefore \frac{f(t)}{f'(t)} = e^{C_1}$$

$$\text{이때 } \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{e^{C_1}} \text{이므로}$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int \frac{1}{e^{C_1}} dt$$

$$\ln f(t) = \frac{1}{e^{C_1}} t + C_2$$

이때 $f(0)=1$ 에서

$$C_2 = 0$$

$$\text{따라서 } \ln f(t) = \frac{1}{e^{C_1}} t \text{이므로 } f(1) = e \text{에서}$$

$$1 = \frac{1}{e^{C_1}} \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\text{따라서 } \ln f(t) = t \text{이므로}$$

$$f(t) = e^t$$

3단계 넓이 구하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{f(x)}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$e^x = \frac{1}{e^x}, e^{2x} = 1$$

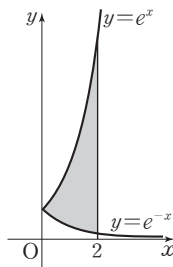
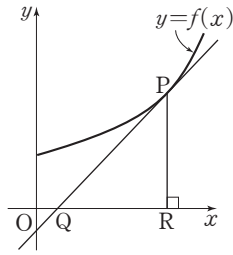
$$\therefore x = 0$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$= [e^x + e^{-x}]_0^2$$

$$= e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$$



04 답 143

1단계 $\int_1^8 xf'(x) dx$ 에 부분적분법 적용하기

$\int_1^8 xf'(x) dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$ 라 하면 $u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$ 이므로

$$\int_1^8 xf'(x) dx = [xf(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 8f(8) - 1 - \int_1^8 f(x) dx \quad (\because \text{㉞}) \quad \dots\dots \text{㉟}$$

2단계 $f(8)$ 의 값 구하기

㉞의 $g(2x)=2f(x)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(2)=2f(1)$$

㉞에서 $f(1)=1$ 이므로

$$g(2)=2$$

$\therefore f(2)=2 \rightarrow$ 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 서로 역함수이다.

㉞의 $g(2x)=2f(x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$g(4)=2f(2) \quad \therefore g(4)=4$$

$$\therefore f(4)=4$$

㉞의 $g(2x)=2f(x)$ 의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$g(8)=2f(4) \quad \therefore g(8)=8$$

$$\therefore f(8)=8$$

3단계 $\int_1^8 f(x) dx$ 의 값 구하기

㉞에서 $g(2x)=2f(x)$ 이고 ㉞에서 $\int_1^2 f(x) dx = \frac{5}{4}$ 이므로

$$\int_1^2 g(2x) dx = \int_1^2 2f(x) dx$$

$$= 2 \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

$\int_1^2 g(2x) dx$ 에서 $2x=t$ 로 놓으면 $2 = \frac{dt}{dx}$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=2$,

$x=2$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\int_1^2 g(2x) dx = \int_2^4 \frac{1}{2} g(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^4 g(t) dt$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \int_2^4 g(t) dt = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\int_2^4 g(t) dt = 5$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$$\int_2^4 f(x) dx + \int_2^4 g(x) dx = 4 \times 4 - 2 \times 2$$

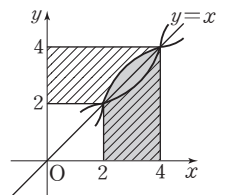
$\dots\dots \text{㊱}$

$$\int_2^4 f(x) dx + 5 = 12$$

$$\therefore \int_2^4 f(x) dx = 7$$

㉞에서 $g(2x)=2f(x)$ 이고 $\int_2^4 f(x) dx = 7$ 이므로

$$\int_2^4 g(2x) dx = \int_2^4 2f(x) dx = 2 \int_2^4 f(x) dx = 2 \times 7 = 14$$



$\int_2^4 g(2x) dx$ 에서 $2x=t$ 로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$ 이고 $x=2$ 일 때 $t=4$,

$x=4$ 일 때 $t=8$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_2^4 g(2x) dx &= \int_4^8 \frac{1}{2} g(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_4^8 g(t) dt\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2} \int_4^8 g(t) dt = 14$ 이므로

$$\int_4^8 g(t) dt = 28$$

㉞과 같은 방법으로 하면

$$\int_4^8 f(x) dx + \int_4^8 g(x) dx = 8 \times 8 - 4 \times 4$$

$$\int_4^8 f(x) dx + 28 = 48$$

$$\therefore \int_4^8 f(x) dx = 20$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^8 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx \\ &= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}\end{aligned}$$

4단계 $\int_1^8 xf'(x) dx$ 의 값 구하기

따라서 ㉞에서

$$\begin{aligned}\int_1^8 xf'(x) dx &= 8f(8) - 1 - \int_1^8 f(x) dx \\ &= 8 \times 8 - 1 - \frac{113}{4} \\ &= \frac{139}{4}\end{aligned}$$

5단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=4$, $q=139$ 이므로

$$p+q=143$$

05 답 ①

1단계 $h'(t)$ 구하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\sin x = \cos x$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점

A의 x 좌표를 $\alpha(t)$ 라 하면

$$\sin \alpha(t) = t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점

B의 x 좌표를 $\beta(t)$ 라 하면 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 는

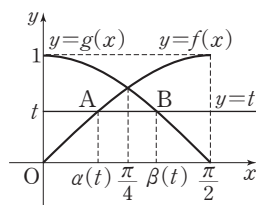
직선 $x=\frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\alpha(t) + \beta(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \beta(t) = \frac{\pi}{2} - \alpha(t)$$

선분 AB의 길이 $h(t)$ 는

$$\begin{aligned}h(t) &= |\alpha(t) - \beta(t)| \\ &= \left| \alpha(t) - \left\{ \frac{\pi}{2} - \alpha(t) \right\} \right| \\ &= \left| 2\alpha(t) - \frac{\pi}{2} \right|\end{aligned}$$



$$\therefore h'(t) = |2\alpha'(t)|$$

㉞의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\alpha'(t) \cos \alpha(t) = 1$$

$$\therefore \alpha'(t) = \frac{1}{\cos \alpha(t)}$$

따라서 $h'(t) = |2\alpha'(t)| = \left| \frac{2}{\cos \alpha(t)} \right|$ 이므로

$$h'(t) = -\frac{2}{\cos \alpha(t)} \quad \text{또는} \quad h'(t) = \frac{2}{\cos \alpha(t)}$$

2단계 k_1, k_2 의 값 구하기

이차방정식 $3x^2 - (12 - 4\sqrt{3})x - 16\sqrt{3} = 0$ 에서

$$(3x + 4\sqrt{3})(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{또는} \quad x = 4$$

이 두 근이 $h'(k_1)$, $h'(k_2)$ 이고 $h'(k_1) < h'(k_2)$, $\cos \alpha(t) > 0$ 이므로

$$-\frac{2}{\cos \alpha(k_1)} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{2}{\cos \alpha(k_2)} = 4$$

$$-\frac{2}{\cos \alpha(k_1)} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{에서}$$

$$\cos \alpha(k_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha(k_1) = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < \alpha(t) < \frac{\pi}{2} \right)$$

㉞에서 $\sin \alpha(k_1) = k_1$ 이므로

$$k_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\cos \alpha(k_2)} = 4 \quad \text{에서}$$

$$\cos \alpha(k_2) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha(k_2) = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < \alpha(t) < \frac{\pi}{2} \right)$$

㉞에서 $\sin \alpha(k_2) = k_2$ 이므로

$$k_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3단계 $\sqrt{3}S_1 + S_2$ 의 값 구하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 직

선 $x=\frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$$S_1 = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= 2 \left[-\cos x - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{12}$$

$$S_2 = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

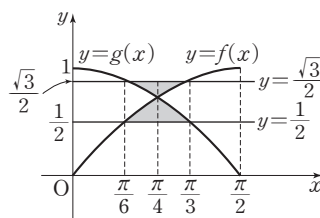
$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

$$\therefore \sqrt{3}S_1 + S_2 = \sqrt{3} \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} \right) + \left(-\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi \right)$$

$$= -\sqrt{6} + 3 - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \left(-\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi \right)$$

$$= 4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}$$



06 답 15

1단계 $f'(t)$ 구하기

$$x=2\ln t, y=f(t) \text{를 각각 } t \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}, \frac{dy}{dt}=f'(t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P의 위치가 점 $(0, f(1))$ 일 때의 시각은 $t=1$
 시각 $t=1$ 에서 t 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$s=\int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$=\int_1^t \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \{f'(t)\}^2} dt$$

$$=\int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} dt \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 에서

$$2t-s=\sqrt{s^2+4}$$

$$(2t-s)^2=s^2+4$$

$$4t^2-4ts+s^2=s^2+4$$

$$4ts=4t^2-4 \quad \therefore s=t-\frac{1}{t}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} dt = t - \frac{1}{t}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} = 1 + \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2 = 1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}$$

$$\{f'(t)\}^2 = 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$\therefore f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \text{ 또는 } f'(t) = -1 + \frac{1}{t^2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 에서 $t=2$ 일 때 점 P의 속도는 $(1, f'(2))$ 이므로

$$f'(2) = \frac{3}{4}$$

$\textcircled{3}$ 에서 이를 만족시키려면

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

2단계 60a의 값 구하기

$\textcircled{4}$ 에서 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2}{t^3}, \frac{d^2y}{dt^2} = f''(t)$$

$$\textcircled{4} \text{에서 } f''(t) = \frac{2}{t^3} \text{이므로 시각 } t=2 \text{일 때 점 P의 가속도는 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

따라서 $a = \frac{1}{4}$ 이므로

$$60a = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

07 답 ①

1단계 점 P가 원과 만나는 시각 구하기

$t=0$ 일 때 점 P의 위치는 $(0, 0)$

점 P가 원 C와 만날 때, 원점에서 점 P까지의 거리가 반지름의 길이 $\frac{3}{4}$

과 같으므로

$$\sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{t^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{3}{4} \quad \therefore t = \frac{3}{4} \quad (\because t \geq 0)$$

2단계 움직인 거리 구하기

$x=t \cos t, y=t \sin t$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - t \sin t, \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t$$

따라서 점 P가 출발 후 시각 $t = \frac{3}{4}$ 까지 움직인 거리를 l 이라 하면

$$l = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{1+t^2} dt$$

$t = \tan \theta \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면 $1 = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$ 이고 $t=0$ 일 때 $\theta=0$ 이

므로 $t = \frac{3}{4}$ 일 때 $\theta = \alpha \left(\tan \alpha = \frac{3}{4}\right)$ 라 하면

$$l = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+\tan^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\alpha} \sqrt{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\alpha} \sec^3 \theta d\theta$$

$\int_0^{\alpha} \sec^3 \theta d\theta$ 에서 $u(\theta) = \sec \theta, v'(\theta) = \sec^2 \theta$ 라 하면

$u'(\theta) = \sec \theta \tan \theta, v(\theta) = \tan \theta$ 이므로

$$\int_0^{\alpha} \sec^3 \theta d\theta = \left[\sec \theta \tan \theta \right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} \sec \theta \tan^2 \theta d\theta$$

$$= \sec \alpha \tan \alpha - \int_0^{\alpha} \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= \sec \alpha \tan \alpha - \int_0^{\alpha} \sec^3 \theta d\theta + \int_0^{\alpha} \sec \theta d\theta$$

$$2 \int_0^{\alpha} \sec^3 \theta d\theta = \sec \alpha \tan \alpha + \int_0^{\alpha} \sec \theta d\theta$$

$$\therefore l = \int_0^{\alpha} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \alpha \tan \alpha + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \sec \theta d\theta \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$(\sec \theta + \tan \theta)' = \sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta = \sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)$ 이므로

$$\int_0^{\alpha} \sec \theta d\theta = \int_0^{\alpha} \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

$$= \left[\ln (\sec \theta + \tan \theta) \right]_0^{\alpha}$$

$$= \ln (\sec \alpha + \tan \alpha)$$

이를 $\textcircled{5}$ 에 대입하면

$$l = \frac{1}{2} \sec \alpha \tan \alpha + \frac{1}{2} \ln (\sec \alpha + \tan \alpha) \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

이때 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ 이므로

$$\sec \alpha = \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$$

이를 $\textcircled{6}$ 에 대입하면

$$l = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{32} + \frac{1}{2} \ln 2$$

3단계 $32(a+b)$ 의 값 구하기

따라서 $a = \frac{15}{32}, b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$32(a+b) = 32\left(\frac{15}{32} + \frac{1}{2}\right) = 31$$

01 ③	02 ②	03 ③	04 15	05 ③	06 ④
07 ⑤	08 11	09 ④	10 ③	11 35	12 278
13 15					

01 답 ③

$x > 0$ 일 때, (가)에서 $g'(x) = f'(x) = \frac{(\ln x)^2 + 1}{x}$ 이므로

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int \frac{(\ln x)^2 + 1}{x} dx$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$g(x) = \int \frac{(\ln x)^2 + 1}{x} dx = \int (t^2 + 1) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + t + C_1 = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + \ln x + C_1$$

$x < 0$ 일 때, (가)에서 $g'(x) = f'(-x) = \frac{\{\ln(-x)\}^2 + 1}{-x}$ 이므로

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int \frac{\{\ln(-x)\}^2 + 1}{-x} dx$$

$\ln(-x) = s$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{ds}{dx}$ 이므로

$$g(x) = \int \frac{\{\ln(-x)\}^2 + 1}{-x} dx = -\int (s^2 + 1) ds$$

$$= -\frac{1}{3}s^3 - s + C_2 = -\frac{1}{3}\{\ln(-x)\}^3 - \ln(-x) + C_2$$

(나)의 $g(e^3) + g(-e^3) = 6$ 에서

$$(9 + 3 + C_1) + (-9 - 3 + C_2) = 6$$

$$\therefore C_1 + C_2 = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

(나)의 $g(e^3) - g(-e^3) = 6$ 에서

$$(9 + 3 + C_1) - (-9 - 3 + C_2) = 6$$

$$\therefore C_1 - C_2 = -18 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $C_1 = -6$, $C_2 = 12$

$$\text{따라서 } g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\{\ln(-x)\}^3 - \ln(-x) + 12 & (x < 0) \\ \frac{1}{3}(\ln x)^3 + \ln x - 6 & (x > 0) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$g(-e) + g(1) = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 12\right) + (-6) = \frac{14}{3}$$

02 답 ②

$$\frac{f(x) - xf'(x)}{\{f(x)\}^2} = xe^{-x} \text{에서}$$

$$\left\{\frac{x}{f(x)}\right\}' = xe^{-x} \quad \therefore \frac{x}{f(x)} = \int xe^{-x} dx$$

$u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$ 이라 하면 $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$ 이므로

$$\frac{x}{f(x)} = \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

이때 $f(1) = -\frac{e}{2}$ 에서

$$\frac{1}{f(1)} = -\frac{2}{e} + C, \quad -\frac{2}{e} = -\frac{2}{e} + C \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore \frac{x}{f(x)} = -(x+1)e^{-x}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\frac{2}{f(2)} = -\frac{3}{e^2} \quad \therefore f(2) = -\frac{2e^2}{3}$$

03 답 ③

$$3f(x) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x^2} \quad \dots\dots ㉠$$

양변에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) + xf(x) = \frac{1}{x} + x^2$$

$x > 0$ 이므로 양변을 $3x$ 로 나누면

$$\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}f(x) = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3}x \quad \dots\dots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$\frac{8}{3}f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x^2} \quad \therefore f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4x^2}$$

$$\therefore \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

04 답 15

$$\int_2^7 f'(x) dx = 6 \text{에서}$$

$$f(7) - f(2) = 6$$

이때 $f(x+2) = f(x)$ 이므로 $f(7) = f(5) = f(3) = f(1)$

$$\therefore f(1) - f(2) = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\int_1^2 f(f(x))f'(x) dx = -10 \text{에서 } f(x) = t \text{로 놓으면 } f'(x) = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$x=1$ 일 때 $t=f(1)$, $x=2$ 일 때 $t=f(2)$ 이므로 $f(1)=k$ 라 하면 ㉠에서 $f(2)=k-6$

$$\therefore \int_1^2 f(f(x))f'(x) dx$$

$$= \int_k^{k-6} f(t) dt = -\int_{k-6}^k f(t) dt$$

$$= -\int_{k-6}^{k-4} f(t) dt - \int_{k-4}^{k-2} f(t) dt - \int_{k-2}^k f(t) dt$$

$$= -\int_0^2 f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt$$

$$= -3 \int_0^2 f(t) dt$$

$$\text{즉, } -3 \int_0^2 f(t) dt = -10 \text{이므로}$$

$$\int_0^2 f(t) dt = \frac{10}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉢ \text{에서 } \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \frac{10}{3} \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{10}{3} \quad (\because f(x+2)=f(x))$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{10}{3} \quad (\because ㉢)$$

$$2 \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-1}^8 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\
 &\quad + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 f(x) dx + 4 \int_0^2 f(x) dx \\
 &= \frac{5}{3} + 4 \times \frac{10}{3} = 15
 \end{aligned}$$

05 답 ③

$\overline{OP}=1$ 이므로 직각삼각형 POH에서

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\angle HPO = \frac{\pi}{2} - \theta, \angle PQH = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\angle QHP = \theta$$

직각삼각형 PQH에서

$$\overline{QH} = \overline{PH} \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$$

$$\overline{PQ} = \overline{PH} \sin \theta = \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{QH} \times \overline{PQ} \\
 &= \frac{1}{2} \times \sin \theta \cos \theta \times \sin^2 \theta \\
 &= \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2f(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$$

$\sin \theta = t$ 로 놓으면 $\cos \theta = \frac{dt}{d\theta}$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $t = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때

$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2f(\theta) d\theta &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3 dt \\
 &= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{64}
 \end{aligned}$$

06 답 ④

(ㄴ)의 $\frac{1}{f(x)} + 2 \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$ 에서

$$\frac{1}{f(x)} + 2x \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x t f(t) dt = 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} + 2 \int_0^x f(t) dt + 2xf(x) - 2xf(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} = 2 \int_0^x f(t) dt$$

$$\therefore f'(x) = 2\{f(x)\}^2 \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots ①$$

ㄱ. (ㄴ)에서 $f(x) > 0$ 이므로 $x < 0$ 에서 $\int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt < 0$

이고, $x > 0$ 에서 $\int_0^x f(t) dt > 0$ 이다.

따라서 $x < 0$ 에서 $f'(x) < 0$, $x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하지 않는다.

ㄴ. ①에서 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 $f(0)$ 을 갖는다.

(ㄴ)의 $\frac{1}{f(x)} + 2 \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{f(0)} = 1$$

$$\therefore f(0) = 1 \quad \dots\dots ㉔$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 극솟값 1을 갖는다.

$$\text{ㄷ. } F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots ㉕$$

㉕의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

①의 $f'(x) = 2\{f(x)\}^2 \int_0^x f(t) dt$ 에서

$$f'(x) = 2\{f(x)\}^2 F(x)$$

$f(x) > 0$ 이므로 양변을 $f(x)$ 로 나누면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2f(x)F(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2F'(x)F(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = [F(x)]^2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \{F(x)\}^2 &= \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\
 &= \ln f(x) + C
 \end{aligned}$$

㉕의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $F(0) = 0$ 이므로

$$\{F(0)\}^2 = \ln f(0) + C$$

$$0 = \ln 1 + C \quad (\because ㉔)$$

$$\therefore C = 0$$

따라서 $\{F(x)\}^2 = \ln f(x)$ 이므로

$$f(x) = e^{\{F(x)\}^2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

07 답 ⑤

ㄱ. $f'(x) = \frac{xf(x) - \{f(x)\}^3}{x^2}$ 의 양변에 x 대신 $g(x)$ 를 대입하면

$$f'(g(x)) = \frac{g(x)f(g(x)) - \{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^2}$$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 역함수 관계이면 $f(g(x)) = x$ 이고, 역함수

의 미분법에 의하여 $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$ 이므로

$$\frac{1}{g'(x)} = \frac{g(x) - x^3}{\{g(x)\}^2}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{\{g(x)\}^2}{xg(x) - x^3} \quad \dots\dots ①$$

$$f(-2) = 1 \text{에서 } g(1) = -2 \text{이므로}$$

$$g'(1) = \frac{\{g(1)\}^2}{g(1) - 1}$$

$$= \frac{4}{-2 - 1} = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄴ. } \textcircled{1} \text{의 } g'(x) &= \frac{\{g(x)\}^2}{xg(x)-x^3} \text{에서} \\
g'(x)\{xg(x)-x^3\} &= \{g(x)\}^2 \\
x^3g'(x) &= xg'(x)g(x) - \{g(x)\}^2 \\
g'(x) &= \frac{xg'(x)g(x) - \{g(x)\}^2}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x} \times \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} \\
\therefore g(x) &= \int g'(x) dx = \int \left\{ \frac{g(x)}{x} \times \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} \right\} dx \\
\frac{g(x)}{x} &= t \text{로 놓으면 } \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} = \frac{dt}{dx} \text{이므로} \\
g(x) &= \int \left\{ \frac{g(x)}{x} \times \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} \right\} dx \\
&= \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{g(x)}{x} \right\}^2 + C \\
\text{이때 } g(1) &= -2 \text{이므로} \\
g(1) &= \frac{1}{2} \{g(1)\}^2 + C \\
-2 &= 2 + C \quad \therefore C = -4 \\
\therefore g(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{g(x)}{x} \right\}^2 - 4 = \frac{\{g(x)\}^2}{2x^2} - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
\text{ㄷ. } f(-3) &= k \text{라 하면 } g(k) = -3 \\
\textcircled{1} \text{의 } g(x) &= \frac{\{g(x)\}^2}{2x^2} - 4 \text{의 양변에 } x=k \text{를 대입하면} \\
g(k) &= \frac{\{g(k)\}^2}{2k^2} - 4 \\
-3 &= \frac{9}{2k^2} - 4 \\
\frac{9}{2k^2} &= 1 \quad \therefore k^2 = \frac{9}{2} \\
\therefore \{f(-3)\}^2 &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 11

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \{\pi f(x)\}}{x} = -\pi$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \tan \{\pi f(x)\} = 0$ 에서

$$\tan \{\pi f(0)\} = 0$$

$$\therefore f(0) = n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^2 + ax + n \text{ (} a \text{는 상수)이라 하자.}$$

$$h(x) = \tan \{\pi f(x)\} \text{라 하면 } h(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \{\pi f(x)\}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

$$\therefore h'(0) = -\pi$$

$$h'(x) = \sec^2 \{\pi f(x)\} \times \pi f'(x) \text{이고 } f'(x) = 2x + a \text{이므로}$$

$$h'(0) = \sec^2 n\pi \times a\pi$$

$$= \frac{1}{\cos^2 n\pi} \times a\pi = a\pi \quad (\because \cos n\pi = \pm 1)$$

$$\text{즉, } a\pi = -\pi \text{이므로}$$

$$a = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + n$$

$0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x) = f(x) = x^2 - x + n$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 xg(x) dx \\
&= \int_0^1 xg(x) dx + \int_1^2 xg(x) dx + \int_2^3 xg(x) dx + \int_3^4 xg(x) dx \\
&= \int_0^1 xg(x) dx + \int_0^1 (x+1)g(x+1) dx + \int_0^1 (x+2)g(x+2) dx \\
&\quad + \int_0^1 (x+3)g(x+3) dx \\
&= \int_0^1 xg(x) dx + \int_0^1 (x+1)g(x) dx + \int_0^1 (x+2)g(x) dx \\
&\quad + \int_0^1 (x+3)g(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (4x+6)g(x) dx \\
&= \int_0^1 (4x+6)(x^2-x+n) dx \\
&= \int_0^1 \{4x^3+2x^2+(4n-6)x+6n\} dx \\
&= \left[x^4 + \frac{2}{3}x^3 + (2n-3)x^2 + 6nx \right]_0^1 \\
&= 8n - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$36 < \int_0^4 xg(x) dx < 40 \text{에서}$$

$$36 < 8n - \frac{4}{3} < 40, \quad \frac{112}{3} < 8n < \frac{124}{3}$$

$$\therefore \frac{14}{3} < n < \frac{31}{6}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=5$

따라서 $f(x) = x^2 - x + 5$ 이므로

$$f(3) = 9 - 3 + 5 = 11$$

09 답 ④

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$F(0) = 0$$

ㄱ. ㄴ에서

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) dx &= \int_0^1 \{f(x)F(x) + f(x)\} dx \quad (\because \textcircled{1}) \\
&= \int_0^1 f(x)\{F(x)+1\} dx
\end{aligned}$$

$$F(x) = s \text{로 놓으면 } F'(x) = f(x) = \frac{ds}{dx} \text{이고 } x=0 \text{일 때}$$

$$s = F(0) = 0, \quad x=1 \text{일 때 } s = F(1) \text{이므로 } F(1) = k \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) dx &= \int_0^1 f(x)\{F(x)+1\} dx = \int_0^k (s+1) ds \\
&= \left[\frac{1}{2}s^2 + s \right]_0^k = \frac{1}{2}k^2 + k
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}k^2 + k = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$(k+1)^2 = 0 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore F(1) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄴ. } \int_0^1 xf(x)dx \text{에서 } u(x)=x, v'(x)=f(x) \text{라 하면 } u'(x)=1, \\
 v(x)=F(x) \text{이므로} \\
 \int_0^1 xf(x)dx = \left[xF(x) \right]_0^1 - \int_0^1 F(x)dx \\
 = F(1) - \left(-\frac{1}{2} \right) (\because \text{ㄹ}) \\
 = -1 - \left(-\frac{1}{2} \right) (\because \text{ㄷ}) \\
 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } \textcircled{ㄹ} \text{의 } F(x)=f(x)F(x)+f(x) \text{에서} \\
 \{F(x)\}^2=f(x)\{F(x)\}^2+f(x)F(x) \\
 \therefore \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \int_0^1 [f(x)\{F(x)\}^2+f(x)F(x)] dx \\
 = \int_0^1 f(x)[\{F(x)\}^2+F(x)] dx \\
 F(x)=s \text{로 놓으면 } F'(x)=f(x)=\frac{ds}{dx} \text{이고 } x=0 \text{일 때 } s=0, \\
 x=1 \text{일 때 } \textcircled{ㄷ} \text{에서 } s=-1 \text{이므로} \\
 \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \int_0^1 f(x)[\{F(x)\}^2+F(x)] dx \\
 = \int_0^{-1} (s^2+s) ds = \left[\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 \right]_0^{-1} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 답 ③

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

점 $A(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$\therefore y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$$

$$\therefore D(0, -tf'(t) + f(t))$$

$$B(t, 0), C(0, f(t)) \text{이므로}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times f(t) \times t = \frac{1}{2} tf(t)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \{-tf'(t)\} \times t = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

$$\therefore 2S_1 - S_2 = tf(t) + \frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

$$\text{즉, } tf(t) + \frac{1}{2} t^2 f'(t) = -\frac{1}{2} t^2 e^{-t} + te^{-t} + t \text{이므로}$$

$$2tf(t) + t^2 f'(t) = -t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2t$$

$$\{t^2 f(t)\}' = -t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2t$$

$$\therefore t^2 f(t) = \int (-t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2t) dt$$

$$= -\int t^2 e^{-t} dt + \int 2te^{-t} dt + \int 2t dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

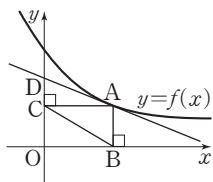
$$\int t^2 e^{-t} dt \text{에서 } u(t)=t^2, v'(t)=e^{-t} \text{이라 하면 } u'(t)=2t, v(t)=-e^{-t}$$

이므로

$$\int t^2 e^{-t} dt = -t^2 e^{-t} + \int 2te^{-t} dt$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 t^2 f(t) &= t^2 e^{-t} - \int 2te^{-t} dt + \int 2te^{-t} dt + \int 2t dt \\
 &= t^2 e^{-t} + \int 2t dt = t^2 e^{-t} + t^2 + C
 \end{aligned}$$



이때 $f(1) = \frac{1}{e} + 1$ 에서

$$f(1) = \frac{1}{e} + 1 + C, \frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e} + 1 + C \quad \therefore C=0$$

즉, $t^2 f(t) = t^2 e^{-t} + t^2$ 이고 $t > 0$ 이므로

$$f(t) = e^{-t} + 1$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 (e^{-x} + 1) dx = \left[-e^{-x} + x \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{e}$$

11 답 35

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 $f(x)$ 는 일대일대응이고, ㄱ에서

$f(2) < f(4) < f(8)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같고 ㄱ에서 $f(2)=2,$

$f(4)=4, f(8)=8$ 이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(2, 2), (4, 4), (8, 8)$ 이다.

또 ㄴ에서 $2 < a < 4, 4 < b < 8$ 인 임의의 실수 a, b 에 대하여

$f''(a) \times f''(b) < 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=4$ 의 좌우에서 오목, 볼록이 바뀐다.

직선 $y=x$ 와 x 축 및 두 직선 $x=2, x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 = 6$$

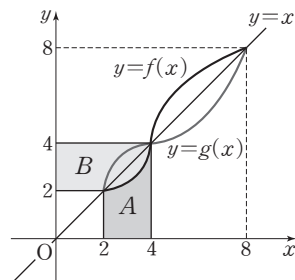
ㄹ의 $\int_2^4 g(x) dx = 7$ 에서 $\int_2^4 g(x) dx > 6$ 이므로 $2 < x < 4$ 에서 함수

$y=g(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 $2 < x < 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하고,

$4 < x < 8$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 $2 \leq x \leq 8$ 에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$A = \int_2^4 f(x) dx, B = \int_2^4 g(x) dx \text{라 하면 ㄹ에서 } B=7 \text{이므로}$$

$$A = \int_2^4 f(x) dx = 4 \times 4 - 2 \times 2 - B$$

$$= 16 - 4 - 7 = 5$$

$4 \leq x \leq 8$ 에서 $f(x) \geq x$ 이므로 ㄹ의 $\int_4^8 |f(x) - x| dx = 6$ 에서

$$\int_4^8 \{f(x) - x\} dx = 6$$

$$\int_4^8 f(x) dx - \int_4^8 x dx = 6$$

$$\therefore \int_4^8 f(x) dx = 6 + \int_4^8 x dx = 6 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_4^8$$

$$= 6 + 24 = 30$$

$$\therefore \int_2^8 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx$$

$$= 5 + 30 = 35$$

12 **답** 278

(㉗)의 $f(8)=8$ 에서

$$g(8)=8$$

$\int_1^8 xg'(x)dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=g'(x)$ 라 하면 $u'(x)=1$,

$v(x)=g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^8 xg'(x)dx &= \left[xg(x) \right]_1^8 - \int_1^8 g(x)dx \\ &= 8g(8) - g(1) - \int_1^8 g(x)dx \\ &= 64 - g(1) - \int_1^8 g(x)dx \quad \dots\dots \textcircled{㉘}\end{aligned}$$

(㉘)의 $g\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}f(x)$ 의 양변에 $x=8$ 을 대입하면

$$g(4)=\frac{1}{2}f(8) \quad \therefore g(4)=4$$

$$\therefore f(4)=4$$

(㉘)의 $g\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}f(x)$ 의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$g(2)=\frac{1}{2}f(4) \quad \therefore g(2)=2$$

$$\therefore f(2)=2$$

(㉘)의 $g\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}f(x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$g(1)=\frac{1}{2}f(2) \quad \therefore g(1)=1$$

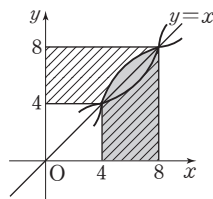
$$\therefore f(1)=1$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$$\int_4^8 f(x)dx + \int_4^8 g(x)dx = 8 \times 8 - 4 \times 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉙}$$



$$\int_4^8 f(x)dx + 20 = 48 \quad (\because \textcircled{㉗})$$

$$\therefore \int_4^8 f(x)dx = 28$$

(㉘)의 $g\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}f(x)$ 에서 $f(x)=2g\left(\frac{1}{2}x\right)$ 이므로

$$\int_4^8 f(x)dx = \int_4^8 2g\left(\frac{1}{2}x\right)dx$$

$\frac{1}{2}x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$ 이고 $x=4$ 일 때 $t=2$, $x=8$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_4^8 f(x)dx &= \int_4^8 2g\left(\frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \int_2^4 4g(t)dt \\ &= 4 \int_2^4 g(t)dt\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4 \int_2^4 g(t)dt = 28 \text{이므로}$$

$$\int_2^4 g(t)dt = 7$$

이때 ㉘와 같은 방법으로 하면

$$\int_2^4 f(x)dx + \int_2^4 g(x)dx = 4 \times 4 - 2 \times 2$$

$$\int_2^4 f(x)dx + 7 = 12 \quad \therefore \int_2^4 f(x)dx = 5$$

$$\text{(㉘)에서 } \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 2g\left(\frac{1}{2}x\right)dx$$

$\frac{1}{2}x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$ 이고 $x=2$ 일 때 $t=1$, $x=4$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &= \int_2^4 2g\left(\frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \int_1^2 4g(t)dt = 4 \int_1^2 g(t)dt\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4 \int_1^2 g(t)dt = 5 \text{이므로}$$

$$\int_1^2 g(t)dt = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^8 g(x)dx &= \int_1^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx + \int_4^8 g(x)dx \\ &= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}\end{aligned}$$

따라서 ㉘에서

$$\begin{aligned}\int_1^8 xg'(x)dx &= 64 - g(1) - \int_1^8 g(x)dx \\ &= 64 - 1 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore 8 \int_1^8 xg'(x)dx = 8 \times \frac{139}{4} = 278$$

13 **답** 15

$x=\frac{2}{t}$, $y=f(t)$ 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = f'(t) \quad \dots\dots \textcircled{㉚}$$

시각 $t=1$ 에서 t 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$\begin{aligned}s &= \int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_1^t \sqrt{\left(-\frac{2}{t^2}\right)^2 + \{f'(t)\}^2} dt \\ &= \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^4} + \{f'(t)\}^2} dt \quad \dots\dots \textcircled{㉛}\end{aligned}$$

이때 $3t^3(t-s)=1$ 에서

$$t-s=\frac{1}{3t^3} \quad \therefore s=t-\frac{1}{3t^3}$$

㉛에서

$$\int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^4} + \{f'(t)\}^2} dt = t - \frac{1}{3t^3}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{\frac{4}{t^4} + \{f'(t)\}^2} = 1 + \frac{1}{t^4}$$

$$\frac{4}{t^4} + \{f'(t)\}^2 = 1 + \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^8}$$

$$\{f'(t)\}^2 = 1 - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^8} = \left(1 - \frac{1}{t^4}\right)^2$$

$$\therefore f'(t) = 1 - \frac{1}{t^4} \text{ 또는 } f'(t) = -1 + \frac{1}{t^4} \quad \dots\dots \textcircled{㉜}$$

점 P가 점 (2, 0)에서 출발하여 제1사분면 위에서만 움직이므로 $f(t)>0$ 이어야 한다.

즉, $f'(t)>0$ 이어야 하므로 ㉜에서

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^4} \quad \leftarrow f'(t)<0 \text{이면 음의 방향으로 움직인다.}$$

㉚에서 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $\left(-\frac{1}{2}, f'(2)\right)$ 이므로

$$a = f'(2) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\therefore 16a = 16 \times \frac{15}{16} = 15$$

memo*

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.

memo*

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.

memo*

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.