

수학의 신

확률과 통계

정답과 해설



01 여러 가지 순열

step ① 핵심 문제 16~17쪽

01 ③ 02 ② 03 144 04 8640 05 360 06 ②
07 5 08 115 09 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12 115

step ② 고난도 문제 18~22쪽

01 120 02 48 03 624 04 48 05 288 06 295
07 210 08 40 09 ⑤ 10 ⑤ 11 ① 12 190
13 31 14 45 15 ② 16 ④ 17 43 18 ①
19 60 20 38 21 708 22 ① 23 224 24 ③
25 ②

step ③ 최고난도 문제 23~25쪽

01 8 02 342 03 ① 04 97 05 20 06 209
07 ② 08 ② 09 132 10 40

02 중복조합과 이항정리

step ① 핵심 문제 26~27쪽

01 ③ 02 20 03 ③ 04 27 05 21 06 ⑤
07 100 08 120 09 ④ 10 ④ 11 ① 12 ②

step ② 고난도 문제 28~32쪽

01 ① 02 ③ 03 96 04 96 05 114 06 162
07 ④ 08 49 09 135 10 69 11 168 12 398
13 120 14 ④ 15 440 16 ③ 17 80 18 35
19 126 20 ② 21 65 22 115 23 14 24 ⑤
25 6 26 ④ 27 ③ 28 ① 29 ④

step ③ 최고난도 문제 33~35쪽

01 720 02 51 03 ② 04 730 05 36 06 206
07 ⑤ 08 ③ 09 218 10 60 11 852

기출 변형 문제로 단원 마스터

36~37쪽

01 11592 02 12 03 2197 04 ② 05 80 06 36
07 ③ 08 3996

03 확률의 뜻과 활용

step ① 핵심 문제 40~41쪽

01 233 02 6개 03 ⑤ 04 ② 05 $\frac{1}{5}$ 06 $\frac{2}{35}$
07 ⑤ 08 ② 09 $\frac{2}{9}$ 10 ⑤ 11 ④ 12 $\frac{71}{84}$

step ② 고난도 문제 42~46쪽

01 ④ 02 $\frac{11}{27}$ 03 $\frac{\pi}{16}$ 04 ③ 05 $\frac{9}{35}$ 06 15
07 ① 08 22 09 $\frac{3}{28}$ 10 $\frac{1}{7}$ 11 $\frac{23}{108}$ 12 $\frac{4}{7}$
13 $\frac{16}{105}$ 14 ① 15 $\frac{4}{11}$ 16 $\frac{19}{84}$ 17 ② 18 $\frac{3}{5}$
19 ③ 20 ④ 21 $\frac{89}{91}$ 22 ② 23 $\frac{35}{36}$ 24 47
25 $\frac{66}{91}$ 26 ③ 27 ⑤

step ③ 최고난도 문제 47~49쪽

01 $\frac{23}{525}$ 02 61 03 ② 04 37 05 ③ 06 ④
07 $\frac{9}{25}$ 08 ② 09 ⑤

04 조건부확률

step ① 핵심 문제 50~51쪽

01 $\frac{9}{40}$ 02 ④ 03 $\frac{4}{35}$ 04 ⑤ 05 4 06 $\frac{7}{46}$
07 $\frac{3}{14}$ 08 $\frac{19}{25}$ 09 ④ 10 $\frac{9}{17}$ 11 ④ 12 $\frac{4}{9}$

step ② 고난도 문제 52~56쪽

01 ③ 02 $\frac{1}{3}$ 03 9 04 ② 05 $\frac{20}{81}$ 06 $\frac{16}{25}$
07 $\frac{11}{32}$ 08 131 09 ④ 10 ③ 11 $\frac{2}{7}$ 12 ④
13 8 14 ⑤ 15 ③ 16 ③ 17 $\frac{8}{81}$ 18 277
19 $\frac{12}{25}$ 20 25 21 ③ 22 $\frac{1}{3}$ 23 21

step ③ 최고난도 문제 57~59쪽

01 25 02 ② 03 3080 04 $\frac{3}{7}$ 05 $\frac{11}{28}$ 06 $\frac{20}{61}$
07 135 08 ④ 09 191

기출 변형 문제로 단원 마스터

60~61쪽

01 $\frac{1}{2}$ 02 $\frac{15}{56}$ 03 ① 04 $\frac{18}{25}$ 05 $\frac{13}{25}$ 06 ③
07 332 08 $\frac{19}{42}$

05 이산확률변수와 이항분포

step ① 핵심 문제 64~65쪽

01 ⑤ 02 2 03 $\frac{665}{243}$ 04 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 05 28 06 ③
07 35 08 ④ 09 ① 10 20 11 325 12 11

step ② 고난도 문제 66~70쪽

01 ⑤ 02 ⑤ 03 $\frac{3}{4}$ 04 ② 05 37 06 $\frac{7}{10}$
07 $\frac{12}{7}$ 08 $\frac{4}{3}$ 09 78 10 5 11 ③ 12 ④
13 10 14 27 15 $\frac{3\sqrt{37}}{10}$ 16 117 17 4 18 ②
19 $67\sqrt{3}$ 20 ② 21 ③ 22 ③ 23 ③ 24 24
25 300 26 ①

step ③ 최고난도 문제 71~73쪽

01 ⑤ 02 3 03 25 04 ③ 05 7 06 $\frac{1}{5}$
07 15 08 ① 09 ① 10 ② 11 30

06 연속확률변수와 정규분포

step ① 핵심 문제 74~75쪽

01 ② 02 2 03 $\frac{1}{4}$ 04 ③ 05 ⑤ 06 ①
07 ④ 08 59 09 ③ 10 ② 11 ①

step ② 고난도 문제 76~81쪽

01 $\frac{3}{4}$ 02 $\frac{3}{2}$ 03 $\frac{68}{45}$ 04 ⑤ 05 31 06 35
07 ④ 08 19 09 ③ 10 ⑤ 11 ② 12 ②
13 $\frac{3}{2}$ 14 ① 15 ⑤ 16 ② 17 ⑤ 18 32
19 ⑤ 20 ④ 21 404명 22 80 23 ③ 24 ③
25 ③ 26 159

step ③ 최고난도 문제 82~83쪽

01 $\frac{11}{4}$ 02 $\frac{5}{16}$ 03 ⑤ 04 987 05 ② 06 ③
07 ①

07 통계적 추정

step ① 핵심 문제 84~85쪽

01 $\frac{13}{64}$ 02 11 03 ④ 04 ⑤ 05 0.1587 06 64
07 106 08 ③ 09 25 10 ② 11 10 12 81

step ② 고난도 문제 86~90쪽

01 $\frac{3}{7}$ 02 26 03 $\frac{32}{3}$ 04 $\frac{50}{9}$ 05 ① 06 24
07 ④ 08 ① 09 606 10 ⑤ 11 530 12 ③
13 16 14 0.07 15 ② 16 ③ 17 ② 18 ②
19 ④ 20 ⑤ 21 356 22 64 23 ③

step ③ 최고난도 문제 91쪽

01 23 02 ④ 03 0.001 04 472500원

기출 변형 문제로 단원 마스터

92~95쪽

01 ③ 02 36 03 $\frac{32}{3}$ 04 $\frac{29}{81}$ 05 3750 06 ②
07 ④ 08 0.3413 09 815 10 0.3721
11 ① 12 5.6 13 ⑤

step ① 핵심 문제

| 16~17쪽

01 ③	02 ②	03 144	04 8640	05 360	06 ②
07 5	08 115	09 ③	10 ④	11 ⑤	12 115

01 답 ③

남학생 4명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

남학생 사이사이의 4개의 자리에 여학생 1명이 앉는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

이때 여학생 1명의 자리가 결정되면 나머지 여학생 1명의 자리는 마주 보는 자리에 고정된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 4 = 24$$

02 답 ②

A와 B를 한 사람으로 생각하여 C, D를 제외한 3명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

이때 3명 사이사이의 3개의 자리에서 2개를 택하여 C, D가 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 \times 2 = 24$$

다른 풀이 여사건 이용하기

A, B가 이웃하도록 앉는 경우의 수는

$$(5-1)! \times 2 = 48$$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수

A, B를 한 사람으로 생각하여 5명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수

A, B와 C, D가 각각 이웃하도록 앉는 경우의 수는

$$(4-1)! \times 2 \times 2 = 24$$

C와 D가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

A, B를 한 사람으로 C, D를 한 사람으로 생각하여 4명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수

따라서 구하는 경우의 수는

$$48 - 24 = 24$$

03 답 144

이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수가 되려면 홀수끼리는 이웃하지 않아야 한다.

짝수 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

짝수 사이사이의 4개의 자리에서 3개를 택하여 홀수를 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

04 답 8640

8명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는 $(8-1)! = 7! = 5040$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 주어진 정사각형 모양의 탁자에서는 서로 다른 경우가 2가지씩 존재하므로 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$5040 \times 2 = 10080 \quad \text{배점 40\%}$$

여학생 2명이 탁자의 같은 변에 앉는 경우의 수는 $2! = 2$ 이고, 이때 남학생 6명이 나머지 6개의 자리에 앉는 경우의 수는 $6! = 720$ 이므로 여학생 2명이 같은 변에 앉는 경우의 수는

$$2 \times 720 = 1440 \quad \text{배점 40\%}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10080 - 1440 = 8640 \quad \text{배점 20\%}$$

05 답 360

6가지의 색 중에서 직사각형의 내부에 칠할 색을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_1 = 6$$

남은 5가지의 색 중에서 직사각형의 외부의 4개의 영역에 칠할 4가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 택한 4가지의 색을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 직사각형의 외부의 영역에 칠하는 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 5 \times 6 \times 2 = 360$$

06 답 ②

전체집합 U 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 1, 3은 집합 $A \cap B$ 의 원소이고, 2, 4, 5, 6은 각각 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A \cup B)^c$ 중 어느 한 집합의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 세 집합에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

07 답 5

깃발을 1번, 2번, 3번, ..., n 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_1$, ${}_3\Pi_2$, ${}_3\Pi_3$, ..., ${}_3\Pi_n$ 이므로 깃발을 1번 이상 n 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$${}_3\Pi_1 + {}_3\Pi_2 + {}_3\Pi_3 + \cdots + {}_3\Pi_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$$

$$n=4\text{일 때, } 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$$

$$n=5\text{일 때, } 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 363$$

따라서 신호가 300개 이상이 되도록 하는 n 의 최솟값은 5이다.

08 답 115

구하는 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 만든 다섯 자리의 자연수의 개수에서 숫자 0 또는 1을 택하지 않고 만든 다섯 자리의 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 만의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 2의 2개이고, 나머지 네 자리에는 0, 1, 2의 3개의 숫자에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

$$2 \times {}_3\Pi_4 = 2 \times 3^4 = 162$$

(i) 숫자 0을 택하지 않는 경우

1, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

(ii) 숫자 1을 택하지 않는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2의 1개이고, 나머지 네 자리에는 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는

$$1 \times {}_2\Pi_4=2^4=16$$

(iii) 숫자 0, 1을 모두 택하지 않는 경우

22222의 1개

(i), (ii), (iii)에서 숫자 0 또는 1을 택하지 않고 만든 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$32+16-1=47$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$162-47=115$$

09 답 ③

(i) $x \leq 3$ 일 때,

$x \times f(x) \leq 10$ 을 만족시키는 $f(x)$ 의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

(ii) $x \geq 4$ 일 때,

$x \times f(x) \leq 10$ 을 만족시키는 $f(x)$ 의 값은 1 또는 2이다.

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$27 \times 4 = 108$$

10 답 ④

(i) 1개의 문자가 3개 포함되는 경우

3개 포함되는 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

이때 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$

따라서 1개의 문자가 3개 포함되는 경우의 수는 $3 \times 20 = 60$

(ii) 2개의 문자가 2개씩 포함되는 경우

2개씩 포함되는 문자 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!}=30$

따라서 2개의 문자가 2개씩 포함되는 경우의 수는 $3 \times 30 = 90$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60+90=150$$

11 답 ⑤

1, 3, 5와 2, 4의 순서가 각각 정해져 있으므로 1, 3, 5를 모두 A로, 2, 4를 모두 B로 생각하여 A, B, A, B, A, 6을 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 1로, 두 번째 A는 3으로, 세 번째 A는 5로 바꾸고, 첫 번째 B는 2로, 두 번째 B는 4로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 2!}=60$

12 답 115

그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 15 \times 6 = 90$$

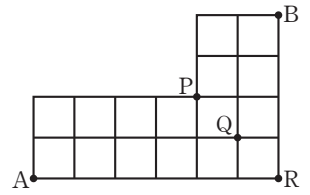
(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!} \times \frac{4!}{3!} = 6 \times 4 = 24$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$90+24+1=115$$



step 2 고난도 문제

| 18~22쪽

01 120	02 48	03 624	04 48	05 288	06 295
07 210	08 40	09 ⑤	10 ⑤	11 ①	12 190
13 31	14 45	15 ②	16 ④	17 43	18 ①
19 60	20 38	21 708	22 ①	23 224	24 ③
25 ②					

01 답 120

5명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

그림과 같이 5명의 학생을 A, B, C, D, E라 하면 딸기주스를 택한 2명의 학생이 서로 이웃하지 않는 경우는 딸기주스를 택한 학생이

(A, C), (A, D), (B, D), (B, E), (C, E)인

경우이므로 그 경우의 수는 5

이때 나머지 3명이 오렌지주스 3잔을 택하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 5 \times 1 = 120$$

다른 풀이 여사건 이용하기

구하는 경우의 수는 5명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉아 오렌지주스 3잔과 딸기주스 2잔을 택하는 경우의 수에서 딸기주스를 택한 2명의 학생이 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

5명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉고 오렌지주스 3잔과 딸기주스 2잔을 택하는 경우의 수는

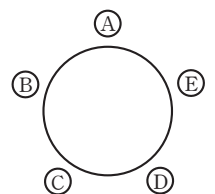
$$(5-1)! \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 4! \times {}_5C_2 \times 1 = 24 \times 10 \times 1 = 240$$

2명의 학생이 딸기주스를 택하고 이 2명의 학생을 이웃하게 원형으로 배열하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times (4-1)! \times 2! = 10 \times 6 \times 2 = 120$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$240 - 120 = 120$$



02 답 48

원형의 탁자에 있는 9개의 의자에 6명이 앉을 때 (가)를 만족시키려면 2명씩 이웃하여 앉고, 2명과 2명 사이사이에 빈 의자를 1개씩 두어야 한다.

(나)에서 A와 B는 서로 이웃하므로 A, B를 한 묶음으로 생각하고, C, D, E, F를 두 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

세 묶음을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

각 묶음에서 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! \times 2! \times 2! = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 8 = 48$

03 답 624

구하는 경우의 수는 서로 다른 구슬 7개를 원형으로 배열하는 경우의 수에서 같은 색의 구슬이 이웃하지 않는 경우의 수를 빼면 된다.

서로 다른 7개의 구슬을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(7-1)! = 6! = 720$$

(i) 빨간색 구슬 2개와 노란색 구슬 2개를 나란히 배열하는 경우

빨간색 구슬 2개와 노란색 구슬 2개를 각각 한 묶음으로 생각하여 두 묶음을 원형으로 배열한 후 빨간색 구슬은 빨간색 구슬끼리, 노란색 구슬은 노란색 구슬끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$(2-1)! \times 2! \times 2! = 4$$

이때 3개의 파란색 구슬 중 2개를 택하여 ㉠, ㉡에 각각 1개씩 놓고 남은 1개의 파란색 구슬을 ㉢ 또는 ㉣에 놓으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3P_2 \times {}_2C_1 = 6 \times 2 = 12$$

따라서 그 경우의 수는 $4 \times 12 = 48$

(ii) 빨간색 구슬 2개와 노란색 구슬 2개를 번갈아 배열하는 경우

빨간색 구슬 2개를 마주 보도록 배열한 후 노란색 구슬 2개를 빨간색 구슬 사이에 배열하는 경우의 수는

$$(2-1)! \times 2! = 2$$

이때 3개의 파란색 구슬을 ㉠~㉣ 중 세 자리에 각각 1개씩 놓으면 되므로 그 경우의 수는

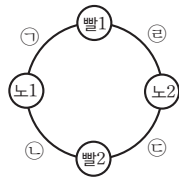
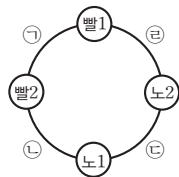
$${}_4P_3 = 24$$

따라서 그 경우의 수는 $2 \times 24 = 48$

(i), (ii)에서 같은 색의 구슬이 이웃하지 않는 경우의 수는

$$48 + 48 = 96$$

따라서 구하는 경우의 수는 $720 - 96 = 624$



04 답 48

(i) 2가지 색을 사용하여 칠하는 경우

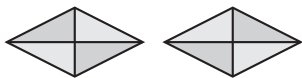
4가지 색 중에서 칠할 2가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

택한 2가지 색을 조건을 만족시

키도록 각 영역에 칠하는 경우

는 그림과 같이 2가지

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$ 배점 30%



(ii) 3가지 색을 사용하여 칠하는 경우

4가지 색 중에서 칠할 3가지 색을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

택한 3가지 색 중에서 2개의 영역에 칠할 색을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이때 같은 색을 칠하는 2개의

영역을 택하는 경우는 그림과

같이 2가지이고 나머지 영역에

는 남은 2가지의 색을 각각 1가지씩 칠하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ 배점 30\%}$$

(iii) 4가지 색을 사용하여 칠하는 경우

4가지의 색을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 마름모에 색칠하는

서로 다른 경우가 2가지씩 존재하므로 그 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12 \text{ 배점 30\%}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 24 + 12 = 48 \text{ 배점 10\%}$$

05 답 288

남학생 4명 중에서 A, B가 아닌 학생 2명을 D, E라 하자.

(나)를 만족시키려면 C의 양쪽에는 모두 남학생이 앉아야 하므로 C가 D, E와 모두 이웃하거나 C가 A 또는 B 중 1명과 이웃하고 D 또는 E 중 1명과 이웃해야 한다.

(i) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우

A, B와 D, C, E를 각각 한 사람으로 생각하여 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

D와 E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 C가 D, E와 모두 이웃하는 경우의 수는

$$24 \times 2 \times 2 = 96$$

(ii) C가 A 또는 B 중 1명과 이웃하고 D 또는 E 중 1명과 이웃하는 경우

↳ A와 B는 이웃하므로 C가 A, B와 모두 이웃한 경우는 없다.

D 또는 E 중에서 C와 이웃하는 1명과 C, A, B를 한 사람으로 생각하여 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

D 또는 E 중에서 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 C가 A 또는 B 중 1명과 이웃하고 D 또는 E 중 1명과 이웃하는 경우의 수는

$$24 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$96 + 192 = 288$$

06 답 295

$f(1) \times f(2) + f(3)$ 의 값이 짝수이려면 $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 짝수이거나 $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 홀수이어야 한다.

(i) $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 짝수일 때,

$f(1) \times f(2)$ 의 값이 짝수이므로 $f(1)$, $f(2)$ 의 값 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

$f(1)$, $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$, $f(2)$ 의 값이 모두 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $f(1)$, $f(2)$ 의 값 중 적어도 하나가 짝수인 경우의 수는

$${}_5\Pi_2 - {}_3\Pi_2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 함수의 개수는 $16 \times 2 \times 5 = 160$

(ii) $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 홀수일 때,

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 홀수이어야 한다.

이때 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 함수의 개수는 $27 \times 5 = 135$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$160 + 135 = 295$$

07 답 210

9개의 공을 세 상자 A, B, C에 3개씩 나누어 담으려면 세 상자 A, B, C에 자연수가 적혀 있는 공을 각각 3개 이하로 넣고, 자연수가 적혀 있는 공이 3개 미만으로 들어간 상자에는 숫자가 적혀 있지 않은 공을 넣어 3개를 채우면 된다.

즉, 구하는 경우의 수는 세 상자 A, B, C에 자연수가 적혀 있는 공을 각각 3개 이하로 넣는 경우의 수와 같으므로 세 상자에 5개의 공을 나누어 담는 경우의 수에서 한 상자에 3개보다 많이 들어가는 경우의 수를 빼면 된다.

자연수가 적혀 있는 공 5개를 세 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는 3개의 상자에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

자연수가 적혀 있는 공 4개가 한 상자에 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = {}_5C_1 \times 3 \times 2 = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

남은 2개의 상자 중에서 1개의 공을 넣을 상자를 택하는 경우의 수
3개의 상자 중에서 공 4개가 들어갈 상자를 택하는 경우의 수
5개의 공 중에서 한 상자에 넣을 4개의 공을 택하는 경우의 수

자연수가 적혀 있는 공 5개가 한 상자에 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_5 \times {}_3C_1 = 1 \times 3 = 3$$

3개의 상자 중에서 공 5개가 들어갈 상자를 택하는 경우의 수
5개의 공 중에서 한 상자에 넣을 5개의 공을 택하는 경우의 수

따라서 구하는 경우의 수는

$$243 - (30 + 3) = 210$$

08 답 40

(i) $a=0$ 일 때,

$\frac{bc}{a}$ 가 정의되지 않으므로 정수가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $a=1$ 일 때,

$\frac{bc}{a} = \frac{bc}{1} = bc$ 는 항상 정수이므로 b , c 의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$$\therefore {}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

(iii) $a=2$ 일 때,

$\frac{bc}{a} = \frac{bc}{2}$ 가 정수가 되려면 bc 의 값은 0 또는 2의 배수이어야 하므로 모든 경우의 수에서 b , c 의 값이 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.

$$\text{모든 경우의 수는 } {}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

b , c 의 값이 모두 홀수인 경우의 수는 1, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$

따라서 $a=2$ 일 때 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $16 - 4 = 12$

(iv) $a=3$ 일 때,

$\frac{bc}{a} = \frac{bc}{3}$ 가 정수가 되려면 bc 의 값은 0 또는 3의 배수이어야 하므로 모든 경우의 수에서 b , c 의 값이 모두 1, 2 중 하나인 경우의 수를 빼면 된다.

$$\text{모든 경우의 수는 } {}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

b , c 의 값이 모두 1, 2 중 하나인 경우의 수는 1, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

따라서 $a=3$ 일 때 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $16 - 4 = 12$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$16 + 12 + 12 = 40$$

09 답 ⑤

주어진 조건에 맞도록 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.

이때 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로

$B - A = X$ 라 하면 숫자 4, 5, 6, 7을 세 집합 A , X , C 에 대응시킬 때, $A \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ 이 되도록 하면 된다.

(i) 4, 5, 6, 7이 집합 A , C 의 원소일 때,

집합 A , C 의 원소를 정하는 경우의 수는 집합 A , C 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

이때 4, 5, 6, 7이 모두 집합 A 또는 C 의 원소인 경우를 제외해야 하므로 집합 A , B , C 를 정하는 경우의 수는

$$16 - 2 = 14$$

(ii) 4, 5, 6, 7이 집합 A , X , C 의 원소일 때,

집합 A , X , C 의 원소를 정하는 경우의 수는 집합 A , X , C 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

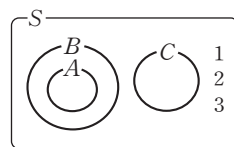
$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

이때 4, 5, 6, 7이 집합 A , X , C 중 두 집합에만 속하는 원소이거나 모두 집합 A 또는 X 또는 C 의 원소인 경우를 제외해야 한다.

4, 5, 6, 7이 집합 A , X , C 중 두 집합에만 속하는 원소인 경우의 수는

$${}_3C_2 \times ({}_2\Pi_4 - 2) = {}_3C_1 \times (2^4 - 2) = 3 \times 14 = 42$$

4, 5, 6, 7이 모두 택한 두 집합 중 한 집합에 속하는 경우의 수
택한 두 집합의 원소를 정하는 경우의 수
집합 A , X , C 중에서 2개를 택하는 경우의 수



4, 5, 6, 7이 모두 집합 A 또는 X 또는 C 의 원소인 경우의 수는 3
따라서 집합 A, B, C 를 정하는 경우의 수는

$$81 - (42 + 3) = 36$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$14 + 36 = 50$$

10 답 ⑤

다섯 자리의 자연수를 만들 때, 1을 네 번 이상 사용하면 1끼리 이웃하는 경우가 반드시 생기므로 1을 사용하지 않거나 한 번 또는 두 번 또는 세 번 사용해야 한다.

(i) 1을 사용하지 않는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2의 1개이고, 나머지 네 자리에는 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는

$$1 \times {}_2\Pi_4 = 1 \times 2^4 = 16$$

(ii) 1을 한 번 사용하는 경우

① 1□□□□ 꼴인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

② 2□□□□ 꼴인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중 1이 오는 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

나머지 세 자리에 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 8 = 32$

③ ①, ②에서 자연수의 개수는

$$16 + 32 = 48$$

(iii) 1을 두 번 사용하는 경우

① 1□□□□ 꼴인 경우

천의 자리에는 1이 올 수 없으므로 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중 1이 오는 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

나머지 세 자리에 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

따라서 자연수의 개수는 $3 \times 8 = 24$

② 2□□□□ 꼴인 경우

1이 두 번 사용되는 경우가 21□1□, 2□1□1, 21□□1의 3가지

나머지 두 자리에 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$

따라서 자연수의 개수는 $3 \times 4 = 12$

③ ①, ②에서 자연수의 개수는

$$24 + 12 = 36$$

(iv) 1을 세 번 사용하는 경우

1이 세 번 사용되는 경우가 1□1□1의 1가지이고, 나머지 두 자리에 0, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는

$$1 \times {}_2\Pi_2 = 1 \times 2^2 = 4$$

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$$16 + 48 + 36 + 4 = 104$$

11 답 ①

(가)에서 $f(1) \geq 1, f(2) \geq \sqrt{2}, f(3) \geq \sqrt{3}, f(4) \geq 2, f(5) \geq \sqrt{5}$ 이므로

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

$f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 각각 2, 3, 4의 3가지

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 수는 3, 4의 2가지

이때 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 3이므로 치역이 될 수 있는 집합은

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$

(i) 치역이 $\{1, 2, 3\}$ 인 경우

$f(1)=1, f(5)=3$ 이고, $f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times {}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

이때 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 모두 3인 경우는 제외해야 하므로 함수 f 의 개수는

$$8 - 1 = 7$$

(ii) 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 인 경우

$f(1)=1, f(5)=4$ 이고, $f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times {}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

이때 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 모두 4인 경우는 제외해야 하므로 함수 f 의 개수는

$$8 - 1 = 7$$

(iii) 치역이 $\{1, 3, 4\}$ 인 경우

$f(1)=1$ 이고, $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

이때 $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값이 모두 3이거나 4인 경우는 제외해야 하므로 함수 f 의 개수는

$$16 - 2 = 14$$

(iv) 치역이 $\{2, 3, 4\}$ 인 경우

① $f(5)=3$ 일 때,

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4의 3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

이때 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 2, 3이거나 3, 4인 경우는 제외해야 한다.

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 2, 3이거나 3, 4인 경우의 수는 각각

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

이때 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 모두 3인 경우가 중복되므로 $f(5)=3$ 일 때 함수 f 의 개수는

$$81 - (16 \times 2 - 1) = 50$$

② $f(5)=4$ 일 때,

①과 같은 방법으로 하면 함수 f 의 개수는 50

③ ①, ②에서 함수 f 의 개수는

$$50 + 50 = 100$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$7 + 7 + 14 + 100 = 128$$

12 답 190

검은 바둑돌을 1개 꺼내는 것을 A, 흰 바둑돌을 1개 꺼내는 것을 B, 흰 바둑돌을 2개 꺼내는 것을 C라 하자.

(i) 흰 바둑돌을 한 번에 2개씩 꺼내는 경우가 없을 때,

A 4개, B 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

(ii) 흰 바둑돌을 한 번에 2개씩 꺼내는 경우가 1번 있을 때,

A 4개, B 2개, C 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 2!} = 105$$

(iii) 흰 바둑돌을 한 번에 2개씩 꺼내는 경우가 2번 있을 때,

A 4개, C 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$70 + 105 + 15 = 190$$

13 답 31

$f(1) + f(3) + f(5) + f(7) = 12$ 를 만족시키는 $f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값은

1, 1, 3, 7 또는 1, 1, 5, 5 또는 1, 3, 3, 5 또는 3, 3, 3, 3

(i) 1, 1, 3, 7 또는 1, 3, 3, 5인 경우

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 1, 3, 7 또는 1, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!} \times 2 = 24$$

(ii) 1, 1, 5, 5인 경우

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 1, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(iii) 3, 3, 3, 3인 경우

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우는 모두 3이 되는 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$$24 + 6 + 1 = 31$$

14 답 45

영어를 공부하는 4일을 먼저 나열한 다음 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 수학을 공부하는 6일을 배열하면 된다.

이때 수학은 3일 이상 연속으로 공부하지 않으므로 5개의 자리에 올 수 있는 수학을 공부하는 일수는

0, 0, 2, 2, 2 또는 0, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 1, 2

(i) 0, 0, 2, 2, 2일 때,

0, 0, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

(ii) 0, 1, 1, 2, 2일 때,

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(iii) 1, 1, 1, 1, 2일 때,

1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$10 + 30 + 5 = 45$$

15 답 ②

(A)를 만족시키려면 a, a, c, c, c 를 일렬로 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 2개에 b 를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times {}_6C_2 = 10 \times 15 = 150$$

이때 (B)를 만족시키지 않으려면 a, a, c, c, c 를 a 끼리 서로 이웃하도록 나열한 후 그 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 2개에 b 를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times {}_6C_2 = 4 \times 15 = 60$$

따라서 구하는 경우의 수는 $150 - 60 = 90$

다른 풀이

(B)에서 a 와 a 사이에 c 가 1개 오는 경우는 $acacc, cacac, ccaca$ 의 3가지, a 와 a 사이에 c 가 2개 오는 경우는 $accac, cacca$ 의 2가지, a 와 a 사이에 c 가 3개 오는 경우는 $accca$ 의 1가지이므로 그 경우의 수는 $3 + 2 + 1 = 6$

(A)에서 b 끼리는 서로 이웃하지 않으므로 각각의 경우에 대하여 문자 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 2개를 택하여 b 를 배열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

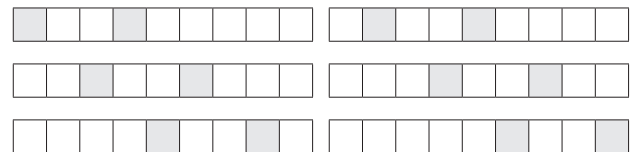
따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 15 = 90$

16 답 ④

9개의 공을 일렬로 나열할 때, 2개의 노란 공 사이에 다른 색의 공이 짝수 개 와야 하므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 노란 공 사이에 2개의 공이 오는 경우

9개의 공을 일렬로 나열할 때, 노란 공 사이에 2개의 공이 오도록 노란 공을 배열하는 경우는 다음과 같이 6가지이다.

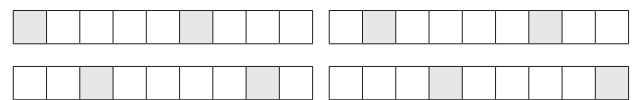


각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 파란 공 4개, 빨간 공 3개를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$6 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 6 \times 35 = 210$$

(ii) 노란 공 사이에 4개의 공이 오는 경우

9개의 공을 일렬로 나열할 때, 노란 공 사이에 4개의 공이 오도록 노란 공을 배열하는 경우는 다음과 같이 4가지이다.



각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 파란 공 4개, 빨간 공 3개를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 4 \times 35 = 140$$

(iii) 노란 공 사이에 6개의 공이 오는 경우

9개의 공을 일렬로 나열할 때, 노란 공 사이에 6개의 공이 오도록 노란 공을 배열하는 경우는 다음과 같이 2가지이다.



각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 파란 공 4개, 빨간 공 3개를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 2 \times 35 = 70$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$210 + 140 + 70 = 420$$

17 답 43

(i) 숫자 3이 적혀 있는 카드가 2장인 경우

숫자 1이 적혀 있는 카드가 1장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 2장인 경우이므로 이 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(ii) 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장인 경우

① 숫자 1이 적혀 있는 카드가 4장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장일 때,

5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

② 숫자 1이 적혀 있는 카드가 2장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 1장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장일 때,

4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

③ 숫자 2가 적혀 있는 카드가 2장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장일 때,

3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

①, ②, ③에서 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장인 경우의 수는

$$5 + 12 + 3 = 20$$

(iii) 숫자 3이 적혀 있는 카드가 없는 경우

① 숫자 1이 적혀 있는 카드가 5장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 1장일 때,

6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!} = 6$$

② 숫자 1이 적혀 있는 카드가 3장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 2장일 때,

5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

③ 숫자 1이 적혀 있는 카드가 1장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 3장일 때,

4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

①, ②, ③에서 숫자 3이 적혀 있는 카드가 없는 경우의 수는

$$6 + 10 + 4 = 20$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $3 + 20 + 20 = 43$

18 답 ①

숫자 1, 2, 3 중에서 적어도 2개 이상의 숫자를 사용하여 네 자리의 자연수를 만들려면 2개의 숫자를 사용하거나 3개의 숫자를 사용해야 한다.

(i) 2개의 숫자를 사용하는 경우

2개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이때 각각의 경우에 대하여 같은 숫자는 연속하여 나올 수 없으므로 2개씩 같은 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수는 2가지이다.

따라서 자연수의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

(ii) 3개의 숫자를 사용하는 경우

1, 2, 3을 1개씩 택한 후 1개의 숫자를 더 택하는 경우는 1, 2, 3의 3가지이다.

이때 각각의 경우에 대하여 같은 숫자는 연속으로 나올 수 없으므로 2개의 같은 숫자를 포함한 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 숫자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 같은 숫자 2개가 연속하여 나오는 경우의 수를 빼면 되므로

$$\frac{4!}{2!} - \frac{3!}{1!} = 12 - 6 = 6$$

← 같은 숫자 2개를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수

따라서 자연수의 개수는 $3 \times 6 = 18$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $6 + 18 = 24$

19 답 60

각 칸에 자연수가 들어가므로 각 열에 적혀 있는 수의 합은 4보다 크거나 같다.

이때 8개의 칸에 적혀 있는 수의 합이 11이고 제1열에 적혀 있는 수의 합이 제2열에 적혀 있는 수의 합보다 작으므로 제1열과 제2열에 적혀 있는 수의 합은 각각 4, 7 또는 5, 6이어야 한다.

(i) 제1열에 적혀 있는 수의 합이 4이고 제2열에 적혀 있는 수의 합이 7인 경우

제1열에 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우의 수는 1

제2열에 1, 1, 1, 4 또는 1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 12 + 4 = 20$$

따라서 그 경우의 수는 $1 \times 20 = 20$

(ii) 제1열에 적혀 있는 수의 합이 5이고 제2열에 적혀 있는 수의 합이 6인 경우

제1열에 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

제2열에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2! \times 2!} = 4 + 6 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $4 \times 10 = 40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20 + 40 = 60$

20 답 38

x 축의 양의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 a , x 축의 음의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 b , y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 c , y 축의 음의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 d 라 하자. 배점 10%

- (i) a 가 1번, b 가 0번, c 가 3번, d 가 1번인 경우
 a, c, c, c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{3!}=20$
 이때 a, c, c 가 먼저 일렬로 나열되면 3번 이동한 후 점 P의 좌표가 (1, 2)가 되므로 이 경우를 제외해야 한다.
 a, c, c 를 먼저 일렬로 나열하고, c, d 를 나열하는 경우의 수는
 $\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$
 따라서 그 경우의 수는
 $20 - 6 = 14$ 배점 40%
- (ii) a 가 2번, b 가 1번, c 가 2번, d 가 0번인 경우
 a, a, b, c, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
 이때 a, c, c 가 먼저 일렬로 나열되면 3번 이동한 후 점 P의 좌표가 (1, 2)가 되므로 이 경우를 제외해야 한다.
 a, c, c 를 일렬로 나열하고, a, b 를 나열하는 경우의 수는
 $\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$
 따라서 그 경우의 수는
 $30 - 6 = 24$ 배점 40%
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $14 + 24 = 38$ 배점 10%

21 답 708

- (i) 4개의 원판에 같은 문자가 2개씩 있는 경우
 4개의 문자 중에서 2개의 문자를 택하는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = 6$
 4개의 원판에서 같은 문자가 적힌 원판은 순서가 정해져 있으므로 같은 원판으로 생각하여 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$
 따라서 그 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$
- (ii) 4개의 원판에 같은 문자가 2개 있는 경우
 4개의 문자 중에서 같은 문자를 택할 1개의 문자를 택하는 경우의 수는
 ${}_4C_1 = 4$
 남은 3개의 문자 중에서 2개의 문자를 택하는 경우의 수는
 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
 이때 원판은 흰색, 검은색의 2가지이므로 2개의 원판의 색을 정하는 경우의 수는
 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$
 4개의 원판에서 같은 문자가 적힌 원판은 순서가 정해져 있으므로 같은 원판으로 생각하여 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2!} = 12$
 따라서 그 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 4 \times 12 = 576$
- (iii) 4개의 원판에 같은 문자가 없는 경우
 원판은 흰색, 검은색의 2가지이므로 4개의 원판의 색을 정하는 경우의 수는
 ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

- D가 적힌 원판을 맨 아래에 놓고 나머지 3개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 그 경우의 수는
 $16 \times 6 = 96$
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $36 + 576 + 96 = 708$

22 답 ①

- 다섯 자리의 자연수를 만들 때, (가)에서 홀수를 선택할 수 있는 개수는 0, 1, 2, 3이고, (나)에서 짝수를 선택할 수 있는 개수는 0, 2, 4이다.
 따라서 다섯 자리의 자연수를 만들려면 홀수 1번, 짝수 4번 또는 홀수 3번, 짝수 2번을 선택해야 한다.
- (i) 홀수 1번, 짝수 4번을 선택하는 경우
 1, 3, 5 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는
 ${}_3C_1 = 3$
 2, 4, 6 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는
 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
 선택한 홀수 1개와 같은 숫자의 짝수 2개씩을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
 따라서 자연수의 개수는
 $3 \times 3 \times 30 = 270$
- (ii) 홀수 3번, 짝수 2번을 선택하는 경우
 1, 3, 5를 모두 선택하는 경우의 수는
 ${}_3C_3 = 1$
 2, 4, 6 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는
 ${}_3C_1 = 3$
 선택한 홀수 3개와 같은 숫자의 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2!} = 60$
 따라서 자연수의 개수는
 $1 \times 3 \times 60 = 180$
- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
 $270 + 180 = 450$

23 답 224

모든 경우의 수에서 두 사람이 만나는 경우의 수를 빼면 된다.
 모든 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 \times 20 = 400$$

지수의 속력이 인성이의 속력의 2배이므로 두 사람이 만날 수 있는 지점은 그림에서 P, Q, R이다.

- (i) P 지점에서 만나는 경우

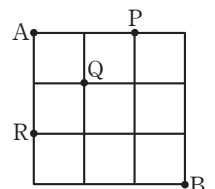
인성이가 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는

$$1 \times \frac{4!}{3!} = 4$$

지수가 $B \rightarrow P \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$$

따라서 P 지점에서 만나는 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$



- (ii) Q 지점에서 만나는 경우
 인성이가 $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는
 $2! \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 2 \times 6 = 12$
 지수가 $B \rightarrow Q \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 6 \times 2 = 12$
 따라서 Q 지점에서 만나는 경우의 수는 $12 \times 12 = 144$
- (iii) R 지점에서 만나는 경우
 인성이가 $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는
 $1 \times \frac{4!}{3!} = 4$
 지수가 $B \rightarrow R \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수는
 $\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$
 따라서 R 지점에서 만나는 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$
- (i), (ii), (iii)에서 두 사람이 만나는 경우의 수는
 $16 + 144 + 16 = 176$
 따라서 구하는 경우의 수는 $400 - 176 = 224$

24 답 ③

그림과 같이 네 지점 P', Q', R', S'을 잡자.

- (i) 네 지점 P, Q, R, S 중 한 지점을 거쳐서 이동하는 경우

- ① $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

- ② $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow Q' \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 18$$

- ③ $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow R' \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 18$$

- ④ $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times 1 \times 1 = 10$$

- ①~④에서 한 지점을 거쳐서 이동하는 경우의 수는

$$10 + 18 + 18 + 10 = 56$$

- (ii) 네 지점 P, Q, R, S 중 두 지점을 거쳐서 이동하는 경우

- ① $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow Q' \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

- ② $A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

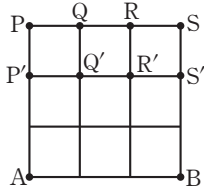
$A \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 9$$

- ③ $A \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow R' \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 \times 1 \times 1 = 6$$



- ①, ②, ③에서 두 지점을 거쳐서 이동하는 경우의 수는

$$6 + 9 + 6 = 21$$

- (iii) 네 지점 P, Q, R, S 중 세 지점을 거쳐서 이동하는 경우

- ① $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 3$$

- ② $A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$$

- ①, ②에서 세 지점을 거쳐서 이동하는 경우의 수는

$$3 + 3 = 6$$

- (iv) 네 지점 P, Q, R, S를 모두 거쳐서 이동하는 경우

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는 1

- (i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$56 + 21 + 6 + 1 = 84$$

25 답 ②

P 지점에서 R 지점까지 이동하는 횟수를 x 라 하면 $3 \leq x \leq 6$ 이고, R 지점에서 Q 지점까지 이동하는 횟수를 y 라 하면 $2 \leq y \leq 4$ 이므로 P 지점에서 Q 지점까지 이동한 횟수가 8인 경우는

$$x=4, y=4 \text{ 또는 } x=5, y=3 \text{ 또는 } x=6, y=2$$

오른쪽으로 1칸 가는 것을 a , 위쪽으로 1칸 가는 것을 b , 대각선으로 1칸 가는 것을 c 라 하자.

- (i) $x=4, y=4$ 인 경우

P 지점에서 R 지점까지 4번 이동하여 가는 경우는 a, b, c, c 를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

R 지점에서 Q 지점까지 4번 이동하여 가는 경우는 a, a, b, b 를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

따라서 $x=4, y=4$ 인 경우의 수는 $12 \times 6 = 72$

- (ii) $x=5, y=3$ 인 경우

P 지점에서 R 지점까지 5번 이동하여 가는 경우는 a, a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

R 지점에서 Q 지점까지 3번 이동하여 가는 경우는 a, b, c 를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 $x=5, y=3$ 인 경우의 수는 $30 \times 6 = 180$

- (iii) $x=6, y=2$ 인 경우

P 지점에서 R 지점까지 6번 이동하여 가는 경우는 a, a, a, b, b, b 를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

R 지점에서 Q 지점까지 2번 이동하여 가는 경우는 c, c 를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 1

따라서 $x=6, y=2$ 인 경우의 수는 $20 \times 1 = 20$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$72 + 180 + 20 = 272$$

01 8 02 342 03 ① 04 97 05 20 06 209
07 ② 08 ② 09 132 10 40

01 답 8

1단계 빨간색을 칠하는 영역 파악하기

회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 세 영역 A, B, C 중에서 선택할 수 있다.

A	B	
	C	

2단계 색칠판을 칠하는 경우의 수 구하기

(i) 영역 A에 빨간색을 칠하는 경우

영역 A에 빨간색을 칠하면 파란색을 칠할 수 있는 정사각형은 그림에서 a, b, c, d, e 의 5개이고, 나머지 7개의 정사각형에 남은 7가지의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$ 이므로 영역 A에 빨간색을 칠하는 경우의 수는 $5 \times 7!$

A		a
		b
e	d	c

(ii) 영역 B에 빨간색을 칠하는 경우

영역 B에 빨간색을 칠하면 파란색을 칠할 수 있는 정사각형은 그림에서 a, b, c 의 3개이고, 나머지 7개의 정사각형에 남은 7가지의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$ 이므로 영역 B에 빨간색을 칠하는 경우의 수는 $3 \times 7!$

	B	
a	b	c

(iii) 영역 C에 빨간색을 칠하는 경우

영역 C에 빨간색을 칠하면 나머지 8개의 정사각형과 모두 꼭짓점을 공유하므로 어느 정사각형에도 파란색을 칠할 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 색칠판을 칠하는 경우의 수는

$$5 \times 7! + 3 \times 7! = (5+3) \times 7! = 8 \times 7!$$

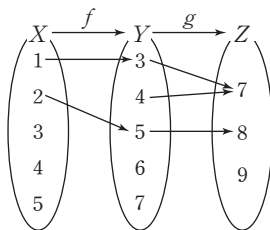
3단계 k 의 값 구하기

$$\therefore k=8$$

02 답 342

1단계 $g(6), g(7)$ 의 값에 따라 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수 구하기

(가), (나)를 만족시키려면 $g(6), g(7)$ 의 값 중 적어도 하나는 집합 Z 의 원소 9이어야 한다.



(i) $g(6)=g(7)=9$ 인 경우

(나)를 만족시키려면 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 집합 Y 의 원소 6, 7이어야 한다.

따라서 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수에서 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수를 빼면 되므로

$${}_5\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$$

따라서 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는

$$1 \times 98 = 98$$

(ii) $g(6), g(7)$ 의 값 중 하나만 9인 경우

$g(6), g(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 9가 되는 1개를 택하고 나머지는 7, 8 중에서 1개를 택하면 되므로

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 2 = 4$$

(나)를 만족시키려면 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 집합 Y 의 원소 중 $g(a)=9$ 인 a 이어야 한다.

↳ a 는 6 또는 7이다.

따라서 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수에서 a 를 제외한 4개의 수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수를 빼면 되므로

$${}_5\Pi_3 - {}_4\Pi_3 = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

따라서 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는

$$4 \times 61 = 244$$

2단계 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는

$$98 + 244 = 342$$

03 답 ①

1단계 $f(n)$ 구하기

숫자 0을 한 개 이하로 사용하여 만든 n 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 n 인 경우는 1이 n 개인 경우와 2가 1개, 1이 $(n-2)$ 개, 0이 1개인 경우이다.

1이 n 개인 n 자리의 자연수의 개수는 1

2가 1개, 1이 $(n-2)$ 개, 0이 1개인 n 자리의 자연수의 개수는 n 개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 0이 맨 앞에 오는 경우의 수를 빼면 되므로

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \\ \therefore f(n) &= 1 + \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \\ &= 1 + n(n-1) - (n-1) = n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

2단계 n 의 값 구하기

이때 $f(n)=82$ 에서 $n^2 - 2n + 2 = 82$

$$n^2 - 2n - 80 = 0, (n+8)(n-10) = 0$$

$$\therefore n=10 (\because n \text{은 자연수})$$

04 답 97

1단계 10이 나오는 횟수에 따라 경우의 수 구하기

(나)에서 1, 4는 서로 이웃할 수 없다.

(i) 1이 한 번 나오는 경우

① 1□□□, □□□1 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2개이고, 나머지 자리에는 2, 3, 4의 3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$$2 \times {}_3\Pi_2 + {}_3\Pi_2 \times 2 = 4 \times 3^2 = 36$$

② □1□□, □□1□ 꼴인 경우

1의 양옆에는 2, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이므로 경우의 수는

$${}_2\Pi_2 \times 3 + 3 \times {}_2\Pi_2 = 6 \times 2^2 = 24$$

①, ②에서 1이 한 번 나오는 경우의 수는 $36 + 24 = 60$

(ii) 1이 두 번 나오는 경우

① $1\square\square, 1\square\square 1, \square 11\square, \square 1\square 1$ 꼴인 경우

1의 옆에는 2, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$$4 \times {}_2P_2 = 4 \times 2^2 = 16$$

② $11\square\square, \square\square 11$ 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2개이고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이므로 경우의 수는

$$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$$

①, ②에서 1이 두 번 나오는 경우의 수는 $16 + 12 = 28$

(iii) 1이 세 번 나오는 경우

1, 1, 1, 2 또는 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 4 = 8$$

(iv) 1이 네 번 나오는 경우

1111의 1개

2단계 경우의 수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $60 + 28 + 8 + 1 = 97$

idea 05 답 20

1단계 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ 의 값이 될 수 있는 수 구하기

$a_n = 1$ 이면 $b_n = 0$ 이고 $a_n = 0$ 이면 $b_n = 1$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6$$

이때 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = k$ ($k \leq 6$)라 하면

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6 - k$$

$$k \geq 6 - k \text{에서 } 2k \geq 6 \quad \therefore k \geq 3$$

이때 $k \leq 6$ 이므로 k 의 값은 3, 4, 5, 6이다.

2단계 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ 의 값에 따라 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수 구하기

$a_1 \geq b_1$ 을 만족시키려면 $a_1 = 1$

(i) $k = 3$ 일 때

① $a_2 = 1$ 인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 0, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우에서 0, 0, 0, 1인 경우를 제외하면 되므로

$$\frac{4!}{3!} - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \leftarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

② $a_2 = 0$ 인 경우

$a_3 = 0$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$ 이므로 $a_3 = 1$

따라서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우에서 0, 0, 1인 경우를 제외하면 되므로

$$\frac{3!}{2!} - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \leftarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

①, ②에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 $3 + 2 = 5$

(ii) $k = 4$ 일 때

① $a_2 = 1$ 인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 1, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

② $a_2 = 0$ 인 경우

$a_3 = 0$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$ 이므로 $a_3 = 1$

따라서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 1, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$

①, ②에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 $6 + 3 = 9$

(iii) $k = 5$ 일 때,

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 1, 1, 1, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{4!} = 5$

(iv) $k = 6$ 일 때,

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 은 (1, 1, 1, 1, 1, 1)의 1개

3단계 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는

$$5 + 9 + 5 + 1 = 20$$

다른 풀이

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6$ 이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = k$ ($k \leq 6$)라 하면

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6 - k$$

$$k \geq 6 - k \text{에서 } 2k \geq 6 \quad \therefore k \geq 3$$

이때 $k \leq 6$ 이므로 k 의 값은 3, 4, 5, 6이다.

$a_1 \geq b_1$ 을 만족시키려면 $a_1 = 1$

6 이하의 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

을 만족시키는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $k = 3$ 일 때,

1, 1, 1, 0, 0, 0을 ①을 만족시키도록 나열

하는 경우의 수와 같으므로 그림과 같은 도

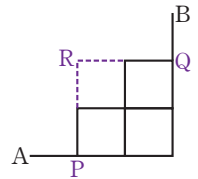
로망에서 오른쪽으로 1칸 가는 것을 1, 위로

1칸 가는 것을 0이라 하면 A에서 B로 가는

최단 경로의 수와 같다.

$$\therefore 1 \times \left(\frac{4!}{2! \times 2!} - 1 \right) \times 1 = 6 - 1 = 5$$

$\leftarrow (P \rightarrow Q \text{로 가는 최단 경로의 수}) - (P \rightarrow R \rightarrow Q \text{로 가는 최단 경로의 수})$



(ii) $k = 4$ 일 때,

1, 1, 1, 1, 0, 0을 ①을 만족시키도록

나열하는 경우의 수와 같으므로 그림

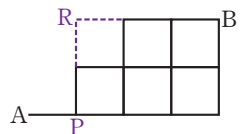
과 같은 도로망에서 오른쪽으로 1칸 가

는 것을 1, 위로 1칸 가는 것을 0이라

하면 A에서 B로 가는 최단 경로의 수와 같다.

$$\therefore 1 \times \left(\frac{5!}{3! \times 2!} - 1 \right) = 10 - 1 = 9$$

$\leftarrow (P \rightarrow B \text{로 가는 최단 경로의 수}) - (P \rightarrow R \rightarrow B \text{로 가는 최단 경로의 수})$



(iii) $k = 5$ 일 때,

1, 1, 1, 1, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{4!} = 5$

(iv) $k = 6$ 일 때, (1, 1, 1, 1, 1, 1)의 1개

(i)~(iv)에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는

$$5 + 9 + 5 + 1 = 20$$

06 답 209

1단계 집합 Y 의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 것끼리 묶기

$f(1) + f(2) + f(3) - f(4) = 3m$ 에서 m 이 정수이므로 $3m$ 은 3의 배수이다.

즉, $f(1) + f(2) + f(3)$ 의 값과 $f(4)$ 의 값을 각각 3으로 나누었을 때의 나머지는 서로 같아야 한다.

이때 집합 Y 의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y 의 부분집합은 $\{3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ 이다.

2단계 $f(4)$ 의 값에 따라 함수 f 의 개수 구하기

(i) $f(4)=3$ 인 경우

집합 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 택한 세 수의 합을 3으로 나누었을 때의 나머지가 0이 되는 경우는

(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (1, 1, 4), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 5, 5), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)

이고, 이 수를 각각 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키는 경우의 수는

$$5 \times \frac{3!}{1!} + 4 \times \frac{3!}{2!} + 4 \times 3! = 5 + 12 + 24 = 41$$

따라서 함수 f 의 개수는 41

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$ 인 경우

집합 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 택한 세 수의 합을 3으로 나누었을 때의 나머지가 1이 되는 경우는

(1, 1, 2), (1, 1, 5), (1, 3, 3), (2, 2, 3), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 5, 5), (4, 4, 5), (1, 2, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 5)

이고, 이 수를 각각 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키는 경우의 수는

$$8 \times \frac{3!}{2!} + 3 \times 3! = 24 + 18 = 42$$

따라서 함수 f 의 개수는 $2 \times 42 = 84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$ 인 경우

집합 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 택한 세 수의 합을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 되는 경우는

(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 5, 5), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (3, 3, 5), (3, 4, 4), (4, 5, 5), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 4, 5)

이고, 이 수를 각각 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키는 경우의 수는

$$8 \times \frac{3!}{2!} + 3 \times 3! = 24 + 18 = 42$$

따라서 함수 f 의 개수는 $2 \times 42 = 84$

3단계 함수 f 의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$41 + 84 + 84 = 209$$

07 답 ②

1단계 x, y, z 의 값에 따라 순서쌍 (x, y, z) 의 개수 구하기

서로 다른 세 자연수 a, b, c 에 대하여

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 0^2 + 0^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $a, 0, 0$ 또는 $-a, 0, 0$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2 = 6$$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + 0^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $a, a, 0$ 또는 $-a, -a, 0$ 또는 $a, -a, 0$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2 + 3! = 6 + 6 = 12$$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + a^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 x, y, z 각각에 a 또는 $-a$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

(iv) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + 0^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $a, b, 0$ 또는 $-a, -b, 0$ 또는 $a, -b, 0$ 또는 $-a, b, 0$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! \times 4 = 6 \times 4 = 24$$

(v) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + b^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 a^2, a^2, b^2 을 일렬로 나열한 후 a^2, a^2, b^2 각각에 $\pm a, \pm a, \pm b$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$$

(vi) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 a^2, b^2, c^2 을 일렬로 나열한 후 a^2, b^2, c^2 각각에 $\pm a, \pm b, \pm c$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$3! \times 2^3 = 6 \times 8 = 48$$

2단계 순서쌍 (x, y, z) 의 개수가 30이 되는 경우 찾기

따라서 방정식 $x^2 + y^2 + z^2 = n$ 을 만족시키는 정수 x, y, z 의 순서쌍

(x, y, z) 의 개수가 30이 되려면

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 0^2 + 0^2 \text{과 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + 0^2$$

$$\text{또는 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 0^2 + 0^2 \text{과 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + b^2$$

꼴로 동시에 표현되어야 한다.

3단계 모든 n 의 값의 합 구하기

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 0^2 + 0^2$ 에서 $n = a^2$ 이고, n 은 50 이하의 자연수이므로 n 의 값은 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49이다.

이때 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + 0^2$ 꼴로 표현될 수 있는 자연수는 25이고,

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + b^2$ 꼴로 표현될 수 있는 자연수는 9, 36이므로 구하는 모든 n 의 값의 합은

$$25 + 9 + 36 = 70$$

08 답 ②

1단계 a_i 의 값에 따라 자연수의 개수 구하기

$a_{i+1} - a_i = b_i (i=1, 2, 3)$ 라 하면 $a_2 - a_1 = b_1, a_3 - a_2 = b_2, a_4 - a_3 = b_3$

이므로 $0 < a_2 - a_1 \leq 3, 0 < a_3 - a_2 \leq 3, 0 < a_4 - a_3 \leq 3$ 에서

$$0 < b_1 \leq 3, 0 < b_2 \leq 3, 0 < b_3 \leq 3$$

즉, b_1, b_2, b_3 은 3 이하의 자연수이다.

또 $a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = a_4$ 이고 $a_4 \leq 9$ 이므로

$$a_1 + b_1 + b_2 + b_3 \leq 9 \quad \text{..... ①} \quad \text{천의 자리의 숫자는 9 이하이다.}$$

네 자리의 자연수의 개수는 부등식 ①을 만족시키는 순서쌍 (a_1, b_1, b_2, b_3) 의 개수와 같다.

(i) $a_1=0$ 일 때,

①에서 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 9$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 $3\Pi_3 = 3^3 = 27$

(ii) $a_1=1$ 일 때,

①에서 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 8$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 은 (i)에서 구한 순서쌍에서 (3, 3, 3)을 제외하면 되므로 그 개수는 $27 - 1 = 26$

(iii) $a_1=2$ 일 때,

①에서 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 7$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 (ii)에서 구한 순서쌍의 개수에서 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수를 제외하면 되므로

$$26 - \frac{3!}{2!} = 26 - 3 = 23$$

(iv) $a_1=3$ 일 때,

①에서 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 6$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 (iii)에서 구한 순서쌍의 개수에서 1, 3, 3 또는 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수를 제외하면 되므로

$$23 - \frac{3!}{2!} \times 2 = 23 - 6 = 17$$

(v) $a_1=4$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 5$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 1, 1, 1 또는 1, 1, 2 또는 1, 1, 3 또는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
 $1 + \frac{3!}{2!} \times 3 = 1 + 9 = 10$

(vi) $a_1=5$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 4$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 1, 1, 1 또는 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
 $1 + \frac{3!}{2!} = 1 + 3 = 4$

(vii) $a_1=6$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 3$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 은 (1, 1, 1)의 1개

2단계 자연수의 개수 구하기

(i)~(vii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$27 + 26 + 23 + 17 + 10 + 4 + 1 = 108$$

09 답 132

1단계 이동 경로의 길이가 4인 경우의 수 구하기

(i) 이동 경로의 길이가 4인 경우

그림에서 \ 방향으로 2번, / 방향으로 2번 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

이와 같은 경로로 이동할 수 있는 면이 4개이고, 모서리를 따라 이동하는 경우는 경로가 중복되므로 이동 경로의 길이가 4인 경우의 수는

$$6 \times 4 - 4 = 20$$



2단계 이동 경로의 길이가 5인 경우의 수 구하기

(ii) 이동 경로의 길이가 5인 경우

이동 경로에 가로로 1칸 이동하는 경우가 1번 포함되어야 한다.

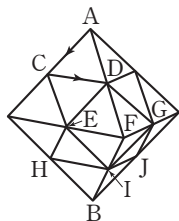
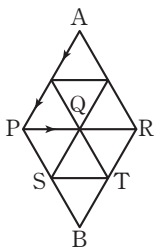
㉠ 정팔면체의 모서리에서 가로로 1칸 이동하는 경우

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우는 그림에서 $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow B$,
 $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow B$ 의 2가지
 $A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$, $A \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow B$,
 $A \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우도 같은 방법으로 하면 각각 2가지

이때 이와 같은 경로로 이동할 수 있는 면이 4개이므로 경로의 수는 $(2+2+2+2) \times 4 = 32$

㉡ 한 면 안에서 가로로 1칸 이동하는 경우

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ 로 이동하는 경우는 그림에서 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow B$,
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow B$,
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow B$,
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow B$,
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow B$ 의 5가지
 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, $A \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow B$,
 $A \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow B$ 로 이동하는 경우도 같은 방법으로 하면 각각 5가지



이때 이와 같은 경로로 이동할 수 있는 면이 4개이므로 경로의 수는 $(5+5+5+5) \times 4 = 80$

㉠, ㉡에서 이동 경로의 길이가 5인 경우의 수는

$$32 + 80 = 112$$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

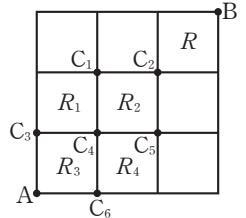
$$20 + 112 = 132$$

10 답 40

1단계 조건을 만족시키는 경우 구하기

그림과 같이 6개의 지점 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 을 잡고 4개의 정사각형을 R_1, R_2, R_3, R_4 라 하자.

이때 (가)를 만족시키려면 $A \rightarrow C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ 로 이동해야 하고 (나)를 만족시키려면 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.



2단계 각각의 경우의 수 구하기

(i) $C_2 \rightarrow B, B \rightarrow C_2$ 로 이동하는 경우

정사각형 R 의 모든 변을 다 지나야 하므로

(C_2 지점에서 B 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (B 지점에서 C_2 지점으로 이동하는 경우의 수)

$$= 2 \times 1 = 2$$

(ii) $A \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우

(A 지점에서 C_2 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (C_2 지점에서 A 지점으로 이동하는 경우의 수)

$$= \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$= 6 \times 6 = 36$$

㉠ 정사각형 R_1 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$$

㉡ 정사각형 R_2 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (1 \times 2) = 8$$

㉢ 정사각형 R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (2 \times 1) = 8$$

㉣ 정사각형 R_4 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_6 \rightarrow C_5 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_5 \rightarrow C_6 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$$

㉤ 정사각형 R_2, R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (1 \times 1) = 4$$

㉠~㉤에서 $A \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow A$ 로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는

$$36 - \{(2+8+8+2)-4\} = 20$$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 20 = 40$$

step 1 핵심 문제

| 26~27쪽

01 ③ 02 20 03 ③ 04 27 05 21 06 ⑤
 07 100 08 120 09 ④ 10 ④ 11 ① 12 ②

01 답 ③

서로 다른 5개의 문자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

$(a+b+c+d+e)^{10}$ 의 전개식에서 3종류의 문자로 이루어진 서로 다른 항의 개수는 $(x+y+z)^{10}$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$10 \times 66 = 660$$

02 답 20

전화기가 놓인 책상을 ●, 전화기가 놓이지 않은 책상을 ○라 하자.

전화기가 놓인 책상 사이에 2개의 빈 책상 _____ ●○○●○○●_____

상을 놓은 후 그림의 밑줄 친 네 부분에

서 남은 3개의 책상을 놓을 세 부분을 중복을 허락하여 택하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

03 답 ③

3명의 학생 중에서 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

1명의 학생이 3가지 색의 카드를 각각 1장씩 갖고 남은 빨간색 카드 3장, 파란색 카드 1장을 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 빨간색 카드 3장을 중복을 허락하여 3명의 학생에게 나누어 주고 파란색 카드 1장을 받을 학생 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3C_1 = {}_6C_3 \times 3 = {}_5C_2 \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 30 = 90$$

04 답 27

음료수, 사탕, 초콜릿을 각각 1개씩 먼저 택하고 나머지 7개를 음료수, 사탕, 초콜릿 중에서 중복을 허락하여 택하는 경우의 수는

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36 \quad \dots \text{배점 30\%}$$

이때 같은 종류는 최대 6개까지만 넣어야 하므로 같은 종류의 간식을 6개 이상은 더 넣을 수 없다.

나머지 7개 중에서 같은 종류의 간식이 6개인 경우의 수는 3종류의 간식 중에서 각각 6개, 1개를 택하는 2종류의 간식을 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3P_2 = 6 \quad \dots \text{배점 30\%}$$

나머지 7개가 모두 같은 종류의 간식인 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3 \quad \dots \text{배점 20\%}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$36 - (6 + 3) = 27 \quad \dots \text{배점 20\%}$$

05 답 21

(가)에서 $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ 이므로 $a' = a - 1, b' = b - 2, c' = c - 3$ 이라 하면 a', b', c' 은 음이 아닌 정수이다.

이때 (나)의 $a + b + c = 11$ 에서

$$(a' + 1) + (b' + 2) + (c' + 3) = 11$$

$$\therefore a' + b' + c' = 5 \quad (\text{단, } a', b', c' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

06 답 ⑤

a, b, c, d, e 가 자연수이므로 $(a+b)(c+d+e) = 21$ 에서

$$a+b=3, c+d+e=7 \text{ 또는 } a+b=7, c+d+e=3$$

이때 a, b, c, d, e 가 자연수이므로 $a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1,$

$d' = d - 1, e' = e - 1$ 이라 하면 a', b', c', d', e' 은 음이 아닌 정수이다.

(i) $a+b=3, c+d+e=7$ 일 때,

$$(a' + 1) + (b' + 1) = 3, (c' + 1) + (d' + 1) + (e' + 1) = 7$$

$$\therefore a' + b' = 1, c' + d' + e' = 4 \quad (\text{단, } a', b', c', d', e' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 두 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e' 의 순서쌍 (a', b', c', d', e') 의 개수와 같으므로

$${}_2H_1 \times {}_3H_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 2 \times {}_6C_2 = 2 \times 15 = 30$$

(ii) $a+b=7, c+d+e=3$ 일 때,

$$(a' + 1) + (b' + 1) = 7, (c' + 1) + (d' + 1) + (e' + 1) = 3$$

$$\therefore a' + b' = 5, c' + d' + e' = 0 \quad (\text{단, } a', b', c', d', e' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 두 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e' 의 순서쌍 (a', b', c', d', e') 의 개수와 같으므로

$${}_2H_5 \times {}_3H_0 = {}_6C_5 \times {}_2C_0 = {}_6C_1 \times 1 = 6 \times 1 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$30 + 6 = 36$$

07 답 100

네 자리 자연수의 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d 라 하면 3000보다 작은 네 자리 자연수의 각 자리의 수의 합이 10이므로 $1 \leq a \leq 2$ 이고 $a+b+c+d=10$

(i) $a=1$ 일 때,

$$a+b+c+d=10 \text{에서}$$

$$b+c+d=9$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d 의 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(ii) $a=2$ 일 때,

$$a+b+c+d=10 \text{에서}$$

$$b+c+d=8$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d 의 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는

$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$55 + 45 = 100$$

08 답 120

(다)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 1, 3, 5, 7 중 하나이고, $f(2), f(4)$ 의 값은 2, 4, 6 중 하나이다.

(ㄷ)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 1, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 그 값이 작거나 같은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(나)에서 $f(2), f(4)$ 의 값은 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 그 값이 작거나 같은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$20 \times 6 = 120$$

09 답 ④

$\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{10-r} \left(\frac{a}{x^3}\right)^r = {}_{10}C_r a^r x^{10-4r}$$

x^2 항은 $10-4r=2$ 일 때이므로 $r=2$

이때 x^2 의 계수가 90이므로

$${}_{10}C_2 \times a^2 = 90$$

$$45a^2 = 90 \quad \therefore a^2 = 2$$

$\frac{1}{x^6}$ 항은 $10-4r=-6$ 일 때이므로 $r=4$

따라서 $\frac{1}{x^6}$ 의 계수는

$${}_{10}C_4 \times a^4 = 210 \times (a^2)^2 = 210 \times 2^2 = 840$$

10 답 ④

$\left(3x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (3x^2)^{n-r} \left(\frac{2}{x^3}\right)^r = {}_nC_r 3^{n-r} 2^r x^{2n-5r}$$

x^3 항이 존재하려면 $2n-5r=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 r 가 존재해야 한다.

이때 $r = \frac{2n-3}{5}$ 이므로 $2n-3$ 은 5의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

11 답 ①

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$

$(1+x^3)^6$ 의 전개식의 일반항은 ${}_6C_s (x^3)^s = {}_6C_s x^{3s}$

따라서 $(1+x)^n(1+x^3)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^r \times {}_6C_s x^{3s} = {}_nC_r \times {}_6C_s x^{r+3s}$$

x^3 항은 $r+3s=3$ (r, s 는 각각 $0 \leq r \leq n, 0 \leq s \leq 6$ 인 정수)이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s)는 (0, 1), (3, 0)

이때 x^3 의 계수가 41이므로

$${}_nC_0 \times {}_6C_1 + {}_nC_3 \times {}_6C_0 = 41$$

$$6 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 41$$

$$n(n-1)(n-2) = 210$$

따라서 $210 = 7 \times 6 \times 5$ 이므로

$$n = 7$$

12 답 ②

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$ 의 양변에 $x=-9, n=6$ 을 대입하면

$$(1-9)^6 = {}_6C_0 - 9{}_6C_1 + 9^2{}_6C_2 - 9^3{}_6C_3 + \cdots + 9^6{}_6C_6$$

$$\therefore {}_6C_0 - 9{}_6C_1 + 9^2{}_6C_2 - 9^3{}_6C_3 + \cdots + 9^6{}_6C_6 = (-8)^6 = (-2^3)^6 = 2^{18}$$

$$\therefore n = 18$$

step 2 고난도 문제

| 28~32쪽

01 ①	02 ③	03 96	04 96	05 114	06 162
07 ④	08 49	09 135	10 69	11 168	12 398
13 120	14 ④	15 440	16 ③	17 80	18 35
19 126	20 ②	21 65	22 115	23 14	24 ⑤
25 6	26 ④	27 ③	28 ①	29 ④	

01 답 ①

버터맛 쿠키 4개, 초코맛 쿠키 3개, 아몬드맛 쿠키 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_3H_4 \times {}_3H_3 \times {}_3H_2 &= {}_6C_4 \times {}_5C_3 \times {}_4C_2 \\ &= {}_6C_2 \times {}_5C_2 \times 6 \\ &= 15 \times 10 \times 6 \\ &= 900 \end{aligned}$$

이때 1명의 학생이 쿠키를 받지 못하거나 2명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우를 제외해야 한다.

(i) 1명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우

3명의 학생 중에서 쿠키를 하나도 받지 못하는 1명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

버터맛 쿠키 4개, 초코맛 쿠키 3개, 아몬드맛 쿠키 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_4 \times {}_2H_3 \times {}_2H_2 &= {}_5C_4 \times {}_4C_3 \times {}_3C_2 \\ &= {}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \\ &= 5 \times 4 \times 3 \\ &= 60 \end{aligned}$$

이때 모든 쿠키를 1명의 학생에게만 주는 경우의 수가 2이므로 1명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우의 수는

$$3 \times (60 - 2) = 174$$

(ii) 2명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우

쿠키를 1명의 학생에게 모두 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에서 쿠키를 받지 못하는 학생이 존재하는 경우의 수는

$$174 + 3 = 177$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$900 - 177 = 723$$

02 답 ③

빨간 구슬 3개를 먼저 나열한 후 그 사이사이 ㉠ ㉡ ㉢ ㉣ ㉤ ㉥ ㉦와 양 끝의 4개의 자리를 차례로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣이라 하자.

이때 ㉡, ㉣에 파란 구슬을 홀수 개 나열하고, 남은 파란 구슬을 ㉠, ㉤에 나누어 나열하면 된다.

(i) ㉠, ㉤에 각각 파란 구슬 1개를 나열하는 경우

㉠, ㉤의 2개의 자리에 중복을 허락하여 남은 5개의 파란 구슬을 나열하는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(ii) ㉡에 파란 구슬 1개, ㉣에 파란 구슬 3개를 나열하는 경우

㉠, ㉤의 2개의 자리에 중복을 허락하여 남은 3개의 파란 구슬을 나열하는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) ㉡에 파란 구슬 1개, ㉣에 파란 구슬 5개를 나열하는 경우

㉠, ㉤의 2개의 자리에 남은 1개의 파란 구슬을 나열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

(iv) ㉡에 파란 구슬 3개, ㉣에 파란 구슬 1개를 나열하는 경우

㉠, ㉤의 2개의 자리에 중복을 허락하여 남은 3개의 파란 구슬을 나열하는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(v) ㉡에 파란 구슬 3개, ㉣에 파란 구슬 3개를 나열하는 경우

㉠, ㉤의 2개의 자리에 남은 1개의 파란 구슬을 나열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

(vi) ㉡에 파란 구슬 5개, ㉣에 파란 구슬 1개를 나열하는 경우

㉠, ㉤의 2개의 자리에 남은 1개의 파란 구슬을 나열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 = 20$$

03 답 96

(가)에서 $abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

a, b, c 의 3개의 숫자에서 2를 인수로 갖는 2개의 숫자를 중복을 허락하여 택하는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

a, b, c 의 3개의 숫자에서 3을 인수로 갖는 2개의 숫자를 중복을 허락하여 택하는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

a, b, c 의 3개의 숫자에서 5를 인수로 갖는 1개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

따라서 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$6 \times 6 \times 3 = 108$$

(나)에서 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수에서 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ 인 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 뺀 것과 같다.

이때 $a=b=c$ 인 경우는 존재하지 않고 a, b, c 중에서 두 수가 같은 순서쌍 (a, b, c) 는

$(1, 1, 180), (2, 2, 45), (3, 3, 20), (6, 6, 5),$

$(1, 180, 1), (2, 45, 2), (3, 20, 3), (6, 5, 6),$

$(180, 1, 1), (45, 2, 2), (20, 3, 3), (5, 6, 6)$

의 12개이다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $108 - 12 = 96$

04 답 96

(가)를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4 의 값으로 정하면 되므로 그 개수는

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$$

(나)를 만족시키는 순서쌍의 개수는 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수에서 $a_1 \times a_4$ 의 값이 홀수인 순서쌍의 개수를 빼면 된다.

$a_1 \times a_4$ 의 값이 홀수이려면 a_1, a_4 의 값이 모두 홀수이어야 한다.

(i) $a_1 = a_4$ 일 때,

순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 는 $(1, 1, 1, 1), (3, 3, 3, 3), (5, 5, 5, 5)$ 의 3개이다.

(ii) $a_1 < a_4$ 일 때

① 순서쌍 (a_1, a_4) 가 $(1, 3)$ 일 때,

a_2, a_3 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

② 순서쌍 (a_1, a_4) 가 $(1, 5)$ 일 때,

a_2, a_3 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

③ 순서쌍 (a_1, a_4) 가 $(3, 5)$ 일 때,

a_2, a_3 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

①, ②, ③에서 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$$6 + 15 + 6 = 27$$

(i), (ii)에서 $a_1 \times a_4$ 의 값이 홀수인 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$$3 + 27 = 30$$

따라서 구하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는

$$126 - 30 = 96$$

05 답 114

(i) 검은색 볼펜을 1자루 선택하는 경우

① 검은색 볼펜 1자루와 다른 한 종류의 볼펜 4자루를 선택하는 경우 다른 한 종류의 볼펜을 선택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1 \times {}_2H_4 = {}_2C_1 \times {}_5C_4 = 2 \times {}_5C_1 = 2 \times 5 = 10$$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 10 = 20$$

② 검은색 볼펜 1자루와 파란색, 빨간색 볼펜을 각각 2자루씩 선택하는 경우

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_1 \times {}_2H_2 \times {}_2H_2 &= {}_2C_1 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2 \\ &= 2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 \\ &= 2 \times 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

③ 검은색 볼펜 1자루와 다른 종류의 볼펜을 각각 1자루, 3자루 선택하는 경우

파란색 볼펜과 빨간색 볼펜 중에서 1자루를 선택하는 볼펜의 종류를 선택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_1 \times {}_2H_1 \times {}_2H_3 &= {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_3 \\ &= 2 \times 2 \times {}_4C_1 \\ &= 2 \times 2 \times 4 = 16 \end{aligned}$$

따라서 그 경우의 수는 $2 \times 16 = 32$

①, ②, ③에서 검은색 볼펜을 1자루 선택하는 경우의 수는

$$20 + 18 + 32 = 70$$

(ii) 검은색 볼펜을 선택하지 않는 경우

① 검은색 볼펜을 제외한 나머지 두 종류의 볼펜을 각각 1자루, 4자루 선택하는 경우

파란색 볼펜과 빨간색 볼펜 중에서 1자루를 선택하는 볼펜의 종류를 선택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1 \times {}_2H_4 = {}_2C_1 \times {}_5C_4 = 2 \times {}_5C_1 = 2 \times 5 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $2 \times 10 = 20$

② 검은색 볼펜을 제외한 나머지 두 종류의 볼펜을 각각 2자루, 3자루 선택하는 경우

파란색 볼펜과 빨간색 볼펜 중에서 2자루를 선택하는 볼펜의 종류를 선택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_2H_3 = {}_3C_2 \times {}_4C_3 = {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$$

따라서 그 경우의 수는 $2 \times 12 = 24$

①, ②에서 검은색 볼펜을 선택하지 않는 경우의 수는

$$20 + 24 = 44$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$70 + 44 = 114$$

06 답 162

(i) 색깔의 변화가 2번 일어나는 경우

① (흰 공-검은 공-흰 공)의 순서로 나열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 2개의 흰 공을 중복을 허락하여 흰 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

검은 공이 놓이는 자리에 7개의 검은 공을 모두 놓는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 1 = 3$

② (검은 공-흰 공-검은 공)의 순서로 나열하는 경우

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 5개의 검은 공을 중복을 허락하여 검은 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

흰 공이 놓이는 자리에 4개의 흰 공을 모두 놓는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 1 = 6$

①, ②에서 색깔의 변화가 2번 일어나는 경우의 수는

$$3 + 6 = 9$$

(ii) 색깔의 변화가 4번 일어나는 경우

① (흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공)의 순서로 나열하는 경우
흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 1개의 흰 공을 흰 공이 놓이는 자리 중 한 곳에 놓는 경우의 수는 3

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 5개의 검은 공을 중복을 허락하여 검은 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

② (검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공)의 순서로 나열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 2개의 흰 공을 중복을 허락하여 흰 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 4개의 검은 공을 중복을 허락하여 검은 공이 놓이는 세 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

①, ②에서 색깔의 변화가 4번 일어나는 경우의 수는

$$18 + 45 = 63$$

(iii) 색깔의 변화가 6번 일어나는 경우

① (흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공)의 순서로 나열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 놓는 경우의 수는 1

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 4개의 검은 공을 중복을 허락하여 검은 공이 놓이는 세 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $1 \times 15 = 15$

② (검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공)의 순서로 나열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 1개의 흰 공을 흰 공이 놓이는 자리 중 한 곳에 놓는 경우의 수는 3

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 3개의 검은 공을 중복을 허락하여 검은 공이 놓이는 네 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 20 = 60$

①, ②에서 색깔의 변화가 6번 일어나는 경우의 수는

$$15 + 60 = 75$$

(iv) 색깔의 변화가 8번 일어나는 경우

(검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공)의 순서로 나열해야 한다.

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 놓는 경우의 수는 1

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 2개의 검은 공을 중복을 허락하여 검은 공이 놓이는 다섯 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 색깔의 변화가 8번 일어나는 경우의 수는

$$1 \times 15 = 15$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$9 + 63 + 75 + 15 = 162$$

07 답 ④

(가)를 만족시키려면 3개의 상자에 빨간 공을 1개씩 먼저 넣고, 남은 빨간 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(나)를 만족시키는 경우의 수는 파란 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 모든 경우의 수에서 각 상자에 적어도 1개의 파란 공을 넣는 경우의 수를 빼면 된다.

파란 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

이때 각 상자에 적어도 1개의 파란 공을 넣는 경우의 수는 3개의 상자에 파란 공을 1개씩 먼저 넣고, 남은 파란 공 1개를 3개의 상자 중 1개의 상자에 넣는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1 = 3$

즉, (나)를 만족시키는 경우의 수는 $15 - 3 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 12 = 180$$

08 답 49

(i) 여학생이 연필을 각각 1자루씩 받는 경우

① 남학생이 볼펜을 각각 1자루씩 받는 경우

여학생 3명에게 남은 볼펜 2자루, 남학생 2명에게 남은 연필 4자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 \times {}_2H_4 = {}_4C_2 \times {}_5C_4 = 6 \times {}_5C_1 = 6 \times 5 = 30$$

② 남학생이 볼펜을 각각 2자루씩 받는 경우

남학생 2명에게 남은 연필 4자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

①, ②에서 그 경우의 수는 $30 + 5 = 35$

(ii) 여학생이 연필을 각각 2자루씩 받는 경우

① 남학생이 볼펜을 각각 1자루씩 받는 경우

여학생 3명에게 남은 볼펜 2자루, 남학생 2명에게 남은 연필 1자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 \times {}_2C_1 = {}_4C_2 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

② 남학생이 볼펜을 각각 2자루씩 받는 경우

남학생 2명에게 남은 연필 1자루를 주는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

①, ②에서 그 경우의 수는 $12 + 2 = 14$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$35 + 14 = 49$$

09 답 135

(i) 2명의 학생이 사과를 받는 경우

사과를 받을 2명의 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

2명의 학생에게 사과를 1개씩 먼저 주고, 남은 사과 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 귤 1개를 사과를 받지 못한 학생 1명에게 주고, 남은 귤 3개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 3 \times 10 = 90$ 배점 40%

(ii) 3명의 학생이 사과를 받는 경우

3명의 학생에게 사과를 1개씩 먼저 주고, 남은 사과 1개를 3명의 학생 중 1명에게 주는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

귤 4개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$ 배점 40%

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$90 + 45 = 135 \text{배점 20\%}$$

idea

10 답 69

(가), (나)에 의하여 주머니 A에는 딸기우유가 반드시 들어간다.

따라서 먼저 주머니 A에 딸기우유를 1개 넣고 남은 딸기우유 3개, 바나나우유 3개를 3개의 주머니에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_3 = {}_5C_3 \times {}_5C_3 = {}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

이때 주머니 B 또는 주머니 C가 비어 있는 경우는 제외해야 한다.

(i) 주머니 B가 비어 있는 경우

남은 딸기우유 3개, 바나나우유 3개를 주머니 A, C에 나누어 넣는 경우이므로 그 경우의 수는

$${}_2H_3 \times {}_2H_3 = {}_4C_3 \times {}_4C_3 = {}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

(ii) 주머니 C가 비어 있는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 16

(iii) 주머니 B, C가 모두 비어 있는 경우

남은 딸기우유 3개, 바나나우유 3개를 모두 주머니 A에 넣는 경우이므로 그 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 주머니 B 또는 주머니 C가 비어 있는 경우의 수는

$$16 + 16 - 1 = 31$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$100 - 31 = 69$$

11 답 168

세 상자에 흰 공 4개를 나누어 넣는 경우 각 상자에 들어가는 흰 공의 개수는

$$4, 0, 0 \text{ 또는 } 3, 1, 0 \text{ 또는 } 2, 2, 0 \text{ 또는 } 2, 1, 1$$

(i) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 4, 0, 0인 경우

세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 4개를 넣을 1개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 2개의 빈 상자에 검은 공을 각각 2개씩 넣은 후 남은 검은 공 2개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

(ii) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 3, 1, 0인 경우

세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 3개, 1개를 넣을 2개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 1개 들어 있는 상자에 검은 공 1개를, 빈 상자에 검은 공 2개를 넣은 후 남은 검은 공 3개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 10 = 60$

(iii) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 2, 0인 경우

세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 2개를 넣을 2개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 빈 상자에 검은 공 2개를 넣은 후 남은 검은 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

(iv) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 1, 1인 경우

한 상자에 흰 공 2개를 넣으면 나머지 두 상자에 흰 공이 각각 1개씩 들어가므로 세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 2개를 넣을 1개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 1개 들어 있는 두 상자에 검은 공을 각각 1개씩 넣은 후 남은 검은 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$18 + 60 + 45 + 45 = 168$$

12 답 398

a, b, c, d 는 모두 홀수이므로

$$a = 2a' + 1, b = 2b' + 1, c = 2c' + 1 \quad (a', b', c' \text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면 (㉠)의 $21 \leq a + b + c \leq 25$ 에서

$$21 \leq (2a' + 1) + (2b' + 1) + (2c' + 1) \leq 25$$

$$\therefore 9 \leq a' + b' + c' \leq 11$$

(i) $a' + b' + c' = 9$ 일 때,

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(ii) $a' + b' + c' = 10$ 일 때,

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

(iii) $a' + b' + c' = 11$ 일 때,

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_{11} = {}_{13}C_{11} = {}_{13}C_2 = 78$$

(i), (ii), (iii)에서 (㉠)을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$55 + 66 + 78 = 199$$

이때 (㉡)에서 $d = c$ 또는 $d = c + 2$ 이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$2 \times 199 = 398$$

13 답 120

$|a - b| \geq 0$ 이므로 (㉠)에서

$$|a - b| = 0 \text{ 또는 } |a - b| = 1 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

(i) $|a - b| = 0$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ 의 4개이다.

이때 (㉡)에서 $c + d + e = 5$ 이므로 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$4 \times 21 = 84 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $|a - b| = 1$ 일 때,

$$a - b = 1 \text{ 또는 } a - b = -1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)$ 의 6개이다.

이때 (㉡)에서 $c + d + e = 2$ 이므로 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$6 \times 6 = 36 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$84 + 36 = 120 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

14 답 ④

$$(㉠)에서 -2 \leq a - b + c - d + e \leq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

(㉡)에서 $a + b + c + d + e = 10$ 이므로 ㉠의 각 변에 $a + b + c + d + e$ 를 더하면

$$8 \leq 2a + 2c + 2e \leq 12$$

$$\therefore 4 \leq a + c + e \leq 6$$

(i) $a + c + e = 4$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, c, e) \text{의 개수는 } {}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

$$(㉡)에서 b + d = 6 \text{이므로 순서쌍 } (b, d) \text{의 개수는 } {}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $15 \times 7 = 105$

(ii) $a + c + e = 5$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, c, e) \text{의 개수는 } {}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

$$(㉡)에서 b + d = 5 \text{이므로 순서쌍 } (b, d) \text{의 개수는 } {}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $21 \times 6 = 126$

(iii) $a + c + e = 6$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, c, e) \text{의 개수는 } {}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

$$(㉡)에서 b + d = 4 \text{이므로 순서쌍 } (b, d) \text{의 개수는 } {}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $28 \times 5 = 140$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$105 + 126 + 140 = 371$$

15 답 440

$|a| = A, |b| = B, |c| = C, |d| = D$ 로 놓으면 (㉠)에서

$$A + B + C + D = 10 \quad \dots\dots ㉠$$

(㉡)에서 $A \geq 3, B \geq 2, C \geq 1$ 이고 $D \geq 0$ 이므로

$$A' = A - 3, B' = B - 2, C' = C - 1 \text{이라 하면 } ㉠ \text{에서}$$

$$(A' + 3) + (B' + 2) + (C' + 1) + D = 10$$

$$\therefore A' + B' + C' + D = 4 \quad (\text{단, } A', B', C', D \text{는 음이 아닌 정수})$$

$$\dots\dots ㉡$$

(i) $D = 0$ 일 때,

$$㉡ \text{에서 } A' + B' + C' = 4$$

순서쌍 (A, B, C, D) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A', B', C' 의 순서쌍 (A', B', C') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

이때 각각의 A, B, C 에 대하여 a, b, c 의 값은 음의 정수 또는 양의 정수가 될 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$15 \times 2^3 = 120$$

(ii) $D \geq 1$ 일 때,

$$D' = D - 1 \text{이라 하면 } ㉡ \text{에서}$$

$$A' + B' + C' + (D' + 1) = 4$$

$$\therefore A' + B' + C' + D' = 3 \quad (\text{단, } A', B', C', D' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 순서쌍 (A, B, C, D) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A', B', C', D' 의 순서쌍 (A', B', C', D') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

이때 각각의 A, B, C, D 에 대하여 a, b, c, d 의 값은 음의 정수 또는 양의 정수가 될 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$20 \times 2^4 = 320$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$120 + 320 = 440$$

16 답 ③

3의 배수가 아닌 세 자연수를 더하여 15, 즉 3의 배수가 되려면 더하는 세 수를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 서로 같아야 한다.

(i) x, y, z 를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 모두 1인 경우
 $x=3x'+1, y=3y'+1, z=3z'+1$ (x', y', z' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=15$ 에서

$$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+1)=15$$

$$\therefore x'+y'+z'=4$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

(ii) x, y, z 를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 모두 2인 경우
 $x=3x'+2, y=3y'+2, z=3z'+2$ (x', y', z' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=15$ 에서

$$(3x'+2)+(3y'+2)+(3z'+2)=15$$

$$\therefore x'+y'+z'=3$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$15+10=25$$

17 답 80

네 자리의 자연수의 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d 라 하면 ㉔에서

$$a+b+c+d < 8$$

$$\therefore a+b+c+d \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

이때 ㉔에서 $a \geq 1$ 이고 d 는 1, 3, 5이다.

$a'=a-1$ 이라 하면 ㉕에서

$$(a'+1)+b+c+d \leq 7$$

$$\therefore a'+b+c+d \leq 6 \quad (\text{단, } a', b, c \text{는 음이 아닌 정수, } d=1, 3, 5) \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

(i) $d=1$ 일 때,

$$\textcircled{㉖} \text{에서 } a'+b+c+1 \leq 6$$

$$\therefore a'+b+c \leq 5$$

㉑ $a'+b+c=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

㉒ $a'+b+c=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

㉓ $a'+b+c=3$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

㉔ $a'+b+c=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

㉕ $a'+b+c=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_1={}_3C_1=3$$

㉖ $a'+b+c=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는 1

㉑~㉖에서 $d=1$ 일 때 자연수의 개수는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수와 같으므로

$$21+15+10+6+3+1=56$$

(ii) $d=3$ 일 때,

$$\textcircled{㉖} \text{에서 } a'+b+c+3 \leq 6$$

$$\therefore a'+b+c \leq 3$$

㉑ $a'+b+c=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

㉒ $a'+b+c=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

㉓ $a'+b+c=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_1={}_3C_1=3$$

㉔ $a'+b+c=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는 1

㉑~㉔에서 $d=3$ 일 때 자연수의 개수는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수와 같으므로

$$10+6+3+1=20$$

(iii) $d=5$ 일 때,

$$\textcircled{㉖} \text{에서 } a'+b+c+5 \leq 6$$

$$\therefore a'+b+c \leq 1$$

㉑ $a'+b+c=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_1={}_3C_1=3$$

㉒ $a'+b+c=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는 1

㉑, ㉒에서 $d=5$ 일 때 자연수의 개수는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 순서쌍 (a', b, c) 의 개수와 같으므로

$$3+1=4$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는 $56+20+4=80$

다른 풀이

(i) $d=1$ 일 때,

$$\textcircled{㉖} \text{에서 } a'+b+c+1 \leq 6$$

$$\therefore a'+b+c \leq 5$$

이때 $a'+b+c=5-e$ (e 는 $0 \leq e \leq 5$ 인 정수)로 놓으면

$$a'+b+c+e=5$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c, e 의 순서쌍 (a', b, c, e) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$$

(ii) $d=3$ 일 때,

$$\textcircled{㉖} \text{에서 } a'+b+c+3 \leq 6$$

$$\therefore a'+b+c \leq 3$$

이때 $a'+b+c=3-f$ (f 는 $0 \leq f \leq 3$ 인 정수)로 놓으면

$$a'+b+c+f=3$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c, f 의 순서쌍 (a', b, c, f) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

(iii) $d=5$ 일 때,

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a' + b + c + 5 \leq 6$$

$$\therefore a' + b + c \leq 1$$

이때 $a' + b + c = 1 - g$ (g 는 $0 \leq g \leq 1$ 인 정수)로 놓으면

$$a' + b + c + g = 1$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌

정수 a', b, c, g 의 순서쌍 (a', b, c, g) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$56 + 20 + 4 = 80$$

18 답 35

A역과 첫 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 a , 첫 번째 정차한 역과 두 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 b , 두 번째 정차한 역과 세 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 c , 세 번째 정차한 역과 B역 사이의 역의 개수를 d 라 하자.

두 기차역 A, B 사이에 10개의 역이 있으므로

$$a + b + c + d + 3 = 10$$

$$\therefore a + b + c + d = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 a, b, c, d 는 음이 아닌 정수이고, $\textcircled{㉠}$ 에서 $b \geq 1$, $\textcircled{㉠}$ 에서 $c \geq 2$ 이므로 $b' = b - 1$, $c' = c - 2$ 라 하면 $\textcircled{㉠}$ 에서

$$a + (b' + 1) + (c' + 2) + d = 7$$

$$\therefore a + b' + c' + d = 4 \quad (\text{단, } a, b', c', d \text{는 음이 아닌 정수})$$

따라서 구하는 경우의 수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d 의 순서쌍 (a, b', c', d) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

19 답 126

$f(1) < f(2) \leq f(3) \leq f(4) < f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수에서

$f(1) = f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 또는

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) = f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수를 빼면 된다.

(i) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

집합 Y 의 원소 7개 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$${}_7H_5 = {}_{11}C_5 = 462$$

(ii) $f(1) = f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

집합 Y 의 원소 7개 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = 210$$

(iii) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) = f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

(ii)와 같은 방법으로 하면 함수의 개수는 210

(iv) $f(1) = f(2) \leq f(3) \leq f(4) = f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

집합 Y 의 원소 7개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$462 - (210 + 210 - 84) = 126$$

20 답 ②

$$f(3) \leq 7 \text{이므로 } \textcircled{㉠} \text{에서 } 2f(6) \leq 7$$

$$f(6) \leq \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(6) = 2 \text{ 또는 } f(6) = 3$$

(i) $f(6) = 2$ 일 때,

$\textcircled{㉠}$ 에서 $f(3) = 4$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$f(2) \geq 4 \geq f(4) \geq f(5) \geq 2 \geq f(7)$$

$f(3)$

$f(6)$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6, 7의 4가지

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$f(7)$ 의 값이 될 수 있는 수는 2의 1가지

따라서 함수의 개수는

$$4 \times 6 \times 1 = 24$$

(ii) $f(6) = 3$ 일 때,

$\textcircled{㉠}$ 에서 $f(3) = 6$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$f(2) \geq 6 \geq f(4) \geq f(5) \geq 3 \geq f(7)$$

$f(3)$

$f(6)$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 6, 7의 2가지

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$f(7)$ 의 값이 될 수 있는 수는 2, 3의 2가지

따라서 함수의 개수는

$$2 \times 10 \times 2 = 40$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$24 + 40 = 64$$

21 답 65

$\textcircled{㉠}$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 5개 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 $\textcircled{㉡}$ 을 만족시키려면 집합 Y 의 원소 중에서 -1 과 1 을 적어도 1개씩 택하거나 0 을 적어도 2개 택해야 한다.

(i) -1 과 1 을 적어도 1개씩 택하는 경우

함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 중에서 -1 과 1 을 먼저 각각 1개씩 택한 후 집합 Y 의 원소 5개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(ii) 0 을 적어도 2개 택하는 경우

함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 중에서 0 을 먼저 2개 택한 후 집합 Y 의 원소 5개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(iii) (i), (ii)를 동시에 만족시키는 경우

함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 중에서 먼저 -1 과 1 을 각각 1개씩, 0 을 2개 택한 후 집합 Y 의 원소 5개 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_1 = 5$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$$35 + 35 - 5 = 65$$

22 답 115

$f(1)=1$ 이면 (가)에서 $f(1)=4$ 이므로 성립하지 않는다.

(i) $f(1)=2$ 일 때,

(가)에서 $f(2)=4$

$f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 함수의 개수는

$$10 \times 5 = 50$$

(ii) $f(1)=3$ 일 때,

(가)에서 $f(3)=4$

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 수는 4, 5의 2가지

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 함수의 개수는

$$2 \times 25 = 50$$

(iii) $f(1)=4$ 일 때,

(가)에서 $f(4)=4$

$f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 함수의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

(iv) $f(1)=5$ 일 때,

(가)에서 $f(5)=4$

이는 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$50 + 50 + 15 = 115$$

23 답 14

(나)에서 $f(1) < f(2) < f(3)$ 이므로 (가)에 의하여 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는

1, 2, 3, 6 또는 1, 2, 4, 8 또는 2, 3, 4, 6 또는 3, 4, 6, 8

(i) $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=6$ 일 때,

$f(4)=6$ 이므로 (나)에서

$$6 \leq f(5) \leq f(6)$$

따라서 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(ii) $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=8$ 일 때,

$f(4)=8$ 이므로 $f(5)=f(6)=8$ 의 1가지

(iii) $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=6$ 일 때,

$f(4)=6$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 하면 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6

(iv) $f(1)=3, f(2)=4, f(3)=6, f(4)=8$ 일 때,

$f(4)=8$ 이므로 $f(5)=f(6)=8$ 의 1가지

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$6 + 1 + 6 + 1 = 14$$

24 답 ⑤

$(1+2x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(2x)^r = 2^r {}nC_r x^r$

x^2 항은 $r=2$ 일 때이고, $2 \leq n \leq 10$ 인 경우에만 x^2 항이 존재하므로 구하는 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} 2^2({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) &= 4({}_3C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_5C_3 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_6C_3 + {}_6C_2 + {}_7C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_7C_3 + {}_7C_2 + {}_8C_2 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_8C_3 + {}_8C_2 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_9C_3 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2) \\ &= 4({}_{10}C_3 + {}_{10}C_2) \\ &= 4 \times {}_{11}C_3 \\ &= 4 \times 165 = 660 \end{aligned}$$

25 답 6

$(x+1)^m$ 의 전개식의 일반항은 ${}_mC_r x^r$, $(x+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

${}_nC_s x^s$ 이므로 $(x+1)^m + (x+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_mC_r x^r + {}_nC_s x^s \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

x 항은 $r=1, s=1$ 일 때이므로 x 의 계수는

$${}_mC_1 + {}_nC_1 = m + n \cdots \cdots \text{배점 10\%}$$

즉, $m+n=12$ 이므로 $n=12-m \cdots \cdots \text{배점 10\%}$

또 x^2 항은 $r=2, s=2$ 일 때이므로 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} {}_mC_2 + {}_nC_2 &= \frac{1}{2}\{m(m-1) + n(n-1)\} \\ &= \frac{1}{2}\{m^2 + n^2 - (m+n)\} \cdots \cdots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

이 식에 ①을 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{m^2 + n^2 - (m+n)\} &= \frac{1}{2}\{m^2 + (12-m)^2 - 12\} \\ &= \frac{1}{2}(2m^2 - 24m + 132) \\ &= m^2 - 12m + 66 = (m-6)^2 + 30 \cdots \cdots \text{배점 20\%} \end{aligned}$$

따라서 x^2 의 계수가 최소가 되도록 하는 m 의 값은 6이다. $\cdots \cdots \text{배점 10\%}$

26 답 ④

$$f(n) = {}_nC_{n-2} + 2{}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

$$= ({}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-1}) + ({}_nC_{n-1} + {}_nC_n)$$

$$= {}_{n+1}C_{n-1} + {}_{n+1}C_n = {}_{n+2}C_n$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(10) &= {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{12}C_{10} \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_5C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_6C_3 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_7C_4 + {}_7C_5 + \cdots + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_8C_5 + {}_8C_6 + \cdots + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_9C_6 + {}_9C_7 + {}_{10}C_8 + {}_{11}C_9 + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_{10}C_7 + {}_{10}C_8 + {}_{11}C_9 + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_{11}C_8 + {}_{11}C_9 + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_{12}C_9 + {}_{12}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_{13}C_{10} - {}_4C_1 \\ &= {}_{13}C_3 - 4 \\ &= 286 - 4 = 282 \end{aligned}$$

27 답 ③

20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개이다.
이 수 중에서 2개 이상의 수를 각각 1번씩 택한 후 모두 곱하여 만든 수는 모두 다르다.

따라서 구하는 서로 다른 수의 개수는 8개의 소수에서 $r(2 \leq r \leq 8)$ 개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} & {}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_5 + {}_8C_6 + {}_8C_7 + {}_8C_8 \\ &= ({}_8C_0 + {}_8C_1 + {}_8C_2 + \cdots + {}_8C_8) - ({}_8C_0 + {}_8C_1) \\ &= 2^8 - (1 + 8) = 247 \end{aligned}$$

28 답 ①

$$22^7 = (1+21)^7 = {}_7C_0 + {}_7C_1 \times 21 + {}_7C_2 \times 21^2 + \cdots + {}_7C_7 \times 21^7$$

${}_7C_0 = 1$ 이고 ${}_7C_0$ 을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

따라서 오늘로부터 22⁷일 후는 월요일이다.

29 답 ④

$$\begin{aligned} 11^{12} &= (1+10)^{12} \\ &= {}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 \times 10 + {}_{12}C_2 \times 10^2 + {}_{12}C_3 \times 10^3 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^{12} \\ &= 1 + 12 \times 10 + 66 \times 100 + 10^3({}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 \times 10 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^9) \\ &= 6721 + 10^3({}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 \times 10 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^9) \end{aligned}$$

이때 $10^3({}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 \times 10 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^9)$ 은 1000으로 나누어떨어지므로 11¹²의 백의 자리의 숫자는 7, 십의 자리의 숫자는 2, 일의 자리의 숫자는 1이다.

따라서 $a=7$, $b=2$, $c=1$ 이므로 $a+bc=9$

step 3 최고난도 문제

| 33~35쪽

01 720 02 51 03 ② 04 730 05 36 06 206

07 ⑤ 08 ③ 09 218 10 60 11 852

01 답 720

1단계 ④를 만족시키는 경우의 수 구하기

④에서 함수 f 의 치역의 원소를 택하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 4개 중에서 3개를 택하면 되므로

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

2단계 ④를 만족시키는 경우의 수 구하기

④를 만족시키는 각각의 치역에 대하여 ④의 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 치역의 원소 3개를 각각 1개씩 먼저 택하고 치역의 원소 3개 중에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 정의역 X 의 원소에 차례로 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

④의 $(g \circ f)(a) \geq (g \circ f)(b)$ 에서 $g(f(a)) \geq g(f(b))$

이때 $f(a) \leq f(b)$ 이므로 이를 만족시키는 함수 g 의 개수는 집합 Z 의 원소 3개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 그 값이 크거나 같은 순서대로 함수 f 의 치역에 차례로 대응시키고 함수 f 의 치역이 아닌 집합 Y 의 나머지 원소 1개에는 집합 Z 의 3개의 원소 중 1개에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_3 \times {}_3C_1 = {}_5C_3 \times 3 = {}_5C_2 \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

3단계 순서쌍 (f, g) 의 개수 구하기

따라서 구하는 순서쌍 (f, g) 의 개수는

$$4 \times 6 \times 30 = 720$$

02 답 51

1단계 학생 A가 받은 검은 공과 흰 공의 개수에 따라 경우의 수 구하기

(i) 학생 A가 검은 공 4개, 흰 공 3개를 받는 경우

흰 공 2개, 빨간 공 5개가 남으므로 ④를 만족시키지 않는다.

(ii) 학생 A가 검은 공 4개, 흰 공 1개를 받는 경우

흰 공 4개와 빨간 공 5개가 남으므로 나머지 3명의 학생에게 흰 공과 빨간 공을 각각 1개씩 나누어 주고 남은 흰 공 1개와 빨간 공 2개를 나누어 주면 된다.

흰 공 1개를 받는 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

빨간 공 2개를 나머지 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

이때 흰 공을 받은 학생에게 빨간 공 2개를 모두 주면 그 학생이 받은 공의 개수가 5로 학생 A가 받은 공의 개수와 같으므로 ④를 만족시키지 않는다.

따라서 마지막에 남은 흰 공 1개를 받은 학생에게 빨간 공 2개를 모두 주는 경우를 제외해야 하므로 학생 A가 검은 공 4개, 흰 공 1개를 받는 경우의 수는

$$3 \times (6 - 1) = 15$$

(iii) 학생 A가 검은 공 3개, 흰 공 2개를 받는 경우

① 나머지 3명의 학생 중에서 1명의 학생이 검은 공 1개와 흰 공 1개를 받는 경우

검은 공 1개와 흰 공 1개를 받는 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B일 때, 남은 흰 공 2개와 빨간 공 5개는 학생 B를 제외한 2명의 학생 C, D에게 나누어 준다.

2명의 학생 C, D에게 각각 흰 공 1개와 빨간 공 1개를 나누어 주고 남은 빨간 공 3개를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

이때 C, D 중 1명에게 빨간 공 3개를 모두 주면 그 학생이 받은 공의 개수가 5로 학생 A가 받은 공의 개수와 같으므로 ④를 만족시키지 않는다.

따라서 마지막에 C, D 중 1명에게 빨간 공 3개를 모두 주는 경우를 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \times (4 - 2) = 6$$

② 나머지 3명의 학생 중에서 1명의 학생이 검은 공 1개와 빨간 공을 받는 경우

검은 공 1개와 빨간 공 1개를 받는 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B일 때, 남은 흰 공 3개와 빨간 공 4개는 학생 B를 제외한 2명의 학생 C, D에게 나누어 준다.

2명의 학생 C, D에게 각각 흰 공 1개와 빨간 공 1개를 나누어 주고 남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개에 대하여 흰 공 1개는 학생 B를 제외한 2명의 학생 C, D 중에서 1명을 택하여 주고, 빨간 공 2개는 3명의 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3H_2 = 2 \times {}_4C_2 = 2 \times 6 = 12$$

이때 마지막에 남은 흰 공 1개를 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 주면 그 학생이 받은 공의 개수가 5로 학생 A가 받은 공의 개수와 같으므로 (ㄷ)을 만족시키지 않는다.

따라서 마지막에 C, D 중 남은 흰 공 1개를 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 주는 경우를 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \times (12 - 2) = 30$$

①, ②에서 학생 A가 검은 공 3개, 흰 공 2개를 받는 경우의 수는 $6 + 30 = 36$

(iv) 학생 A가 검은 공 2개, 흰 공 1개를 받는 경우

검은 공 2개, 흰 공 4개, 빨간 공 5개가 남으므로 (ㄷ)을 만족시키지 않는다.

2단계 경우의 수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 36 = 51$$

03 답 ②

1단계 숫자 카드부터 시작하는 경우의 수 구하기

(i) 숫자 카드부터 시작하는 경우

(ㄷ)을 만족시키려면 (숫자 카드 - 그림 카드 - 숫자 카드 - 그림 카드 - 숫자 카드)의 순서로 나열해야 한다.

① 숫자 카드를 나열하는 경우

숫자 카드가 놓이는 자리에 숫자 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 4장의 숫자 카드를 중복을 허락하여 숫자 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

각각의 경우에 대하여 (ㄱ), (ㄴ)을 만족시키려면 숫자 2, 4, 3, 5, 7을 순서대로 나열하고 숫자 1은 숫자 3보다 왼쪽에, 숫자 6은 숫자 4보다 오른쪽에 나열하면 된다.

숫자 1이 올 수 있는 자리가 3개, 숫자 6이 올 수 있는 자리가 4개이므로 그 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

이때 숫자 1, 6이 모두 숫자 4와 3 사이에 오면 숫자 1, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우가 한 가지 더 생기므로 그 경우의 수는

$$12 + 1 = 13$$

따라서 숫자 카드를 나열하는 경우의 수는

$$15 \times 13 = 195$$

② 그림 카드를 나열하는 경우

그림 카드가 놓이는 자리에 그림 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 4장의 그림 카드를 중복을 허락하여 그림 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

①, ②에서 숫자 카드부터 시작하는 경우의 수는 $195 \times 5 = 975$

2단계 그림 카드부터 시작하는 경우의 수 구하기

(ii) 그림 카드부터 시작하는 경우

(ㄷ)을 만족시키려면 (그림 카드 - 숫자 카드 - 그림 카드 - 숫자 카드 - 그림 카드)의 순서로 나열해야 한다.

① 숫자 카드를 나열하는 경우

숫자 카드가 놓이는 자리에 숫자 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 5장의 숫자 카드를 중복을 허락하여 숫자 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

각각의 경우에 대하여 (ㄱ), (ㄴ)을 만족시키려면 숫자 2, 4, 3, 5, 7을 순서대로 나열하고 숫자 1은 숫자 3보다 왼쪽에, 숫자 6은 숫자 4보다 오른쪽에 나열하면 된다.

숫자 1이 올 수 있는 자리가 3개, 숫자 6이 올 수 있는 자리가 4개이므로 그 경우의 수는 $3 \times 4 = 12$

이때 숫자 1, 6이 모두 숫자 4와 3 사이에 오면 숫자 1, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우가 한 가지 더 생기므로 그 경우의 수는

$$12 + 1 = 13$$

따라서 숫자 카드를 나열하는 경우의 수는 $6 \times 13 = 78$

② 그림 카드를 나열하는 경우

그림 카드가 놓이는 자리에 그림 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 3장의 그림 카드를 중복을 허락하여 그림 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

①, ②에서 그림 카드부터 시작하는 경우의 수는 $78 \times 10 = 780$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $975 + 780 = 1755$

04 답 730

1단계 a_n 구하기

주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인하고 다시 넣는 7번의 과정 중 m 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 $f(m)$ 이라 하면 (ㄱ)에서 $f(7) \leq f(6) \leq f(5) \leq f(4) \leq f(3) \leq f(2) \leq f(1)$

(ㄴ)에서 $f(3) = f(7) + 2$

$f(7) = k$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$)라 하면

$$f(3) = f(7) + 2 = k + 2$$

$$\therefore k \leq f(6) \leq f(5) \leq f(4) \leq k + 2 \leq f(2) \leq f(1)$$

(i) $f(4), f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우

$f(4), f(5), f(6)$ 의 값은 $k, k+1, k+2$ 의 3개의 정수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 그 값이 크거나 같은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

(ii) $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우

$f(1) \geq f(2) \geq f(3)$ 이고 $f(3) = k + 2 \geq 2$ 이므로 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값은 2부터 n 까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 그 값이 크거나 같은 수부터 대응시키면 되므로

$${}_{n-1}H_3 = {}_{n+1}C_3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$a_n = 10 \times \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{5}{3}n(n+1)(n-1)$$

2단계 $\sum_{n=2}^{10} \frac{a_n}{n-1}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=2}^{10} \frac{a_n}{n-1} &= \sum_{n=2}^{10} \frac{5}{3} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{n-1} = \frac{5}{3} \sum_{n=2}^{10} (n^2 + n) \\ &= \frac{5}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (n^2 + n) - 2 \right\} = \frac{5}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n - 2 \right\} \\ &= \frac{5}{3} \times \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{5}{3} \times (385 + 55 - 2) = \frac{5}{3} \times 438 = 730 \end{aligned}$$

개념 NOTE

자연수 n 에 대하여

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

05 답 36

1단계 경우에 따라 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수 구하기

(ㄴ)에서 $x=3x'+2, y=3y'+1$ (x', y' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면

(ㄷ)의 $x+y+|z|+|w|=8$ 에서

$$(3x'+2)+(3y'+1)+|z|+|w|=8$$

$$\therefore 3x'+3y'+|z|+|w|=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $|z|+|w| \geq 0$ 이고 x', y' 은 음이 아닌 정수이므로

$$0 \leq 3x'+3y' \leq 5$$

$$\therefore x'+y'=0 \text{ 또는 } x'+y'=1$$

(i) $x'+y'=0$ 일 때,

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y' 의 순서쌍 (x', y') 은 $(0, 0)$ 의 1개

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$|z|+|w|=5$$

① $z=0$ 또는 $w=0$ 인 경우

$z=0$ 이면 $w=\pm 5, w=0$ 이면 $z=\pm 5$ 이므로 정수 z, w 의 순서쌍 (z, w) 는 $(0, -5), (0, 5), (-5, 0), (5, 0)$ 의 4개

② $z \neq 0, w \neq 0$ 인 경우

$|z|=z'+1, |w|=w'+1$ (z', w' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$$|z|+|w|=5 \text{에서}$$

$$(z'+1)+(w'+1)=5$$

$$\therefore z'+w'=3$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 z', w' 의 순서쌍 (z', w') 은

$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 의 4개

각각의 z', w' 에 대하여 $z=\pm(z'+1), w=\pm(w'+1)$ 이므로

이를 만족시키는 정수 z, w 의 순서쌍 (z, w) 의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

①, ②에서 $x'+y'=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$1 \times (4+16) = 20$$

(ii) $x'+y'=1$ 일 때,

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y' 의 순서쌍 (x', y') 은 $(0, 1), (1, 0)$ 의 2개

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$|z|+|w|=2$$

① $z=0$ 또는 $w=0$ 인 경우

$z=0$ 이면 $w=\pm 2, w=0$ 이면 $z=\pm 2$ 이므로 정수 z, w 의 순서쌍 (z, w) 는 $(0, -2), (0, 2), (-2, 0), (2, 0)$ 의 4개

② $z \neq 0, w \neq 0$ 인 경우

$|z|=z'+1, |w|=w'+1$ (z', w' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$$|z|+|w|=2 \text{에서}$$

$$(z'+1)+(w'+1)=2$$

$$\therefore z'+w'=0$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 z', w' 의 순서쌍 (z', w') 은

$(0, 0)$ 의 1개

각각의 z', w' 에 대하여 $z=\pm(z'+1), w=\pm(w'+1)$ 이므로

이를 만족시키는 정수 z, w 의 순서쌍 (z, w) 의 개수는

$$1 \times 4 = 4$$

①, ②에서 $x'+y'=1$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$2 \times (4+4) = 16$$

2단계 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$20+16=36$$

06 답 206

1단계 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4 에 대하여 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수 구하기

(ㄴ)에서 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4 에 대하여

$$x_1=2y_1+1$$

$$x_2=2y_2+2$$

$$x_3=2y_3+1$$

$$x_4=2y_4+2$$

로 놓으면 (ㄷ)의 $x_1+x_2+x_3+x_4=34$ 에서

$$(2y_1+1)+(2y_2+2)+(2y_3+1)+(2y_4+2)=34$$

$$\therefore y_1+y_2+y_3+y_4=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4 의 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_{14} = {}_{17}C_{14} = {}_{17}C_3 = 680$$

2단계 $y_k \geq 7$ 인 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수 구하기

이때 x_1, x_2, x_3, x_4 는 14 이하의 자연수이므로 y_1, y_2, y_3, y_4 는 0 이상 6 이하인 정수이다.

따라서 $y_k \geq 7$ ($k=1, 2, 3, 4$)인 경우를 제외해야 한다.

(i) $y_k \geq 7$ 인 k 의 값이 1개인 경우

$y_1 \geq 7$ 이라 하고 $z_1=y_1-7$ 이라 하면 z_1 은 음이 아닌 정수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$(z_1+7)+y_2+y_3+y_4=14$$

$$\therefore z_1+y_2+y_3+y_4=7$$

따라서 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 z_1, y_2, y_3, y_4 의 순서쌍 (z_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120$$

이때 y_2, y_3, y_4 중에서 그 값이 7인 경우의 순서쌍 (y_2, y_3, y_4) 는

$(7, 0, 0), (0, 7, 0), (0, 0, 7)$ 의 3개이므로 $y_1 \geq 7$ 인 경우의 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는

$$120-3=117$$

같은 방법으로 하면 $y_2 \geq 7, y_3 \geq 7, y_4 \geq 7$ 인 경우의 순서쌍

(y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수도 각각 117이므로 $y_k \geq 7$ 인 k 의 값이 1개인

순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는

$$4 \times 117 = 468$$

(ii) $y_k \geq 7$ 인 k 의 값이 2개인 경우

순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는 7, 7, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(i), (ii)에서 $y_k \geq 7$ 인 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는

$$468+6=474$$

3단계 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수 구하기

따라서 구하는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는

$$680-474=206$$

07 답 ⑤

1단계 $|a-b|, |c-d|, |e-f|$ 의 값에 따라 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수

구하기

(ㄴ)에서 $|a-b| \geq 0, |c-d| \geq 0, |e-f| \geq 0$ 이므로 $|a-b|, |c-d|,$

$|e-f|$ 의 값이 될 수 있는 수는

2, 0, 0 또는 1, 1, 0

(i) $|a-b|, |c-d|, |e-f|$ 의 값이 2, 0, 0인 경우

① $|a-b|=2, |c-d|=0, |e-f|=0$ 일 때

② $a=b+2, c=d, e=f$ 일 때,

(가)의 $a+b+c+d+e+f=12$ 에서

$$(2b+2)+2d+2f=12$$

$$\therefore b+d+f=5$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d, f 의 순서쌍 (b, d, f) 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

③ $b=a+2, c=d, e=f$ 일 때,

(가)의 $a+b+c+d+e+f=12$ 에서

$$(2a+2)+2d+2f=12$$

$$\therefore a+d+f=5$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, d, f 의 순서쌍 (a, d, f) 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

④, ⑤에서 $|a-b|=2, |c-d|=0, |e-f|=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는

$$21+21=42$$

⑥ $|a-b|=0, |c-d|=2, |e-f|=0$ 또는 $|a-b|=0, |c-d|=0, |e-f|=2$ 일 때,

①과 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는 각각 42이므로

$$42 \times 2 = 84$$

⑦, ⑧에서 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는

$$42+84=126$$

(ii) $|a-b|, |c-d|, |e-f|$ 의 값이 1, 1, 0인 경우

① $|a-b|=1, |c-d|=1, |e-f|=0$ 일 때

② $a=b+1, c=d+1, e=f$ 일 때,

(가)의 $a+b+c+d+e+f=12$ 에서

$$(2b+1)+(2d+1)+2f=12$$

$$\therefore b+d+f=5$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d, f 의 순서쌍 (b, d, f) 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

③ $b=a+1, c=d+1, e=f$ 또는 $a=b+1, d=c+1, e=f$ 또는 $b=a+1, d=c+1, e=f$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는 각각 21이므로

$$21 \times 3 = 63$$

④, ⑤에서 $|a-b|=1, |c-d|=1, |e-f|=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는

$$21+63=84$$

⑥ $|a-b|=0, |c-d|=1, |e-f|=1$ 또는 $|a-b|=1, |c-d|=0, |e-f|=1$ 일 때,

①과 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는 각각 84이므로

$$84 \times 2 = 168$$

⑦, ⑧에서 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는

$$84+168=252$$

2단계 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는

$$126+252=378$$

idea
08 답 ③

1단계 경우에 따라 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 구하기

(가)에서 음이 아닌 정수 x, y, z, w 에 대하여

$$a=x, b=x+y, c=x+y+z, d=x+y+z+w$$

로 놓으면 (가)의 $3a+b+c+d=30$ 에서

$$3x+(x+y)+(x+y+z)+(x+y+z+w)=30$$

$$\therefore 6x+3y+2z+w=30 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

음이 아닌 정수 y, z, w 를

$$y=2y_1+y_2 \text{ (} y_1 \text{은 음이 아닌 정수, } y_2=0, 1 \text{)}$$

$$z=3z_1+z_2 \text{ (} z_1 \text{은 음이 아닌 정수, } z_2=0, 1, 2 \text{)}$$

$$w=6w_1+w_2 \text{ (} w_1 \text{은 음이 아닌 정수, } w_2=0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{)}$$

로 놓으면 ①에서

$$6x+3(2y_1+y_2)+2(3z_1+z_2)+6w_1+w_2=30$$

$$6(x+y_1+z_1+w_1)+(3y_2+2z_2+w_2)=30 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i) $w_2=0$ 일 때,

②에서 $y_2=0, z_2=0$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=5$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1)

의 개수는

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

(ii) $w_2=1$ 일 때,

②에서 $y_2=1, z_2=1$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1)

의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

(iii) $w_2=2$ 일 때,

②에서 $y_2=0, z_2=2$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1)

의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

(iv) $w_2=3$ 일 때,

②에서 $y_2=1, z_2=0$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1)

의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

(v) $w_2=4$ 일 때,

②에서 $y_2=0, z_2=1$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1)

의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

- (vi) $w_2=5$ 일 때,
 ㉔에서 $y_2=1$, $z_2=2$ 이어야 하므로
 $x+y_1+z_1+w_1=3$
 이를 만족시키는 음의 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1)
 의 개수는 ${}_4H_3={}_6C_3=20$

2단계 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 구하기

- (i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
 $56+4 \times 35+20=216$

다른 풀이

- ㉔에서 $a=b=c=d$ 라 하면 ㉗에서
 $3a+a+a+a=30$, $6a=30$
 $\therefore a=5$
 따라서 조건을 만족시키려면 $a \leq 5$ 이어야 한다.
 (i) $a=5$ 일 때,
 ㉗에서 $b+c+d=15$
 ㉔에 의하여 $b \geq 5$, $c \geq 5$, $d \geq 5$ 이므로
 $b=5$, $c=5$, $d=5$
 따라서 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는
 $(5, 5, 5, 5)$ 의 1개이다.
 (ii) $a=4$ 일 때,
 ㉗에서 $b+c+d=18$
 ㉔에 의하여 $b \geq 4$, $c \geq 4$, $d \geq 4$ 이므로 $b'=b-4$, $c'=c-4$,
 $d'=d-4$ 라 하면 $b'+c'+d'=18$ 에서
 $(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)=18$
 $\therefore b'+c'+d'=6$ (단, b', c', d' 은 음이 아닌 정수, $b' \leq c' \leq d'$)
 이때 음이 아닌 정수 b', c', d' 에 대하여 $b' \leq c' \leq d'$ 이므로
 $c'=b'+x$, $d'=b'+x+y$ (x, y 는 음이 아닌 정수)라 하면
 $b'+c'+d'=6$ 에서
 $b'+(b'+x)+(b'+x+y)=6$
 $\therefore 3b'+2x+y=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 ㉑ $b'=0$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=6$ 이므로
 $x=0, 1, 2, 3$
 ㉒ $b'=1$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=3$ 이므로
 $x=0, 1$
 ㉓ $b'=2$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=0$ 이므로
 $x=0$
 ㉑, ㉒, ㉓에서 순서쌍 (b', x, y) 의 개수는
 $4+2+1=7$
 (iii) $a=3$ 일 때,
 ㉗에서 $b+c+d=21$
 ㉔에 의하여 $b \geq 3$, $c \geq 3$, $d \geq 3$ 이므로 $b'=b-3$, $c'=c-3$,
 $d'=d-3$ 이라 하면 $b'+c'+d'=21$ 에서
 $(b'+3)+(c'+3)+(d'+3)=21$
 $\therefore b'+c'+d'=12$ (단, b', c', d' 은 음이 아닌 정수, $b' \leq c' \leq d'$)
 이때 음이 아닌 정수 b', c', d' 에 대하여 $b' \leq c' \leq d'$ 이므로
 $c'=b'+x$, $d'=b'+x+y$ (x, y 는 음이 아닌 정수)라 하면
 $b'+c'+d'=12$ 에서
 $b'+(b'+x)+(b'+x+y)=12$

- $\therefore 3b'+2x+y=12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 ㉑ $b'=0$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=12$ 이므로
 $x=0, 1, 2, \cdots, 6$
 ㉒ $b'=1$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=9$ 이므로
 $x=0, 1, 2, 3, 4$
 ㉓ $b'=2, 3, 4$ 일 때,
 (ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (b', x, y) 는 7개이다.
 ㉑, ㉒, ㉓에서 순서쌍 (b', x, y) 의 개수는
 $7+5+7=19$
 (iv) $a=2$ 일 때,
 ㉗에서 $b+c+d=24$
 ㉔에 의하여 $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d \geq 2$ 이므로 $b'=b-2$, $c'=c-2$,
 $d'=d-2$ 라 하면 $b'+c'+d'=24$ 에서
 $(b'+2)+(c'+2)+(d'+2)=24$
 $\therefore b'+c'+d'=18$ (단, b', c', d' 은 음이 아닌 정수, $b' \leq c' \leq d'$)
 이때 음이 아닌 정수 b', c', d' 에 대하여 $b' \leq c' \leq d'$ 이므로
 $c'=b'+x$, $d'=b'+x+y$ (x, y 는 음이 아닌 정수)라 하면
 $b'+c'+d'=18$ 에서
 $b'+(b'+x)+(b'+x+y)=18$
 $\therefore 3b'+2x+y=18 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$
 ㉑ $b'=0$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=18$ 이므로
 $x=0, 1, 2, \cdots, 9$
 ㉒ $b'=1$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=15$ 이므로
 $x=0, 1, 2, \cdots, 7$
 ㉓ $b'=2, 3, 4, 5, 6$ 일 때,
 (iii)과 같은 방법으로 하면 순서쌍 (b', x, y) 는 19개이다.
 ㉑, ㉒, ㉓에서 순서쌍 (b', x, y) 의 개수는
 $10+8+19=37$
 (v) $a=1$ 일 때,
 ㉗에서 $b+c+d=27$
 ㉔에 의하여 $b \geq 1$, $c \geq 1$, $d \geq 1$ 이므로 $b'=b-1$, $c'=c-1$,
 $d'=d-1$ 이라 하면 $b'+c'+d'=27$ 에서
 $(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=27$
 $\therefore b'+c'+d'=24$ (단, b', c', d' 은 음이 아닌 정수, $b' \leq c' \leq d'$)
 이때 음이 아닌 정수 b', c', d' 에 대하여 $b' \leq c' \leq d'$ 이므로
 $c'=b'+x$, $d'=b'+x+y$ (x, y 는 음이 아닌 정수)라 하면
 $b'+c'+d'=24$ 에서
 $b'+(b'+x)+(b'+x+y)=24$
 $\therefore 3b'+2x+y=24 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$
 ㉑ $b'=0$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=24$ 이므로
 $x=0, 1, 2, \cdots, 12$
 ㉒ $b'=1$ 일 때,
 ㉑에서 $2x+y=21$ 이므로
 $x=0, 1, 2, \cdots, 10$
 ㉓ $b'=2, 3, \cdots, 8$ 일 때,
 (iv)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (b', x, y) 는 37개이다.

①, ②, ③에서 순서쌍 (b', x, y) 의 개수는

$$13+11+37=61$$

(vi) $a=0$ 일 때,

$$(7)에서 b+c+d=30$$

(4)에 의하여 음이 아닌 정수 b, c, d 에 대하여

$$c=b+x, d=b+x+y (x, y \text{는 음이 아닌 정수}) \text{라 하면}$$

$$b+c+d=30 \text{에서}$$

$$b+(b+x)+(b+x+y)=30$$

$$\therefore 3b+2x+y=30 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

① $b=0$ 일 때,

$$\textcircled{4}에서 2x+y=30 \text{이므로}$$

$$x=0, 1, 2, \dots, 15$$

② $b=1$ 일 때,

$$\textcircled{4}에서 2x+y=27 \text{이므로}$$

$$x=0, 1, 2, \dots, 13$$

③ $b=2, 3, \dots, 10$ 일 때,

(v)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (b, x, y) 는 61개이다.

①, ②, ③에서 순서쌍 (b, x, y) 의 개수는

$$16+14+61=91$$

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$1+7+19+37+61+91=216$$

09 답 218

1단계 (7), (4)를 만족시키는 경우 구하기

(7), (4)에서 4명의 학생 A, B, C, D 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 4명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는다.

2단계 짝수 개의 사인펜을 받는 학생 수에 따라 경우의 수 구하기

(i) 4명의 학생 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 중 짝수 개의 사인펜을 받는 2명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

이때 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는다고 하고 4명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각

$$2a+2, 2b+2, 2c+1, 2d+1 (a, b, c, d \text{는 음이 아닌 정수})$$

$$\text{이라 하면 } (2a+2)+(2b+2)+(2c+1)+(2d+1)=14 \text{이므로}$$

$$a+b+c+d=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_4={}_4C_4={}_4C_3=35$$

이때 (4)에서 $a \neq 4, b \neq 4$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$6 \times (35-2)=198$$

(ii) 4명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각

$$2a+2, 2b+2, 2c+2, 2d+2 (a, b, c, d \text{는 음이 아닌 정수})$$

$$\text{라 하면 } (2a+2)+(2b+2)+(2c+2)+(2d+2)=14 \text{이므로}$$

$$a+b+c+d=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, 4명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는 ②을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$198+20=218$$

10 답 60

1단계 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수 구하기

x_1, y_1, x_2, y_2 가 자연수이므로

$$x_1'=x_1-1, y_1'=y_1-1, x_2'=x_2-1, y_2'=y_2-1$$

이라 하면 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$ 에서

$$(x_1'+1)+(y_1'+1)+(x_2'+1)+(y_2'+1)=12$$

$$\therefore x_1'+y_1'+x_2'+y_2'=8 \text{ (단, } x_1', y_1', x_2', y_2' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', y_1', x_2', y_2' 의 순서쌍 (x_1', y_1', x_2', y_2') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$$

2단계 삼각형이 만들어지지 않는 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수 구하기

삼각형이 만들어지지 않는 경우는 세 점 $(3, 3), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 중에서 두 점 이상이 일치하거나 세 점이 한 직선 위에 있는 경우이다.

(i) 두 점 이상이 일치하는 경우

① $x_1=3, y_1=3$ 일 때,

$$x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$x_2+y_2=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_2, y_2 의 순서쌍 (x_2, y_2) 는

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) \text{의 5개}$$

② $x_2=3, y_2=3$ 일 때,

$$x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$x_1+y_1=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_1, y_1 의 순서쌍 (x_1, y_1) 은

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) \text{의 5개}$$

③ $x_1=x_2, y_1=y_2$ 일 때,

$$x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$x_1+y_1=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_1, y_1 의 순서쌍 (x_1, y_1) 은

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) \text{의 5개}$$

①, ②, ③에서 $x_1=3, y_1=3, x_2=3, y_2=3$ 인 경우가 3번 겹치므로 두 점 이상이 일치할 때, 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$5+5+5-2=13$$

(ii) 세 점이 한 직선 위에 있는 경우

$$\text{직선의 기울기를 } m \text{이라 하면 } \frac{y_1-3}{x_1-3} = \frac{y_2-3}{x_2-3} = m \text{이므로}$$

$$y_1-3=m(x_1-3), y_2-3=m(x_2-3)$$

두 식을 변끼리 더하면

$$y_1+y_2-6=m(x_1+x_2-6) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$ 에서 $y_1+y_2=12-x_1-x_2$ 이므로 이를 ③에 대입하면

$$12-x_1-x_2-6=m(x_1+x_2-6)$$

$$m(x_1+x_2-6)+(x_1+x_2-6)=0$$

$$\therefore (m+1)(x_1+x_2-6)=0$$

① $m = -1$ 일 때,

$$\frac{y_1-3}{x_1-3} = -1 \text{에서 } y_1-3=3-x_1$$

$$\therefore x_1+y_1=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_1, y_1 의 순서쌍 (x_1, y_1) 은

$(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)$ 의 4개 $\rightarrow$ (3.3)은 (i)의 경우이므로 제외한다.

$$\text{또 } \frac{y_2-3}{x_2-3} = -1 \text{에서 } y_2-3=3-x_2$$

$$\therefore x_2+y_2=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_2, y_2 의 순서쌍 (x_2, y_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)$ 의 4개 $\rightarrow$ (3.3)은 (i)의 경우이므로 제외한다.

따라서 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

이때 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 일치하는 경우는 제외해야 하므로

$$16 - 4 = 12$$

② $m \neq -1$ 일 때,

$$x_1+x_2=6 \text{이므로 } x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$y_1+y_2=6$$

$x_1+x_2=6$ 을 만족시키는 자연수 x_1, x_2 의 순서쌍 (x_1, x_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개

$y_1+y_2=6$ 을 만족시키는 자연수 y_1, y_2 의 순서쌍 (y_1, y_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개

따라서 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$5 \times 5 = 25$$

이때 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 $(a, b), (b, a)$ 인 경우, 즉 순서쌍 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ 가 $(a, b), (b, a)$ 인 경우에는 두 점을 이은 직선의 기울기가 -1 이므로 제외해야 한다.

또 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 $(3, 3), (3, 3)$ 인 경우도 (i)과 겹치므로 제외해야 한다.

따라서 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$25 - 5 = 20$$

①, ②에서 세 점이 한 직선 위에 있을 때, 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$12 + 20 = 32$$

(i), (ii)에서 삼각형이 만들어지지 않는 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는 $13 + 32 = 45$

3단계 삼각형의 개수 구하기

따라서 세 점 $A(3, 3), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 개수는 $165 - 45 = 120$

이때 B와 C가 바뀌어도 같은 삼각형이므로 구하는 삼각형의 개수는

$$\frac{120}{2} = 60$$

11 답 852

1단계 $f(4)$ 의 값에 따라 함수의 개수 구하기

(*)에 의하여 함수 f 는 일대일함수이다.

함수 f 의 치역의 원소를 a, b, c, d ($a < b < c < d$)라 하자.

이때 a 보다 작은 수의 개수를 x_1 , a 보다 크고 b 보다 작은 수의 개수를 x_2 , b 보다 크고 c 보다 작은 수의 개수를 x_3 , c 보다 크고 d 보다 작은 수의 개수를 x_4 , d 보다 큰 수의 개수를 x_5 라 하면 (*)에서 $x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2$ 이고 (*), (*)에 의하여 a, b 는 $f(4)$ 의 값이 될 수 없다.

(i) $f(4) = c$ 일 때,

(*)를 만족시키는 d 가 존재하려면 $f(4) = 12$ 이고 $d = 15$

이때 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2$ 이고 $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ 이므로

$$x_2' = x_2 - 2, x_3' = x_3 - 2 \text{라 하면}$$

$$x_1 + (x_2' + 2) + (x_3' + 2) = 9$$

$$\therefore x_1 + x_2' + x_3' = 5 \text{ (단, } x_1, x_2', x_3' \text{는 음이 아닌 정수)}$$

따라서 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

이때 a, b, d 에 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 대응시키는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 함수의 개수는

$$21 \times 6 = 126$$

(ii) $f(4) = d$ 일 때,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, 0 \leq x_5 \leq 3 \text{이고}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \text{이므로}$$

$$x_2' = x_2 - 2, x_3' = x_3 - 2, x_4' = x_4 - 2 \text{라 하면}$$

$$x_1 + (x_2' + 2) + (x_3' + 2) + (x_4' + 2) + x_5 = 11$$

$$\therefore x_1 + x_2' + x_3' + x_4' + x_5 = 5$$

(단, x_1, x_2', x_3', x_4' 은 음이 아닌 정수, $0 \leq x_5 \leq 3$) $\cdots \cdots$ ①

① $x_5 = 0$ 일 때,

$$\text{①에서 } x_1 + x_2' + x_3' + x_4' = 5$$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3', x_4' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3', x_4') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

② $x_5 = 1$ 일 때,

$$\text{①에서 } x_1 + x_2' + x_3' + x_4' = 4$$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3', x_4' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3', x_4') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

③ $x_5 = 2$ 일 때,

$$\text{①에서 } x_1 + x_2' + x_3' + x_4' = 3$$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3', x_4' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3', x_4') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

④ $x_5 = 3$ 일 때,

$$\text{①에서 } x_1 + x_2' + x_3' + x_4' = 2$$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3', x_4' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3', x_4') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

①~④에서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수는

$$56 + 35 + 20 + 10 = 121$$

이때 a, b, c 에 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 대응시키는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 함수의 개수는

$$121 \times 6 = 726$$

2단계 함수의 개수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$126 + 726 = 852$$

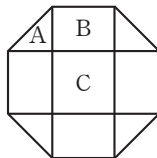
01 11592 02 12 03 2197 04 ② 05 80
06 36 07 ③ 08 3996

01 답 11592

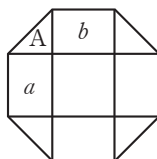
- (i) 5개의 원판에 같은 문자가 2개씩 있는 경우
5개의 문자 중에서 같은 문자를 택할 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
남은 3개의 문자 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
이때 1개의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 2
5개의 원판에서 같은 문자가 적혀 있는 원판은 순서가 정해져 있으므로 같은 원판으로 생각하여 5개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!}=30$
따라서 그 경우의 수는 $10 \times 3 \times 2 \times 30=1800$
- (ii) 5개의 원판에 같은 문자가 2개 있는 경우
5개의 문자 중에서 같은 문자를 택할 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$
남은 4개의 문자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$
이때 3개의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$
5개의 원판에서 같은 문자가 적혀 있는 원판은 순서가 정해져 있으므로 같은 원판으로 생각하여 5개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$
따라서 그 경우의 수는 $5 \times 4 \times 8 \times 60=9600$
- (iii) 5개의 원판에 같은 문자가 없는 경우
5개의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_5=2^5=32$
A가 적혀 있는 원판은 맨 위, E가 적혀 있는 원판은 맨 아래에 놓이도록 5개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 그 경우의 수는 $32 \times 6=192$
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $1800+9600+192=11592$

02 답 12

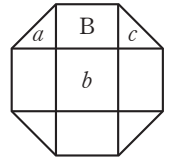
회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 영역은 그림과 같이 A, B, C 중에서 선택할 수 있다.



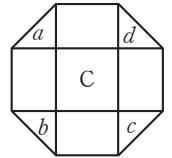
- (i) 영역 A에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 영역은 그림에서 a, b를 제외한 6개의 영역이므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 6
파란색을 칠하고 남은 7개의 영역에는 빨간색, 파란색을 제외한 7가지의 색을 칠하면 되므로 경우의 수는 7!
따라서 영역 A에 빨간색을 칠하는 경우의 수는 $6 \times 7!$



- (ii) 영역 B에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 영역은 그림에서 a, b, c를 제외한 5개의 영역이므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 5
파란색을 칠하고 남은 7개의 영역에는 빨간색, 파란색을 제외한 7가지의 색을 칠하면 되므로 경우의 수는 7!



- 따라서 영역 B에 빨간색을 칠하는 경우의 수는 $5 \times 7!$
- (iii) 영역 C에 빨간색을 칠하는 경우
파란색을 칠할 수 있는 영역은 그림에서 a, b, c, d의 4개이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 1
이때 파란색을 칠하고 남은 7개의 영역에는 빨간색, 파란색을 제외한 7가지의 색을 칠하면 되므로 경우의 수는 7!



- 따라서 영역 C에 빨간색을 칠하는 경우의 수는 $1 \times 7!$
- (i), (ii), (iii)에서 색칠판을 칠하는 경우의 수는 $6 \times 7! + 5 \times 7! + 1 \times 7! = (6+5+1) \times 7! = 12 \times 7!$
 $\therefore k=12$

03 답 2197

(A)에서 1, 5는 서로 이웃할 수 없다.

- (i) 1이 나오지 않는 경우
2, 3, 4, 5의 4개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5=1024$
- (ii) 1이 한 번 나오는 경우
① 1□□□□, □□□□1 풀인 경우
1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이고, 나머지 자리에는 2, 3, 4, 5의 4개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 $2 \times 3 \times {}_4\Pi_3=6 \times 4^3=384$
- ② □1□□□, □□1□□, □□□1□ 풀인 경우
1의 양옆에는 2, 3, 4의 3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 나머지 자리에는 2, 3, 4, 5의 4개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 $3 \times {}_3\Pi_2 \times {}_4\Pi_2=3 \times 3^2 \times 4^2=432$
- ③ ①, ②에서 1이 한 번 나오는 경우의 수는 $384+432=816$
- (iii) 1이 두 번 나오는 경우
① 1□□1□, □1□1□, □1□□1 풀인 경우
1의 옆에는 2, 3, 4의 3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는 $3 \times {}_3\Pi_3=3 \times 3^3=81$
- ② 1□1□□, □□1□1, 1□□□1, □11□□, □□11□ 풀인 경우
1의 옆에는 2, 3, 4의 3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4, 5의 4개이므로 경우의 수는 $5 \times {}_3\Pi_2 \times 4=5 \times 3^2 \times 4=180$

③ 11□□□, □□□11 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이고, 나머지 자리에는 2, 3, 4, 5의 4개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 4 \times 2 = 2 \times 3 \times 4^2 = 96$$

①, ②, ③에서 1이 두 번 나오는 경우의 수는

$$81 + 180 + 96 = 357$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$1024 + 816 + 357 = 2197$$

04 답 ②

$f(1) + f(2) + f(3) - f(4) = 2m + 1$ 에서 m 이 정수이므로 $2m + 1$ 은 2로 나누었을 때의 나머지가 1이다.

즉, $f(1) + f(2) + f(3)$ 의 값과 $f(4)$ 의 값을 각각 2로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, 0이거나 0, 1이어야 한다.

이때 집합 Y 의 원소들을 2로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y 의 부분집합은 $\{2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$ 이다.

(i) $f(4) = 2$ 또는 $f(4) = 4$ 인 경우

집합 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 택한 세 수의 합을 2로 나누었을 때의 나머지가 1이 되는 경우는

$(1, 1, 1), (3, 3, 3), (5, 5, 5), (1, 1, 3), (1, 1, 5), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (2, 2, 3), (2, 2, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4), (3, 5, 5), (4, 4, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 5)$

이고, 이 수를 각각 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키는 경우의 수는

$$3 \times \frac{3!}{3!} + 12 \times \frac{3!}{2!} + 4 \times 3! = 3 + 36 + 24 = 63$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$2 \times 63 = 126$$

(ii) $f(4) = 1$ 또는 $f(4) = 3$ 또는 $f(4) = 5$ 인 경우

집합 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 택한 세 수의 합을 2로 나누었을 때의 나머지가 0이 되는 경우는

$(2, 2, 2), (4, 4, 4), (1, 1, 2), (1, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 5, 5), (3, 3, 4), (4, 5, 5), (1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 4, 5)$

이고, 이 수를 각각 $f(1), f(2), f(3)$ 에 대응시키는 경우의 수는

$$2 \times \frac{3!}{3!} + 8 \times \frac{3!}{2!} + 6 \times 3! = 2 + 24 + 36 = 62$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$3 \times 62 = 186$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$126 + 186 = 312$$

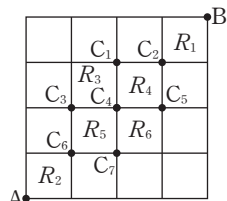
05 답 80

그림과 같이 7개의 지점 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ 을 잡고 4개의 정사각형을 R_3, R_4, R_5, R_6 이라 하자.

이때 ㉠을 만족시키려면

$A \rightarrow C_6 \rightarrow C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow C_6 \rightarrow A$ 로 이동해야 하고 ㉡를 만족시키려면 정사각형

R_3, R_4, R_5, R_6 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.



(i) $A \rightarrow C_6, C_2 \rightarrow B, B \rightarrow C_2, C_6 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우

정사각형 R_1, R_2 의 모든 변을 다 지나야 하므로 경우의 수는

(A 지점에서 C_6 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (C_2 지점에서 B 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (B 지점에서 C_2 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (C_6 지점에서 A 지점으로 이동하는 경우의 수)

$$= 2 \times 2 \times 1 \times 1$$

$$= 4$$

(ii) $C_6 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우

(C_6 지점에서 C_2 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (C_2 지점에서 C_6 지점으로 이동하는 경우의 수)

$$= \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 36$$

① 정사각형 R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$C_6 \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우의 수이므로

$$(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$$

② 정사각형 R_4 의 네 변을 모두 지나는 경우

$C_6 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (1 \times 2) = 8$$

③ 정사각형 R_5 의 네 변을 모두 지나는 경우

$C_6 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (2 \times 1) = 8$$

④ 정사각형 R_6 의 네 변을 모두 지나는 경우

$C_6 \rightarrow C_7 \rightarrow C_5 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_5 \rightarrow C_7 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우의 수이므로

$$(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$$

⑤ 정사각형 R_4, R_5 의 네 변을 모두 지나는 경우

$C_6 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (1 \times 1) = 4$$

①~⑤에서 $C_6 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_6$ 으로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는

$$36 - \{(2 + 8 + 8 + 2) - 4\} = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 20 = 80$$

06 답 36

(i) 학생 A가 검은 공 4개, 빨간 공 2개를 받는 경우

흰 공 5개와 빨간 공 2개가 남으므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) 학생 A가 검은 공 3개, 빨간 공 1개를 받는 경우

① 나머지 3명의 학생 중에서 1명의 학생이 검은 공 1개와 빨간 공 1개를 받는 경우

검은 공 1개와 빨간 공 1개를 받는 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B일 때 남은 흰 공 5개와 빨간 공 2개는 학생 B를 제외한 2명의 학생 C, D에게 나누어 준다.

2명의 학생 C, D에게 각각 흰 공 1개와 빨간 공 1개를 나누어 주고 남은 흰 공 3개를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

이때 C, D 중 1명에게 흰 공 3개를 모두 주면 그 학생이 받은 공의 개수가 학생 A가 받은 공의 개수보다 많으므로 ㄹ을 만족시키지 않는다.

따라서 마지막에 C, D 중 1명에게 흰 공 3개를 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \times (4-2) = 6$$

- ii 나머지 3명의 학생 중에서 1명의 학생이 검은 공 1개와 흰 공을 받는 경우

검은 공 1개와 흰 공 1개를 받는 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B일 때 남은 흰 공 4개와 빨간 공 3개는 학생 B를 제외한 2명의 학생 C, D에게 나누어 준다.

2명의 학생 C, D에게 각각 흰 공 1개와 빨간 공 1개를 나누어 주고 남은 흰 공 2개, 빨간 공 1개에 대하여 빨간 공 1개는 학생 B를 제외한 2명의 학생 C, D 중에서 1명을 택하여 주고, 흰 공 2개는 3명의 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3H_2 = 2 \times {}_4C_2 = 2 \times 6 = 12$$

이때 마지막에 남은 빨간 공 1개를 받는 학생에게 흰 공 2개를 모두 주면 그 학생이 받은 공의 개수가 학생 A가 받은 공의 개수보다 많으므로 ㄹ을 만족시키지 않는다.

따라서 마지막에 C, D 중 남은 빨간 공 1개를 받은 학생에게 흰 공 2개를 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \times (12-2) = 30$$

- i, ii에서 학생 A가 검은 공 3개, 빨간 공 1개를 받는 경우의 수는 $6+30=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 36

07 답 ③

ㄴ에서 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4 에 대하여

$$x_1 = 5n + 1 = 5y_1 + 6$$

$$x_2 = 5n + 2 = 5y_2 + 7$$

$$x_3 = 5n + 3 = 5y_3 + 8$$

$$x_4 = 5n + 4 = 5y_4 + 9$$

로 놓으면 ㄱ의 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 90$ 에서

$$5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 30 = 90$$

$$\therefore y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12$$

따라서 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4 의 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = 455$$

이때 x_1, x_2, x_3, x_4 는 50 이하의 자연수이므로 y_1, y_2, y_3, y_4 는 0 이상 8 이하인 정수이다.

따라서 $y_k \geq 9$ ($k=1, 2, 3, 4$)인 경우를 제외해야 한다.

y_1, y_2, y_3, y_4 의 값에 9 이상인 정수가 포함되는 경우는

9, 3, 0, 0 또는 10, 2, 0, 0 또는 10, 1, 1, 0 또는 11, 1, 0, 0 또는 9, 1, 1, 1 또는 12, 0, 0, 0 또는 9, 2, 1, 0

이므로 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는

$$4 \times \frac{4!}{2!} + 2 \times \frac{4!}{3!} + 1 \times 4! = 48 + 8 + 24 = 80$$

따라서 구하는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는

$$455 - 80 = 375$$

08 답 3996

ㄱ, ㄴ에서 6명의 학생 A, B, C, D, E, F 중 5명은 홀수 개의 연필을 받고 나머지 1명은 짝수 개의 연필을 받거나 3명은 홀수 개의 연필을 받고 나머지 3명은 짝수 개의 연필을 받는다.

- (i) 6명의 학생 중 5명은 홀수 개의 연필을 받고 나머지 1명은 짝수 개의 연필을 받는 경우

6명의 학생 중 짝수 개의 연필을 받는 1명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_1 = 6$$

이때 학생 A는 짝수 개의 연필을 받고 학생 B, C, D, E, F는 홀수 개의 연필을 받는다고 하자.

6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 받는 연필의 개수를 각각

$$2a+2, 2b+1, 2c+1, 2d+1, 2e+1, 2f+1$$

(a, b, c, d, e, f 는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$$(2a+2) + (2b+1) + (2c+1) + (2d+1) + (2e+1) + (2f+1) = 17$$

이므로

$$a+b+c+d+e+f=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

즉, 학생 A는 짝수 개의 연필을 받고 학생 B, C, D, E, F는 홀수 개의 연필을 받는 경우의 수는 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e, f 의 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수와 같으므로

$${}_6H_5 = {}_{10}C_5 = 252$$

이때 ㄴ에서 $a \neq 5, b \neq 5, c \neq 5, d \neq 5, e \neq 5, f \neq 5$ 이므로 모든 경우에서 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)가 1개의 5와 5개의 0으로 이루어진 경우를 제외해야 한다.

따라서 그 경우의 수는

$$6 \times (252 - 6) = 1476$$

- (ii) 6명의 학생 중 3명은 홀수 개의 연필을 받고 나머지 3명은 짝수 개의 연필을 받는 경우

6명의 학생 중 짝수 개의 연필을 받는 3명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

이때 학생 A, B, C는 짝수 개의 연필을 받고 학생 D, E, F는 홀수 개의 연필을 받는다고 하자.

6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 받는 연필의 개수를 각각

$$2a+2, 2b+2, 2c+2, 2d+1, 2e+1, 2f+1$$

(a, b, c, d, e, f 는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$$(2a+2) + (2b+2) + (2c+2) + (2d+1) + (2e+1) + (2f+1) = 17$$

이므로

$$a+b+c+d+e+f=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

즉, 학생 A, B, C는 짝수 개의 연필을 받고 학생 D, E, F는 홀수 개의 연필을 받는 경우의 수는 ②을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e, f 의 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수와 같으므로

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$$

따라서 그 경우의 수는

$$20 \times 126 = 2520$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$1476 + 2520 = 3996$$

step ① 핵심 문제

| 40~41쪽

01 233	02 6개	03 ⑤	04 ②	05 $\frac{1}{5}$	06 $\frac{2}{35}$
07 ⑤	08 ②	09 $\frac{2}{9}$	10 ⑤	11 ④	12 $\frac{71}{84}$

01 답 233

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

주사위를 던져서 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 나오는 눈의 수를 각각 x , y , z 라 하면 나오는 눈의 수의 총합이 세 번째 시행에서 처음으로 4 이상이 되는 경우는

$$x+y < 4, x+y+z \geq 4$$

(i) $x=1, y=1, z \geq 2$ 일 때, z 는 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는 5(ii) $x=1, y=2, z \geq 1$ 일 때, z 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는 6(iii) $x=2, y=1, z \geq 1$ 일 때, z 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는 6(i), (ii), (iii)에서 세 번째 시행에서 처음으로 4 이상이 되는 경우의 수는 $5+6+6=17$ 따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{216}$ 이므로

$$p=216, q=17 \quad \therefore p+q=233$$

02 답 6개

상자에 들어 있는 검은 바둑돌의 개수를 n 이라 하면 10개의 바둑돌 중에서 3개를 꺼낼 때, 모두 검은 바둑돌이 나올 확률은

$$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{720}$$

이 시행에서 6번에 1번꼴로 3개가 모두 검은 바둑돌이었으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{6}$

$$\text{즉, } \frac{n(n-1)(n-2)}{720} = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$$n(n-1)(n-2) = 120 = 6 \times 5 \times 4 \quad \therefore n=6 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 상자에 검은 바둑돌은 6개가 들어 있다고 볼 수 있다.

03 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2ax+3a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \geq 0$$

$$a(a-3) \geq 0$$

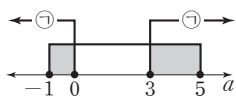
$$\therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-1 \leq a \leq 5$ 와 $\textcircled{1}$ 을 수직선 위에 나타내면 a 의 값의 공통 범위는

$$-1 \leq a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\textcircled{2}의 구간의 길이)}{(\textcircled{1}의 구간의 길이)} = \frac{\{0 - (-1)\} + \{5 - 3\}}{5 - (-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



04 답 ②

모든 경우의 수는 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_5P_4=120$ 이때 자연수 N 이 네 자리의 짝수가 되려면 천의 자리에는 0이 올 수 없고 일의 자리의 숫자는 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2를 제외한 1, 3, 4의 3가지

백의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리의 숫자와 2를 제외하고 0을 포함한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_3P_2=6$ 따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 4를 제외한 1, 2, 3의 3가지

백의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리의 숫자와 4를 제외하고 0을 포함한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 ${}_3P_2=6$ 따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$ (i), (ii), (iii)에서 N 이 네 자리의 짝수가 되는 경우의 수는

$$24 + 18 + 18 = 60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ 05 답 $\frac{1}{5}$

모든 경우의 수는 7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_7C_3=35$$

1부터 7까지의 자연수의 총합은 28이므로 구하는 경우는 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 14보다 커야 한다.

(i) 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 15인 경우

(7, 6, 2), (7, 5, 3), (6, 5, 4)의 3가지

(ii) 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 16인 경우

(7, 6, 3), (7, 5, 4)의 2가지

(iii) 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 17인 경우

(7, 6, 4)의 1가지

(iv) 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 18인 경우

(7, 6, 5)의 1가지

(i)~(iv)에서 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 14보다 큰 경우의 수는 $3+2+1+1=7$ 따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$ 06 답 $\frac{2}{35}$

모든 경우의 수는 10장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_{10}C_4=210 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 20\%$$

(i) $b-a=c-b=d-c=1$ 인 경우 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), ..., (7, 8, 9, 10)의 7가지 $\cdots \cdots \text{배점 } 20\%$ (ii) $b-a=c-b=d-c=2$ 인 경우 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 (1, 3, 5, 7), (2, 4, 6, 8), (3, 5, 7, 9), (4, 6, 8, 10)의 4가지 $\cdots \cdots \text{배점 } 20\%$

(iii) $b-a=c-b=d-c=3$ 인 경우
 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(1, 4, 7, 10)$ 의 1가지
배점 20%
 (i), (ii), (iii)에서 $b-a=c-b=d-c$ 인 경우의 수는
 $7+4+1=12$ 배점 10%
 따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{210}=\frac{2}{35}$ 배점 10%

07 답 ⑤

ㄱ. $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ 이므로
 $P(A) \geq \frac{1}{2}, P(B) \geq \frac{1}{2} \quad \therefore P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$
 ㄴ. $P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$ 이므로
 $P(A)+P(B) \geq 2\sqrt{P(A)P(B)} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$
 ㄷ. $P(A)+P(B)=1$ 이므로
 $P(B)=1-P(A)$
 $\therefore P(A)P(B)=P(A)\{1-P(A)\}$
 $=- \{P(A)\}^2+P(A)$
 $=- \left\{P(A)-\frac{1}{2}\right\}^2+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ②

두 사건 A^c, B 가 서로 배반사건이므로
 $A^c \cap B = \emptyset \quad \therefore B \subset A$
 $P(A)=2P(B)=\frac{3}{5}$ 에서
 $P(A)=\frac{3}{5}, P(B)=\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}=\frac{3}{10}$
 $\therefore P(A \cap B^c)=P(A)-P(B)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

09 답 $\frac{2}{9}$

모든 경우의 수는 6개의 공 중에서 1개를 꺼내고 다시 넣는 시행을 2번 반복하는 경우의 수이므로 $6 \times 6=36$
 $f(a)=f(b)$ 에서 $f(a)-f(b)=0$ 이므로
 $(a^2-4a+3)-(b^2-4b+3)=0$
 $(a^2-b^2)-4(a-b)=0, (a-b)(a+b-4)=0$
 $\therefore a=b$ 또는 $a+b=4$
 (i) $a=b$ 인 경우
 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$
 의 6가지이므로 그 확률은 $\frac{6}{36}$
 (ii) $a+b=4$ 인 경우
 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3가지이므로 그 확률은 $\frac{3}{36}$
 (iii) $a=b$ 이고 $a+b=4$ 인 경우
 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 2)$ 의 1가지이므로 그 확률은 $\frac{1}{36}$
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은
 $\frac{6}{36}+\frac{3}{36}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

10 답 ⑤

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6=36$
 두 수 a, b 의 최대공약수가 홀수인 사건의 여사건은 두 수 a, b 의 최대공약수가 짝수인 사건이다.
 두 수 a, b 의 최대공약수가 짝수이면 두 수 a, b 모두 짝수이므로 그 경우의 수는 $3 \times 3=9$
 따라서 여사건의 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ 이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

11 답 ④

모든 경우의 수는 7명의 학생이 7개의 의자에 앉는 경우의 수이므로 7!
 2명 이상의 여학생이 서로 이웃하게 앉는 사건의 여사건은 여학생끼리 어느 2명도 서로 이웃하지 않게 앉는 사건이다.
 남학생 4명이 먼저 앉은 후 남학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 여학생이 앉으면 되므로 그 경우의 수는
 $4! \times {}_5P_3$
 따라서 여사건의 확률은 $\frac{4! \times {}_5P_3}{7!}=\frac{2}{7}$ 이므로 구하는 확률은
 $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

12 답 $\frac{71}{84}$

모든 경우의 수는 9개의 동전 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수이므로
 ${}_9C_3=84$
 꺼낸 3개의 동전의 금액의 합이 200원 미만인 사건의 여사건은 꺼낸 3개의 동전의 금액의 합이 200원 이상인 사건이다.
 100원짜리 동전 2개와 다른 동전 1개를 꺼내거나 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_2C_2 \times {}_7C_1 + {}_2C_1 \times {}_3C_2 = 7 + 2 \times {}_3C_1 = 7 + 6 = 13$
 따라서 여사건의 확률은 $\frac{13}{84}$ 이므로 구하는 확률은
 $1-\frac{13}{84}=\frac{71}{84}$

step 2 고난도 문제

| 42~46쪽

01 ④	02 $\frac{11}{27}$	03 $\frac{\pi}{16}$	04 ③	05 $\frac{9}{35}$	06 15
07 ①	08 22	09 $\frac{3}{28}$	10 $\frac{1}{7}$	11 $\frac{23}{108}$	12 $\frac{4}{7}$
13 $\frac{16}{105}$	14 ①	15 $\frac{4}{11}$	16 $\frac{19}{84}$	17 ②	18 $\frac{3}{5}$
19 ③	20 ④	21 $\frac{89}{91}$	22 ②	23 $\frac{35}{36}$	24 47
25 $\frac{66}{91}$	26 ③	27 ⑤			

01 답 ④

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 6=216$

- (i) $a=1$ 일 때,
 $(b-4)^2+(c-6)^2=5$ 이므로
 $b-4=\pm 1, c-6=\pm 2$ 또는 $b-4=\pm 2, c-6=\pm 1$
 ① $b-4=\pm 1, c-6=\pm 2$ 일 때,
 $b-4=\pm 1$ 에서 $b=3$ 또는 $b=5$
 $c-6=\pm 2$ 에서 $c=4$ ($\because 1 \leq c \leq 6$)
 따라서 b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$
 ② $b-4=\pm 2, c-6=\pm 1$ 일 때,
 $b-4=\pm 2$ 에서 $b=2$ 또는 $b=6$
 $c-6=\pm 1$ 에서 $c=5$ ($\because 1 \leq c \leq 6$)
 따라서 b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$
 ①, ②에서 그 경우의 수는
 $2+2=4$
- (ii) $a=2$ 일 때,
 $(b-4)^2+(c-6)^2=6$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 b, c 는 존재하지 않는다.
- (iii) $a=3$ 일 때,
 $(b-4)^2+(c-6)^2=5$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 4
- (iv) $a=4$ 일 때,
 $(b-4)^2+(c-6)^2=2$ 이므로 $b-4=\pm 1, c-6=\pm 1$
 $b-4=\pm 1$ 에서 $b=3$ 또는 $b=5$
 $c-6=\pm 1$ 에서 $c=5$ ($\because 1 \leq c \leq 6$)
 따라서 b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$
- (v) $a \geq 5$ 일 때,
 $(a-2)^2 \geq 9$ 이므로 $(a-2)^2+(b-4)^2+(c-6)^2=6$ 을 만족시키지 않는다.
 (i)~(v)에서 $(a-2)^2+(b-4)^2+(c-6)^2=6$ 인 경우의 수는
 $4+4+2=10$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

02 답 $\frac{11}{27}$

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 6 = 216$

- (i) $c=1$ 일 때,
 $a+b$ 의 값에 관계없이 c 로 나누어떨어지므로 그 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$
- (ii) $c=2$ 일 때,
 $a+b$ 는 2의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=2$ 가 되는 경우는 (1, 1)의 1가지
 ② $a+b=4$ 가 되는 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
 ③ $a+b=6$ 이 되는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 ④ $a+b=8$ 이 되는 경우는 (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
 ⑤ $a+b=10$ 이 되는 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
 ⑥ $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①~⑥에서 그 경우의 수는
 $1+3+5+5+3+1=18$

- (iii) $c=3$ 일 때,
 $a+b$ 는 3의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=3$ 이 되는 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지
 ② $a+b=6$ 이 되는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 ③ $a+b=9$ 가 되는 경우는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지
 ④ $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①~④에서 그 경우의 수는
 $2+5+4+1=12$
- (iv) $c=4$ 일 때,
 $a+b$ 는 4의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=4$ 가 되는 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
 ② $a+b=8$ 이 되는 경우는 (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
 ③ $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①, ②, ③에서 그 경우의 수는
 $3+5+1=9$
- (v) $c=5$ 일 때,
 $a+b$ 는 5의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=5$ 가 되는 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
 ② $a+b=10$ 이 되는 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
 ①, ②에서 그 경우의 수는
 $4+3=7$
- (vi) $c=6$ 일 때,
 $a+b$ 는 6의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=6$ 이 되는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 ② $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①, ②에서 그 경우의 수는
 $5+1=6$
- (i)~(vi)에서 $a+b$ 가 c 로 나누어떨어지는 경우의 수는
 $36+18+12+9+7+6=88$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{88}{216} = \frac{11}{27}$

03 답 $\frac{\pi}{16}$

정사각형 ABCD의 넓이는 $2 \times 2 = 4$

삼각형 PAB가 둔각삼각형이라면 점 P가 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 내부에 있어야 한다.

또 삼각형 PBC의 넓이가 1 이하가 되려면 삼각형의 높이가 1 이하이어야 하므로 두 변 AB, DC의 중점을 각각 E, F라 할 때, 점 P가 사각형 EBCF의 내부에 있어야 한다.

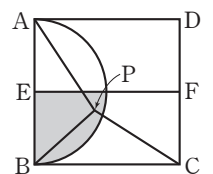
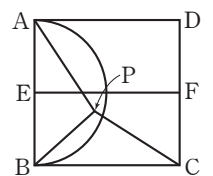
즉, 점 P는 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.

이때 색칠한 부분의 넓이는

$$\pi \times 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$



04 답 ③

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$$

$a-2, b-2, c-2, d-2$ 는 모두 -1 이상 4 이하의 정수이므로

$$8 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$$

$$= 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= (-1) \times (-1) \times 2 \times 4$$

따라서 $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)=8$ 을 만족시키는 a, b, c, d 의 값은

3, 3, 4, 6 또는 3, 4, 4, 4 또는 1, 1, 4, 6

(i) a, b, c, d 의 값이 3, 3, 4, 6일 때,

3, 3, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(ii) a, b, c, d 의 값이 3, 4, 4, 4일 때,

3, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

(iii) a, b, c, d 의 값이 1, 1, 4, 6일 때,

1, 1, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii), (iii)에서 $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)=8$ 인 경우의 수는

$$12 + 4 + 12 = 28$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{28}{1296} = \frac{7}{324}$

05 답 $\frac{9}{35}$

모든 경우의 수는 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

이때 주어진 집합의 원소의 개수가 3이려면 0에서 1 또는 1에서 0으로 3번 바뀌어야 한다.

(i) 0이 먼저 오는 경우

$$\underbrace{0 \cdots 01 \cdots 10 \cdots 01 \cdots 1}_{a \text{ 개 } b \text{ 개 } c \text{ 개 } d \text{ 개}}$$

$$a+c=4 \ (a \geq 1, c \geq 1) \text{를 만족시키는 } a, c \text{의 순서쌍 } (a, c) \text{는}$$

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개

$b+d=4 \ (b \geq 1, d \geq 1) \text{를 만족시키는 } b, d \text{의 순서쌍 } (b, d) \text{는}$

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개

따라서 그 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

(ii) 1이 먼저 오는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 9

(i), (ii)에서 주어진 집합의 원소의 개수가 3인 경우의 수는

$$9 + 9 = 18$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{70} = \frac{9}{35}$

06 답 15

모든 경우의 수는 집합 A 에서 A 로의 모든 함수 f 의 개수와 같으므로

$$4! \cdot 4 = 4^4 = 256$$

이때 $(*)$ 를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(1)=3, f(2)=3$ 인 경우

$(*)$ 를 만족시키는 함수의 개수는 1, 2, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 정의역의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3P_2 = 6$$

(ii) $f(1)=4, f(2)=4$ 인 경우

$(*)$ 를 만족시키는 함수의 개수는 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개를 택하여 정의역의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3P_2 = 6$$

(iii) $f(1)=3, f(2)=4$ 인 경우

① $f(3)$ 의 값이 3 또는 4이면 $f(4)$ 의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 그 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

② $f(4)$ 의 값이 3 또는 4이면 $f(3)$ 의 값은 1 또는 2가 되어야 하므로 그 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

③ $f(3), f(4)$ 의 값이 모두 1이거나 2인 경우의 수는 2

①, ②, ③에서 그 경우의 수는 $4 + 4 + 2 = 10$

(iv) $f(1)=4, f(2)=3$ 인 경우

(iii)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 10

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$6 + 6 + 10 + 10 = 32$$

따라서 $p = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$ 이므로 $120p = 120 \times \frac{1}{8} = 15$

07 답 ①

모든 경우의 수는 7개의 원소 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_7P_3 = 210$

(i) $a < b < c$ 이면서 b 가 a 의 배수인 경우

① $a=1$ 일 때,

$b=2$ 이면 123, 124, 125, 126, 127의 5가지

$b=3$ 이면 134, 135, 136, 137의 4가지

$b=4$ 이면 145, 146, 147의 3가지

$b=5$ 이면 156, 157의 2가지

$b=6$ 이면 167의 1가지

② $a=2$ 일 때,

$b=4$ 이면 245, 246, 247의 3가지

$b=6$ 이면 267의 1가지

③ $a=3$ 일 때,

$b=6$ 이면 367의 1가지

①, ②, ③에서 그 경우의 수는

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 20$$

(ii) $a < b < c$ 이면서 c 가 b 의 배수인 경우

① $b=2$ 일 때,

124, 126의 2가지

② $b=3$ 일 때,

136, 236의 2가지

①, ②에서 그 경우의 수는

$$2 + 2 = 4$$

(iii) $a < b < c$ 이면서 b 가 a 의 배수이고 c 가 b 의 배수인 경우

124, 126, 136의 3가지

(i), (ii), (iii)에서 사건 $A \cap B$ 가 일어나는 경우의 수는

$$20 + 4 - 3 = 21$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{21}{210} = \frac{1}{10}$

08 답 22

모든 경우의 수는 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

이때 $m > n$ 이라면 $a_1 > a_4$ 또는 $a_1 = a_4$, $a_2 > a_5$ 이어야 한다.

(i) $a_1 > a_4$ 인 경우

① $a_1 = 3$, $a_4 = 2$ 이면 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

② $a_1 = 3$, $a_4 = 1$ 이면 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

③ $a_1 = 2$, $a_4 = 1$ 이면 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

①, ②, ③에서 그 경우의 수는

$$12 + 12 + 12 = 36$$

(ii) $a_1 = a_4$, $a_2 > a_5$ 인 경우

① $a_1 = a_4 = 1$ 이면 $a_2 = 3$, $a_5 = 2$ 이므로 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

② $a_1 = a_4 = 2$ 이면 $a_2 = 3$, $a_5 = 1$ 이므로 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

③ $a_1 = a_4 = 3$ 이면 $a_2 = 2$, $a_5 = 1$ 이므로 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

①, ②, ③에서 그 경우의 수는

$$2 + 2 + 2 = 6$$

(i), (ii)에서 $m > n$ 인 경우의 수는 $36 + 6 = 42$

따라서 구하는 확률은 $\frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ 이므로

$$p = 15, q = 7 \quad \therefore p + q = 22$$

09 답 $\frac{3}{28}$

모든 경우의 수는 서로 다른 8개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$${}_8P_4 = 1680$$

(i) 6을 택하는 경우

① 6이 첫 번째 자리에 오는 경우

② 두 번째와 네 번째 자리에 3의 배수 3, 9를 일렬로 나열하고 세 번째 자리에 2의 배수 2, 4, 8 중에서 1개가 오면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2P_2 \times {}_3P_1 = 2 \times 3 = 6$$

③ 두 번째와 네 번째 자리에 2의 배수 2, 4, 8 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고 세 번째 자리에 3의 배수 3, 9 중에서 1개가 오면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3P_2 \times {}_2P_1 = 6 \times 2 = 12$$

②, ③에서 그 경우의 수는 $6 + 12 = 18$

② 6이 두 번째 자리에 오는 경우

세 번째와 네 번째 자리에 3의 배수 3, 9와 2의 배수 2, 4, 8 중에서 각각 1개씩을 택하여 일렬로 나열하고 첫 번째 자리에는 나머지 5개의 숫자 중에서 1개가 오면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2P_1 \times {}_3P_1 \times 2 \times {}_5P_1 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 60$$

③ 6이 세 번째 자리에 오는 경우

②와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 60

④ 6이 네 번째 자리에 오는 경우

①과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 18

①~④에서 6을 택하는 경우의 수는

$$18 + 60 + 60 + 18 = 156$$

(ii) 6을 택하지 않는 경우

6이 아닌 3의 배수 3, 9와 2의 배수 2, 4, 8이 교대로 오면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2P_2 \times {}_3P_2 \times 2 = 2 \times 6 \times 2 = 24$$

3의 배수가 먼저 오는 경우와 2의 배수가 먼저 오는 경우의 수이다.

(i), (ii)에서 이웃하는 두 수의 곱이 모두 6의 배수인 경우의 수는

$$156 + 24 = 180$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{180}{1680} = \frac{3}{28}$$

10 답 $\frac{1}{7}$

모든 선분의 개수는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_2 = 15$ 배점 30%

15개의 선분 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_2 = 105$ 배점 20%

원 위의 서로 다른 4개의 점을 택하면 원 내부에서 교점이 생기는 두 선분을 그을 수 있으므로 택한 두 선분의 교점이 원 내부에서 생기는 경우의 수는 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 배점 30%

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{15}{105} = \frac{1}{7} \quad \text{..... 배점 20\%}$$

11 답 $\frac{23}{108}$

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

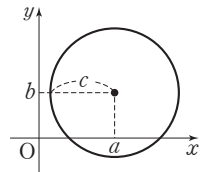
$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 이 나타내는 도형은 중심이 (a, b) 이고 반지름의 길이가 c 인 원이다.

이 원과 좌표축의 교점이 2개인 경우는 다음과 같다.

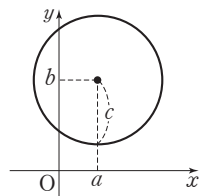
(i) x 축과 두 점에서 만나는 경우

$b < c < a$ 인 경우는 1부터 6까지의 자연수 중에서 3개를 택하여 그 값이 작은 수부터 차례로 b, c, a 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$



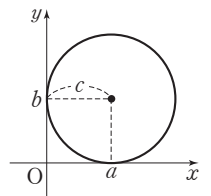
(ii) y 축과 두 점에서 만나는 경우

$a < c < b$ 인 경우는 1부터 6까지의 자연수 중에서 3개를 택하여 그 값이 작은 수부터 차례로 a, c, b 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$



(iii) x 축, y 축에 동시에 접하는 경우

$a = b = c$ 인 경우의 수는 6



(i), (ii), (iii)에서 원과 좌표축의 교점이 2개인 경우의 수는

$$20 + 20 + 6 = 46$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{46}{216} = \frac{23}{108}$$

개념 NOTE

중심이 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

12 $\frac{4}{7}$

모든 경우의 수는 10개의 구슬을 5개의 상자에 2개씩 넣는 경우의 수이므로

$${}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$$

4개의 흰 구슬 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$

흰 구슬 2개가 들어갈 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$

남은 4개의 상자 중에서 2개를 택하여 남은 2개의 흰 구슬을 1개씩 넣는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2P_2 = 2 \times {}_4C_2$$

이 2개의 상자에 검은 구슬을 1개씩 넣는 경우의 수는

$${}_6P_2 = 30$$

구슬을 하나도 넣지 않은 2개의 상자에 남은 4개의 검은 구슬을 2개씩 넣는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_2$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$60 \times {}_4C_2 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{60 \times {}_4C_2 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{{}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2} = \frac{60 \times {}_4C_2 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2} = \frac{4}{7}$$

13 $\frac{16}{105}$

k ($k=2, 3, 4, 5$)가 적혀 있는 공의 개수를 a_k 라 하면

$$P_k = \frac{a_k}{15}$$

즉, $P_{k+1} = \frac{1}{2}P_k$ ($k=2, 3, 4$)에서 $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$ 이므로

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{4}a_2$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{8}a_2$$

이때 주머니에 들어 있는 공의 개수는 15이므로

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$$

$$a_2 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_2 = 15$$

$$\frac{15}{8}a_2 = 15 \quad \therefore a_2 = 8$$

$$\therefore a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1$$

따라서 주머니에는 숫자 2가 적혀 있는 공이 8개, 숫자 3이 적혀 있는 공이 4개, 4가 적혀 있는 공이 2개, 숫자 5가 적혀 있는 공이 1개 들어 있다.

모든 경우의 수는 15개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_{15}C_2 = 105$$

(i) 숫자 2가 적혀 있는 공 1개, 숫자 5가 적혀 있는 공 1개가 나오는 경우의 수는

$${}_8C_1 \times {}_1C_1 = 8 \times 1 = 8$$

(ii) 숫자 3이 적혀 있는 공 1개, 숫자 4가 적혀 있는 공 1개가 나오는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_2C_1 = 4 \times 2 = 8$$

(i), (ii)에서 두 공에 적혀 있는 수의 합이 7인 경우의 수는

$$8 + 8 = 16$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{105}$

14 ①

모든 경우의 수는 집합 $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소의 개수가 4인 부분집합의 개수와 같으므로

$${}_{10}C_4 = 210$$

1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2 라 하면

$$A_0 = \{3, 6, 9\}, A_1 = \{1, 4, 7, 10\}, A_2 = \{2, 5, 8\}$$

집합 X 의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 집합 X 는 세 집합 A_0, A_1, A_2 중 두 집합에서 각각 2개씩 원소를 택하여 이 네 수를 원소로 해야 한다.

(i) 두 집합 A_0, A_1 을 택하는 경우

$$\text{집합 } X \text{의 개수는 } {}_3C_2 \times {}_4C_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$$

(ii) 두 집합 A_0, A_2 를 택하는 경우

$$\text{집합 } X \text{의 개수는 } {}_3C_2 \times {}_3C_2 = {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

(iii) 두 집합 A_1, A_2 를 택하는 경우

$$\text{집합 } X \text{의 개수는 } {}_4C_2 \times {}_3C_2 = {}_4C_2 \times {}_3C_1 = 6 \times 3 = 18$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$18 + 9 + 18 = 45$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210} = \frac{3}{14}$

15 $\frac{4}{11}$

모든 경우의 수는 n 장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(i) 2개의 수가 연속인 경우

① 1, 2가 적혀 있는 카드를 뽑으면 나머지 1장은 3을 제외한

$(n-3)$ 장의 카드 중에서 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$$n-3$$

② $n-1, n$ 이 적혀 있는 카드를 뽑으면 나머지 1장은 $n-2$ 를 제외한

$(n-3)$ 장의 카드 중에서 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$$n-3$$

③ 2, 3 또는 3, 4 또는 ... 또는 $n-2, n-1$ 이 적혀 있는 카드를

뽑으면 나머지 1장은 양옆의 카드를 제외한 $(n-4)$ 장의 카드

중에서 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$$(n-3)(n-4)$$

①, ②, ③에서 2개의 수가 연속인 경우의 수는

$$n-3 + n-3 + (n-3)(n-4) = (n-3)(n-2)$$

(ii) 3개의 수가 연속인 경우

$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \dots, (n-2, n-1, n)$ 의 $(n-2)$ 가지

(i), (ii)에서 세 수 중 2개 이상의 수가 연속인 경우의 수는

$$(n-3)(n-2) + n-2 = (n-2)^2$$

$$\therefore p_n = \frac{(n-2)^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{6(n-2)}{n(n-1)}$$

$$\therefore p_6 \times p_{12} = \frac{6 \times 4}{6 \times 5} \times \frac{6 \times 10}{12 \times 11} = \frac{4}{11}$$

16 $\frac{19}{84}$

모든 경우의 수는 9개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_9C_3 = 84 \quad \dots\dots\dots \text{배점 } 10\%$$

m 의 일의 자리의 숫자가 9인 경우는

$m=3^2$ 또는 $m=9^3$ 배점 30%

꺼낸 3개의 공 중에서 숫자 1이 적혀 있는 공, 숫자 3이 적혀 있는 공, 숫자 9가 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c 라 하자.

(i) $m=3^2$ 인 경우

$3^2=1 \times 3 \times 3=1 \times 1 \times 9$ 이므로 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는

$(1, 2, 0), (2, 0, 1)$

따라서 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 + {}_3C_2 \times {}_3C_1 = {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 \\ = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \quad \text{.....배점 20\%}$$

(ii) $m=9^3$ 인 경우

$9^3=9 \times 9 \times 9$ 이므로 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는 $(0, 0, 3)$

따라서 그 경우의 수는 ${}_3C_3=1$ 배점 20%

(i), (ii)에서 m 의 일의 자리의 숫자가 9인 경우의 수는

$18+1=19$ 배점 10%

따라서 구하는 확률은 $\frac{19}{84}$ 배점 10%

17 답 ②

모든 경우의 수는 공집합이 아닌 15개의 부분집합 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$${}_{15}P_3=2730$$

$B-A=Y, C-B=Z$ 라 하면 세 부분집합이 A, B, C 로 나열되었을 때, $A \subset B \subset C$ 이려면 $A \neq \emptyset, Y \neq \emptyset, Z \neq \emptyset$ 이어야 한다.

(i) 원소가 집합 A 에 1개, 집합 Y 에 1개, 집합 Z 에 1개 있는 경우

1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_3=24$$

(ii) 원소가 집합 A 에 1개, 집합 Y 에 1개, 집합 Z 에 2개 있는 경우

1, 2, 3, 4 중에서 집합 Z 에 포함될 원소 2개를 택하여 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

나머지 2개의 원소 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_2P_2=2$$

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 2=12$

(iii) 원소가 집합 A 에 1개, 집합 Y 에 2개, 집합 Z 에 1개 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 12

(iv) 원소가 집합 A 에 2개, 집합 Y 에 1개, 집합 Z 에 1개 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 12

(i)~(iv)에서 $A \subset B \subset C$ 인 경우의 수는

$$24+12+12+12=60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{2730}=\frac{2}{91}$

18 답 $\frac{3}{5}$

(i) 주머니 A에서 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우

주머니 A에 남아 있는 3개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$$1+2+2=5$$

이때 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 1이 적혀 있는 공 2개, 2가 적혀 있는 공 2개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합은 항상 5보다 작다.

따라서 그 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times 1 = \frac{{}_3C_1}{{}_5C_2} \times 1 = \frac{3}{10}$$

(ii) 주머니 A에서 1이 적혀 있는 공 1개, 2가 적혀 있는 공 1개를 꺼내는 경우

주머니 A에 남아 있는 3개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$$1+1+2=4$$

이때 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 1이 적혀 있는 공 1개, 2가 적혀 있는 공 3개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 4보다 작으려면 1이 적혀 있는 공 1개와 2가 적혀 있는 공 1개를 꺼내야 한다.

따라서 그 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_1}{{}_4C_2} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

(iii) 주머니 A에서 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우

주머니 A에 남아 있는 3개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$$1+1+1=3$$

이때 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 주머니 B에 넣으면 B에는 2가 적혀 있는 공 4개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 3보다 작은 경우는 존재하지 않는다.

따라서 그 확률은 0

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 = \frac{3}{5}$$

19 답 ③

모든 경우의 수는 7개의 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정하는 경우의 수이므로 7!

(i) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 경우

두 수학 동아리 A, B를 같은 동아리로 보고 발표하는 순서를 정하는

경우의 수는 $\frac{7!}{2!}$ 이므로 그 확률은

$$\frac{7!}{2!} = \frac{1}{2}$$

(ii) 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2$

두 수학 동아리와 그 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 한 묶음으로 생각하여 4개 동아리의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 4!

두 수학 동아리가 서로 순서를 바꾸는 경우의 수는 2!

따라서 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우의 수는 ${}_5P_2 \times 4! \times 2!$ 이므로 그 확률은

$$\frac{{}_5P_2 \times 4! \times 2!}{7!} = \frac{4}{21}$$

(iii) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2$

두 수학 동아리와 그 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 한 묶음으로 생각하여 4개 동아리의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 4!

따라서 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우의 수는

$${}_5P_2 \times 4! \text{이므로 그 확률은 } \frac{{}_5P_2 \times 4!}{7!} = \frac{2}{21}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{2} + \frac{4}{21} - \frac{2}{21} = \frac{25}{42}$

20 답 ④

모든 경우의 수는 집합 A 에서 집합 B 로의 모든 함수 f 의 개수와 같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

(i) $f(1) \geq 2$ 인 경우

$f(1)$ 의 값은 2 또는 3이고 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값은 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하면 되므로 함수 f 의 개수는

$$2 \times {}_3\Pi_3 = 2 \times 3^3 = 54$$

따라서 $f(1) \geq 2$ 일 확률은 $\frac{54}{81}$

(ii) 함수 f 의 치역이 B 인 경우

치역의 원소 1, 2, 3에 대응되는 정의역의 원소가 2개, 1개, 1개인 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 6 \times 2 \times 1 = 12$$

이때 치역의 원소 중 정의역의 원소 2개에 대응되는 원소를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

따라서 함수 f 의 치역이 B 인 경우의 수는 $12 \times 3 = 36$ 이므로 그 확률은 $\frac{36}{81}$

(iii) $f(1) \geq 2$ 이고 함수 f 의 치역이 B 인 경우

① $f(1) = 2$ 이고 함수 f 의 치역이 B 인 경우

① 정의역 2, 3, 4가 치역의 원소 1, 2, 3에 일대일대응되는 경우의 수는 $3! = 6$

② 정의역 2, 3, 4가 치역의 원소 1, 3에 대응되는 경우

치역의 원소 1, 3에 대응되는 정의역의 원소가 2개, 1개인 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_1C_1 = {}_3C_1 \times 1 = 3$$

이때 치역의 원소 중 정의역의 원소 2개에 대응되는 원소를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$

①, ②에서 $f(1) = 2$ 이고 함수 f 의 치역이 B 인 경우의 수는

$$6 + 6 = 12$$

② $f(1) = 3$ 이고 함수 f 의 치역이 B 인 경우

①과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 12

①, ②에서 $f(1) \geq 2$ 이고 함수 f 의 치역이 B 인 경우의 수는

$$12 + 12 = 24 \text{이므로 그 확률은 } \frac{24}{81}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{54}{81} + \frac{36}{81} - \frac{24}{81} = \frac{22}{27}$$

21 답 $\frac{89}{91}$

$X = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 15$

모든 경우의 수는 15개의 부분집합 중에서 3개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_{15}C_3 = 455$

서로 다른 3개의 집합을 택할 때, 적어도 2개의 집합이 서로소인 사건은 서로 다른 3개의 집합이 모두 서로소인 사건이다.

(i) 서로 다른 3개의 집합의 원소가 모두 1개인 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(ii) 서로 다른 3개의 집합의 원소가 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

(i), (ii)에서 서로 다른 3개의 집합이 모두 서로소인 경우의 수는

$$4 + 6 = 10$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{10}{455} = \frac{2}{91}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{2}{91} = \frac{89}{91}$$

22 답 ②

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

$M - m \geq 3$ 인 사건의 여사건은 $M - m < 3$ 인 사건이므로

$M - m = 0$ 또는 $M - m = 1$ 또는 $M - m = 2$

(i) $M - m = 0$ 인 경우

3개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 모두 같으므로 그 경우의 수는 6

(ii) $M - m = 1$ 인 경우

나오는 눈의 수가 $k, k, k+1$ 또는 $k, k+1, k+1$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$)

이어야 하므로 그 경우의 수는

$$5 \times \left(\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right) = 30$$

(iii) $M - m = 2$ 인 경우

나오는 눈의 수가 $k, k, k+2$ 또는 $k, k+1, k+2$ 또는 $k, k+2, k+2$ ($k=1, 2, 3, 4$)이어야 하므로 그 경우의 수는

$$4 \times \left(\frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} \right) = 48$$

(i), (ii), (iii)에서 $M - m < 3$ 인 경우의 수는 $6 + 30 + 48 = 84$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{84}{216} = \frac{7}{18}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

23 답 $\frac{35}{36}$

모든 경우의 수는 X 에서 X 로의 모든 함수 f 의 개수와 같으므로

$${}_6\Pi_6 = 6^6$$

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 자연수이거나 2보다 작은 사건의 여사건은

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 사건이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 1 \text{이므로 } \frac{(f \circ f)(1)}{f(1)} = 1$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) \text{이므로 } \frac{(f \circ f)(1)}{f(1)} = \frac{f(2)}{2}$$

이 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수이려면 $f(2) = 5$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 ${}_6\Pi_4 = 6^4$

(iii) $f(1) \geq 3$ 일 때,

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인

경우의 수는 6^4

따라서 여사건의 확률은 $\frac{6^4}{6^6} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

24 답 47

모든 경우의 수는 3개의 공 중에서 1개를 꺼내고 다시 넣는 시행을 5번 반복하는 경우의 수이므로 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

5개의 수의 곱이 6의 배수인 사건의 여사건은 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 사건이다.

이때 나오는 눈의 수는 곱이 6의 배수가 아니라면 2와 3이 동시에 나오지 않아야 한다.

(i) 한 개의 숫자만 나오는 경우

1 또는 2 또는 3이 적혀 있는 공만 나오는 경우의 수는 3

(ii) 두 개의 숫자 1, 2 또는 1, 3이 나오는 경우

① 1, 2가 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

이때 5개 모두 1이거나 2인 경우는 제외해야 하므로

$$32 - 2 = 30$$

② 1, 3이 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는 1, 3 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

이때 5개 모두 1이거나 3인 경우는 제외해야 하므로

$$32 - 2 = 30$$

①, ②에서 두 개의 숫자 1, 2 또는 1, 3이 나오는 경우의 수는

$$30 + 30 = 60$$

(i), (ii)에서 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$$3 + 60 = 63$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{63}{3^5} = \frac{7}{27}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

즉, $p=27$, $q=20$ 이므로 $p+q=47$

25 답 $\frac{66}{91}$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$ (a' , b' , c' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $a+b+c=15$ 에서

$$(a'+1) + (b'+1) + (c'+1) = 15$$

$$\therefore a' + b' + c' = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 모든 경우의 수는 방정식 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 a' , b' , c' 의 순서쌍 (a' , b' , c')의 개수와 같으므로

$${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91$$

$(a+b)(b+c)(c+a)$ 의 값이 3의 배수이려면 $a+b$, $b+c$, $c+a$ 중 적어도 하나가 3의 배수이어야 하므로 이 사건의 여사건은 $a+b$, $b+c$, $c+a$ 가 모두 3의 배수가 아닌 사건이다.

이때 $a+b=15-c$, $b+c=15-a$, $c+a=15-b$ 이므로 a , b , c 는 3의 배수가 아니어야 한다.

(i) $a=3l+1$, $b=3m+1$, $c=3n+1$ (l , m , n 은 음이 아닌 정수)인 경우

$$(3l+1) + (3m+1) + (3n+1) = 15$$

$$\therefore l + m + n = 4$$

따라서 그 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

(ii) $a=3l+2$, $b=3m+2$, $c=3n+2$ (l , m , n 은 음이 아닌 정수)인 경우

$$(3l+2) + (3m+2) + (3n+2) = 15$$

$$\therefore l + m + n = 3$$

따라서 그 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

(i), (ii)에서 $a+b$, $b+c$, $c+a$ 가 모두 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$$15 + 10 = 25$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{25}{91}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{25}{91} = \frac{66}{91}$$

idea

26 답 ③

모든 경우의 수는 방정식 $x+y+z+w=9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x , y , z , w 의 순서쌍 (x , y , z , w)의 개수와 같으므로

$${}_4H_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = 220$$

x , y , z , w 의 합이 9이므로 어느 세 수의 합도 4보다 작지 않으려면 나머지 한 수가 5 이하이어야 하므로 이 사건의 여사건은 x , y , z , w 중 하나가 5보다 큰 사건이다.

(i) x , y , z , w 중 하나가 6인 경우

x , y , z , w 중 6인 수를 택하는 경우의 수는 4

나머지 세 수의 합이 3이므로 가능한 순서쌍의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $4 \times 10 = 40$

(ii) x , y , z , w 중 하나가 7인 경우

x , y , z , w 중 7인 수를 택하는 경우의 수는 4

나머지 세 수의 합이 2이므로 가능한 순서쌍의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 그 경우의 수는 $4 \times 6 = 24$

(iii) x , y , z , w 중 하나가 8인 경우

x , y , z , w 중 8인 수를 택하는 경우의 수는 4

나머지 세 수의 합이 1이므로 가능한 순서쌍의 개수는 3

따라서 그 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$

(iv) x , y , z , w 중 하나가 9인 경우

x , y , z , w 중 9인 수를 택하는 경우의 수는 4이고, 나머지 수는 모두 0이므로 그 경우의 수는 $4 \times 1 = 4$

(i)~(iv)에서 x , y , z , w 중 하나가 5보다 큰 경우의 수는

$$40 + 24 + 12 + 4 = 80$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{80}{220} = \frac{4}{11}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$$

27 답 ⑤

모든 경우의 수는 6장의 카드 중에서 2장을 꺼내고 다시 넣는 시행을 2번 반복하는 경우의 수이므로

$${}_6C_2 \times {}_6C_2 = 15 \times 15 = 225$$

$A \cap B \neq \emptyset$ 인 사건의 여사건은 $A \cap B = \emptyset$ 인 사건이다.

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이려면 $a_2 < b_1$ 또는 $b_2 < a_1$ 이어야 한다.

(i) $a_2 < b_1$ 인 경우

① $a_2 = 2$ 일 때,

$a_1 = 1$ 이고, b_1 , b_2 의 값은 3, 4, 5, 6 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 $1 \times {}_4C_2 = 1 \times 6 = 6$

② $a_2 = 3$ 일 때,

a_1 의 값은 1, 2의 2가지이고, b_1 , b_2 의 값은 4, 5, 6 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times {}_3C_2 = 2 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$$

③ $a_2=4$ 일 때,

a_1 의 값은 1, 2, 3의 3가지이고, b_1, b_2 의 값은 5, 6 중에서 2개를
택하면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times {}_2C_2 = 3 \times 1 = 3$$

①, ②, ③에서 $a_2 < b_1$ 인 경우의 수는

$$6 + 6 + 3 = 15$$

(ii) $b_2 < a_1$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 15

(i), (ii)에서 $A \cap B = \emptyset$ 인 경우의 수는

$$15 + 15 = 30$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{30}{225} = \frac{2}{15}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

step ③ 최고난도 문제

| 47~49쪽

01 $\frac{23}{525}$ 02 61 03 ② 04 37 05 ③ 06 ④

07 $\frac{9}{25}$ 08 ② 09 ⑤

01 $\frac{23}{525}$

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 노란색 타일 4개, 파란색 타일 4개, 초록색 타일 2개
를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{10!}{4! \times 4! \times 2!} = 3150$$

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

어떤 색도 같은 색을 연속으로 칠하지 않는 경우의 수는 노란색 타일과
파란색 타일을 먼저 배열한 후 초록색 타일을 그 사이사이에 넣는 순서
로 구하면 된다.

노란색 타일을 A, 파란색 타일을 B, 초록색 타일을 C라 하자.

(i) 노란색 타일과 파란색 타일이 교대로 배열되는 경우

ABABABAB, BABABABA의 2가지

초록색 타일 2개는 A와 B 사이사이와 양 끝의 9개의 자리 중에서 2
개를 택하여 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_9C_2 = 36$$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 36 = 72$$

(ii) 초록색 타일 1개가 노란색 타일과 노란색 타일 사이에 있는 경우

BACABABAB, BABACABAB, BABABACAB의 3가지

나머지 초록색 타일은 ACA 사이를 제외한 문자 사이사이와 양 끝의
8개의 자리 중에서 1개를 택하여 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_8C_1 = 8$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 8 = 24$

(iii) 초록색 타일 1개가 파란색 타일과 파란색 타일 사이에 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 24

(iv) 초록색 타일이 각각 노란색 타일과 노란색 타일 사이, 파란색 타일
과 파란색 타일 사이에 있는 경우

ABABAB 또는 BABABA에서 A와 B 1개를 각각 ACA, BCB
로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

(i)~(iv)에서 어떤 색도 같은 색을 연속으로 칠하지 않는 경우의 수는

$$72 + 24 + 24 + 18 = 138$$

3단계 확률 구하기

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{138}{3150} = \frac{23}{525}$$

02 답 61

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 15개의 수 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우
의 수이므로 ${}_{15}P_2 = 15^2 = 225$

2단계 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수가 되는 경우 구하기

3^m 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되고, 8^n 의 일의 자리의 숫자
는 8, 4, 2, 6이 반복되므로 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자는 다음과 같다.

+	3	9	7	1	← 3^m 의 일의 자리의 숫자
8	1	7	5	9	
4	7	3	1	5	
2	5	1	9	3	
6	9	5	3	7	

↑ 8^n 의 일의 자리의 숫자

이때 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우는 3 또는 9일 때이다.

3단계 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우의 수 구하기

(i) $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3인 경우

3^m 과 8^n 의 일의 자리의 숫자가 각각 9와 4, 7과 6, 1과 2일 때이다.

① 3^m 의 일의 자리의 숫자가 9이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 4인
경우

m 의 값은 2, 6, 10, 14이고, n 의 값은 2, 6, 10, 14이므로 그 경
우의 수는 $4 \times 4 = 16$

② 3^m 의 일의 자리의 숫자가 7이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 6인
경우

m 의 값은 3, 7, 11, 15이고, n 의 값은 4, 8, 12이므로 그 경우의
수는 $4 \times 3 = 12$

③ 3^m 의 일의 자리의 숫자가 1이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 2인
경우

m 의 값은 4, 8, 12이고, n 의 값은 3, 7, 11, 15이므로 그 경우의
수는 $3 \times 4 = 12$

④ ①, ②, ③에서 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는

$$16 + 12 + 12 = 40$$

(ii) $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 9인 경우

3^m 과 8^n 의 일의 자리의 숫자가 각각 3과 6, 7과 2, 1과 8일 때이다.

① 3^m 의 일의 자리의 숫자가 3이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 6인
경우

m 의 값은 1, 5, 9, 13이고, n 의 값은 4, 8, 12이므로 그 경우의
수는 $4 \times 3 = 12$

② 3^m 의 일의 자리의 숫자가 7이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 2인
경우

m 의 값은 3, 7, 11, 15이고, n 의 값은 3, 7, 11, 15이므로 그 경
우의 수는 $4 \times 4 = 16$

- iii) 3^m 의 일의 자리의 숫자가 1이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 8인 경우
 m 의 값은 4, 8, 12이고, n 의 값은 1, 5, 9, 13이므로 그 경우의 수는 $3 \times 4 = 12$

i), ii), iii)에서 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 9인 경우의 수는 $12 + 16 + 12 = 40$

(i), (ii)에서 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우의 수는 $40 + 40 = 80$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{80}{225} = \frac{16}{45}$ 이므로

$$p=45, q=16 \quad \therefore p+q=61$$

03 답 ②

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 7!

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(가)에서 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 5, 6, 7이 적혀 있는 3장의 카드 중 2장이다.

(i) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 6, 7이 적혀 있는 카드인 경우

4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 6, 7이 적혀 있는 카드가 오는 경우는 (6, 4, 7), (7, 4, 6)의 2가지

(나)에서 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 중 2장을 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

이 각각에 대하여 4가 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드를 1장으로 생각하고, 5가 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드를 1장으로 생각하여 남은 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 6 \times 6 = 72$$

(ii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 6이 적혀 있는 카드인 경우

4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 5, 6이 적혀 있는 카드가 오는 경우는 (5, 4, 6), (6, 4, 5)의 2가지

(나)에서 5가 적혀 있는 카드의 4가 적혀 있는 카드의 반대쪽에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 중 1장이므로 그 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 4가 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드, 그리고 5가 적혀 있는 카드의 4가 적혀 있는 카드의 반대쪽에 있는 카드를 1장으로 생각하여 남은 3장의 카드와 함께 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 24 = 144$$

(iii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 7이 적혀 있는 카드인 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 144

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$72 + 144 + 144 = 360$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{7!} = \frac{1}{14}$

04 답 37

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 정사면체를 4번 던지는 경우의 수이므로

$${}_4\Pi_4 = 4! = 256$$

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

두 점 (a, b) , $(c, -d)$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b-d}{2}\right)$

이 점이 직선 $y = -x + 2$ 위의 점이므로

$$\frac{b-d}{2} = -\frac{a+c}{2} + 2$$

$$b-d = -(a+c) + 4$$

$$\therefore a+b+c=d+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 a, b, c, d 는 4 이하의 자연수이므로 $a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1$ 로 놓으면 a', b', c' 은 모두 0 이상 3 이하의 정수이다.

(i) $d=1$ 일 때,

①에서 $a+b+c=5$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=5$$

$\therefore a'+b'+c'=2$ (단, a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(ii) $d=2$ 일 때,

①에서 $a+b+c=6$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=6$$

$\therefore a'+b'+c'=3$ (단, a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(iii) $d=3$ 일 때,

①에서 $a+b+c=7$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=7$$

$\therefore a'+b'+c'=4$ (단, a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 은 $a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 에서 순서쌍 (4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)를 제외한 것이므로 그 개수는

$${}_3H_4 - 3 = {}_6C_4 - 3 = {}_6C_2 - 3 = 15 - 3 = 12$$

(iv) $d=4$ 일 때,

①에서 $a+b+c=8$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=8$$

$\therefore a'+b'+c'=5$ (단, a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 은 $a'+b'+c'=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 에서 순서쌍 (5, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 5), (4, 1, 0), (4, 0, 1), (1, 4, 0), (1, 0, 4), (0, 4, 1), (0, 1, 4)를 제외한 것이므로 그 개수는

$${}_3H_5 - 9 = {}_7C_5 - 9 = {}_7C_2 - 9 = 21 - 9 = 12$$

(i)~(iv)에서 두 점 (a, b) , $(c, -d)$ 의 중점이 직선 $y = -x + 2$ 위의 점인 경우의 수는

$$6 + 10 + 12 + 12 = 40$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{256} = \frac{5}{32}$ 이므로

$$p=32, q=5 \quad \therefore p+q=37$$

개념 NOTE

두 점 (a, b) , (c, d) 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

05 답 ③

1단계 모든 함수의 개수 구하기

모든 함수 f 의 개수는

$${}_7\Pi_7=7^7$$

2단계 조건을 만족시키는 함수의 개수 구하기

(i) 집합 X 의 원소 x 에 대하여 $f(x)=x$ 일 때,

$$(f \circ f \circ f)(x)=x \text{이므로 구하는 함수의 개수는 } 1$$

(ii) 집합 X 의 서로 다른 두 원소 x, y 에 대하여 $f(x)=y$ 일 때,

$$f(y)=x \text{이면}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= (f \circ f)(f(x)) \\ &= (f \circ f)(y) \\ &= f(f(y)) \\ &= f(x) \\ &= y \neq x \end{aligned}$$

즉, $f \circ f \circ f$ 가 항등함수가 아니므로 $f(y) \neq x$

또 $f(y)=y$ 이면

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= (f \circ f)(f(x)) \\ &= (f \circ f)(y) \\ &= f(f(y)) \\ &= f(y) \\ &= y \neq x \end{aligned}$$

즉, $f \circ f \circ f$ 가 항등함수가 아니므로 $f(y) \neq y$

이때 집합 X 의 x, y 가 아닌 원소 z 에 대하여 $f(y)=z$ 라 하면

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= (f \circ f)(f(x)) \\ &= (f \circ f)(y) \\ &= f(f(y)) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

즉, $f(z)=x$ 이어야 하므로 집합 X 의 서로 다른 세 원소 x, y, z 에 대하여

$$f(x)=y, f(y)=z, f(z)=x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① 7개의 원소 중에서 3개의 원소에 대하여 ①이 성립하고 나머지 4개의 원소는 자기 자신에 대응하는 경우

7개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$ 이고, 택한 세 원소 x, y, z 에 대하여

$$f(x)=y, f(y)=z, f(z)=x \text{ 또는 } f(x)=z, f(y)=x, f(z)=y$$

가 성립하면 되므로 함수 f 의 개수는

$$35 \times 2 = 70$$

② 7개의 원소 중에서 6개의 원소에 대하여 ①이 성립하고 나머지 한 원소는 자기 자신에 대응하는 경우

7개의 원소 중에서 자기 자신에 대응하는 원소 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_1=7$$

나머지 6개의 원소를 3개씩 2묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

이 각 묶음에 대하여 함수값을 정하는 방법이 2가지씩 존재하므로 함수 f 의 개수는

$$7 \times 10 \times 2 \times 2 = 280$$

①, ②에서 함수 f 의 개수는

$$70 + 280 = 350$$

(i), (ii)에서 $f \circ f \circ f$ 가 항등함수인 함수 f 의 개수는

$$1 + 350 = 351$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{351}{7^7}$

개념 NOTE

함수 f 가 항등함수이면 $f(x)=x$ 이다.

06 답 ④

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 8개의 수를 원형으로 배열하는 경우의 수이므로

$$(8-1)! = 7!$$

2단계 각각의 경우에 대한 확률 구하기

(i) 소수끼리 마주 보지 않을 확률

소수 2, 3, 5, 7을 마주 보지 않도록 먼저 배열하고 남은 자리에 1, 4, 6, 8을 배열하면 된다.

2를 먼저 배열하면 3을 배열하는 경우의 수

는 2와 마주 보는 자리를 제외한 6가지, 5

를 배열하는 경우의 수는 2, 3과 마주 보는

자리를 제외한 4가지, 7을 배열하는 경우의

수는 2, 3, 5와 마주 보는 자리를 제외한 2

가지이고, 남은 자리에 1, 4, 6, 8을 배열하

는 경우의 수는 4!이므로 소수끼리 마주 보지 않는 경우의 수는

$$6 \times 4 \times 2 \times 4!$$

따라서 그 확률은

$$\frac{6 \times 4 \times 2 \times 4!}{7!} = \frac{8}{35}$$

(ii) 마주 보는 두 수의 합이 모두 짝수일 확률

홀수와 홀수, 짝수와 짝수가 서로 마주 보아야 한다.

① 홀수와 짝수가 교대로 나오는 경우

홀수 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

홀수 사이사이에 짝수 4개를 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 그 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

② 홀수끼리 서로 이웃하는 경우

홀수 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이때 홀수를 배열하는 기준이 되는 자리는 2가지

각각의 경우에 대하여 짝수 4개를 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 그 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 24 = 288$$

①, ②에서 마주 보는 두 수의 합이 모두 짝수인 경우의 수는

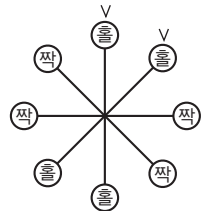
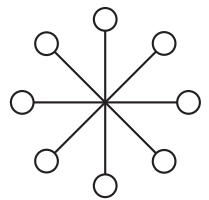
$$144 + 288 = 432$$

따라서 그 확률은 $\frac{432}{7!} = \frac{3}{35}$

3단계 확률 구하기

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{35} + \frac{3}{35} = \frac{11}{35}$$



07 답 9/25

1단계 모든 경우의 수 구하기

집합 A의 원소의 개수는

$$5 \times 5 = 25$$

모든 경우의 수는 25개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_{25}C_2 = 300$$

2단계 원의 중심과 반지름의 길이 구하기

$x^2 + y^2 - 19 = 0$ 에서 $x^2 + y^2 = 19$ 이므로 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{19}$ 인 원이다.

$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 53 = 0$ 에서 $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 19$ 이므로 중심이 점 (6, 6)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{19}$ 인 원이다.

3단계 여사건의 확률 구하기

두 원과 각각 적어도 한 점에서 만나는 사건의 여사건은 두 원과 모두 만나지 않거나 오직 한 원과 만나는 사건이다.

(i) 두 원과 모두 만나지 않는 경우

각 원의 내부에서 점 (3, 3)을 제외한

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$2 \times {}_{10}C_2 = 2 \times 45 = 90$$

두 점 (1, 5), (2, 4) 또는 두 점 (4, 2), (5, 1)을 택하는 경우의 수는 2

따라서 두 원과 모두 만나지 않는 경우의 수는

$$90 + 2 = 92$$

(ii) 오직 한 원과 만나는 경우

5개의 점 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) 중 1개와 이 5개의 점을 제외한 20개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

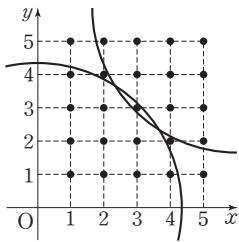
$$5 \times 20 = 100$$

(i), (ii)에서 두 원과 모두 만나지 않거나 오직 한 원과 만나는 경우의 수는 $92 + 100 = 192$ 이므로 여사건의 확률은

$$\frac{192}{300} = \frac{16}{25}$$

4단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$



08 답 ②

1단계 모든 경우의 수 구하기

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

2단계 여사건의 확률 구하기

6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있는 사건의 여사건은 빈 접시가 생기는 사건이다.

(i) 빈 접시가 1개인 경우

1이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는 주사위의 눈의 수가 3, 3, 5 또는 3, 5, 5 또는 3, 4, 5인 경우이므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = 12$$

같은 방법으로 하면 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우의 수도 각각 12

따라서 빈 접시가 1개인 경우의 수는

$$6 \times 12 = 72$$

(ii) 빈 접시가 2개인 경우

빈 접시가 2개인 경우는 두 접시가 이웃하는 경우이다.

1, 2가 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는 주사위의 눈의 수가 4, 4, 5 또는 4, 5, 5인 경우이므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 6$$

같은 방법으로 하면 (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1)이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우의 수도 각각 6

따라서 빈 접시가 2개인 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(iii) 빈 접시가 3개인 경우

빈 접시가 3개인 경우는 세 접시가 이웃하는 경우이다.

1, 2, 3이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는 주사위의 눈의 수가 5, 5, 5인 경우이므로 그 경우의 수는 1

같은 방법으로 하면 (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 1),

(6, 1, 2)가 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우의 수도 각각 1

따라서 빈 접시가 3개인 경우의 수는

$$6 \times 1 = 6$$

(i), (ii), (iii)에서 빈 접시가 생기는 경우의 수는 $72 + 36 + 6 = 114$ 이므로 여사건의 확률은

$$\frac{114}{216} = \frac{19}{36}$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{19}{36} = \frac{17}{36}$

idea

09 답 ⑤

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 27개의 상자 중에서 5개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_{27}C_5$$

2단계 여사건의 확률 구하기

어떤 면에서도 빛이 통과하지 않는 사건의 여사건은 적어도 한 면에서는 빛이 통과하는 사건이다.

어떤 면에서 빛이 통과하려면 작은 정육면체 상자 3개로 이루어진 한 줄이 모두 유리 상자로 바뀌어야 한다.

큰 정육면체에서 작은 정육면체 3개로 이루어진 27개의 줄 중에서 한 줄을 고르고, 나머지 24개의 상자 중에서 2개를 고르면 되므로 그 경우의 수는

$$27 \times {}_{24}C_2$$

이때 두 줄이 모두 유리 상자로 바뀌는 경우가 중복되므로 이 경우의 수를 빼면 된다.

5개의 상자를 택하여 두 줄이 모두 유리 상자로 바뀌려면 두 줄이 하나의 상자를 공유해야 한다. 하나의 줄을 택하였을 때, 그 줄과 하나의 상자를 공유하는 다른 줄은 6개이고, 두 줄의 선택 순서에 따라 경우가 달라지지 않으므로 그 경우의 수는

$$27 \times 6 \times \frac{1}{2} = 81$$

따라서 적어도 한 면에서 빛이 통과하는 경우의 수는 $27 \times {}_{24}C_2 - 81$ 이므로 여사건의 확률은

$$\frac{27 \times {}_{24}C_2 - 81}{{}_{27}C_5} = \frac{21}{230}$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{21}{230} = \frac{209}{230}$

04 조건부확률

step 1 핵심 문제

| 50~51쪽

01 $\frac{9}{40}$ 02 ④ 03 $\frac{4}{35}$ 04 ⑤ 05 4 06 $\frac{7}{46}$

07 $\frac{3}{14}$ 08 $\frac{19}{25}$ 09 ④ 10 $\frac{9}{17}$ 11 ④ 12 $\frac{4}{9}$

01 답 $\frac{9}{40}$

$P(A \cup B^c) = \frac{7}{10}$ 에서 $P((A \cup B^c)^c) = 1 - P(A \cup B^c)$ 이므로

$$P(A^c \cap B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B)P(B|A^c) = \frac{2}{5} \text{에서 } P(B) \times \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{P(B)}{P(A^c)} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \quad \therefore \frac{P(B)}{P(A^c)} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A^c)P(A^c|B) &= P(A^c) \times \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A^c)}{P(B)} \times P(A^c \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{40} \end{aligned}$$

02 답 ④

두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건의 여사건은 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이고 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수와 같으므로 $3 \times 3 = 9$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$$

두 눈의 수의 곱이 짝수이고 두 눈의 수의 합이 짝수인 경우의 수는 두 눈의 수가 모두 짝수인 경우의 수와 같으므로 $3 \times 3 = 9$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

03 답 $\frac{4}{35}$

첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 공 2개를 꺼내는 사건을 A, 두 번째 시행에서 서로 같은 색의 공 2개를 꺼내는 사건을 B라 하자.

첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 공 2개를 꺼낼 확률은 4가지 색 중에서 2가지 색을 정하고 정한 색의 공을 각각 하나씩 꺼내면 되므로

$$P(A) = \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_8C_2} = \frac{6}{7}$$

두 번째 시행에서 서로 같은 색의 공 2개를 꺼낼 확률은 남은 6개의 공 중에서 같은 색의 공이 2개인 경우가 2가지이므로

$$P(B|A) = \frac{2}{{}_6C_2} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{6}{7} \times \frac{2}{15} = \frac{4}{35}$$

04 답 ⑤

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나온 사건을 A, 나온 주사위의 눈의 수의 총합이 4 이하인 사건을 B라 하자.

(i) 동전이 앞면이 나오고 주사위를 2번 던져서 나온 두 눈의 수의 총합이 4 이하일 확률

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{이고 주사위를 2번 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 4 이하}$$

인 경우는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)의 6가지

$$\text{이므로 } P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{6^2} = \frac{1}{12}$$

(ii) 동전이 뒷면이 나오고 주사위를 3번 던져서 나온 세 눈의 수의 총합이 4 이하일 확률

$$P(A^c) = \frac{1}{2} \text{이고 주사위를 3번 던져서 나온 세 눈의 수의 합이 4 이하}$$

인 경우는 (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 4가지이

$$\text{므로 } P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6^3} = \frac{1}{108}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{108} = \frac{5}{54}$$

05 답 4

주머니 B에 들어 있는 흰 공의 개수를 a라 하면 검은 공의 개수는 $6 - a$ 이다.배점 10%

주머니 A를 택하고 주머니 A에서 흰 공이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

주머니 B를 택하고 주머니 B에서 흰 공이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{a}{6} = \frac{a}{12}$$

$$\therefore p_1 = \frac{1}{6} + \frac{a}{12} = \frac{a+2}{12} \quad \dots\dots\dots\text{배점 30\%}$$

$$\text{주머니 A에서 검은 공이 나올 확률은 } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{주머니 B에서 검은 공이 나올 확률은 } \frac{6-a}{6}$$

$$\therefore p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{6-a}{6} = \frac{6-a}{9} \quad \dots\dots\dots\text{배점 30\%}$$

$$4p_1 = 9p_2 \text{에서 } 4 \times \frac{a+2}{12} = 9 \times \frac{6-a}{9}$$

$$\frac{a+2}{3} = 6-a, a+2=18-3a, 4a=16 \quad \therefore a=4$$

따라서 주머니 B에 들어 있는 흰 공의 개수는 4이다.배점 30%

06 답 $\frac{7}{46}$

3개의 입학 전형 A, B, C에 지원하여 합격할 확률이 각각 0.2, 0.3, 0.1이므로 불합격할 확률은 각각 0.8, 0.7, 0.9이다.

(i) 합격한 학생이 입학 전형 A와 B, 불합격한 학생이 입학 전형 C에 지원했을 확률은 $0.2 \times 0.3 \times 0.9 = 0.054$

(ii) 합격한 학생이 입학 전형 A와 C, 불합격한 학생이 입학 전형 B에 지원했을 확률은 $0.2 \times 0.7 \times 0.1 = 0.014$

(iii) 합격한 학생이 입학 전형 B와 C, 불합격한 학생이 입학 전형 A에 지원했을 확률은 $0.8 \times 0.3 \times 0.1 = 0.024$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{0.014}{0.054 + 0.014 + 0.024} = \frac{0.014}{0.092} = \frac{7}{46}$$

07 답 $\frac{3}{14}$

A가 2개 모두 '당첨'이 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 A, B가 2개 모두 '당첨'이 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

(i) A가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼내고 B가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{45}$$

(ii) A가 '당첨'이 적혀 있는 공 1개, '꽝'이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, B가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_6C_1 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{8}{15} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{135}$$

(iii) A가 '꽝'이 적혀 있는 공 2개를 꺼내고, B가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{45}$$

(i), (ii), (iii)에서 $P(B) = \frac{2}{45} + \frac{16}{135} + \frac{2}{45} = \frac{28}{135}$

(i)에서 $P(A \cap B) = \frac{2}{45}$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{45}}{\frac{28}{135}} = \frac{3}{14}$$

08 답 $\frac{19}{25}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c도 서로 독립이다.

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$\therefore P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

09 답 ④

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 에서

$$P(A \cap B) = 0$$

이때 $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ 이므로 $P(A)P(B) \neq 0$

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

$$\text{ㄴ. } 1 - P(A^c|B) = 1 - \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\ = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A|B^c) = P(A|B)$ 이므로

$$P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B)$$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로

$$1 - P(A \cup B) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ = 1 - P(A) - P(B) \{1 - P(A)\} \\ = \{1 - P(A)\} \{1 - P(B)\} \\ = P(A^c)P(B^c)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 답 $\frac{9}{17}$

과학을 선택한 여학생을 x명이라 하면 이 고등학교의 3학년 학생 수는 $180 + 160 + 45 + x = x + 385$ 이므로

$$P(A) = \frac{180 + 160}{x + 385} = \frac{340}{x + 385}$$

$$P(B) = \frac{180 + 45}{x + 385} = \frac{225}{x + 385}$$

$$P(A \cap B) = \frac{180}{x + 385}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 에서

$$\frac{180}{x + 385} = \frac{340}{x + 385} \times \frac{225}{x + 385}$$

$$x + 385 = 425$$

$$\therefore x = 40$$

$$\therefore P(B) = \frac{225}{40 + 385} = \frac{9}{17}$$

11 답 ④

시행을 5번 반복할 때, 앞면이 나온 횟수를 x라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $5 - x$ 이다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 2점, 뒷면이 나오면 1점을 얻으므로 5번 시행 후 점수의 합이 6 이하하려면

$$2x + 1 \times (5 - x) \leq 6 \quad \therefore x \leq 1$$

따라서 앞면이 0번 또는 1번 나와야 한다.

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

$$(i) \text{ 앞면이 0번, 뒷면이 5번 나올 확률은 } {}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$(ii) \text{ 앞면이 1번, 뒷면이 4번 나올 확률은 } {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 확률은 } \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

12 답 $\frac{4}{9}$

정육면체 모양의 상자를 1번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자가 3인 사건을 A, 동전의 앞면이 3번 이상 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 정육면체에서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자가 3이고 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{2}{6} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

(ii) 정육면체에서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자가 4이고 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 이상 나올 확률은

$$\frac{1}{6} \times \left\{ {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right\} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{96}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(B) = \frac{1}{24} + \frac{5}{96} = \frac{3}{32}$$

$$(i) \text{에서 } P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{3}{32}} = \frac{4}{9}$$

01 ③	02 $\frac{1}{3}$	03 9	04 ②	05 $\frac{20}{81}$	06 $\frac{16}{25}$
07 $\frac{11}{32}$	08 131	09 ④	10 ③	11 $\frac{2}{7}$	12 ④
13 8	14 ⑤	15 ③	16 ③	17 $\frac{8}{81}$	18 277
19 $\frac{12}{25}$	20 25	21 ③	22 $\frac{1}{3}$	23 21	

01 답 ③

전체집합 U 의 부분집합의 개수는 2^6 이므로 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수는 $2^6 \times 2^6 = 2^{12}$

(i) $n(A \cap B) = 2$ 일 때,

집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2$ 이고 나머지 4개의 원소는 세 집합 $A - B, B - A, (A \cup B)^c$ 중 하나의 원소이므로 $n(A \cap B) = 2$ 인 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_3\Pi_4$$

$$\therefore P(Y) = \frac{{}_6C_2 \times {}_3\Pi_4}{2^{12}}$$

(ii) $n(A \cap B) = 2, n(A) = 3$ 일 때,

집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2$, 나머지 4개의 원소 중 집합 $A - B$ 의 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$ 이고, 나머지 3개의 원소는 두 집합 $B - A, (A \cup B)^c$ 중 하나의 원소이므로 $n(A \cap B) = 2, n(A) = 3$ 인 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2\Pi_3$

$$\therefore P(X \cap Y) = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2\Pi_3}{2^{12}}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2\Pi_3}{2^{12}}}{\frac{{}_6C_2 \times {}_3\Pi_4}{2^{12}}} = \frac{32}{81}$$

02 답 $\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$
 $(\sqrt{2})^a(\sqrt{6})^b$ 이 무리수인 사건을 A , $(\sqrt{2})^a(\sqrt{6})^b = k\sqrt{3}$ 을 만족시키는 자연수 k 가 존재하는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.
 $(\sqrt{2})^a(\sqrt{6})^b = (\sqrt{2})^a(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^b = (\sqrt{2})^{a+b}(\sqrt{3})^b$ 에서 $(\sqrt{2})^a(\sqrt{6})^b$ 이 무리수 이려면 $a+b$ 또는 b 가 홀수이어야 하고, $(\sqrt{2})^a(\sqrt{6})^b = k\sqrt{3}$ 을 만족시키는 자연수 k 가 존재하려면 $a+b$ 는 짝수이고 b 는 홀수이어야 한다.

(i) $a+b$ 가 짝수이고 b 가 홀수인 경우

a 가 홀수이고 b 가 홀수이므로 그 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

(ii) $a+b$ 가 홀수이고 b 가 짝수인 경우

a 가 홀수이고 b 가 짝수이므로 그 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

(iii) $a+b$ 가 홀수이고 b 가 홀수인 경우

a 가 짝수이고 b 가 홀수이므로 그 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } P(A) = \frac{9+9+9}{36} = \frac{3}{4}$$

$$(i) \text{에서 } P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

03 답 9

$b-a \geq 5$ 인 사건을 A , $c-a \geq 10$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

모든 경우의 수는 12개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수이므로 ${}_{12}C_3 = 220$

$b-a \geq 5$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

(1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11),

(2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11),

(3, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11),

(4, 9), (4, 10), (4, 11),

(5, 10), (5, 11),

(6, 11)

$b-a \geq 5$ 에서 $b \geq a+5$

(i) $a=1$ 일 때,

$b=6$ 이면 c 는 7, 8, ..., 12의 6개

$b=7$ 이면 c 는 8, 9, ..., 12의 5개

$b=8$ 이면 c 는 9, 10, 11, 12의 4개

$b=9$ 이면 c 는 10, 11, 12의 3개

$b=10$ 이면 c 는 11, 12의 2개

$b=11$ 이면 c 는 12의 1개

따라서 c 의 개수는 $6+5+4+3+2+1=21$

(ii) $a=2$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$5+4+3+2+1=15$$

(iii) $a=3$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$4+3+2+1=10$$

(iv) $a=4$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$3+2+1=6$$

(v) $a=5$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$2+1=3$$

(vi) $a=6$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는 1

(i)~(vi)에서 $b-a \geq 5$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$21+15+10+6+3+1=56$$

$$\therefore P(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

또 $b-a \geq 5, c-a \geq 10$ 에서 $b \geq a+5, c \geq a+10$

(i) $a=1, c=11$ 일 때, $b=6, 7, 8, 9, 10$ 의 5개

(ii) $a=1, c=12$ 일 때, $b=6, 7, 8, 9, 10, 11$ 의 6개

(iii) $a=2, c=12$ 일 때, $b=7, 8, 9, 10, 11$ 의 5개

(i), (ii), (iii)에서 $b-a \geq 5$ 이고 $c-a \geq 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$5+6+5=16$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{16}{220} = \frac{4}{55}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}} = \frac{2}{7}$$

따라서 $p=7, q=2$ 이므로 $p+q=9$

04 답 ②

선택한 함수 f 가 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 인 사건을 A , $f(1)=f(5)$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

모든 경우의 수는 집합 X 에서 X 로의 모든 함수 f 의 개수와 같으므로 $s\Pi_8=8^8$

함수 f 가 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 이므로 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하면

$$f(1) < f(2), f(3) < f(4), f(5) < f(6), f(7) < f(8)$$

이때 $f(1) < f(2)$ 를 만족시키도록 $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1부터 8까지의 자연수 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 $sC_2=28$

$f(3) < f(4), f(5) < f(6), f(7) < f(8)$ 에 대해서도 같은 방법으로 하면 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 을 만족시키도록 $f(2n-1), f(2n)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 28^4 이므로

$$P(A) = \frac{28^4}{8^8}$$

이때 $f(1) < f(2), f(5) < f(6)$ 이므로 $f(1)=f(5)$ 인 경우는 $f(2)=f(6)$ 인 경우와 $f(2) \neq f(6)$ 인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $f(2)=f(6)$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값, $f(3), f(4)$ 의 값, $f(7), f(8)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 각각 28이고 $f(5)=f(1), f(6)=f(2)$ 이므로 함수값을 정하는 경우의 수는 28^3

(ii) $f(2) \neq f(6)$ 인 경우

$f(1)=f(5) < f(2) < f(6)$ 또는 $f(1)=f(5) < f(6) < f(2)$ 이므로 각각의 경우에 $f(1), f(2), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $sC_3=56$ 이고 $f(5)=f(1)$ 이므로 $f(1), f(2), f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 56=112$

$f(3), f(4)$ 의 값과 $f(7), f(8)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 각각 28 따라서 함수값을 정하는 경우의 수는 112×28^2

(i), (ii)에서 $f(1)=f(5)$ 인 경우의 수는

$$28^3 + 112 \times 28^2 = 140 \times 28^2$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{140 \times 28^2}{8^8}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{140 \times 28^2}{8^8}}{\frac{28^4}{8^8}} = \frac{5}{28}$$

05 답 $\frac{20}{81}$

월요일에 연아와 진우가 각각 A, B 작업장에서 근무하였으므로 화요일에 연아는 B, C, D 작업장 중 한 곳에서 근무하게 되고, 진우는 A, C, D 작업장 중 한 곳에서 근무하게 되므로 어느 날 서로 다른 작업장에서 근무한 후 다음 날 같은 작업장에서 근무할 확률은

$$\frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

또 화요일에 연아와 진우가 모두 C 작업장에서 일을 했다고 하면 수요일에 연아와 진우가 각각 A, B, D 작업장 중 한 곳에서 근무하게 되고, 같은 작업장에서 일하는 경우는 A, B, D의 3가지이므로 어느 날 서로 같은 작업장에서 근무한 후 다음 날 같은 작업장에서 근무할 확률은

$$\frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

화요일에 같은 작업장에서 근무하는 사건을 X , 수요일에 같은 작업장에서 근무하는 사건을 Y 라 하면

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(X^c \cap Y) = P(X^c)P(Y|X^c) = \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{14}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y) = \frac{2}{27} + \frac{14}{81} = \frac{20}{81}$$

06 답 $\frac{16}{25}$

(i) 첫 번째 시행에서 앞면인 동전 2개를 택하는 경우

앞면이 1개, 뒷면이 4개이므로 두 번째 시행에서는 뒷면인 동전 2개를 택해야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{50} \quad \text{배점 30\%}$$

(ii) 첫 번째 시행에서 앞면인 동전 1개와 뒷면인 동전 1개를 택하는 경우 앞면이 3개, 뒷면이 2개이므로 두 번째 시행에서는 앞면인 동전 1개와 뒷면인 동전 1개를 택해야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25} \quad \text{배점 30\%}$$

(iii) 첫 번째 시행에서 뒷면인 동전 2개를 택하는 경우

앞면이 5개이므로 두 번째 시행에서는 앞면인 동전 2개를 택해야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_5C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times 1 = \frac{1}{10} \quad \text{배점 30\%}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{9}{50} + \frac{9}{25} + \frac{1}{10} = \frac{16}{25} \quad \text{배점 10\%}$$

★ idea

07 답 $\frac{11}{32}$

최단 거리로 이동하려면 연지는 아래쪽으로 1번, 민우는 위쪽으로 1번 이동해야 하므로 두 사람은 $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ 의 중점에서만 만날 수 있다.

(i) $\overline{AE}$ 의 중점에서 만날 확률

연지가 $A \rightarrow E$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2}$

민우가 $E \rightarrow A$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(ii) $\overline{BF}$ 의 중점에서 만날 확률

연지가 $A \rightarrow B \rightarrow F$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

민우가 $E \rightarrow F \rightarrow B$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(iii) $\overline{CG}$ 의 중점에서 만날 확률

연지가 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

민우가 $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

(iv) $\overline{DH}$ 의 중점에서 만날 확률

연지가 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

민우가 $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow D$ 로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

08 답 131

(i) ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장 들어 있는 경우

2번의 시행에서 모두 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 2장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

(ii) ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있는 경우

① 첫 번째 시행에서 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 2장 꺼내면 두 번째 시행에서는 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 1장, 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{50}$$

② 첫 번째 시행에서 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 1장, 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서는 ★ 모양의 스티커가 2장 붙어 있는 카드를 1장, 나머지 카드 중에서 1장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$$

①, ②에서 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있을 확률은

$$\frac{3}{50} + \frac{6}{25} = \frac{3}{10}$$

(i), (ii)에서 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 들어 있을 확률은

$$\frac{1}{100} + \frac{3}{10} = \frac{31}{100}$$

따라서 $p=100$, $q=31$ 이므로 $p+q=131$

09 답 ④

흰 공 2개를 모두 꺼낼 때까지 꺼낸 공의 개수가 k 인 경우는 $(k-1)$ 번째까지 1개의 흰 공과 $(k-2)$ 개의 검은 공을 꺼내고 k 번째에 흰 공을 꺼내는 경우이다.

10개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 $(k-1)$ 개의 공 중에 흰 공이 1개, 검은 공이 $(k-2)$ 개 있을 확률은

$$\begin{aligned} \frac{{}_2C_1 \times {}_8C_{k-2}}{{}_{10}C_{k-1}} &= 2 \times \frac{8!}{(k-2)!(10-k)!} \times \frac{(k-1)!(11-k)!}{10!} \\ &= 2 \times \frac{(k-1)(11-k)}{10 \times 9} = \frac{(k-1)(11-k)}{45} \end{aligned}$$

k 번째에 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{10-(k-1)} = \frac{1}{11-k}$

따라서 흰 공 2개를 모두 꺼낼 때까지 꺼낸 공의 개수가 k 일 확률은

$$P(k) = \frac{(k-1)(11-k)}{45} \times \frac{1}{11-k} = \frac{k-1}{45}$$

$$\therefore P(4) + P(5) + P(6) = \frac{3}{45} + \frac{4}{45} + \frac{5}{45} = \frac{4}{15}$$

개념 NOTE

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \leq r \leq n)$$

10 답 ③

(i) 첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률

주머니 A에서 검은 공을 꺼내거나, 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고

주머니 B에서 다시 흰 공을 꺼낼 확률이므로

$$P(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(ii) 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률

① 첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

② 첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없는 경우

첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없을 확률은 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 이

고, 이때 두 번째 시행에서 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고 주머니 B에서 흰 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

①, ②에서 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률은

$$P(2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

(iii) 세 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률

① 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있는 경우

(i), (ii)와 같은 방법으로 하면 그 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{27}$$

② 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없는 경우

두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없을 확률은 $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ 이

고, 이때 세 번째 시행에서 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고 주머니 B에서 흰 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

①, ②에서 세 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률은

$$P(3) = \frac{10}{27} + \frac{4}{27} = \frac{14}{27}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } P(1) + P(2) - P(3) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{14}{27} = \frac{19}{27}$$

11 답 $\frac{2}{7}$

처음 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중 7이 적혀 있는 공이 포함되는 사건을 X , 주머니 A에 들어 있는 4개의 공에 적혀 있는 수 중 최댓값이 7인 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은 $P(X|Y)$ 이다.

(i) 주머니 A에서 7이 적혀 있는 공을 포함하여 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 다음 다시 주머니 B에서 8이 적혀 있는 공을 제외한 공 중에서 7이 적혀 있는 공을 포함하여 2개를 꺼내어 주머니 A에 넣을 확률은

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= P(X)P(Y|X) \\ &= \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{15} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

(ii) 주머니 A에서 7이 적혀 있는 공을 제외한 공 중에서 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣은 다음 다시 주머니 B에서 8이 적혀 있는 공을 제외한 공 중에서 2개를 꺼내어 주머니 A에 넣을 확률은

$$\begin{aligned} P(X^c \cap Y) &= P(X^c)P(Y|X^c) \\ &= \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\therefore P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$$

12 답 ④

가위바위보를 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해지는 사건을 A, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

가위바위보를 2번 하였으므로 첫 번째 가위바위보에서 이긴 학생이 없거나 2명이어야 한다.

(i) 첫 번째 가위바위보에서 이긴 학생이 없는 경우

첫 번째 가위바위보에서 세 학생이 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 내고, 두 번째 가위바위보에서 A만 이기면 된다.

세 학생이 모두 다른 것을 내는 경우의 수는 $3!$ 이고 모두 같은 것을 내는 경우의 수는 3이므로 세 학생이 가위바위보를 하여 이긴 학생이 없을 확률은 $\frac{3!+3}{3^3} = \frac{1}{3}$

세 학생이 가위바위보를 하여 A만 이길 확률은 $\frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

(ii) 첫 번째 가위바위보에서 이긴 학생이 2명인 경우

첫 번째 가위바위보에서 A를 포함한 2명의 학생이 이기고, 두 번째 가위바위보에서 A가 이기면 된다.

세 학생이 가위바위보를 하여 B 또는 C가 A와 같은 것을 내고 이기는 경우가 각각 3가지이므로 A를 포함한 2명의 학생이 이길 확률은 $\frac{2 \times 3}{3^3} = \frac{2}{9}$

B 또는 C가 A와 가위바위보를 하여 A가 이길 확률은 $\frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$

따라서 그 확률은 $\frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

(i), (ii)에서 $P(A) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9}$

(ii)에서 $P(A \cap B) = \frac{2}{27}$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

13 답 8

한 개의 주사위를 1번 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

두 사건 A와 B가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 한다.

(i) $m=1$ 일 때,

1의 약수의 눈은 1이므로 $P(B) = \frac{1}{6}$

1의 약수 중 홀수의 눈은 1이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

(ii) $m=2$ 일 때,

2의 약수의 눈은 1, 2의 2가지이므로 $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2의 약수 중 홀수의 눈은 1이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(iii) $m=3$ 일 때,

3의 약수의 눈은 1, 3의 2가지이므로 $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3의 약수 중 홀수의 눈은 1, 3의 2가지이므로 $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

(iv) $m=4$ 일 때,

4의 약수의 눈은 1, 2, 4의 3가지이므로 $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4의 약수 중 홀수의 눈은 1이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

(v) $m=5$ 일 때,

5의 약수의 눈은 1, 5의 2가지이므로 $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5의 약수 중 홀수의 눈은 1, 5의 2가지이므로 $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

(vi) $m=6$ 일 때,

6의 약수의 눈은 1, 2, 3, 6의 4가지이므로 $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

6의 약수 중 홀수의 눈은 1, 3의 2가지이므로 $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(i)~(vi)에서 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 를 만족시키는 m 의 값은 2, 6이다.

따라서 모든 m 의 값의 합은 $2+6=8$

14 답 ⑤

주머니에 들어 있는 카드의 개수를 표로 나타내면 다음과 같다.

색 \ 숫자	1	2	합계
노란색	4	$\frac{n}{4}-4$	$\frac{n}{4}$
빨간색	$\frac{n}{2}-a$	a	$\frac{n}{2}$
파란색	5	$\frac{n}{4}-5$	$\frac{n}{4}$
합계	$\frac{n}{2}-a+9$	$\frac{n}{2}+a-9$	n

$$P(A) = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{\frac{n}{2}+a-9}{n} = \frac{n+2a-18}{2n}, P(A \cap B) = \frac{a}{n}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{n+2a-18}{2n}$$

$$4a = n + 2a - 18 \quad \therefore a = \frac{n}{2} - 9$$

따라서 $f(n) = \frac{n}{2} - 9$ 이므로

$$f(20) + f(40) = 1 + 11 = 12$$

15 **답** ③

20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개이므로

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

20보다 작은 자연수 n 에 대하여 n 이하의 수가 나오는 사건이 B_n 이므로

$$P(B_n) = \frac{n}{20}$$

20보다 작은 자연수 n 에 대하여 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이려면

$$P(A \cap B_n) = P(A)P(B_n) \text{ 이어야 한다.}$$

$$A \cap B_n \text{의 원소의 개수를 } k \text{ 라 하면 } P(A \cap B_n) = \frac{k}{20} \text{ 이므로}$$

$$\frac{k}{20} = \frac{2}{5} \times \frac{n}{20} \quad \therefore k = \frac{2}{5}n$$

이때 k 는 자연수이므로 n 은 5의 배수이다.

(i) $n=5$ 일 때,

$$P(B_5) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ 이고, 5 이하의 소수는 2, 3, 5의 3개이므로}$$

$$P(A \cap B_5) = \frac{3}{20}$$

$$\therefore P(A \cap B_5) \neq P(A)P(B_5)$$

(ii) $n=10$ 일 때,

$$P(B_{10}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ 이고, 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로}$$

$$P(A \cap B_{10}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B_{10}) = P(A)P(B_{10})$$

(iii) $n=15$ 일 때,

$$P(B_{15}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ 이고, 15 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개}$$

이므로

$$P(A \cap B_{15}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(A \cap B_{15}) = P(A)P(B_{15})$$

(i), (ii), (iii)에서 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이 되도록 하는 n 의 값은 10, 15이므로 최댓값은 15이다.

16 **답** ③

6번째 시행 후 상자 B에 8개의 공이 들어 있으려면 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣는 것을 상자 B에서 공 1개를 꺼내어 상자 A에 넣는 것보다 2번 더 해야 하므로 동전의 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 한다.

이때 6번째 시행 후 처음으로 상자 B에 8개의 공이 들어 있으려면 5번째 시행 후에는 7개, 4번째 시행 후에는 6개의 공이 상자 B에 들어 있어야 한다.

따라서 4번째 시행까지 동전의 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나와야 하고, 이 중 상자 B에 공이 8개 들어가는 경우를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다. → 1. 2번째 모두 앞면이 나오는 경우

1번째	2번째	3번째	4번째	5번째	6번째
앞	뒤	앞	뒤	앞	앞
앞	뒤	뒤	앞	앞	앞
뒤	앞	앞	뒤	앞	앞
뒤	앞	뒤	앞	앞	앞
뒤	뒤	앞	앞	앞	앞

동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

로 5가지 경우 모두 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$5 \times \frac{1}{64} = \frac{5}{64}$$

17 **답** $\frac{8}{81}$

(i) $a_1=1$ 일 때,

$$b_1=a_1=1 \text{ 이므로 } b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{ 에서}$$

$$b_2+b_3+b_4+b_5=2$$

① $a_2=1$ 일 때,

$$b_2=b_1+1=2 \text{ 이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=2 \text{ 에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=0$$

따라서 $b_3=b_4=b_5=0$ 이어야 하므로 $a_3=a_4=a_5=0$

② $a_2=0$ 일 때,

$$b_2=0 \text{ 이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=2 \text{ 에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=2$$

③ $a_3=1$ 일 때,

$$b_3=b_2+1=1 \text{ 이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{ 에서}$$

$$b_4+b_5=1$$

따라서 $b_4=0, b_5=1$ 이어야 하므로 $a_4=0, a_5=1$

④ $a_3=0$ 일 때,

$$b_3=0 \text{ 이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{ 에서}$$

$$b_4+b_5=2$$

이를 만족시키는 b_4, b_5 의 값은 존재하지 않는다.

⑤ ③, ④에서 $a_3=1, a_4=0, a_5=1$

(ii) $a_1=0$ 일 때,

$$b_1=a_1=0 \text{ 이므로 } b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{ 에서}$$

$$b_2+b_3+b_4+b_5=3$$

① $a_2=1$ 일 때,

$$b_2=b_1+1=1 \text{ 이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{ 에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=2$$

② $a_3=1$ 일 때,

$$b_3=b_2+1=2 \text{ 이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{ 에서}$$

$$b_4+b_5=0$$

따라서 $b_4=b_5=0$ 이어야 하므로 $a_4=a_5=0$

③ $a_3=0$ 일 때,

$$b_3=0 \text{ 이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{ 에서}$$

$$b_4+b_5=2$$

이를 만족시키는 b_4, b_5 의 값은 존재하지 않는다.

④ ③, ④에서 $a_3=1, a_4=0, a_5=0$

⑤ $a_2=0$ 일 때,

$$b_2=0 \text{ 이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{ 에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=3$$

⑥ $a_3=1$ 일 때,

$$b_3=b_2+1=1 \text{ 이므로 } b_3+b_4+b_5=3 \text{ 에서}$$

$$b_4+b_5=2$$

따라서 $b_4=2, b_5=0$ 이어야 하므로 $a_4=1, a_5=0$

⑥ $a_3=0$ 일 때,

$b_3=0$ 이므로 $b_3+b_4+b_5=3$ 에서

$b_4+b_5=3$

따라서 $b_4=1, b_5=2$ 이어야 하므로 $a_4=1, a_5=1$

⑦, ⑧에서 $a_3=1, a_4=1, a_5=0$ 또는 $a_3=0, a_4=1, a_5=1$

(i), (ii)에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 는 $(1, 1, 0, 0, 0)$,

$(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1)$

이때 1이 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 0이 적혀 있는 공을 꺼낼

확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{243}+\frac{16}{243}=\frac{8}{81}$$

18 답 277

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 최댓값을 M 이라 하자.

(i) $M \leq 5$ 인 경우

주사위를 1번 던져서 5 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{5}{6}$

주사위에서 3번 모두 5 이하의 눈이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $M \leq 4$ 인 경우

주사위를 1번 던져서 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

주사위에서 3번 모두 4 이하의 눈이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(i), (ii)에서 $M=5$ 일 확률은

$$\frac{125}{216}-\frac{8}{27}=\frac{61}{216} \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

따라서 $p=216, q=61$ 이므로

$$p+q=277 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

19 답 $\frac{12}{25}$

한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2개가 나오는 사건을 A , 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고 주사위를 1번 던

져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(i) 동전을 3번 던져서 나오는 앞면의 개수가 1이고, 주사위를 1번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$$

(ii) 동전을 3번 던져서 나오는 앞면의 개수가 2이고, 주사위를 2번 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{6}$$

(iii) 동전을 3번 던져서 나오는 앞면의 개수가 3이고, 주사위를 3번 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\times{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$(i), (ii), (iii)에서 P(B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{25}{72}$$

$$(ii)에서 P(A \cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{72}}=\frac{12}{25}$$

20 답 25

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우이므로 그 확률은

$$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

서로 다른 2개의 주사위를 동시에

던지는 시행을 8번 반복한 후 점 P

의 좌표를 (a, b) 라 하면 $a+b=8$

이므로 원 $(x-8)^2+y^2=4$ 의 내

부에 있는 점 P의 좌표는 $(8, 0),$

$(7, 1)$ 의 2가지이다.

(i) 점 P의 좌표가 $(8, 0)$ 인 경우

주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이 8번 일어

$$\text{날 확률은 } {}_8C_8\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^8$$

(ii) 점 P의 좌표가 $(7, 1)$ 인 경우

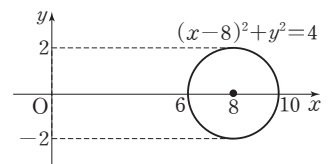
주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이 7번, 짝

$$\text{수인 사건이 1번 일어날 확률은 } {}_8C_7\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^1=24\times\left(\frac{1}{4}\right)^8$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\left(\frac{1}{4}\right)^8+24\times\left(\frac{1}{4}\right)^8=25\times\left(\frac{1}{4}\right)^8=\frac{25}{2^{16}}$$

$$\therefore p=25$$



21 답 ③

점 A의 y 좌표가 처음으로 3이 되는 사건을 A , 점 A의 x 좌표가 1인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 점 A의 좌표가 $(0, 3)$ 인 경우

한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 0번, 뒷면이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

(ii) 점 A의 좌표가 $(1, 3)$ 인 경우

세 번의 시행에서 점 A를 점 $(1, 2)$ 까지 이동시킨 후 네 번째 시행에서 점 A를 y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동시키면 된다.

즉, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나오고 4번째 던진 동전이 뒷면이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(iii) 점 A의 좌표가 $(2, 3)$ 인 경우

네 번의 시행에서 점 A를 점 $(2, 2)$ 까지 이동시킨 후 다섯 번째 시행에서 점 A를 y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동시키면 된다.

즉, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오고 5번
째 던진 동전이 뒷면이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \text{에서 } P(A \cap B) = \frac{3}{16}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}$$

22 답 1/3

정육면체 모양의 상자를 1번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가
짝수일 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 홀수일 확률은 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

시계 반대 방향으로 1만큼 이동하는 횟수를 a , 시계 방향으로 1만큼 이
동하는 횟수를 b 라 하면 $a+b=7$

이때 시계 반대 방향을 양의 방향으로 생각하자.

(i) $a-b=1$ 인 경우

$a=4, b=3$ 이므로 정육면체 모양의 상자를 7번 던져서 바닥에 닿은
면에 적혀 있는 수가 짝수가 4번, 홀수가 3번 나올 확률은

$${}_7C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{280}{3^7}$$

(ii) $a-b=7$ 인 경우

$a=7, b=0$ 이므로 정육면체 모양의 상자를 7번 던져서 바닥에 닿은
면에 적혀 있는 수가 모두 짝수일 확률은

$${}_7C_7 \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{3^7}$$

(iii) $a-b=-5$ 인 경우

$a=1, b=6$ 이므로 정육면체 모양의 상자를 7번 던져서 바닥에 닿은
면에 적혀 있는 수가 짝수가 1번, 홀수가 6번 나올 확률은

$${}_7C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{448}{3^7}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 구하는 확률은 } \frac{280+1+448}{3^7} = \frac{729}{3^7} = \frac{1}{3}$$

23 답 21

주머니에서 임의로 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, a, b 의 순서쌍 (a, b)
는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$

한 번의 시행에서 $a > b$, 즉 $a=3, b=1$ 일 확률은 $\frac{{}_3C_3 \times {}_3C_1}{{}_6C_4} = \frac{1}{5}$ 이고,

이때 점 P는 x 축의 양의 방향으로 3만큼 이동한다.

또 한 번의 시행에서 $a \leq b$ 일 확률은 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ 이고, 이때 점 P는 x 축

의 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

5번의 시행 중에서 $a > b$ 인 사건이 일어나는 횟수를 m 이라 하면 $a \leq b$ 인
사건이 일어나는 횟수는 $(5-m)$ 이므로 5번의 시행 후 점 P의 좌표는

$$3m - (5-m) = 4m - 5$$

이때 점 P의 좌표가 10 이상이라면

$$4m - 5 \geq 10, 4m \geq 15 \quad \therefore m \geq \frac{15}{4}$$

그런데 m 은 5 이하의 음이 아닌 정수이므로 $m=4$ 또는 $m=5$

$$\therefore p = {}_5C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^1 + {}_5C_5 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{20}{5^5} + \frac{1}{5^5} = \frac{21}{5^5}$$

$$\therefore 5^5 \times p = 21$$

step 3 최고난도 문제

| 57~59쪽

01 25	02 ②	03 3080	04 $\frac{3}{7}$	05 $\frac{11}{28}$	06 $\frac{20}{61}$
07 135	08 ④	09 191			

01 답 25

1단계 조건부확률 이용하기

선택한 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이
하인 사건을 A , 두 수의 합이 짝수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은
 $P(B|A)$ 이다.

2단계 $P(A)$ 의 값 구하기

모든 경우의 수는 15장의 카드 중에서 2장을 택하는 경우의 수이므로
 ${}_{15}C_2 = 105$

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하가 되려면 두 수 중 하나
가 1이거나 두 수가 서로 같은 소수인 경우이다.

(i) 두 수 중 하나가 1인 경우

나머지 1장의 카드는 1이 적힌 카드를 제외한 14장의 카드 중에서 1
장을 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{14}C_1 = 14$

(ii) 두 수가 서로 같은 소수인 경우

① 두 수가 2인 경우

2가 적힌 2장의 카드 중에서 2장을 택하면 되므로 그 경우의 수
는 ${}_2C_2 = 1$

② 두 수가 3인 경우

3이 적힌 3장의 카드 중에서 2장을 택하면 되므로 그 경우의 수
는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

③ 두 수가 5인 경우

5가 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 택하면 되므로 그 경우의 수
는 ${}_5C_2 = 10$

①, ②, ③에서 두 수가 서로 같은 소수인 경우의 수는
 $1+3+10=14$

(i), (ii)에서 그 경우의 수는 $14+14=28$

$$\therefore P(A) = \frac{28}{105}$$

3단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하이고 두 수의 합이 짝수인
사건은 (i)에서 1이 적힌 카드 1장을 택하고 3 또는 5가 적힌 8장의 카
드 중에서 1장을 택하는 경우와 (ii)인 경우이므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_8C_1 + 14 = 8 + 14 = 22$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{22}{105}$$

4단계 $P(B|A)$ 의 값 구하기

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{22}{105}}{\frac{28}{105}} = \frac{11}{14}$$

5단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=14, q=11$ 이므로 $p+q=25$

02 답 ②

1단계 조건부확률 이용하기

9개의 점 중에서 서로 다른 4개를 택할 때, 4개의 점을 꼭짓점으로 하는
사각형이 존재하는 사건을 X , 사각형에 외접하는 원이 존재하는 사건
을 Y 라 하면 구하는 확률은 $P(Y|X)$ 이다.

2단계 $P(X)$ 의 값 구하기

9개의 점 중에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_4=126$$

사건 X 가 일어나지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 네 점이 한 직선 위에 있는 경우

삼각형의 한 변 위의 4개의 점을 택하는 경우의 수이므로

$$3 \times {}_4C_4=3 \times 1=3$$

(ii) 네 점 중 세 점이 한 직선 위에 있는 경우

삼각형의 한 변 위의 3개의 점과 그 변 위에 있지 않은 1개의 점을 택하는 경우의 수이므로

$$3 \times {}_4C_3 \times {}_5C_1=3 \times {}_4C_1 \times {}_5C_1=3 \times 4 \times 5=60$$

(i), (ii)에서 사건 X 가 일어나지 않는 경우의 수는 $3+60=63$ 이므로

$$P(X)=1-\frac{63}{126}=\frac{1}{2}$$

3단계 $P(X \cap Y)$ 의 값 구하기

사건 $X \cap Y$ 가 일어나는 경우는 다음과 같다.

(i) 네 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 없는 경우

6개의 삼등분점을 꼭짓점으로 하는 육각형은 정육각형이므로 6개의 삼등분점은 모두 한 원 위에 있다.

따라서 6개의 삼등분점 중에서 택한 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 외접하는 원이 항상 존재하므로 그 경우의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=15$$

(ii) 네 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 2개인 경우

택한 4개의 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 아닌 나머지 2개의 점을 지나는 직선이 정삼각형의 꼭짓점을 지나는 변과 평행해야 하므로 그 경우의 수는

$${}_3C_2 \times 2={}_3C_1 \times 2=3 \times 2=6$$

(i), (ii)에서 사건 $X \cap Y$ 가 일어나는 경우의 수는 $15+6=21$ 이므로

$$P(X \cap Y)=\frac{21}{126}=\frac{1}{6}$$

4단계 확률 구하기

$$\therefore P(Y|X)=\frac{P(X \cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

03 답 3080

1단계 사건 A 의 개수 구하기

표본공간에 속하는 근원사건의 개수는 8이므로 $n(A)=5$ 를 만족시키는 사건 A 의 개수는

$${}_8C_5={}_8C_3=56$$

2단계 사건 B 의 개수 구하기

$$P(A|B)=\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{n(A \cap B)}{n(B)}=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$n(B)=2 \times n(A \cap B)$$

이때 $n(B)=n(A \cap B)+n(A^c \cap B)$ 이므로

$$n(A \cap B)+n(A^c \cap B)=2 \times n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B)=n(A^c \cap B)$$

(i) $n(A \cap B)=n(A^c \cap B)=1$ 일 때,

사건 B 의 개수는 사건 A 의 근원 사건 5개 중에서 하나를 택하여 $A \cap B$ 로 정하고, 사건 A 의 근원 사건이 아닌 3개의 사건 중에서 하나를 택하여 $A^c \cap B$ 로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_1 \times {}_3C_1=5 \times 3=15$$

(ii) $n(A \cap B)=n(A^c \cap B)=2$ 일 때,

사건 B 의 개수는 사건 A 의 근원 사건 5개 중에서 2개를 택하여 $A \cap B$ 로 정하고, 사건 A 의 근원 사건이 아닌 3개의 사건 중에서 2개를 택하여 $A^c \cap B$ 로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2 \times {}_3C_2={}_5C_2 \times {}_3C_1=10 \times 3=30$$

(iii) $n(A \cap B)=n(A^c \cap B)=3$ 일 때,

사건 B 의 개수는 사건 A 의 근원 사건 5개 중에서 3개를 택하여 $A \cap B$ 로 정하고, 사건 A 의 근원 사건이 아닌 3개의 사건 중에서 3개를 택하여 $A^c \cap B$ 로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_3 \times {}_3C_3={}_5C_2 \times {}_3C_3=10 \times 1=10$$

(i), (ii), (iii)에서 사건 B 의 개수는

$$15+30+10=55$$

3단계 순서쌍 (A, B) 의 개수 구하기

따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$56 \times 55=3080$$

04 답 $\frac{3}{7}$

1단계 조건부확률 이용하기

기울기가 음수인 선분의 개수가 소수인 사건을 A , 기울기가 음수인 선분의 개수가 3인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 기울기가 음수가 되는 경우 파악하기

기울기가 음수인 선분의 개수가 n 인 경우의 수를 $N(n)$ 이라 하면

$$N(0)=N(6), N(1)=N(5), N(2)=N(4) \text{를 만족시킨다.}$$

$$N(U)=N(0)+N(1)+N(2)+N(3)+N(4)+N(5)+N(6) \text{이라 하면}$$

$$N(U)-N(3)=2\{N(0)+N(2)+N(5)\}$$

$$N(2)+N(5)=\frac{N(U)-N(3)}{2}-N(0)$$

$$\therefore N(2)+N(3)+N(5)=\frac{N(U)-N(3)}{2}-N(0)+N(3)$$

..... ㉠

따라서 $N(U)$, $N(0)$, $N(3)$ 을 구하면 기울기가 음수인 선분의 개수가 소수인 경우의 수를 구할 수 있다.

3단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

$$N(U)={}_6P_4=360$$

기울기가 음수인 선분이 3개이려면 $c < a < d < b$, $b < d < a < c$,

$a < d < c < b$, $b < c < d < a$, $c < b < a < d$, $d < a < b < c$ 를 만족시켜야 하므로

$$N(3)={}_6C_4 \times 6={}_6C_2 \times 6=15 \times 6=90$$

$$\therefore P(A \cap B)=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$$

4단계 $P(A)$ 의 값 구하기

기울기가 음수인 선분이 존재하지 않으려면 $a < b < c < d$ 를 만족시켜야 하므로

$$N(0)={}_6C_4={}_6C_2=15$$

따라서 ㉠에서 기울기가 음수인 선분의 개수가 소수인 경우의 수는

$$N(2)+N(3)+N(5)=\frac{360-90}{2}-15+90=210$$

$$\therefore P(A)=\frac{210}{360}=\frac{7}{12}$$

5단계 확률 구하기

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}}=\frac{3}{7}$$

방법 NOTE

두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 에 대하여 $a < c$ 일 때, 선분 AB의 기울기가 음수이면 $b > d$

idea
05 답 $\frac{11}{28}$

1단계 P(5)의 값 구하기

5개의 상자를 확인한 후 검은 공이 들어 있는 3개의 상자를 모두 찾는 경우는 4번째까지 확인한 상자가 검은 공이 들어 있는 상자 2개, 흰 공이 들어 있는 상자 2개이고 5번째에 검은 공이 들어 있는 상자를 확인하는 경우이거나, 확인한 5개의 상자가 모두 흰 공이 들어 있는 상자인 경우이므로 그 확률은

$$P(5) = \frac{{}_3C_2 \times {}_5C_2}{{}_8C_4} \times \frac{1}{4} + \frac{{}_5C_5}{{}_8C_5} = \frac{3}{28} + \frac{1}{56} = \frac{1}{8}$$

2단계 P(6)의 값 구하기

6개의 상자를 확인한 후 검은 공이 들어 있는 3개의 상자를 모두 찾는 경우는 5번째까지 확인한 상자가 검은 공이 들어 있는 상자 2개, 흰 공이 들어 있는 상자 3개이고 6번째에 검은 공이 들어 있는 상자를 확인하는 경우이거나, 5번째까지 확인한 상자가 검은 공이 들어 있는 상자 1개, 흰 공이 들어 있는 상자 4개이고 6번째에 흰 공이 들어 있는 상자를 확인하는 경우이므로 그 확률은

$$P(6) = \frac{{}_3C_2 \times {}_5C_3}{{}_8C_5} \times \frac{1}{3} + \frac{{}_3C_1 \times {}_5C_4}{{}_8C_5} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{28} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

3단계 P(5)+P(6)의 값 구하기

$$\therefore P(5) + P(6) = \frac{1}{8} + \frac{15}{56} = \frac{11}{28}$$

06 답 $\frac{20}{61}$

1단계 조건부확률 이용하기

타일이 3개 이하의 영역으로 구분되는 사건을 A, 2개의 영역으로 구분되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 6의 약수의 눈의 수가 나올 확률과 나오지 않을 확률 구하기

6의 약수의 눈의 수가 나오는 경우는 1, 2, 3, 6의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

6의 약수가 아닌 눈의 수가 나올 확률은 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

3단계 구분 영역의 개수에 따라 확률 구하기

(i) 구분 영역이 1개일 때,

모두 빨간색으로 칠하거나 모두 파란색으로 칠해야 하므로 그 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{81}$

(ii) 구분 영역이 2개일 때,

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)로 구분될 수 있고, 각각에 대하여 빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으므로 그 확률은

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right\} + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right\} \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \right\} \\ & = \frac{20}{81} \end{aligned}$$

(iii) 구분 영역이 3개일 때,

(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)로 구분될 수 있다.

① (1, 1, 3) 또는 (2, 1, 2) 또는 (3, 1, 1)로 구분되는 경우

빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으므로 그 확률은

$$3 \times \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{9}$$

② (2, 2, 1) 또는 (1, 2, 2)로 구분되는 경우

빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으므로 그 확률은

$$2 \times \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} = \frac{8}{81}$$

③ (1, 3, 1)로 구분되는 경우

빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으므로 그 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}$$

①, ②, ③에서 구분 영역이 3개일 확률은

$$\frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \frac{4}{81} = \frac{10}{27}$$

4단계 확률 구하기

$$(i), (ii), (iii)에서 P(A) = \frac{11}{81} + \frac{20}{81} + \frac{10}{27} = \frac{61}{81}$$

$$(ii)에서 P(A \cap B) = \frac{20}{81}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{81}}{\frac{61}{81}} = \frac{20}{61}$$

07 답 135

1단계 한 번의 시행 후 A가 가진 공의 개수의 변화에 따라 확률 구하기

한 개의 주사위를 1번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

A가 가진 공이 1개 늘어날 확률은 A가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수일 확률이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A가 가진 공의 개수가 변화가 없을 확률은 A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수일 확률이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A가 가진 공이 1개 줄어들 확률은 A가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수일 확률이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2단계 확률 구하기

각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 4번째 시행 후 처음으로 6이 되는 경우는

(3, 4, 5, 6), (4, 4, 5, 6), (4, 5, 5, 6), (5, 4, 5, 6), (5, 5, 5, 6)

(i) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (3, 4, 5, 6)인 경우

1번째 시행 후 1개 줄어들고 2번째, 3번째, 4번째 시행 후 1개씩 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$$

(ii) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (4, 4, 5, 6)인 경우

1번째, 2번째 시행 후 변화가 없고 3번째, 4번째 시행 후 1개씩 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

(iii) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (4, 5, 5, 6)인 경우
 1번째 시행 후 변화가 없고 2번째 시행 후 1개가 늘어나고 3번째 시행 후 변화가 없고 4번째 시행 후 1개가 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

(iv) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (5, 4, 5, 6)인 경우
 1번째 시행 후 1개가 늘어나고 2번째 시행 후 1개가 줄어들고 3번째, 4번째 시행 후 1개씩 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$$

(v) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (5, 5, 5, 6)인 경우
 1번째 시행 후 1개가 늘어나고 2번째, 3번째 시행 후 변화가 없고 4번째 시행 후 1개가 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

(i)~(v)에서 각 시행 후 A가 가진 공의 개수를 세었을 때, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 될 확률은

$$\frac{1}{256} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{64} = \frac{7}{128}$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=128$, $q=7$ 이므로

$$p+q=135$$

08 답 ④

1단계 a_{2k} 구하기

(i) $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2k-m}{2k}$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{l}{2k}$ ($l=1, 2, 3, \dots, k$)이라 하자.

두 사건 A, B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$\frac{l}{2k} = \frac{1}{2} \times \frac{2k-m}{2k} \quad \therefore m = 2k - 2l$$

따라서 m 의 값은 2, 4, 6, $\dots$, $2(k-1)$

$$\begin{aligned} \therefore a_{2k} &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2(k-1) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} 2l = 2 \times \frac{(k-1)k}{2} = k(k-1) \end{aligned}$$

2단계 a_{2k+1} 구하기

(ii) $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$P(A) = \frac{k}{2k+1}, P(B) = \frac{2k+1-m}{2k+1}$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{l}{2k+1}$ ($l=1, 2, 3, \dots, k$)이라 하자.

두 사건 A, B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$\frac{l}{2k+1} = \frac{k}{2k+1} \times \frac{2k+1-m}{2k+1}$$

$$l(2k+1) = 2k^2 + k - km$$

$$\therefore m = 2k + 1 - 2l - \frac{l}{k}$$

이때 m 이 자연수이므로 $l=k$ 이어야 한다.

$$\therefore m = 2k + 1 - 2k - 1 = 0$$

이는 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않으므로 n 은 홀수가 될 수 없다.

$$\therefore a_{2k+1} = 0$$

3단계 $\sum_{n=2}^{20} a_n$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=2}^{20} a_n &= \sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \sum_{n=1}^{10} n(n-1) = \sum_{n=1}^{10} (n^2 - n) \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} = 385 - 55 = 330 \end{aligned}$$

09 답 191

1단계 조건부확률 이용하기

$a_5 + b_5 \geq 7$ 인 사건을 A , $a_k = b_k$ 인 자연수 k ($1 \leq k \leq 5$)가 존재하는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 주사위를 1번 던져서 나온 눈의 수가 5 이상일 확률과 4 이하일 확률 구하기

한 개의 주사위를 1번 던질 때, 5 이상의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4 이하의 눈이 나올 확률은 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3단계 $P(A)$ 의 값 구하기

시행을 5번 한 후 5 이상의 눈의 수가 나온 횟수를 x 라 하면 4 이하의 눈의 수가 나온 횟수는 $5-x$ 이므로 5번의 시행 후 공의 개수가 7 이상 이려면

$$2x + 1 \times (5-x) \geq 7 \quad \therefore x \geq 2$$

따라서 $a_5 + b_5 \geq 7$ 이라면 5번의 시행에서 5 이상의 눈의 수가 2번 이상 나와야 한다.

(i) 5 이상의 눈의 수가 2번 나올 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{3^5}$$

(ii) 5 이상의 눈의 수가 3번 나올 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{3^5}$$

(iii) 5 이상의 눈의 수가 4번 나올 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{3^5}$$

(iv) 5 이상의 눈의 수가 5번 나올 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{3^5}$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } P(A) = \frac{80}{3^5} + \frac{40}{3^5} + \frac{10}{3^5} + \frac{1}{3^5} = \frac{131}{3^5}$$

4단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

n ($1 \leq n \leq 5$)번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 같은 경우는 흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있는 경우, 즉 $a_3 = b_3$ 인 경우이다.

따라서 3번의 시행에서 5 이상의 눈의 수가 1번 나온 후 나머지 2번의 시행에서 5 이상의 눈의 수가 1번 이상 나와야 한다.

(i) 5 이상의 눈의 수가 1번 더 나올 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{12}{3^3} \times \frac{4}{3^2} = \frac{48}{3^5}$$

(ii) 5 이상의 눈의 수가 2번 더 나올 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{12}{3^3} \times \frac{1}{3^2} = \frac{12}{3^5}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A \cap B) = \frac{48}{3^5} + \frac{12}{3^5} = \frac{60}{3^5}$$

5단계 $P(B|A)$ 의 값 구하기

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{3^5}}{\frac{131}{3^5}} = \frac{60}{131}$$

6단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=131$, $q=60$ 이므로 $p+q=191$

01 $\frac{1}{2}$ 02 $\frac{15}{56}$ 03 ① 04 $\frac{18}{25}$ 05 $\frac{13}{25}$ 06 ③07 332 08 $\frac{19}{42}$ 01 $\frac{1}{2}$

모든 경우의 수는 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수
이므로

$$\frac{8!}{3! \times 3! \times 2!} = 560$$

이때 $m > n$ 이라면 $a_1 > a_5$ 또는 $a_1 = a_5$, $a_2 > a_6$ 또는 $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$,
 $a_3 > a_7$ 또는 $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_7$, $a_4 > a_8$ 이어야 한다.

(i) $a_1 > a_5$ 인 경우

① $a_1 = 3$, $a_5 = 2$ 이면 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

② $a_1 = 3$, $a_5 = 1$ 이면 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

③ $a_1 = 2$, $a_5 = 1$ 이면 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

①, ②, ③에서 그 경우의 수는 $60 + 60 + 90 = 210$

(ii) $a_1 = a_5$, $a_2 > a_6$ 인 경우

① $a_1 = a_5 = 1$ 인 경우

① $a_2 = 3$, $a_6 = 2$ 이면 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

② $a_2 = 3$, $a_6 = 1$ 이면 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

③ $a_2 = 2$, $a_6 = 1$ 이면 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

①, ②, ③에서 그 경우의 수는 $12 + 4 + 6 = 22$

② $a_1 = a_5 = 2$ 인 경우

①과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 22

③ $a_1 = a_5 = 3$ 이면 $a_2 = 2$, $a_6 = 1$ 이므로 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는
경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

①, ②, ③에서 그 경우의 수는 $22 + 22 + 6 = 50$

(iii) $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$, $a_3 > a_7$ 인 경우

① $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_6 = 2$ 인 경우

① $a_3 = 3$, $a_7 = 2$ 이면 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $2! = 2$

② $a_3 = 3$, $a_7 = 1$ 이면 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $2! = 2$

③ $a_3 = 2$, $a_7 = 1$ 이면 $a_4 = 3$, $a_8 = 3$ 의 1가지

①, ②, ③에서 그 경우의 수는 $2 + 2 + 1 = 5$

② $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_6 = 3$ 이면 $a_3 = 2$, $a_7 = 1$ 이므로 $a_4 = 2$, $a_8 = 2$ 의
1가지

③ $a_1 = a_5 = 2$, $a_2 = a_6 = 1$ 인 경우

①과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 5

④ $a_1 = a_5 = 2$, $a_2 = a_6 = 3$ 이면 $a_3 = 2$, $a_7 = 1$ 이므로 $a_4 = 1$, $a_8 = 1$ 의
1가지

⑤ $a_1 = a_5 = 3$, $a_2 = a_6 = 1$ 이면 $a_3 = 2$, $a_7 = 1$ 이므로 $a_4 = 2$, $a_8 = 2$ 의
1가지

⑥ $a_1 = a_5 = 3$, $a_2 = a_6 = 2$ 이면 $a_3 = 2$, $a_7 = 1$ 이므로 $a_4 = 1$, $a_8 = 1$ 의
1가지

①~⑥에서 그 경우의 수는 $5 + 1 + 5 + 1 + 1 + 1 = 14$

(iv) $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_7$, $a_4 > a_8$ 인 경우

$a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_6 = 2$, $a_3 = a_7 = 3$ 이면 $a_4 = 2$, $a_8 = 1$ 의 1가지

이와 같은 경우가 $3! = 6$ (가지)이므로 그 경우의 수는

$$1 \times 6 = 6$$

(i)~(iv)에서 $m > n$ 인 경우의 수는 $210 + 50 + 14 + 6 = 280$

따라서 구하는 확률은 $\frac{280}{560} = \frac{1}{2}$

02 $\frac{15}{56}$

모든 경우의 수는 8개의 공 중에서 2개를 동시에 꺼내고 다시 넣는 시행
을 2번 반복하는 경우의 수이므로

$${}_8C_2 \times {}_8C_2 = 28 \times 28 = 784$$

이때 $A \subset B$ 이라면 $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$ 이어야 한다.

(i) $a_1 = 1$ 일 때,

$b_1 = 1$ 이고, a_2 , b_2 의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허락하
여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_7H_2 = 1 \times {}_8C_2 = 28$$

(ii) $a_1 = 2$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2의 2가지이고, a_2 , b_2 의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서
중복을 허락하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times {}_6H_2 = 2 \times {}_7C_2 = 2 \times 21 = 42$$

(iii) $a_1 = 3$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3의 3가지이고, a_2 , b_2 의 값은 4, 5, 6, 7, 8 중에서
중복을 허락하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times {}_5H_2 = 3 \times {}_6C_2 = 3 \times 15 = 45$$

(iv) $a_1 = 4$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지이고, a_2 , b_2 의 값은 5, 6, 7, 8 중에서
중복을 허락하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times {}_4H_2 = 4 \times {}_5C_2 = 4 \times 10 = 40$$

(v) $a_1 = 5$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이고, a_2 , b_2 의 값은 6, 7, 8 중에서
중복을 허락하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$5 \times {}_3H_2 = 5 \times {}_4C_2 = 5 \times 6 = 30$$

(vi) $a_1 = 6$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이고, a_2 , b_2 의 값은 7, 8 중에서
중복을 허락하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$6 \times {}_2H_2 = 6 \times {}_3C_2 = 6 \times {}_3C_1 = 6 \times 3 = 18$$

(vii) $a_1 = 7$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7가지이고, a_2 , b_2 의 값은 8의 1가지
이므로 그 경우의 수는 7

(i)~(vii)에서 $A \subset B$ 인 경우의 수는 $28 + 42 + 45 + 40 + 30 + 18 + 7 = 210$

따라서 구하는 확률은 $\frac{210}{784} = \frac{15}{56}$

03 답 ①

모든 경우의 수는 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 7!

(가)에서 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 0, 1, 2가 적혀 있는 3장의 카드 중 2장이다.

(i) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 1, 2가 적혀 있는 카드인 경우

3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 1, 2가 적혀 있는 카드가 오는 경우는 (1, 3, 2), (2, 3, 1)의 2가지

(나)에서 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 5, 6이 적혀 있는 카드가 오면 되므로 그 경우는 (5, 4, 6), (6, 4, 5)의 2가지

이 각각에 대하여 3이 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드를 1장으로 생각하고, 4가 적혀 있는 카드와 양옆의 카드를 1장으로 생각하여 남은 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 그 경우의 수는 $2 \times 2 \times 6 = 24$

(ii) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 0, 1이 적혀 있는 카드인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 24

(iii) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 0, 2가 적혀 있는 카드인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 24

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $24 + 24 + 24 = 72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{7!}$

$\therefore p = 72$

04 답 $\frac{18}{25}$

모든 경우의 수는 5장의 카드 중에서 1장을 꺼내는 시행을 3번 반복하는 경우의 수이므로

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

5개의 점시에 각각 1개 이상의 쿼기가 담겨 있는 사건의 여사건은 빈 점시가 생기는 사건이다.

(i) 빈 점시가 1개인 경우

1이 적혀 있는 점시가 빈 점시인 경우는 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 3, 3, 4, 또는 3, 4, 4인 경우이므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$$

같은 방법으로 하면 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 점시가 빈 점시인 경우의 수도 각각 6

따라서 빈 점시가 1개인 경우의 수는 $5 \times 6 = 30$

(ii) 빈 점시가 2개인 경우

빈 점시가 2개인 경우는 두 점시가 이웃하는 경우이다.

1, 2가 적혀 있는 점시가 빈 점시인 경우는 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 4, 4, 4인 경우이므로 그 경우의 수는 1

같은 방법으로 하면 (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)이 적혀 있는 점시가 빈 점시인 경우의 수도 각각 1

따라서 빈 점시가 2개인 경우의 수는 $5 \times 1 = 5$

(i), (ii)에서 빈 점시가 생기는 경우의 수는 $30 + 5 = 35$ 이므로 여사건의

$$\text{확률은 } \frac{35}{125} = \frac{7}{25}$$

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}$

05 답 $\frac{13}{25}$

(i) ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장 들어 있는 경우

① 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서는 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{225}$$

② 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서는 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 2장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{4}{225}$$

①, ②에서 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장 들어 있을 확률은 $\frac{4}{225} + \frac{4}{225} = \frac{8}{225}$

(ii) ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있는 경우

① 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 2장 꺼내거나 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \times \left(\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \right) = \frac{1}{15} \times \left(\frac{6}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{7}{225}$$

② 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드를 제외한 나머지 5장의 카드 중에서 2장을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \times \frac{10}{15} = \frac{40}{225}$$

③ 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 1장을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{32}{225}$$

④ 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 2장 꺼내면 두 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 제외한 5장의 카드 중에서 1장을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_5C_1}{{}_6C_2} = \frac{6}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{30}{225}$$

①~④에서 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있을 확률은 $\frac{7}{225} + \frac{40}{225} + \frac{32}{225} + \frac{30}{225} = \frac{109}{225}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{8}{225} + \frac{109}{225} = \frac{13}{25}$

06 답 ③

택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 4 이상인 사건을 A, 두 수의 합이 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

모든 경우의 수는 15장의 카드 중에서 2장을 택하는 경우의 수이므로

$${}_{15}C_2=105$$

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 4 이상인 경우는 택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수가 (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)인 경우이므로

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_4C_1 \times {}_1C_1 + {}_3C_1 \times {}_2C_1 + {}_3C_1 \times {}_1C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_1C_1}{105} \\ &= \frac{12+8+4+6+3+1+2}{105} = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

이때 두 수의 합이 홀수인 경우는 택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수가 (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5)인 경우이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_1C_1 + {}_3C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_1C_1}{105} \\ &= \frac{12+4+6+2}{105} = \frac{8}{35} \end{aligned}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{12}{35}} = \frac{2}{3}$$

07 답 332

한 개의 주사위를 1번 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

A가 가진 공이 1개 늘어날 확률은 A가 던진 주사위의 눈의 수가 5의 약수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 5의 약수가 아닐 확률이므로

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

A가 가진 공의 개수가 변화가 없을 확률은 A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 5의 약수이거나 모두 5의 약수가 아닐 확률이므로

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

A가 가진 공이 1개 줄어들 확률은 A가 던진 주사위의 눈의 수가 5의 약수가 아니고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 5의 약수일 확률이므로

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 4번째 시행 후 처음으로 5가 되는 경우는

(2, 3, 4, 5), (3, 3, 4, 5), (3, 4, 4, 5), (4, 3, 4, 5), (4, 4, 4, 5)

(i) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (2, 3, 4, 5)인 경우

1번째 시행 후 1개 줄어들고 2번째, 3번째, 4번째 시행 후 1개씩 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{9^4}$$

(ii) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (3, 3, 4, 5)인 경우

1번째, 2번째 시행 후 변화가 없고 3번째, 4번째 시행 후 1개씩 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{100}{9^4}$$

(iii) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (3, 4, 4, 5)인 경우

1번째 시행 후 변화가 없고 2번째 시행 후 1개 늘어나고 3번째 시행 후 변화가 없고 4번째 시행 후 1개 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{100}{9^4}$$

(iv) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (4, 3, 4, 5)인 경우

1번째 시행 후 1개 늘어나고 2번째 시행 후 1개 줄어들고 3번째, 4번째 시행 후 1개씩 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{9^4}$$

(v) 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 (4, 4, 4, 5)인 경우

1번째 시행 후 1개 늘어나고 2번째, 3번째 시행 후 변화가 없고 4번째 시행 후 1개 늘어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{100}{9^4}$$

(i)~(v)에서 각 시행 후 A가 가진 공의 개수가 4번째 시행 후 처음으로 5가 될 확률은

$$p = \frac{16}{9^4} + \frac{100}{9^4} + \frac{100}{9^4} + \frac{16}{9^4} + \frac{100}{9^4} = \frac{332}{9^4}$$

$$\therefore 3^8 \times p = 332$$

08 답 19/42

$b_7 + 10 \geq a_7 \geq b_7$ 인 사건을 A, $a_k = b_k$ 인 자연수 k ($1 \leq k \leq 7$)가 존재하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

나오는 눈의 수의 합이 8 이상인 경우는 (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)의 15가지이므로 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 눈의 수의 합이 8 이상일 확률은 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

$$7 \text{ 이하일 확률은 } 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

시행을 7번 한 후 합이 8 이상인 횟수를 x 라 하면 합이 7 이하인 횟수는 $7-x$ 이므로 7번의 시행 후 $b_7 + 10 \geq a_7 \geq b_7$ 이려면

$$2 \times (7-x) + 10 \geq 3x \geq 2 \times (7-x)$$

$$14 \leq 5x \leq 24 \quad \therefore \frac{14}{5} \leq x \leq \frac{24}{5}$$

따라서 $b_7 + 10 \geq a_7 \geq b_7$ 이려면 7번의 시행에서 합이 8 이상인 경우가 3번 또는 4번이 나와야 한다.

(i) 합이 8 이상인 경우가 3번, 7 이하인 경우가 4번 나올 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4 = 35 \times \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4$$

(ii) 합이 8 이상인 경우가 4번, 7 이하인 경우가 3번 나올 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3 = 35 \times \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A) = 35 \times \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4 + 35 \times \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3$$

n ($1 \leq n \leq 7$)번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 같은 경우는 흰 공 6개, 검은 공 6개가 들어 있는 경우, 즉 $a_5 = b_5$ 인 경우이다.

따라서 5번의 시행에서 합이 8 이상인 경우가 2번, 7 이하인 경우가 3번 나온 후 나머지 2번의 시행에서 합이 8 이상인 경우와 7 이하인 경우가 각각 1번씩 나오거나 합이 8 이상인 경우만 2번 나와야 한다.

(i) 합이 8 이상인 경우와 7 이하인 경우가 각각 1번씩 더 나올 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{5}{12} \right)^2 \left(\frac{7}{12} \right)^3 \times {}_2C_1 \left(\frac{5}{12} \right)^1 \left(\frac{7}{12} \right)^1 = 20 \times \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4$$

(ii) 합이 8 이상인 경우가 2번 더 나올 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{5}{12} \right)^2 \left(\frac{7}{12} \right)^3 \times {}_2C_2 \left(\frac{5}{12} \right)^2 \left(\frac{7}{12} \right)^0 = 10 \times \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A \cap B) = 20 \times \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4 + 10 \times \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{20 \times \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4 + 10 \times \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3}{35 \times \left(\frac{5}{12} \right)^3 \left(\frac{7}{12} \right)^4 + 35 \times \left(\frac{5}{12} \right)^4 \left(\frac{7}{12} \right)^3} \\ &= \frac{20 \times 7 + 10 \times 5}{35 \times 7 + 35 \times 5} = \frac{19}{42} \end{aligned}$$

step ① 핵심 문제

| 64~65쪽

01 ⑤ 02 2 03 $\frac{665}{243}$ 04 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 05 28 06 ③
 07 35 08 ④ 09 ① 10 20 11 325 12 11

01 답 ⑤

$$P(X=x) = \frac{k}{4x^2-1} = \frac{k}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$\frac{k}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right\} = 1$$

$$\frac{k}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 1, \frac{4}{9}k = 1 \quad \therefore k = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X < k) &= P\left(X < \frac{9}{4}\right) = P(X=1) + P(X=2) \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} \right) = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

02 답 2

$$X^2 \leq 2X \text{에서 } X^2 - 2X \leq 0, X(X-2) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq X \leq 2$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2 \leq 2X) &= P(0 \leq X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + a = a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \text{이므로 } a = \frac{5}{12}$$

$$\text{확률의 총합은 1이고 } P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3} + b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{3} = 2$$

03 답 $\frac{665}{243}$ 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 6번 반복할 때, 나오는 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_6 = 3^6$ (i) $X=1$ 일 때,

같은 색의 공이 6번 나오는 경우이므로 모두 흰 공 또는 검은 공 또는 노란 공이 나오는 3가지이다.

$$\therefore P(X=1) = \frac{3}{3^6} = \frac{1}{243}$$

(ii) $X=2$ 일 때,2가지 색의 공이 나오는 경우이므로 3가지 색 중에서 나오는 2가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$ 이 2가지 색 중에서 1가지를 택하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$ 이때 1가지 색을 모두 택하는 경우의 2가지는 제외해야 하므로 2가지 색의 공이 나오는 경우의 수는 $3 \times (64 - 2) = 186$

$$\therefore P(X=2) = \frac{186}{3^6} = \frac{62}{243}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

$$\begin{aligned} P(X=3) &= 1 - \{P(X=1) + P(X=2)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{243} + \frac{62}{243} \right) = \frac{20}{27} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{62}{243}$	$\frac{20}{27}$	1

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{1}{243} + 2 \times \frac{62}{243} + 3 \times \frac{20}{27} = \frac{665}{243}$$

04 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.(i) $X=0$ 일 때,

처음 A 상자에서 흰 공을 꺼낸 후 다시 A 상자에서 흰 공을 꺼내는

$$\text{경우이므로 } P(X=0) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

처음 A 상자에서 흰 공을 꺼낸 후 다시 A 상자에서 빨간 공을 꺼내거나 처음 A 상자에서 빨간 공을 꺼낸 후 B 상자에서 흰 공을 꺼내는

$$\text{경우이므로 } P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

처음 A 상자에서 빨간 공을 꺼낸 후 B 상자에서도 빨간 공을 꺼내는

$$\text{경우이므로 } P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

05 답 28

$$E(Y) = P(Y=1) + 2P(Y=2) + 3P(Y=3) + 4P(Y=4) + 5P(Y=5)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{1}{2}P(X=1) + \frac{1}{10} \right\} + 2 \left\{ \frac{1}{2}P(X=2) + \frac{1}{10} \right\} \\ &\quad + 3 \left\{ \frac{1}{2}P(X=3) + \frac{1}{10} \right\} + 4 \left\{ \frac{1}{2}P(X=4) + \frac{1}{10} \right\} \\ &\quad + 5 \left\{ \frac{1}{2}P(X=5) + \frac{1}{10} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \{P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) + 5P(X=5)\} + \frac{1}{10} (1+2+3+4+5)$$

$$= \frac{1}{2} E(X) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{2} \quad (\because E(X)=4)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{7}{2} \text{이므로 } 8a = 8 \times \frac{7}{2} = 28$$

06 답 ③

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이다.
5장의 카드 중에서 2장을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(i) $X=3$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 2의 1가지이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{10}$$

(ii) $X=4$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 3의 1가지이므로

$$P(X=4)=\frac{1}{10}$$

(iii) $X=5$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 4 또는 2, 3의 2가지이므로

$$P(X=5)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(iv) $X=6$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 5 또는 2, 4의 2가지이므로

$$P(X=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(v) $X=7$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 2, 5 또는 3, 4의 2가지이므로

$$P(X=7)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(vi) $X=8$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 3, 5의 1가지이므로

$$P(X=8)=\frac{1}{10}$$

(vii) $X=9$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 4, 5의 1가지이므로

$$P(X=9)=\frac{1}{10}$$

(i)~(vii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	8	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{5} + 8 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{10} = 6$$

$$\therefore E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=2 \times 6+3=15$$

07 답 35

확률변수 X 가 이항분포 $B(3, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_3C_x p^x (1-p)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$\therefore P(X=3)={}_3C_3 p^3 = p^3$$

확률변수 Y 가 이항분포 $B(4, 2p)$ 를 따르므로 Y 의 확률질량함수는

$$P(Y=y)={}_4C_y (2p)^y (1-2p)^{4-y} \quad (y=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore P(Y \geq 3) = P(Y=3) + P(Y=4)$$

$$= {}_4C_3 (2p)^3 (1-2p) + {}_4C_4 (2p)^4$$

$$= 32p^3 (1-2p) + 16p^4$$

$$= -48p^4 + 32p^3$$

이때 $10P(X=3)=P(Y \geq 3)$ 에서

$$10p^3 = -48p^4 + 32p^3, \quad 48p^4 - 22p^3 = 0$$

$$2p^3(24p-11)=0 \quad \therefore p=\frac{11}{24} \quad (\because p>0)$$

따라서 $m=24, n=11$ 이므로 $m+n=35$

08 답 ④

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{45}C_x \frac{2^{45-x}}{3^{45}} = {}_{45}C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{45-x}$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(45, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } V(X)=45 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 10 \text{ 이므로}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{10}$$

09 답 ①

$$E(2X-1)=5 \text{에서 } 2E(X)-1=5$$

$$2E(X)=6 \quad \therefore E(X)=3$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=11-3^2=2 \quad (\because E(X^2)=11)$$

$$E(X)=3 \text{에서 } np=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(X)=2 \text{에서 } np(1-p)=2$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } 3(1-p)=2, \quad 1-p=\frac{2}{3} \quad \therefore p=\frac{1}{3}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{1}{3}n=3 \quad \therefore n=9$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_9C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 9)$$

$$\therefore \frac{P(X=5)}{P(X=6)} = \frac{{}_9C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^4}{{}_9C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^3} = 3$$

10 답 20

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$|a-b|=2$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)$ 의 8가지이므로 그 확률은

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(90, \frac{2}{9}\right)$ 를 따르므로

$$E(X)=90 \times \frac{2}{9}=20, \quad V(X)=90 \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{140}{9} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\therefore E(8X)-V(3X)=8E(X)-3^2V(X)$$

$$=8 \times 20 - 9 \times \frac{140}{9}$$

$$=20 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

11 답 325

상자에서 공을 1개 꺼낼 때, 검은 공이 나올 확률은 $\frac{3}{k+3}$ 이므로 확률

변수 X 는 이항분포 $B\left(45, \frac{3}{k+3}\right)$ 을 따른다.

$$E(X)=15 \text{에서 } 45 \times \frac{3}{k+3} = 15$$

$$k+3=9 \quad \therefore k=6$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(45, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 45 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X^2) + E(kX) &= E(X^2) + E(6X) \\ &= \{E(X)\}^2 + V(X) + 6E(X) \\ &= 15^2 + 10 + 6 \times 15 = 325 \end{aligned}$$

12 답 11

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

나오는 두 눈의 수를 각각 a, b 라 하면 두 눈의 수의 합이 10보다 큰 경우의 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(5, 6), (6, 5), (6, 6)$ 의 3가지이므로 [게임 1]을 한 번 할 때, 당첨될 확률은

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{12}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 20 \times \frac{1}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{55}{36} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

5개의 동전을 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

5개의 동전을 던져서 앞면이 4개 이상 나오는 경우는 앞면이 4개 나오는 경우 5가지, 앞면이 5개 나오는 경우 1가지이므로 그 경우의 수는 $5 + 1 = 6$ $\hookrightarrow {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

즉, [게임 2]를 한 번 할 때, 당첨될 확률은

$$\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

따라서 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{16}\right)$ 을 따르므로

$$V(Y) = n \times \frac{3}{16} \times \frac{13}{16} = \frac{39}{256}n \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때 확률변수 Y 의 표준편차가 확률변수 X 의 표준편차보다 크면 확률변수 Y 의 분산이 확률변수 X 의 분산보다 크므로

$$\frac{39}{256}n > \frac{55}{36}$$

$$\therefore n > \frac{3520}{351} = 10.02\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 11이다. $\dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

step 2 고난도 문제

| 66~70쪽

01 ⑤	02 ⑤	03 $\frac{3}{4}$	04 ②	05 37	06 $\frac{7}{10}$
07 $\frac{12}{7}$	08 $\frac{4}{3}$	09 78	10 5	11 ③	12 ④
13 10	14 27	15 $\frac{3\sqrt{37}}{10}$	16 117	17 4	18 ②
19 $67\sqrt{3}$	20 ②	21 ③	22 ③	23 ③	24 24
25 300	26 ①				

01 답 ⑤

(i) $X=1$ 일 때,

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 모두 1인 경우이므로 1이 적혀 있는 카드 2장을 꺼내면 된다.

$$\therefore P(X=1) = \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{12}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 2 또는 2, 2인 경우이므로 1이 적혀 있는 카드 1장과 2가 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 2가 적혀 있는 카드 2장을 꺼내면 된다.

$$\therefore P(X=2) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{3}$$

이때 확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = ax + b \quad (x=1, 2, 3)$$

$$\text{이므로 } P(X=1) = \frac{1}{12}, P(X=2) = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$a + b = \frac{1}{12}, 2a + b = \frac{1}{3}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{6} \quad \therefore a - b = \frac{5}{12}$$

[참고] (iii) $X=3$ 일 때,

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 3 또는 2, 3 또는 3, 3인 경우이므로 1이 적혀 있는 카드 1장과 3이 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 2가 적혀 있는 카드 1장과 3이 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 3이 적혀 있는 카드 2장을 꺼내면 된다.

$$\therefore P(X=3) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{7}{12}$$

다른 풀이

(ii) $X=2$ 일 때,

1 또는 2가 적혀 있는 카드에서만 2장을 꺼내는 경우에서 1이 적혀 있는 카드만 2장을 꺼내는 경우를 제외한 것과 같으므로

$$P(X=2) = \frac{{}_6C_2 - {}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{3}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

9장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우에서 1 또는 2가 적혀 있는 카드에서만 2장을 꺼내는 경우를 제외한 것과 같으므로

$$P(X=3) = \frac{{}_9C_2 - {}_6C_2}{{}_9C_2} = \frac{7}{12}$$

02 답 ⑤

ㄱ. 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{a-4}{12} + \frac{a-5}{12} + \frac{a-6}{12} = 1$$

$$\frac{3a-15}{12} = \frac{1}{2}, 3a-15=6$$

$$3a=21 \quad \therefore a=7$$

$$\text{따라서 } P(X=x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & (x=1, 2, 3) \\ \frac{7-x}{12} & (x=4, 5, 6) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(1) = P(X \geq 1) = 1 \quad \text{--- 확률의 총합은 1이다.}$$

$$f(5) = P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(1) = 4f(5)$$

ㄴ. $f(k) = P(X \geq k) = P(X=k) + P(X \geq k+1)$

$$= P(X=k) + f(k+1)$$

$$\therefore P(X=k) = f(k) - f(k+1) \quad (\text{단, } k=1, 2, 3, 4, 5)$$

ㄷ, ㄴ에 의하여

$$\begin{aligned} E(X) &= P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) \\ &\quad + 5P(X=5) + 6P(X=6) \\ &= f(1) - f(2) + 2\{f(2) - f(3)\} + 3\{f(3) - f(4)\} \\ &\quad + 4\{f(4) - f(5)\} + 5\{f(5) - f(6)\} + 6f(6) \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03 답 3/4

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

한 개의 동전을 4번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

(i) $X=0$ 일 때,

HTHT, THTH의 2가지이므로

$$P(X=0) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

HHTH, THHT, HTHH, TTHT, HTTH, THTT의 6가지이므로

$$P(X=1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

HHHT, THHH, HTTT, TTTH, HHTT, TTHH의 6가지이므로

$$P(X=2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(iv) $X=3$ 일 때, HHHH, TTTT의 2가지이므로

$$P(X=3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

04 답 ②

$n=3$ 일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 는 호 AB를 6등분하므로 부채꼴 OAB를 6등분한 부채꼴 1개의 넓이는

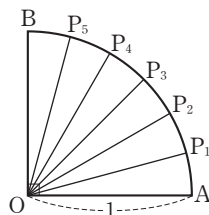
$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{24}$$

(i) 점 P_1 또는 P_5 를 선택할 때,

X 는 6등분한 부채꼴 5개의 넓이의 합에서

6등분한 부채꼴 1개의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$X = 5 \times \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$



(ii) 점 P_2 또는 P_4 를 선택할 때,

X 는 6등분한 부채꼴 4개의 넓이의 합에서 6등분한 부채꼴 2개의

넓이의 합을 뺀 값과 같으므로 $X = 4 \times \frac{\pi}{24} - 2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

(iii) 점 P_3 를 선택할 때,

X 는 6등분한 부채꼴 3개의 넓이의 합에서 6등분한 부채꼴 3개의

넓이의 합을 뺀 값과 같으므로 $X=0$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{\pi}{12} \times \frac{2}{5} + \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\pi}{10}$$

05 답 37

5개의 공 중에서 4개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(i) $n=4$ 또는 $n=5$ 일 때,

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 n , 6이다.

① $X=n$ 일 때,

1, 2, 3, n 이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우 1가지이므로

$$P(X=n) = \frac{1}{5}$$

② $X=6$ 일 때,

6이 적혀 있는 공을 꺼내고 나머지 1, 2, 3, n 이 적혀 있는 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

$$\therefore P(X=6) = \frac{4}{5}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii} \text{에서 } f(n) = E(X) = n \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{4}{5} = \frac{n+24}{5}$$

(ii) $n>6$ 일 때,

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 6, n 이다.

① $X=6$ 일 때,

1, 2, 3, 6이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우 1가지이므로

$$P(X=6) = \frac{1}{5}$$

② $X=n$ 일 때,

n 이 적혀 있는 공을 꺼내고 나머지 1, 2, 3, 6이 적혀 있는 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

$$\therefore P(X=n) = \frac{4}{5}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii} \text{에서 } f(n) = E(X) = 6 \times \frac{1}{5} + n \times \frac{4}{5} = \frac{4n+6}{5}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(4) + f(5) + f(14) + f(15) = \frac{28}{5} + \frac{29}{5} + \frac{62}{5} + \frac{66}{5} = 37$$

06 답 7/10

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 모두 다른 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 공을 제외한 7개의 공 중에서 3개를 택하면 된다.

$$\therefore P(X=0) = 1 \times \frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{24}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중 1개는 같고 나머지 2개는 다른 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 3개의 공 중에서 1개를 택하고 나머지 7개의 공 중에서 2개를 택하면 된다.

$$\therefore P(X=1) = 1 \times \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{40}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중 2개는 같고 나머지 1개는 다른 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 3개의 공 중에서 2개를 택하고 나머지 7개의 공 중에서 1개를 택하면 된다.

$$\therefore P(X=2) = 1 \times \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40}$$

(iv) $X=3$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 모두 같은 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 공을 택하면 된다.

$$\therefore P(X=3) = 1 \times \frac{1}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

.....배점 60%

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{7}{24} + 1^2 \times \frac{21}{40} + 2^2 \times \frac{7}{40} + 3^2 \times \frac{1}{120} = \frac{13}{10} \quad \text{.....배점 20\%}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{13}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} \quad \text{.....배점 20\%}$$

07 답 $\frac{12}{7}$

오른쪽 방향으로 1칸 움직이는 것을 a , 위쪽 방향으로 1칸 움직이는 것을 b 라 하면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 이동하는 모든 경우의 수는 $aaabbbb$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$ 일 때,

$$bbbbaaa \text{의 1가지이므로 } P(X=0) = \frac{1}{35}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

$\times \bigcirc ab \times \bigcirc$ 에서 $\bigcirc$ 의 자리에 a 가 오고 $\times$ 의 자리에 b 가 오는 경우이므로 남은 a 2개를 $\bigcirc$ 의 자리에, 남은 b 3개를 $\times$ 의 자리에 중복을 허락하여 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_3H_3 = {}_3C_2 \times {}_4C_3 = {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$$

$$\therefore P(X=1) = \frac{12}{35}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

$\times \bigcirc ab \times \bigcirc ab \times \bigcirc$ 에서 $\bigcirc$ 의 자리에 a 가 오고 $\times$ 의 자리에 b 가 오는 경우이므로 남은 a 1개를 $\bigcirc$ 의 자리에, 남은 b 2개를 $\times$ 의 자리에 중복을 허락하여 배열하는 경우의 수는

$${}_3H_1 \times {}_3H_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{18}{35}$$

(iv) $X=3$ 일 때,

$\times ab \times ab \times ab \times$ 에서 $\times$ 의 자리에 b 가 오는 경우이므로 남은 b 1개를 $\times$ 의 자리에 중복을 허락하여 배열하는 경우의 수는

$${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

$$\therefore P(X=3) = \frac{4}{35}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$$

08 답 $\frac{4}{3}$

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

(i) 두 점 A, B가 서로 같을 때,

두 점 A, B 사이의 거리는 0이므로 $X=0^2=0$

이때 두 점 A, B가 서로 같은 경우는 1, 2, ..., 6의 6가지이므로

$$P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) 두 점 A, B가 정팔면체의 한 모서리의 양 끝 점일 때,

두 점 A, B 사이의 거리는 1이므로 $X=1^2=1$

이때 정팔면체의 모서리는 12개이고 한 모서리를 택하는 경우는 2개 주사위에서 나오는 두 눈의 수가 1, 3인 경우와 3, 1인 경우는 같은 모서리가 된다.

$$\therefore P(X=1) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

(iii) (i), (ii)가 아닐 때

① 두 점 3, 4 또는 5, 6을 택하는 경우

두 점 사이의 거리는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

② 두 점 1, 2를 택하는 경우

정사면체의 높이는 $\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 두 점 사이의 거

리는 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

①, ②에서 $X=(\sqrt{2})^2=2$

$$\therefore P(X=2) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore E(X) + V(X) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

09 답 78

확률의 총합은 1이므로

$$a+b+c+b+a=1 \quad \therefore 2a+2b+c=1 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c + 7 \times b + 9 \times a \\ &= 10a + 10b + 5c = 5(2a + 2b + c) \\ &= 5 \times 1 \quad (\because \textcircled{9}) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times b + 9^2 \times a \\ &= 82a + 58b + 25c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서} \\ E(X^2) &= \{E(X)\}^2 + V(X) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } V(X) = \frac{31}{5} \text{이므로}$$

$$82a + 58b + 25c = 5^2 + \frac{31}{5} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3 \times b + 5 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7 \times b + 9 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) \\ &= 10a + 10b + 5c = 5(2a + 2b + c) \\ &= 5 \times 1 \quad (\because \textcircled{9}) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3^2 \times b + 5^2 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7^2 \times b \\ &\quad + 9^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) \\ &= 82a + 58b + 25c + \frac{8}{5} \\ &= 5^2 + \frac{31}{5} + \frac{8}{5} \quad (\because \textcircled{10}) \\ &= 25 + \frac{39}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 25 + \frac{39}{5} - 5^2 = \frac{39}{5}$$

$$\therefore 10 \times V(Y) = 10 \times \frac{39}{5} = 78$$

10 답 5

$$kP(Y=k) = aP(X=k) + \frac{a}{4} \quad (k=1, 2, 3, 4) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^4 kP(Y=k) = \sum_{k=1}^4 \left\{ aP(X=k) + \frac{a}{4} \right\}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^4 kP(Y=k) = E(Y) \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left\{ aP(X=k) + \frac{a}{4} \right\} &= a \sum_{k=1}^4 P(X=k) + \sum_{k=1}^4 \frac{a}{4} \\ &= a + \frac{a}{4} \times 4 = 2a \quad \begin{array}{l} \text{확률의 총합은 1이므로} \\ \sum_{k=1}^4 P(X=k) = 1 \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } E(Y) = 2a \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

한편 주어진 등식의 양변에 k 를 곱하면

$$k^2 P(Y=k) = akP(X=k) + \frac{a}{4} k \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$\sum_{k=1}^4 k^2 P(Y=k) = \sum_{k=1}^4 \left\{ akP(X=k) + \frac{a}{4} k \right\}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^4 k^2 P(Y=k) = E(Y^2) \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left\{ akP(X=k) + \frac{a}{4} k \right\} &= a \sum_{k=1}^4 kP(X=k) + \frac{a}{4} \sum_{k=1}^4 k \\ &= aE(X) + \frac{a}{4} \times 10 \\ &= \frac{a}{2} + \frac{5}{2} a \quad \left(\because E(X) = \frac{1}{2} \right) \\ &= 3a \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } E(Y^2) = 3a \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$$\textcircled{11}, \textcircled{12} \text{에서 } V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 3a - (2a)^2 = 3a - 4a^2$$

$$E(Y) = V(Y) \text{에서 } 2a = 3a - 4a^2, \quad 4a^2 - a = 0$$

$$a(4a-1) = 0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=\frac{1}{4}$$

그런데 $a=0$ 이면 $P(Y=k)=0$ ($k=1, 2, 3, 4$)이므로 확률의 성질을 만족시키지 않는다.

$$\text{따라서 } a=\frac{1}{4} \text{이므로 } 20a = 20 \times \frac{1}{4} = 5$$

idea

11 답 ③

$$Y = 10X - 2.31 \text{이라 하면}$$

$$X=0.131 \text{일 때, } Y=10 \times 0.131 - 2.31 = -1$$

$$X=0.231 \text{일 때, } Y=10 \times 0.231 - 2.31 = 0$$

$$X=0.331 \text{일 때, } Y=10 \times 0.331 - 2.31 = 1$$

이므로 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$P(Y=y)$	a	b	$\frac{1}{2}$	1

$$\therefore E(Y) = -1 \times a + 0 \times b + 1 \times \frac{1}{2} = -a + \frac{1}{2}$$

$$\text{한편 } E(X) = 0.256 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(10X - 2.31) = 10E(X) - 2.31 \\ &= 10 \times 0.256 - 2.31 = 0.25 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -a + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{이므로 } a = \frac{1}{4}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + b + \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

따라서 $V(Y) = V(10X - 2.31) = 10^2 V(X)$ 이므로

$$V(X) = \frac{1}{100} V(Y) = \frac{1}{100} \times \frac{11}{16} = \frac{11}{1600}$$

12 답 ④

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하지 않으려면 함숫값이 같은 경우가 존재해야 한다.

(i) $f(1)=f(2)$ 인 경우

$$\frac{1}{4} = a - \frac{3}{4}a^2, \quad 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$(3a-1)(a-1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a = 1$$

이때 확률의 총합은 1이므로 $f(1)+f(2)+f(3)=1$ 에서

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

(ii) $f(1)=f(3)$ 인 경우

확률의 총합은 1이므로 $f(1)+f(2)+f(3)=1$ 에서

$$2f(1) + f(2) = 1, \quad \frac{1}{2} + a - \frac{3}{4}a^2 = 1$$

$$\therefore 3a^2 - 4a + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 2^2 - 3 \times 2 = -2 < 0$$

따라서 이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $f(2)=f(3)$ 인 경우

확률의 총합은 1이므로 $f(1)+f(2)+f(3)=1$ 에서

$$f(1)+2f(2)=1, \frac{1}{4}+2a-\frac{3}{2}a^2=1$$

$$\therefore 6a^2-8a+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=4^2-6 \times 3=-2<0$$

따라서 이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

$$(i), (ii), (iii)에서 f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4} & (x=1) \\ \frac{1}{4} & (x=2) \\ \frac{1}{2} & (x=3) \end{cases}$$

따라서 $E(X)=1 \times \frac{1}{4}+2 \times \frac{1}{4}+3 \times \frac{1}{2}=\frac{9}{4}$ 이므로

$$E(2X+b)=E\left(2X+\frac{1}{2}\right)=2E(X)+\frac{1}{2}=2 \times \frac{9}{4}+\frac{1}{2}=5$$

13 답 10

4개의 공 중에서 1개의 공을 꺼내는 과정을 2번 반복하는 모든 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_4C_1=4 \times 4=16$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이다.

(i) $X=-3$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 4)$ 의 1가지이므로

$$P(X=-3)=\frac{1}{16}$$

(ii) $X=-2$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 4)$ 의 2가지이므로

$$P(X=-2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

(iii) $X=-1$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 의 3가지이므로

$$P(X=-1)=\frac{3}{16}$$

(iv) $X=0$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ 의 4가지이므로

$$P(X=0)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

(v) $X=1$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 2), (4, 3)$ 의 3가지이므로

$$P(X=1)=\frac{3}{16}$$

(vi) $X=2$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (4, 2)$ 의 2가지이므로

$$P(X=2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

(vii) $X=3$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(4, 1)$ 의 1가지이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{16}$$

(i)~(vii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

$$E(X)=-3 \times \frac{1}{16}+(-2) \times \frac{1}{8}+(-1) \times \frac{3}{16}+0 \times \frac{1}{4}+1 \times \frac{3}{16}+2 \times \frac{1}{8}+3 \times \frac{1}{16}$$

$$=0$$

$$E(X^2)=(-3)^2 \times \frac{1}{16}+(-2)^2 \times \frac{1}{8}+(-1)^2 \times \frac{3}{16}+0^2 \times \frac{1}{4}+1^2 \times \frac{3}{16}+2^2 \times \frac{1}{8}+3^2 \times \frac{1}{16}$$

$$=\frac{5}{2}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{2}$$

$$\therefore V(Y)=V(2X+1)=2^2 V(X)=4 \times \frac{5}{2}=10$$

14 답 27

n 개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_nC_3$

이때 삼각형의 각 꼭짓점에 적혀 있는 세 수 중 두 번째로 큰 수가 확률변수 X 이므로 $X=x$ 이면 나머지 두 수는 x 보다 큰 수 $(n-x)$ 개 중에서 하나를 택하고 x 보다 작은 수 $(x-1)$ 개 중에서 하나를 택하면 된다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X=x) &= \frac{{}_{n-x}C_1 \times {}_{x-1}C_1}{{}_nC_3} \\ &= \frac{(n-x)(x-1)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= \frac{-6\{x^2-(n+1)x+n\}}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{-6}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \left(x - \frac{n+1}{2} \right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4} \right\} \\ &\quad (x=2, 3, 4, \dots, n-1) \end{aligned}$$

따라서 $P(X=x)$ 는 $x=\frac{n+1}{2}$ 에서 최대이므로

$$\frac{n+1}{2}=4 \quad \therefore n=7$$

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{-x^2+8x-7}{35} \quad (x=2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5) \\ &\quad +6P(X=6) \end{aligned}$$

$$=2 \times \frac{1}{7}+3 \times \frac{8}{35}+4 \times \frac{9}{35}+5 \times \frac{8}{35}+6 \times \frac{1}{7}=4$$

$$\therefore E(7X-1)=7E(X)-1=7 \times 4-1=27$$

15 답 $\frac{3\sqrt{37}}{10}$

두 상자 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 각각 X_1, X_2 라 할 때, 두 확률변수 X_1, X_2 의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X_1	1	2	3	합계
$P(X_1=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

X_2	1	2	3	합계
$P(X_2=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

이때 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

(i) $X=2$ 일 때,

$X_1=1, X_2=1$ 인 경우이므로

$$P(X=2)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

(ii) $X=3$ 일 때,

$X_1=1, X_2=2$ 또는 $X_1=2, X_2=1$ 인 경우이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

(iii) $X=4$ 일 때,

$X_1=1, X_2=3$ 또는 $X_1=2, X_2=2$ 또는 $X_1=3, X_2=1$ 인 경우이므로

$$P(X=4)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{13}{36}$$

(iv) $X=5$ 일 때,

$X_1=2, X_2=3$ 또는 $X_1=3, X_2=2$ 인 경우이므로

$$P(X=5)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{36}$$

(v) $X=6$ 일 때,

$X_1=3, X_2=3$ 인 경우이므로

$$P(X=6)=\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

(i)~(v)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{12}$	1

따라서 X 의 값이 소수일 확률은

$$p=P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)$$

$$=\frac{1}{18} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} = \frac{5}{9}$$

이때 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=2 \times \frac{1}{18} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{13}{36} + 5 \times \frac{11}{36} + 6 \times \frac{1}{12} = \frac{25}{6}$$

$$E(X^2)=2^2 \times \frac{1}{18} + 3^2 \times \frac{7}{36} + 4^2 \times \frac{13}{36} + 5^2 \times \frac{11}{36} + 6^2 \times \frac{1}{12} = \frac{331}{18}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{331}{18}-\left(\frac{25}{6}\right)^2=\frac{37}{36}$$

$$\therefore \sigma\left(\frac{X}{p}\right)=\frac{1}{p}\sigma(X)=\frac{1}{p}\sqrt{V(X)}=\frac{9}{5} \times \sqrt{\frac{37}{36}}=\frac{3\sqrt{37}}{10}$$

16 답 117

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이다.

주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 수가 2, 3, 4일

확률은 각각 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 이다.

(i) $X=5$ 일 때,

네 번째 시행까지 모두 2가 적혀 있는 공을 꺼내면 공에 적혀 있는 수의 합이 8이고, 이때 다섯 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내도 공에 적혀 있는 수의 합이 9 이상이다.

$$\therefore P(X=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(ii) $X=4$ 일 때,

① 세 번째 시행까지 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 6인 경우

세 번째 시행까지 모두 2가 적혀 있는 공을 꺼내고 네 번째 시행에서 3 또는 4가 적혀 있는 공을 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

② 세 번째 시행까지 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 7인 경우

세 번째 시행까지 2가 적혀 있는 공을 2번, 3이 적혀 있는 공을 1번 꺼내고 네 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내도 된다.

이때 세 번째 시행까지 공을 꺼내는 순서를 정하는 경우의 수가 ${}_3C_1$ 이므로 그 확률은

$${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

③ 세 번째 시행까지 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 8인 경우

세 번째 시행까지 2가 적혀 있는 공을 2번, 4가 적혀 있는 공을 1번 꺼내거나 2가 적혀 있는 공을 1번, 3이 적혀 있는 공을 2번 꺼내고, 네 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내도 된다.

이때 세 번째 시행까지 공을 꺼내는 순서를 정하는 경우의 수가 ${}_3C_1$ 이므로 그 확률은

$${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + {}_3C_1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{9}{32}$$

①, ②, ③에서

$$P(X=4)=\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{32} = \frac{17}{32}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

$$P(X=3)=1-\{P(X=5)+P(X=4)\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{16} + \frac{17}{32}\right) = \frac{13}{32}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{13}{32}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{1}{16}$	1

$$E(X)=3 \times \frac{13}{32} + 4 \times \frac{17}{32} + 5 \times \frac{1}{16} = \frac{117}{32}$$

$$\therefore E(32X)=32E(X)=32 \times \frac{117}{32} = 117$$

17 답 4

주사위 2개를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

함수 $f(x)=-x^2+3x$ 에서

$$f(1)>0, f(2)>0, f(3)=0, f(4)<0, f(5)<0, f(6)<0$$

이때 $f(a)f(b)<0$ 을 만족시키려면 $f(a)>0, f(b)<0$ 또는 $f(a)<0, f(b)>0$ 이어야 하므로 a, b 는 1, 2와 4, 5, 6 중 각각 1개씩을 택해야 한다.

즉, 순서쌍 (a, b) 의 개수는 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 2! = 2 \times 3 \times 2 = 12$ 이므로 그 확률은 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X)=18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$$

18 답 ②

화살을 한 번 쏠 때, 10점을 얻을 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분

포 $B\left(100, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X)=100 \times \frac{2}{5} = 40, V(X)=100 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 24$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=24+40^2=1624$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{k=0}^{100} (k-2)^2 P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{100} (k^2 - 4k + 4) P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{100} k^2 P(X=k) - 4 \sum_{k=0}^{100} k P(X=k) + 4 \sum_{k=0}^{100} P(X=k) \\
&= E(X^2) - 4E(X) + 4 \times 1 \\
&= 1624 - 4 \times 40 + 4 = 1468
\end{aligned}$$

19 답 67√3

2개의 동전을 동시에 던져서 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.배점 20%

$$\therefore E(X) = 64 \times \frac{1}{4} = 16, V(X) = 64 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 12 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

한 변의 길이가 X 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}X^2$ 이므로 정삼각형의 넓이

의 기댓값은 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{4}X^2\right)$ 이다.배점 20%

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 12 + 16^2 = 268 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{4}X^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}E(X^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 268 = 67\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

개념 NOTE

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

20 답 ②

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=1) = \frac{4}{5}P(X=2) \text{에서}$$

$${}_nC_1 p (1-p)^{n-1} = \frac{4}{5} \times {}_nC_2 p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$np(1-p)^{n-1} = \frac{4}{5} \times \frac{n(n-1)}{2} \times p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$1-p = \frac{2}{5}(n-1)p \quad (\because n \neq 0, 0 < p < 1)$$

$$\therefore \frac{2}{5}np + \frac{3}{5}p = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{한편 } E(X) = 2 \text{에서 } np = 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5}p = 1, \frac{3}{5}p = \frac{1}{5} \quad \therefore p = \frac{1}{3}$$

이를 ㉡에 대입하면

$$\frac{n}{3} = 2 \quad \therefore n = 6$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore p \times V(nX) = \frac{1}{3}V(6X) = \frac{1}{3} \times 6^2 \times V(X)$$

$$= \frac{1}{3} \times 36 \times \frac{4}{3} = 16$$

21 답 ③

바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 자연수 k 의 약수일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(144, p)$ 를 따르므로

$$V(X) = 144p(1-p)$$

$$V\left(\frac{X}{3} + 1\right) = 3 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^2 V(X) = 3$$

$$\therefore V(X) = 27$$

$$\text{즉, } 144p(1-p) = 27 \text{이므로 } 16p(1-p) = 3$$

$$16p^2 - 16p + 3 = 0, (4p-1)(4p-3) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{4} \text{ 또는 } p = \frac{3}{4}$$

(i) $p = \frac{1}{4}$ 일 때,

양의 약수의 개수가 $12 \times \frac{1}{4} = 3$ 이므로 이를 만족시키는 12 이하의 자

연수 k 의 값은 4, 9이다.

(ii) $p = \frac{3}{4}$ 일 때,

양의 약수의 개수가 $12 \times \frac{3}{4} = 9$ 이므로 이를 만족시키는 12 이하의 자

연수 k 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$4 + 9 = 13$$

22 답 ③

공장에서 생산한 제품 중에서 실제 등급이 A인 제품을 A로 판별할 확률은

$$\frac{4}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{25}$$

공장에서 생산한 제품 중에서 실제 등급이 B인 제품을 A로 판별할 확률은

$$\frac{6}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{50}$$

따라서 등급을 A로 판별한 제품이 실제 등급은 B인 제품일 확률은

$$\frac{\frac{3}{50}}{\frac{9}{25} + \frac{3}{50}} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{21}{50}} = \frac{1}{7}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(350, \frac{1}{7}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 350 \times \frac{1}{7} = 50$$

23 답 ③

주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 3 이상의 눈의 수가 나오는 횟수는 $15 - Y$ 이므로 주어진 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P의 좌표는 $(3Y, 15 - Y)$ 이다.

따라서 점 P와 직선 $3x + 4y = 0$ 사이의 거리는

$$X = \frac{|9Y + 4(15 - Y)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5Y + 60|}{5} = Y + 12 \quad (\because Y \geq 0)$$

주사위를 한 번 던져서 2 이하의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

$$\therefore E(X) = E(Y + 12) = E(Y) + 12 = 5 + 12 = 17$$

개념 NOTE

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

24 답 24

주사위를 n 번 던져서 6의 약수의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는 $n-Y$ 이므로

$$X=80+2Y-3(n-Y)=5Y+80-3n$$

주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이므로

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore V(Y)=n \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}n$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= V(5Y+80-3n) = 5^2 V(Y) \\ &= 25 \times \frac{2}{9}n = \frac{50}{9}n \end{aligned}$$

따라서 $\frac{50}{9}n = \frac{400}{3}$ 이므로 $n=24$

25 답 300

주사위를 $2n$ 번 던질 때 홀수 번째 시행에서 짝수의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 X_1 이라 하면 주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X_1 은 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X_1) = \frac{n}{2}$$

따라서 n 번의 홀수 번째 시행에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은

$$\frac{n}{2} \times 200 = 100n(\text{원})$$

또 주사위를 $2n$ 번 던질 때 짝수 번째 시행에서 3의 배수의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 X_2 라 하면 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 X_2 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X_2) = \frac{n}{3}$$

이때 n 번의 짝수 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는 $n-X_2$ 이므로 받을 수 있는 상금의 기댓값을 확률변수 Y 라 하면 $Y=300X_2+150(n-X_2)=150X_2+150n$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y) &= E(150X_2+150n) = 150E(X_2)+150n \\ &= 150 \times \frac{1}{3}n + 150n = 200n(\text{원}) \end{aligned}$$

따라서 $2n$ 번의 시행에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은

$$100n+200n=300n(\text{원})$$

$$\therefore a=300$$

26 답 ①

정사면체 모양의 상자를 10번 던져서 3이 적혀 있는 면이 바닥에 닿는 횟수를 확률변수 X 라 하면 정사면체를 한 번 던져서 3이 적혀 있는 면이 바닥에 닿을 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

이때 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

따라서 상금 9^x 원의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(9^X) &= \sum_{x=0}^{10} 9^x P(X=x) \\ &= \sum_{x=0}^{10} 9^x {}_{10}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \\ &= \sum_{x=0}^{10} {}_{10}C_x \left(\frac{9}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \\ &= \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right)^{10} = 3^{10}(\text{원}) \end{aligned}$$

step 3 최고난도 문제

| 71~73쪽

01 ⑤	02 3	03 25	04 ③	05 7	06 $\frac{1}{5}$
07 15	08 ①	09 ①	10 ②	11 30	

idea

01 답 ⑤

1단계 $P(X=k)=P(X=21-k)$ 임을 알기

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, ..., 18이다.

a, b, c 가 각각 6 이하의 자연수이므로 $7-a, 7-b, 7-c$ 도 각각 6 이하의 자연수이다.

$3 \leq k \leq 18$ 인 자연수 k 에 대하여 $a+b+c=k$ 를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$, 즉 $a+b+c=21-k$ 를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같다.

따라서 $3 \leq k \leq 18$ 인 자연수 k 에 대하여 $a+b+c=k$ 일 확률 $P(X=k)$ 와 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$ 일 확률 $P(X=21-k)$ 는 서로 같다.

2단계 $E(X)$ 를 $P(X=3), P(X=4), \dots, P(X=10)$ 을 이용하여 나타내기

즉, $P(X=3)=P(X=18), P(X=4)=P(X=17),$
 $P(X=5)=P(X=16), \dots, P(X=10)=P(X=11)$ 이므로
 $E(X)=3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5)$

$$\begin{aligned} &+ \dots + 17P(X=17) + 18P(X=18) \\ &= (3+18)P(X=3) + (4+17)P(X=4) \\ &+ \dots + (10+11)P(X=10) \\ &= 21\{P(X=3)+P(X=4)+\dots+P(X=10)\} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

3단계 $P(X=3)+P(X=4)+\dots+P(X=10)$ 의 값 구하기

확률질량함수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} P(X=3)+P(X=4)+\dots+P(X=10) \\ + P(X=11)+P(X=12)+\dots+P(X=18) \\ = 1 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} P(X=3)+P(X=4)+\dots+P(X=10) \\ = P(X=11)+P(X=12)+\dots+P(X=18) \end{aligned}$$

이므로

$$P(X=3)+P(X=4)+\dots+P(X=10) = \frac{1}{2}$$

4단계 $E(X)$ 의 값 구하기

따라서 ①에서

$$E(X) = 21 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

02 답 3

1단계 X의 값에 따른 확률 구하기

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 각각의 확률 $P(X=x)$ ($x=1, 2, 3, 4, 5, 6$)는 다음과 같다.

(i) $1 \leq x \leq a$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 a 이하이고 두 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 x 이어야 하므로

$$P(X=x) = \frac{a}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{a}{36} \quad (x=1, 2, \dots, a)$$

(ii) $a < x \leq 6$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 x 이거나 첫 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 a 이하이고 두 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 x 이어야 하므로

$$P(X=x) = \frac{1}{6} + \frac{a}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{a}{36} + \frac{1}{6} \quad (x=a+1, a+2, \dots, 6)$$

2단계 E(X)를 a에 대한 식으로 나타내기

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^a kP(X=k) + \sum_{k=a+1}^6 kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^a \frac{a}{36} k + \sum_{k=a+1}^6 \left(\frac{a}{36} + \frac{1}{6} \right) k \\ &= \frac{a}{36} \sum_{k=1}^a k + \frac{a}{36} \sum_{k=a+1}^6 k + \frac{1}{6} \sum_{k=a+1}^6 k \\ &= \frac{a}{36} \left(\sum_{k=1}^a k + \sum_{k=a+1}^6 k \right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^6 k - \sum_{k=1}^a k \right) \\ &= \frac{a}{36} \sum_{k=1}^6 k + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^a k \\ &= \left(\frac{a}{36} + \frac{1}{6} \right) \sum_{k=1}^6 k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^a k \\ &= \frac{a+6}{36} \times \frac{6 \times 7}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{a(a+1)}{2} \\ &= \frac{7}{12}(a+6) - \frac{1}{12}(a^2+a) \\ &= -\frac{1}{12}(a^2-6a-42) \\ &= -\frac{1}{12}(a-3)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

3단계 E(X)가 최대가 되도록 하는 자연수 a의 값 구하기

따라서 $E(X)$ 는 $a=3$ 에서 최대이다.

03 답 25

1단계 X의 확률질량함수 구하기

3개의 검은 공에 1부터 n 까지의 자연수 중 3개를 적는 모든 경우의 수는 ${}_nC_3$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값을 k ($k=2, 3, \dots, n-1$)라 하자.

이때 검은 공에 적혀 있는 수 중 가장 작은 수를 1이라 하면 가장 큰 수는 $k+1$ 이므로 나머지 1개의 수는 1보다 크고 $k+1$ 보다 작다.

따라서 나머지 1개의 검은 공에 적혀 있는 수를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{k-1}C_1$

이때 검은 공에 적혀 있는 수 중 가장 작은 수가 될 수 있는 수는 1, 2, $\dots, n-k$ 이므로 확률변수 $X=k$ 인 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_{k-1}C_1 \times (n-k) &= (k-1)(n-k) \\ \therefore P(X=k) &= \frac{(k-1)(n-k)}{{}_nC_3} \quad (k=2, 3, \dots, n-1) \end{aligned}$$

2단계 E(X)를 n에 대한 식으로 나타내기

$\therefore E(X)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^{n-1} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)(n-k)}{{}_nC_3} k \\ &= \frac{1}{{}_nC_3} \sum_{k=2}^{n-1} \{-k^3 + (n+1)k^2 - nk\} \\ &= \frac{1}{{}_nC_3} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \{-k^3 + (n+1)k^2 - nk\} - \{-1 + (n+1) - n\} \right] \\ &= \frac{1}{{}_nC_3} \left\{ -\sum_{k=1}^{n-1} k^3 + (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - n \sum_{k=1}^{n-1} k \right\} \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \\ &\quad \times \left[-\left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 + \frac{(n+1)(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n^2}{2} \right] \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{12} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

3단계 n의 값 구하기

따라서 $\frac{n+1}{2} = 13$ 이므로

$$n+1=26 \quad \therefore n=25$$

04 답 ③

1단계 P(X=k) 구하기

$$\left\{ 9P(X=k) + \frac{2}{tk} \right\} \{ 9P(X=k) - 2tk \} = 0 \text{에서}$$

$$P(X=k) = -\frac{2}{9tk} \text{ 또는 } P(X=k) = \frac{2tk}{9}$$

2단계 t > 0일 때, E(3X+4)의 값 구하기

(i) $t > 0$ 일 때,

$$P(X=k) \geq 0 \text{이므로}$$

$$k=-2, -1 \text{일 때, } P(X=k) = -\frac{2}{9tk}$$

$$k=1, 2 \text{일 때, } P(X=k) = \frac{2tk}{9}$$

$$\therefore P(X=-2) = \frac{1}{9t}, P(X=-1) = \frac{2}{9t}, P(X=1) = \frac{2t}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{4t}{9}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{9t} + \frac{2}{9t} + \frac{2t}{9} + \frac{4t}{9} = 1$$

$$\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3} = 1, 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t-1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 1$$

① $t = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$P(X=-2) = \frac{2}{9}, P(X=-1) = \frac{4}{9}, P(X=1) = \frac{1}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{9} \text{이므로}$$

$$E(X) = -2 \times \frac{2}{9} + (-1) \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore E(3X+4) = 3E(X) + 4 = 3 \times \left(-\frac{1}{3} \right) + 4 = 3$$

② $t=1$ 일 때,

$$P(X=-2)=\frac{1}{9}, P(X=-1)=\frac{2}{9}, P(X=1)=\frac{2}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{4}{9} \text{이므로}$$

$$E(X)=-2 \times \frac{1}{9} + (-1) \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore E(3X+4)=3E(X)+4=3 \times \frac{2}{3} + 4 = 6$$

3단계 $t < 0$ 일 때, $E(3X+4)$ 의 값 구하기

(ii) $t < 0$ 일 때,

$$P(X=k) \geq 0 \text{이므로}$$

$$k=-2, -1 \text{일 때, } P(X=k)=\frac{2tk}{9}$$

$$k=1, 2 \text{일 때, } P(X=k)=-\frac{2}{9t}$$

$$\therefore P(X=-2)=-\frac{4t}{9}, P(X=-1)=-\frac{2t}{9}, P(X=1)=-\frac{2}{9t},$$

$$P(X=2)=-\frac{1}{9t}$$

확률의 총합은 1이므로

$$-\frac{4t}{9} - \frac{2t}{9} - \frac{2}{9t} - \frac{1}{9t} = 1$$

$$-\frac{2t}{3} - \frac{1}{3t} = 1, 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)(2t+1)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=-\frac{1}{2}$$

① $t=-1$ 일 때,

$$P(X=-2)=\frac{4}{9}, P(X=-1)=\frac{2}{9}, P(X=1)=\frac{2}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$E(X)=-2 \times \frac{4}{9} + (-1) \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore E(3X+4)=3E(X)+4=3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = 2$$

② $t=-\frac{1}{2}$ 일 때,

$$P(X=-2)=\frac{2}{9}, P(X=-1)=\frac{1}{9}, P(X=1)=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{9} \text{이므로}$$

$$E(X)=-2 \times \frac{2}{9} + (-1) \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore E(3X+4)=3E(X)+4=3 \times \frac{1}{3} + 4 = 5$$

4단계 $E(3X+4)$ 의 값의 곱 구하기

(i), (ii)에서 $E(3X+4)$ 의 값은 2, 3, 5, 6이므로 그 곱은

$$2 \times 3 \times 5 \times 6 = 180$$

05 답 7

1단계 X 가 가질 수 있는 값 구하기

원 $C_1: x^2+y^2=5$ 는 중심이 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이고, 원

$C_2: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$ 는 중심이 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

또 $y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 에서 $y=a\left(-\frac{1}{2}x+1\right)+1$ 이므로 직선

$y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

이때 점 $(2, 1)$ 은 두 원 C_1, C_2 위에 있으므로

직선 $y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 과 두 원 C_1, C_2 는 점

하거나 두 점에서 만난다.

(i) 직선이 원 C_1 에 접할 때,

원 C_1 의 중심 $(0, 0)$ 과 점 $(2, 1)$ 을 지

나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 원 C_1 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 -2 이다.

이때 $-\frac{a}{2}=-2$ 에서 $a=4$

따라서 $a=4$ 일 때, 직선 $y=-2x+5$ 는 원 C_1 과 점 $(2, 1)$ 에서 접하고, 원 C_2 와 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나므로 $X=2$

(ii) 직선이 원 C_2 에 접할 때,

원 C_2 의 중심 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 과 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{1-0}{2-\frac{3}{2}}=2 \text{이므로 원 } C_2 \text{ 위의 점 } (2, 1) \text{에서의 접선의 기울기는 } -\frac{1}{2}$$

이다.

이때 $-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$ 에서 $a=1$

따라서 $a=1$ 일 때, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 는 원 C_2 와 점 $(2, 1)$ 에서 접하고, 원 C_1 과 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나므로 $X=2$

(iii) 직선이 두 원 C_1, C_2 에 접하지 않을 때,

(i), (ii)가 아닌 경우, 즉 $a=2, 3, 5, 6$ 일 때, 직선 $y=-\frac{a}{2}x+a+1$

은 원 C_1 과 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나고, 원 C_2 와 점 $(2, 1)$

과 다른 한 점에서 만나므로 $X=3$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3이다.

2단계 $E(X), V(X)$ 의 값 구하기

$$P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, P(X=3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$E(X)=2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}, E(X^2)=2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{22}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

3단계 $E(3X+1)-V(3X-1)$ 의 값 구하기

$$\therefore E(3X+1)-V(3X-1)=3E(X)+1-3^2V(X)$$

$$=3 \times \frac{8}{3} + 1 - 9 \times \frac{2}{9} = 7$$

06 답 $\frac{1}{5}$

1단계 X 가 가질 수 있는 값과 그때의 확률 구하기

주머니 A, B, C 중에서 1개를 택할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

(i) 1개의 주머니만 3번 택하는 경우

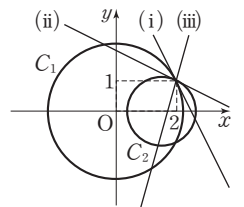
추가하는 6개의 공이 한 주머니에 모두 들어가므로 공을 추가한 후 주머니에 들어 있는 공의 개수를 3으로 나누었을 때의 나머지는 공을 추가하기 전과 같다.

따라서 $a=1, b=2, c=0$ 이므로

$$X=1+2+0=3$$

이때 1개의 주머니를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$ 이므로 한 주머니만 3번 택할 확률은

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$



(ii) 2개의 주머니만 택하는 경우

① A를 1번, B를 2번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 3, 6, 3이므로

$$a=0, b=0, c=0$$

$$\therefore X=0$$

② A를 2번, B를 1번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 5, 4, 3이므로

$$a=2, b=1, c=0$$

$$\therefore X=2+1+0=3$$

③ B를 1번, C를 2번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 1, 4, 7이므로

$$a=1, b=1, c=1$$

$$\therefore X=1+1+1=3$$

④ B를 2번, C를 1번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 1, 6, 5이므로

$$a=1, b=0, c=2$$

$$\therefore X=1+0+2=3$$

⑤ A를 1번, C를 2번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 3, 2, 7이므로

$$a=0, b=2, c=1$$

$$\therefore X=0+2+1=3$$

⑥ A를 2번, C를 1번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 5, 2, 5이므로

$$a=2, b=2, c=2$$

$$\therefore X=2+2+2=6$$

이때 ①~⑥ 각각에서 주머니를 택하는 순서를 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$ 이므로 각각의 경우의 확률은

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

(iii) 3개의 주머니를 각각 1번씩 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 3, 4, 5이므로

$$a=0, b=1, c=2$$

$$\therefore X=0+1+2=3$$

이때 주머니를 택하는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$ 이므로 주머니를 각각 1번씩 택할 확률은

$$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 3, 6이고

$$P(X=0)=\frac{1}{9}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{9}+4 \times \frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

$$P(X=6)=\frac{1}{9}$$

2단계 $E(X)$, $V(X)$ 의 값 구하기

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{9}+3 \times \frac{7}{9}+6 \times \frac{1}{9}=3$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{9}+3^2 \times \frac{7}{9}+6^2 \times \frac{1}{9}=11$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=11-3^2=2$$

3단계 $\frac{E(4X-2)}{V(5X+1)}$ 의 값 구하기

$$E(4X-2)=4E(X)-2=4 \times 3-2=10$$

$$V(5X+1)=5^2 V(X)=25 \times 2=50$$

$$\therefore \frac{E(4X-2)}{V(5X+1)}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

07 답 15

1단계 X 가 따르는 이항분포 구하기

(i) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 크지 않은 경우

주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 크지 않을, 즉 2보다 작거나 같을 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

동전을 5번 던져서 동전의 앞면과 뒷면이 나오는 횟수가 같은 경우는 존재하지 않고, 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률과 동전의 뒷면이 앞면보다 많이 나올 확률은 같으므로 동전의 앞면이 뒷면

보다 많이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(ii) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 큰 경우

주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 클 확률은

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

동전을 4번 던져서 동전의 앞면과 뒷면이 나오는 횟수가 같을 확률은 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나오면 되므로

$${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

이때 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률과 동전의 뒷면이 앞면보다 많이 나올 확률은 같으므로 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 주어진 시행을 1번 할 때, 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{8}\right)$ 을 따른다.

2단계 $\sigma(X)$ 를 n 에 대한 식으로 나타내기

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{15n}}{8}$$

3단계 자연수 n 의 최솟값 구하기

따라서 $\sigma(X)=\frac{\sqrt{15n}}{8}$ 이 유리수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 15이다.

08 답 ①

1단계 추가된 부품 중 S의 개수를 확률변수 X 로 놓고 X 의 확률질량함수 구하기

추가된 부품 중 S의 개수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은

0, 1, 2이고 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_2C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}={}_2C_x \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{{}_2C_x}{4} \quad (x=0, 1, 2)$$

2단계 조건부확률 이용하기

이때 7개의 부품 중 임의로 선택한 1개가 T인 사건을 A , 추가된 부품이 모두 S인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

3단계 X 의 값에 따른 확률 구하기

(i) $X=0$ 일 때,

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0}{4}=\frac{1}{4}$$

추가된 부품 2개가 모두 T인 경우이므로 창고에는 부품 S가 3개, 부품 T가 4개 있고, 이 7개의 부품 중에서 임의로 선택한 1개의 부품이 T일 확률은 $\frac{4}{7}$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1}{4} = \frac{1}{2}$$

추가된 부품이 S, T 각각 1개인 경우이므로 창고에는 부품 S가 4개, 부품 T가 3개 있고, 이 7개의 부품 중에서 임의로 선택한 1개의 부품이 T일 확률은 $\frac{3}{7}$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{4} = \frac{1}{4}$$

추가된 부품 2개가 모두 S인 경우이므로 창고에는 부품 S가 5개, 부품 T가 2개 있고, 이 7개의 부품 중에서 임의로 선택한 1개의 부품이 T일 확률은 $\frac{2}{7}$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{14}$$

4단계 $P(B|A)$ 의 값 구하기

$$(i), (ii), (iii)에서 P(A) = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} + \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$$

$$(iii)에서 P(A \cap B) = \frac{1}{14}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{6}$$

09 답 ①

1단계 X 의 확률질량함수 구하기

주사위를 36번 던져서 1의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 주사위를 한 번 던져서 1의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수

Y 는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 1의 눈의 수가 나오는 횟수의 합을 k 라 하면 첫 번째 시행에서 1의 눈의 수가 r 번 ($r=0, 1, 2, \dots, k$) 나오고 두 번째 시행에서 주사위를 $(36-r)$ 번 던져서 1의 눈의 수가 $(k-r)$ 번 나올 확률은

$${}_{36}C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{36-r} \times {}_{36-r}C_{k-r} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-r} \left(\frac{5}{6}\right)^{36-k}$$

$$= {}_{36}C_r \times {}_{36-r}C_{k-r} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$${}_{36}C_r \times {}_{36-r}C_{k-r} = \frac{36!}{r!(36-r)!} \times \frac{(36-r)!}{(k-r)!(36-k)!}$$

$$= \frac{36!}{(36-k)!} \times \frac{1}{r!(k-r)!}$$

$$= \frac{36!}{k!(36-k)!} \times \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$= {}_{36}C_k \times {}_kC_r$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$${}_{36}C_r \times {}_{36-r}C_{k-r} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r} = {}_{36}C_k \times {}_kC_r \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r}$$

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{r=0}^k {}_{36}C_k \times {}_kC_r \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r} \\ &= \sum_{r=0}^k {}_{36}C_k \times {}_kC_r \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-2k} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-r} \\ &= {}_{36}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-2k} \sum_{r=0}^k {}_kC_r \times 1^r \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-r} \\ &= {}_{36}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2(36-k)} \times \left(1 + \frac{5}{6}\right)^k \\ &= {}_{36}C_k \left(\frac{1}{6} \times \frac{11}{6}\right)^k \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}^{36-k} \\ &= {}_{36}C_k \left(\frac{11}{36}\right)^k \times \left(\frac{25}{36}\right)^{36-k} \end{aligned}$$

2단계 $E(X)$ 의 값 구하기

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{11}{36}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 36 \times \frac{11}{36} = 11$$

10 답 ②

1단계 $P(X=k)$ 의 값의 대소 파악하기

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{7}\right)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_nC_x \left(\frac{2}{7}\right)^x \left(\frac{5}{7}\right)^{n-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{{}_nC_{k+1} \left(\frac{2}{7}\right)^{k+1} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-k-1}}{{}_nC_k \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{n-k}} \\ &= \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{2}{7}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{5}{7}} \\ &= \frac{2(n-k)}{5(k+1)} \end{aligned}$$

이때 $P(X=k) \leq P(X=k+1)$ 에서

$$\frac{2(n-k)}{5(k+1)} \geq 1, \quad 2n-2k \geq 5k+5$$

$$\therefore k \leq \frac{2n-5}{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $P(X=k) \geq P(X=k+1)$ 에서

$$k \geq \frac{2n-5}{7} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $P(X=k)$ 의 값은 k 의 값이 커짐에 따라 커지다가 다시 작아진다.

2단계 $P(X=4) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값 구하기

(i) $P(X=4) \geq P(X=5)$ 인 경우

$P(X=k) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 5가 아닌 정수 k 가 오직 1개 존재하므로 $P(X=4) \geq P(X=5) \geq P(X=3)$ 이어야 한다.

① $P(X=4) \geq P(X=5)$ 일 때,

$$\textcircled{2}에서 4 \geq \frac{2n-5}{7}, \quad 2n-5 \leq 28 \quad \therefore n \leq \frac{33}{2}$$

② $P(X=5) \geq P(X=3)$ 일 때,

$${}_nC_5 \left(\frac{2}{7}\right)^5 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-5} \geq {}_nC_3 \left(\frac{2}{7}\right)^3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-3}$$

$${}_nC_5 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \geq {}_nC_3 \left(\frac{5}{7}\right)^2, \quad \frac{{}_nC_5}{{}_nC_3} \geq \frac{25}{4}$$

$$\frac{(n-3)(n-4)}{20} \geq \frac{25}{4}, \quad (n-3)(n-4) \geq 125$$

이때 $12 \times 11 \geq 125 \geq 11 \times 10$ 이므로

$$n-3 \geq 12 \quad \therefore n \geq 15$$

①, ②에서 $15 \leq n \leq \frac{33}{2}$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 의 값은 15, 16이다.

3단계 $P(X=6) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값 구하기

(ii) $P(X=6) \geq P(X=5)$ 인 경우

$P(X=k) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 5가 아닌 정수 k 가 오직 1개 존재하므로 $P(X=6) \geq P(X=5) \geq P(X=7)$ 이어야 한다.

① $P(X=6) \geq P(X=5)$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 5 \leq \frac{2n-5}{7}, 2n-5 \geq 35 \quad \therefore n \geq 20$$

② $P(X=5) \geq P(X=7)$ 일 때,

$${}_nC_5 \left(\frac{2}{7}\right)^5 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-5} \geq {}nC_7 \left(\frac{2}{7}\right)^7 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-7}$$

$${}_nC_5 \left(\frac{5}{7}\right)^2 \geq {}nC_7 \left(\frac{2}{7}\right)^2, \frac{{}_nC_7}{{}_nC_5} \leq \frac{25}{4}$$

$$\frac{(n-5)(n-6)}{42} \leq \frac{25}{4}, (n-5)(n-6) \leq \frac{525}{2}$$

$$\text{이때 } 16 \times 15 \leq \frac{525}{2} \leq 17 \times 16 \text{이므로}$$

$$n-5 \leq 16 \quad \therefore n \leq 21$$

①, ②에서 $20 \leq n \leq 21$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 의 값은 20, 21이다.

4단계 자연수 n 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 자연수 n 의 값은 15, 16, 20, 21이므로 그 합은 $15+16+20+21=72$

11 답 30

1단계 기댓값 구하기

50개의 제품 한 상자에 포함된 불량품의 개수를 확률변수 X , 1개의 제품이 불량품일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(50, p)$ 를 따르므로

$$E(X)=50p, V(X)=50p(1-p)$$

$$\text{이때 } E(X)=m \text{이므로 } 50p=m \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } V(X)=\frac{48}{25} \text{이므로 } 50p(1-p)=\frac{48}{25}$$

$$50p-50p^2=\frac{48}{25}, p^2-p+\frac{24}{25^2}=0$$

$$\left(p-\frac{1}{25}\right)\left(p-\frac{24}{25}\right)=0$$

$$\therefore p=\frac{1}{25} \text{ 또는 } p=\frac{24}{25}$$

그런데 $p=\frac{24}{25}$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $m=48>5$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $p=\frac{1}{25}$ 이므로

$$E(X)=50p=50 \times \frac{1}{25}=2$$

2단계 $\frac{a}{1000}$ 의 값 구하기

불량품 한 개에 필요한 애프터서비스 비용이 a 원이므로 불량품 X 개에 대한 애프터서비스 비용 aX 원의 기댓값은

$$E(aX)=aE(X)=2a$$

한 상자의 제품을 모두 검사하는 비용과 애프터서비스로 인해 필요한 비용의 기댓값이 같으므로

$$60000=2a \quad \therefore a=30000$$

$$\therefore \frac{a}{1000}=\frac{30000}{1000}=30$$

step 1 핵심 문제

| 74~75쪽

01 ②

02 2

03 $\frac{1}{4}$

04 ③

05 ⑤

06 ①

07 ④

08 59

09 ③

10 ②

11 ①

01 답 ②

$P(0 \leq X \leq 3)=1$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 1)+P(1 \leq X \leq 2)+P(2 \leq X \leq 3)=1$$

$$k+k \times 2+k \times 3=1$$

$$6k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{6}$$

따라서 $P(x \leq X \leq x+1)=\frac{1}{6}(x+1)$ 이므로

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right)=P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)+P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{2}$$

$$=\frac{2}{3}$$

02 답 2

함수 $y=f(x)(0 \leq x \leq 2)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$2a+\frac{1}{2} \times 2 \times a=1$$

$$3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3} \quad \dots \text{배점 40\%}$$

이때 $P(0 \leq X \leq b)=\frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore b=\frac{1}{2} \quad \dots \text{배점 40\%}$$

$$\therefore 12ab=12 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}=2 \quad \dots \text{배점 20\%}$$

03 답 $\frac{1}{4}$

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f\left(-\frac{1}{2}x+4a\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+4a\right)+a=-\frac{1}{4}x+3a$$

따라서 함수 $y=(f \circ g)(x)(0 \leq x \leq 2)$

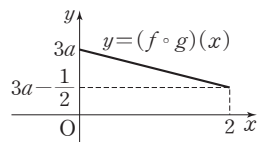
의 그래프는 그림과 같고, 함수

$y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(3a+3a-\frac{1}{2}\right) \times 2=1$$

$$6a-\frac{1}{2}=1, 6a=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$



04 답 ③

함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 6)$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(6 \leq X \leq 8)$$

이때 $P(2 \leq X \leq 4) = a$, $P(0 \leq X \leq 2) = b$ 로 놓으면

$$3P(2 \leq X \leq 4) = 4P(6 \leq X \leq 8) \text{에서}$$

$$3a = 4b \quad \dots\dots ㉠$$

또 $P(0 \leq X \leq 8) = 1$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 4) + P(4 \leq X \leq 6) + P(6 \leq X \leq 8) = 1$$

$$\therefore 2a + 2b = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{7}, b = \frac{3}{14}$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 6) = P(2 \leq X \leq 4) + P(4 \leq X \leq 6)$$

$$= 2a = 2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

05 답 ⑤

정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭

이므로 $P(40 \leq X \leq 45) = P(55 \leq X \leq 60)$

에서 두 직선 $x=45$, $x=55$ 는 직선 $x=m$

에 대하여 대칭이다. $\rightarrow$ 두 직선 $x=40$, $x=60$ 이

직선 $x=m$ 에 대하여 대칭임을 이용해도 된다.

$$\therefore m = \frac{45+55}{2} = 50$$

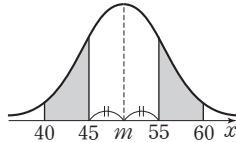
$$\therefore P(X \geq 40) - P(50 \leq X \leq 55)$$

$$= P(40 \leq X \leq 45) + P(X \geq 45) - P(50 \leq X \leq 55)$$

$$= P(40 \leq X \leq 45) + P(X \geq 45) - P(45 \leq X \leq 50)$$

$$= P(40 \leq X \leq 45) + P(X \geq 50)$$

$$= 0.1359 + 0.5 = 0.6359$$



06 답 ①

확률변수 X 가 정규분포 $N(40, 4^2)$ 을 따르므로 $Y = \frac{X-40}{4}$ 으로 놓으면

변 확률변수 Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(|X-39| \leq 5) = P(-5 \leq X-39 \leq 5)$$

$$= P(34 \leq X \leq 44)$$

$$= P\left(\frac{34-40}{4} \leq Y \leq \frac{44-40}{4}\right)$$

$$= P(-1.5 \leq Y \leq 1)$$

$$= P(-1.5 \leq Y \leq 0) + P(0 \leq Y \leq 1)$$

$$= \frac{1}{2}P(-1.5 \leq Y \leq 1.5) + P(Y \leq 1) - P(Y \leq 0)$$

$$= \frac{1}{2} \times p_1 + p_2 - 0.5$$

$$= \frac{p_1 + 2p_2 - 1}{2}$$

07 답 ④

정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선

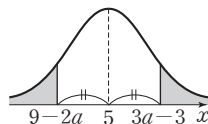
$x=5$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $P(X \leq 9-2a) = P(X \geq 3a-3)$ 을 만족

시키려면 그림과 같아야 하므로

$$\frac{(9-2a) + (3a-3)}{2} = 5$$

$$a+6=10 \quad \therefore a=4$$



한편 확률변수 X 가 정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-5}{2}$ 로 놓으면

변 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(9-2a \leq X \leq 3a-3) = P(1 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{1-5}{2} \leq Z \leq \frac{9-5}{2}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

08 답 59

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(50, \sigma^2)$, $N(65, (2\sigma)^2)$ 을 따르

므로 $Z_X = \frac{X-50}{\sigma}$, $Z_Y = \frac{Y-65}{2\sigma}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모

두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq k) = P(Y \leq k) = 0.1056 \text{에서}$$

$$P\left(Z_X \geq \frac{k-50}{\sigma}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-65}{2\sigma}\right) = 0.1056$$

$$\text{따라서 } \frac{k-50}{\sigma} = -\frac{k-65}{2\sigma} \text{이므로}$$

$$2(k-50) = -(k-65), 3k=165 \quad \therefore k=55$$

$$\text{즉, } P\left(Z_X \geq \frac{k-50}{\sigma}\right) = 0.1056 \text{에서 } P\left(Z_X \geq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1056$$

$$P(Z_X \geq 0) - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1056$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1056$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.3944$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.25) = 0.3944$ 이므로

$$\frac{5}{\sigma} = 1.25 \quad \therefore \sigma = 4$$

$$\therefore k + \sigma = 55 + 4 = 59$$

09 답 ③

ㄱ. 정규분포 $N(100, \sigma_1^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=100$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \geq 100) = 0.5$$

ㄴ. 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(100, \sigma_1^2)$, $N(100, \sigma_2^2)$ 을

따르므로 $Z_X = \frac{X-100}{\sigma_1}$, $Z_Y = \frac{Y-100}{\sigma_2}$ 으로 놓으면 두 확률변수

Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 90) = P\left(Z_X \leq \frac{90-100}{\sigma_1}\right) = P\left(Z_X \leq -\frac{10}{\sigma_1}\right)$$

$$P(Y \geq 105) = P\left(Z_Y \geq \frac{105-100}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{5}{\sigma_2}\right)$$

이때 $\sigma_1 = 2\sigma_2$ 이면

$$P\left(Z_X \leq -\frac{5}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{5}{\sigma_2}\right)$$

$$\therefore P(X \leq 90) = P(Y \geq 105)$$

$$\text{ㄷ. } P(X \leq 105) = P\left(Z_X \leq \frac{105-100}{\sigma_1}\right) = P\left(Z_X \leq \frac{5}{\sigma_1}\right)$$

$$P(Y \leq 105) = P\left(Z_Y \leq \frac{105-100}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{5}{\sigma_2}\right)$$

이때 $\sigma_1 < \sigma_2$ 이면 $\frac{5}{\sigma_1} > \frac{5}{\sigma_2} > 0$ 이므로

$$P\left(Z_X \leq \frac{5}{\sigma_1}\right) > P\left(Z_Y \leq \frac{5}{\sigma_2}\right)$$

$$\therefore P(X \leq 105) > P(Y \leq 105)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 ②

참가자의 수학 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(58, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-58}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 상위 4% 안에 드는 학생의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = 0.04$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-58}{4}\right) = 0.04$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{4}\right) = 0.04$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{4}\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{4}\right) = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$\frac{a-58}{4} = 1.75, a-58=7$$

$$\therefore a=65$$

따라서 상장을 받은 학생의 최저 점수는 65점이다.

11 답 ①

투표에 참여한 유권자는 4800명이고, C 정당에 투표할 확률은

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{이므로 C 정당에 투표한 유권자 수를 } X \text{명이라 하면 확률변수}$$

X 는 이항분포 $B\left(4800, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 4800 \times \frac{1}{4} = 1200, V(X) = 4800 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 900$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(1200, 30^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-1200}{30}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 1260) &= P\left(Z \geq \frac{1260-1200}{30}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

step 2 고난도 문제

| 76~81쪽

01 $\frac{3}{4}$	02 $\frac{3}{2}$	03 $\frac{68}{45}$	04 ⑤	05 31	06 35
07 ④	08 19	09 ③	10 ⑤	11 ②	12 ②
13 $\frac{3}{2}$	14 ①	15 ⑤	16 ②	17 ⑤	18 32
19 ⑤	20 ④	21 404명	22 80	23 ③	24 ③
25 ③	26 159				

01 답 $\frac{3}{4}$

㉞에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 4)$$

이때 $P(0 \leq X \leq 4) = 1$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 4) = 1$$

$$2P(0 \leq X \leq 2) = 1$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}$$

㉞의 $P(0 \leq X \leq x) = ax^2$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(0 \leq X \leq 2) = 4a$$

$$\text{즉, } 4a = \frac{1}{2} \text{이므로 } a = \frac{1}{8}$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$P(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{8}x^2$$

또 함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(1 \leq X \leq 3) &= P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) \\ &= 2P(1 \leq X \leq 2) \\ &= 2\{P(0 \leq X \leq 2) - P(0 \leq X \leq 1)\} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

02 답 $\frac{3}{2}$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$f(-1) \geq 0 \text{에서 } -a+b \geq 0 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

$$f(0) \geq 0 \text{에서 } b \geq 0$$

$$f(1) \geq 0 \text{에서 } a+b+1 \geq 0 \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1, x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \{f(-1) + f(0)\} \times 1 \\ + \frac{1}{2} \times \{f(0) + f(1)\} \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \times \{(-a+b) + b\} + \frac{1}{2} \times \{b + (a+b+1)\} = 1$$

$$(-a+2b) + (a+2b+1) = 2$$

$$4b+1=2 \quad \therefore b=\frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉞에 대입하면

$$-a + \frac{1}{4} \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

㉡을 ㉟에 대입하면

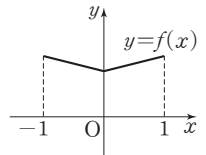
$$a + \frac{1}{4} + 1 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣에서 } -\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉤}$$

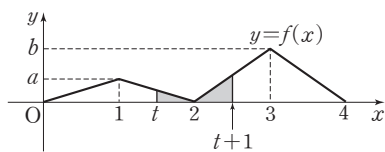
즉, ㉤, ㉤에서 $-1 \leq a+b \leq \frac{1}{2}$ 이므로 $a+b$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 -1 이다.

따라서 $M = \frac{1}{2}, m = -1$ 이므로

$$M-m = \frac{3}{2}$$



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times a + \frac{1}{2} \times 2 \times b = 1$$

$$a+b=1 \quad \therefore b=1-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$P(t \leq X \leq t+1)$ 은 t 와 $t+1$ 사이에 2가 존재할 때 최소이므로

$$\begin{aligned} P(t \leq X \leq t+1) &= P(t \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq t+1) \\ &= \frac{1}{2} \times (2-t) \times f(t) + \frac{1}{2} \times \{(t+1)-2\} \times f(t+1) \\ &= \frac{1}{2} \times (2-t) \times \{-a(t-2)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (t-1) \times b\{(t+1)-2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} a(t-2)^2 + \frac{1}{2} b(t-1)^2 \\ &= \frac{1}{2} a(t-2)^2 + \frac{1}{2} (1-a)(t-1)^2 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{2} t^2 - (a+1)t + \frac{1}{2} (3a+1) \\ &= \frac{1}{2} \{t - (a+1)\}^2 - \frac{1}{2} (a^2 - a) \end{aligned}$$

따라서 $P(t \leq X \leq t+1)$ 은 $t=a+1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}(a^2-a)$ 를 가지므로

$$g(a) = a+1, \quad h(a) = -\frac{1}{2}(a^2-a)$$

$$\therefore g\left(\frac{2}{5}\right) + h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{5} + \frac{1}{9} = \frac{68}{45}$$

04 답 ⑤

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 3a \times b = 1, \quad ab = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3b}$$

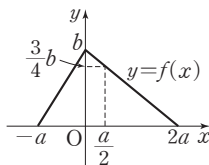
$$\text{따라서 } a > \frac{3}{2} \text{ 이면 } \frac{2}{3b} > \frac{3}{2} \quad \therefore b < \frac{4}{9}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x + b & (-a \leq x \leq 0) \\ -\frac{b}{2a}x + b & (0 \leq x \leq 2a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq 2a\right) &= \frac{1}{2} \times \left(2a - \frac{a}{2}\right) \times f\left(\frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}a \times \frac{3}{4}b = \frac{9}{16}ab \\ &= \frac{9}{16} \times \frac{2}{3} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(-a \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq 2a\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore P\left(-a \leq X \leq \frac{a}{2}\right) > P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq 2a\right)$$



$$\therefore X^2 < a^2 \text{에서 } X^2 - a^2 < 0$$

$$(X+a)(X-a) < 0$$

$$\therefore -a < X < a$$

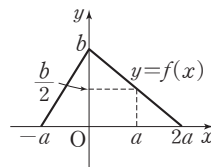
$$\therefore P(A) = P(-a < X < a)$$

$$P(B) = P(X > 0) \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(0 < X < a)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \{b + f(a)\} \times a}{\frac{1}{2} \times 2a \times b} \\ &= \frac{\left(b + \frac{b}{2}\right) \times a}{2ab} \\ &= \frac{\frac{3}{2}b}{2b} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



05 답 31

$0 \leq x \leq 6$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) + g(x) = k$ (k 는 상수)이므로

$$g(x) = -f(x) + k$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에

대하여 대칭이동한 후 y 축의 방

향으로 k 만큼 평행이동한 것이므

로 그림과 같다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하

면 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 S_1 이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와

x 축 및 두 직선 $x=0, x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1 = S_2 = 1$$

$$\text{따라서 } S_1 + S_2 = 2 \text{이므로 } 6k = 2 \quad \therefore k = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x & (0 \leq x \leq 3) \\ \frac{1}{4} & (3 \leq x \leq 5) \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & (5 \leq x \leq 6) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(x) = -f(x) + \frac{1}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{12}x + \frac{1}{3} & (0 \leq x \leq 3) \\ \frac{1}{12} & (3 \leq x \leq 5) \\ \frac{1}{4}x - \frac{7}{6} & (5 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과

같고

$$P(6k \leq Y \leq 15k) = P(2 \leq Y \leq 5)$$

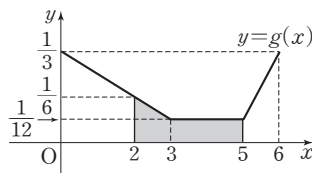
는 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \times 1 + 2 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$$

따라서 $p=24, q=7$ 이므로

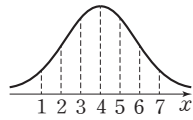
$$p+q=31$$



06 답 35

$$\sum_{n=1}^7 P(X \leq n) = P(X \leq 1) + P(X \leq 2) + P(X \leq 3) + P(X \leq 4) \\ + P(X \leq 5) + P(X \leq 6) + P(X \leq 7)$$

이때 정규분포 $N(4, 3^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 그림과 같이 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로



$$P(X \leq 1) + P(X \leq 7) = P(X \leq 1) + P(X \geq 1) = 1$$

$$P(X \leq 2) + P(X \leq 6) = P(X \leq 2) + P(X \geq 2) = 1$$

$$P(X \leq 3) + P(X \leq 5) = P(X \leq 3) + P(X \geq 3) = 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 P(X \leq n) = \{P(X \leq 1) + P(X \leq 7)\} + \{P(X \leq 2) + P(X \leq 6)\} \\ + \{P(X \leq 3) + P(X \leq 5)\} + P(X \leq 4)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0.5 = 3.5$$

따라서 $a=3.5$ 이므로 $10a=35$

idea

07 답 ④

$$P(X \leq 23) + P(X \geq 20) = 1 + P(20 \leq X \leq 23) \text{이므로}$$

$$1 + P(15 \leq X \leq 18) = P(X \leq 23) + P(X \geq 20) \text{에서}$$

$$1 + P(15 \leq X \leq 18) = 1 + P(20 \leq X \leq 23)$$

따라서 $P(15 \leq X \leq 18) = P(20 \leq X \leq 23)$ 이므로 두 직선 $x=18$, $x=20$ 은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다. $\rightarrow$ 두 직선 $x=15$, $x=23$ 이 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭임을 이용해도 된다.

$$\therefore m = \frac{18+20}{2} = 19$$

$$P(X \leq a) + P(X \leq a+b) = 1 \text{에서}$$

$$P(X \leq a) = 1 - P(X \leq a+b)$$

$$P(X \leq a) = P(X \geq a+b)$$

따라서 두 직선 $x=a$, $x=a+b$ 는 직선 $x=19$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+(a+b)}{2} = 19$$

$$\therefore 2a+b=38 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $ab=10$ 에서 $b=\frac{10}{a}$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$2a + \frac{10}{a} = 38, \quad 2a^2 - 38a + 10 = 0$$

따라서 구하는 모든 a 의 값의 합은

$$-\frac{-38}{2} = 19$$

08 답 19

$$P(X \leq k) = 0.7881 \text{에서}$$

$$P(X \leq m) + P(m \leq X \leq k) = 0.7881$$

$$0.5 + P(m \leq X \leq k) = 0.7881$$

$$\therefore P(m \leq X \leq k) = 0.2881 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots \text{배점 } 40\%$$

$$P(X \leq m - 0.8\sigma) = 0.2119 \text{에서}$$

$$P(X \leq m) - P(m - 0.8\sigma \leq X \leq m) = 0.2119$$

$$P(X \leq m) - P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma) = 0.2119$$

$$0.5 - P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma) = 0.2119$$

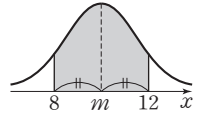
$$\therefore P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma) = 0.2881 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots \text{배점 } 40\%$$

㉠, ㉡에서 $P(m \leq X \leq k) = P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma)$ 이므로

$$k = m + 0.8\sigma = 15 + 0.8 \times 5 = 19 \quad \dots\dots \text{배점 } 20\%$$

09 답 ③

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수는 $x=m$ 에서 최대이고, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $f(a)$ 가 $a=8$ 에서 최댓값 $f(8)=P(8 \leq X \leq 12)$ 를 가지려면 그림과 같이 두 직선 $x=8$, $x=12$ 가 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이어야 하므로



$$m = \frac{8+12}{2} = 10$$

이때 $E(X^2) = 104$ 이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 104 - 10^2 = 4$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$$

따라서 $m=10$, $\sigma=2$ 이므로

$$P(6 \leq X \leq 13) = P(10 - 2 \times 2 \leq X \leq 10 + 1.5 \times 2)$$

$$= P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 1.5\sigma)$$

$$= P(m - 2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + 1.5\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m + 2\sigma) + P(m \leq X \leq m + 1.5\sigma)$$

$$= 0.4772 + 0.4332$$

$$= 0.9104$$

10 답 ⑤

(㉠)의 $Y=3X-a$ 에서

$$E(Y) = E(3X-a) = 3E(X) - a \text{이고}$$

$$E(X) = m, E(Y) = m \text{이므로}$$

$$m = 3m - a \quad \therefore a = 2m \quad \dots\dots ㉡$$

또 $\sigma(Y) = \sigma(3X-a) = 3\sigma(X)$ 이고

$$\sigma(X) = 2, \sigma(Y) = \sigma \text{이므로}$$

$$\sigma = 3 \times 2 = 6$$

따라서 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, 2^2), N(m, 6^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{2}, Z_Y = \frac{Y-m}{6}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

(㉢)의 $P(X \leq 4) = P(Y \geq a)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{4-m}{2}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{a-m}{6}\right)$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{4-m}{2}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{2m-m}{6}\right) \quad (\because ㉡)$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{4-m}{2}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{m}{6}\right)$$

따라서 $\frac{4-m}{2} = -\frac{m}{6}$ 이므로

$$12 - 3m = -m$$

$$2m = 12 \quad \therefore m = 6$$

$$\therefore P(Y \geq 9) = P\left(Z_Y \geq \frac{9-6}{6}\right)$$

$$= P(Z_Y \geq 0.5)$$

$$= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 0.5)$$

$$= 0.5 - 0.1915$$

$$= 0.3085$$

11 답 ②

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2), N(2m, (2\sigma)^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-2m}{2\sigma}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$F(t) = P(X \geq m - \sigma t)$$

$$= P\left(Z_X \geq \frac{m - \sigma t - m}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z_X \geq -t)$$

$$G(t) = P(Y \leq 2m + \sigma t)$$

$$= P\left(Z_Y \leq \frac{2m + \sigma t - 2m}{2\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \leq \frac{t}{2}\right)$$

$$\neg. F(1) = P(Z_X \geq -1), G(-2) = P(Z_Y \leq -1) \text{이므로}$$

$$F(1) + G(-2) = 1$$

$$\neg. 2t_1 < t_2 \text{이면 } -t_1 > -\frac{t_2}{2} \text{ 이므로}$$

$$P(Z \geq -t_1) < P\left(Z \geq -\frac{t_2}{2}\right)$$

$$\text{이때 } F(t_1) = P(Z_X \geq -t_1), G(t_2) = P\left(Z_Y \leq \frac{t_2}{2}\right) = P\left(Z_Y \geq -\frac{t_2}{2}\right)$$

이므로

$$F(t_1) < G(t_2)$$

다. 양수 t_3 에 대하여

$$F(t_3) = P(Z_X \geq -t_3) = P(Z_X \leq t_3)$$

$$= P(Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq t_3)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z_X \leq t_3)$$

$$G(4t_3) = P(Z_Y \leq 2t_3)$$

$$= P(Z_Y \leq 0) + P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3)$$

$$\therefore G(4t_3) + 0.5 - 2F(t_3)$$

$$= \{0.5 + P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3)\} + 0.5 - 2\{0.5 + P(0 \leq Z_X \leq t_3)\}$$

$$= P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3) - 2P(0 \leq Z_X \leq t_3)$$

$$= P(0 \leq Z_Y \leq t_3) + P(t_3 \leq Z_Y \leq 2t_3) - 2P(0 \leq Z_X \leq t_3)$$

$$= P(t_3 \leq Z_Y \leq 2t_3) - P(0 \leq Z_X \leq t_3) < 0 \rightarrow \text{표준정규분포를 따르는 확률}$$

$$\therefore G(4t_3) + 0.5 < 2F(t_3)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

12 답 ②

그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S 라 하면

$$P(35 \leq X \leq 50) = S_1 + S \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$P(35 \leq Y \leq 50) = S_2 + S \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$P(35 \leq X \leq 50) - P(35 \leq Y \leq 50) = S_1 - S_2$$

이때 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(35, 5^2), N(50, 10^2)$ 을 따

르므로 $Z_X = \frac{X-35}{5}, Z_Y = \frac{Y-50}{10}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y

는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(35 \leq X \leq 50) = P\left(\frac{35-35}{5} \leq Z_X \leq \frac{50-35}{5}\right)$$

$$= P(0 \leq Z_X \leq 3)$$

$$= 0.4987$$

$$P(35 \leq Y \leq 50) = P\left(\frac{35-50}{10} \leq Z_Y \leq \frac{50-50}{10}\right)$$

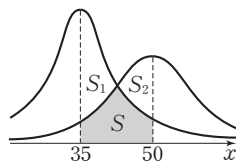
$$= P(-1.5 \leq Z_Y \leq 0)$$

$$= P(0 \leq Z_Y \leq 1.5)$$

$$= 0.4332$$

$$\therefore S_1 - S_2 = P(35 \leq X \leq 50) - P(35 \leq Y \leq 50)$$

$$= 0.4987 - 0.4332 = 0.0655$$



13 답 $\frac{3}{2}$

두 확률변수 X, Z 의 평균이 0으로 같고 확률

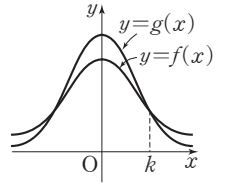
변수 X 의 표준편차가 1보다 크므로 두 함수

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x > 0$ 에서 두 함수 $y=f(x),$

$y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 k

이다.



확률변수 X 는 정규분포 $N(0, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X}{\sigma}$ 로 놓으면 확률

변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 $\textcircled{1}$ 의 $P(0 \leq X \leq k) = 0.385$ 에서

$$P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{k}{\sigma}\right) = 0.385$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.385$ 이므로

$$\frac{k}{\sigma} = 1.2 \quad \therefore k = 1.2\sigma \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $P(0 \leq Z \leq k) - P(0 \leq X \leq k) = 0.079$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq k) - 0.385 = 0.079$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.464$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.464$ 이므로

$$k = 1.8$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1.8 = 1.2\sigma$$

$$\therefore \sigma = \frac{3}{2}$$

14 답 ①

확률변수 X 는 정규분포 $N(8, 2^2)$ 을 따르고 확률변수 Y 는 정규분포

$N(12, 2^2)$ 을 따르므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 각각 직

선 $x=8, x=12$ 에 대하여 대칭이다.

또 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 2로 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그

래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와

일치한다.

$$\therefore g(x) = f(x-4)$$

이때 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 a 이

므로 $f(a) = g(a)$ 에서

$$f(a) = f(a-4)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=8$ 에 대하여

대칭이므로

$$\frac{a + (a-4)}{2} = 8$$

$$2a - 4 = 16 \quad \therefore a = 10$$

한편 확률변수 Y 는 정규분포 $N(12, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{Y-12}{2}$ 로 놓으

면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(8 \leq Y \leq a) = P(8 \leq Y \leq 10)$$

$$= P\left(\frac{8-12}{2} \leq Z \leq \frac{10-12}{2}\right)$$

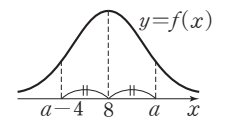
$$= P(-2 \leq Z \leq -1)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

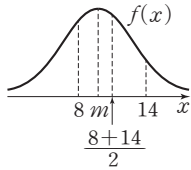
$$= 0.4772 - 0.3413$$

$$= 0.1359$$

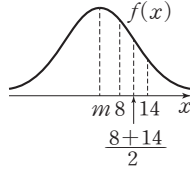


15 답 ⑤

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따르므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고, $f(x)$ 의 값이 클수록 x 가 평균 m 에 가까워지므로 $f(8) > f(14)$ 를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



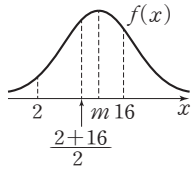
[$8 < m < 14$ 인 경우]



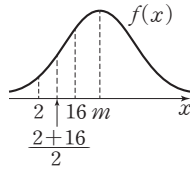
[$m < 8$ 인 경우]

따라서 $m < \frac{8+14}{2}$ 이므로 $m < 11$ ㉠

또 $f(2) < f(16)$ 을 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$2 < m < 16$ 인 경우]



[$m > 16$ 인 경우]

따라서 $m > \frac{2+16}{2}$ 이므로 $m > 9$ ㉡

㉠, ㉡에서 $9 < m < 11$ 이고 m 은 자연수이므로 $m=10$

즉, 확률변수 X 가 정규분포 $N(10, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-10}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \leq 6) &= P\left(Z \leq \frac{6-10}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

idea 16 답 ②

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq a+6) &= P\left(\frac{a-m}{2} \leq Z \leq \frac{a+6-m}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{a-m}{2} \leq Z \leq \frac{a-m}{2} + 3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2P(0 \leq Z \leq 1.5) &= P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq -1.5+3) \end{aligned}$$

$$P(a \leq X \leq a+6) = 2P(0 \leq Z \leq 1.5) \text{에서}$$

$$P\left(\frac{a-m}{2} \leq Z \leq \frac{a-m}{2} + 3\right) = P(-1.5 \leq Z \leq -1.5+3) \quad \dots\dots ㉠$$

한편 확률변수 Z 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이고, x 가 0에서 멀어질수록 함수값이 작아지므로 실수 b, c, t 에 대하여 $P(b \leq Z \leq b+t) = P(c \leq Z \leq c+t)$ 이라면 $b=c$ 또는 $-b=c+t$ 이어야 한다.

따라서 ㉠에서

$$\frac{a-m}{2} = -1.5 \text{ 또는 } -\frac{a-m}{2} = 1.5$$

$$a-m = -3 \quad \therefore a = m-3$$

$$\begin{aligned} \therefore P(a \leq X \leq a+1) &= P(m-3 \leq X \leq m-2) \\ &= P\left(\frac{m-3-m}{2} \leq Z \leq \frac{m-2-m}{2}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq -1) \\ &= P(1 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4332 - 0.3413 = 0.0919 \end{aligned}$$

17 답 ⑤

이 학교 3학년 학생들의 A, B 과목 시험 점수를 각각 X 점, Y 점이라 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(m+3, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{\sigma}$, $Z_Y = \frac{X-(m+3)}{\sigma}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 A 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.09이므로

$$P(X \geq 80) = 0.09 \text{에서}$$

$$P\left(Z_X \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$P(Z_X \geq 0) - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.41$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.34) = 0.41$ 이므로

$$\frac{80-m}{\sigma} = 1.34 \quad \therefore m = 80 - 1.34\sigma \quad \dots\dots ㉠$$

또 B 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.15이므로

$$P(Y \geq 80) = 0.15 \text{에서}$$

$$P\left(Z_Y \geq \frac{80-(m+3)}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$P(Z_Y \geq 0) - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.35$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.35$ 이므로

$$\frac{77-m}{\sigma} = 1.04 \quad \therefore m = 77 - 1.04\sigma \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m = 66.6, \sigma = 10$$

$$\therefore m + \sigma = 76.6$$

18 답 32

이 농장에서 수확한 사과 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(400, 20^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-400}{20}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이 농장에서 수확한 사과 중에서 임의로 1개를 택할 때, 판매할 수 있는 사과일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 384) &= P\left(Z \geq \frac{384-400}{20}\right) \\ &= P(Z \geq -0.8) = P(Z \leq 0.8) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 0.5 + 0.3 = 0.8 \quad \dots\dots\dots \text{배점 50\%} \end{aligned}$$

즉, 이 농장에서 수확한 사과 1개가 판매할 수 있는 사과일 확률은 $0.8 = \frac{4}{5}$ 이므로 임의로 택한 4개의 사과 중 판매할 수 있는 사과가 3개일 확률은

$${}^4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 4 \times \frac{4^3}{5^4} = \frac{4^4}{5^4} = \frac{2^8}{5^4} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 $p=4$, $q=8$ 이므로

$$pq=32 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

19 답 ⑤

이 회사 직원들의 출근 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(66.4, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-66.4}{15}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 출근 시간이 73분 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 73) &= P\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right) \\ &= P(Z \geq 0.44) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z < 0.44) \\ &= 0.5 - 0.17 = 0.33 \\ \therefore P(X < 73) &= 1 - P(X \geq 73) = 1 - 0.33 = 0.67 \end{aligned}$$

출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40%, 출근 시간이 73분 미만인 직원들 중에서 20%가 지하철을 이용하였으므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 73) \times 0.4 + P(X < 73) \times 0.2 &= 0.33 \times 0.4 + 0.67 \times 0.2 \\ &= 0.132 + 0.134 \\ &= 0.266 \end{aligned}$$

20 답 ④

이 고등학교 학생들의 하루 수학 공부 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(40, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-40}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이 고등학교 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 하루 수학 공부 시간이 35분 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 35) &= P\left(Z \geq \frac{35-40}{5}\right) \\ &= P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.34 = 0.84 \\ \therefore P(X < 35) &= 1 - P(X \geq 35) = 1 - 0.84 = 0.16 \end{aligned}$$

이 고등학교 학생 중에서 임의로 택한 1명의 학생이 여학생인 사건을 A , 하루 수학 공부 시간이 35분 이상인 학생인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

이때 하루 수학 공부 시간이 35분 이상인 학생의 40%가 남학생이므로 여학생은 60%이고, 하루 수학 공부 시간이 35분 미만인 학생의 70%가 여학생이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P(A|B) \\ &= 0.84 \times 0.6 = 0.504 \\ P(A \cap B^c) &= P(B^c)P(A|B^c) \\ &= 0.16 \times 0.7 = 0.112 \\ \therefore P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)} \\ &= \frac{0.504}{0.504 + 0.112} = \frac{0.504}{0.616} = \frac{9}{11} \end{aligned}$$

21 답 404명

수학 등급이 2등급, 3등급인 학생들의 영어 점수를 각각 X 점, Y 점이라 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(75, 5^2)$, $N(72, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-75}{5}$, $Z_Y = \frac{Y-72}{4}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

수학 등급이 2등급인 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 영어 점수가 70점 이상 80점 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(70 \leq X \leq 80) &= P\left(\frac{70-75}{5} \leq Z_X \leq \frac{80-75}{5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z_X \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z_X \leq 1) \\ &= 2 \times 0.34 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

수학 등급이 3등급인 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 영어 점수가 70점 이상 80점 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(70 \leq Y \leq 80) &= P\left(\frac{70-72}{4} \leq Z_Y \leq \frac{80-72}{4}\right) \\ &= P(-0.5 \leq Z_Y \leq 2) \\ &= P(-0.5 \leq Z_Y \leq 0) + P(0 \leq Z_Y \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z_Y \leq 0.5) + P(0 \leq Z_Y \leq 2) \\ &= 0.19 + 0.48 \\ &= 0.67 \end{aligned}$$

이때 학생 1000명 중 수학 등급이 2등급, 3등급인 학생 수는 각각 $1000 \times 0.2 = 200$ (명), $1000 \times 0.4 = 400$ (명) 따라서 구하는 학생 수는

$$200 \times 0.68 + 400 \times 0.67 = 136 + 268 = 404 \text{ (명)}$$

22 답 80

주사위를 한 번 던져서 홀수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n^2, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = n^2 \times \frac{1}{2} = \frac{n^2}{2}, V(X) = n^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n^2}{4} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{n^2}{2}, \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X - \frac{n^2}{2}}{\frac{n}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore f(n, k) &= P\left(\left|\frac{X}{n^2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{k}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{2} < \frac{X}{n^2} < \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(-n^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right) < X < n^2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= P\left(\frac{-n^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right) - \frac{n^2}{2}}{\frac{n}{2}} < Z < \frac{n^2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\right) - \frac{n^2}{2}}{\frac{n}{2}}\right) \\ &= P\left(-\frac{2n}{k} < Z < \frac{2n}{k}\right) \dots\dots\dots \text{배점 50\%} \end{aligned}$$

이때 $f(40, 4) = f(n, 8)$ 에서

$$P(-20 < Z < 20) = P\left(-\frac{n}{4} < Z < \frac{n}{4}\right)$$

따라서 $20 = \frac{n}{4}$ 이므로 $n = 80$ 배점 20%

23 답 ③

두 확률변수 X, Y 가 각각 이항분포 $B(144, p_1), B(576, p_2)$ 를 따르므로

$$E(X)=144p_1, E(Y)=576p_2$$

$$V(X)=144p_1(1-p_1), V(Y)=576p_2(1-p_2)$$

$$\neg. p_1=p_2=\frac{1}{6} \text{이면}$$

$$E(Y)-E(X)=576p_1-144p_1=432p_1=432 \times \frac{1}{6}=72$$

$$\cup. p_1=4p_2 \text{에서 } p_2=\frac{p_1}{4} \text{이므로}$$

$$V(Y)=576 \times \frac{p_1}{4} \left(1-\frac{p_1}{4}\right)=144p_1 \left(1-\frac{p_1}{4}\right)$$

$$\therefore V(X) \neq V(Y)$$

ㄷ. 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144p_1, 144p_1(1-p_1))$ 을 따르므로 $Z_X=\frac{X-144p_1}{12\sqrt{p_1(1-p_1)}}$ 로 놓으면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P\left(\left|\frac{X}{144}-p_1\right| \leq \frac{1}{24}\right)$$

$$=P\left(p_1-\frac{1}{24} \leq \frac{X}{144} \leq p_1+\frac{1}{24}\right)$$

$$=P(144p_1-6 \leq X \leq 144p_1+6)$$

$$=P\left(\frac{144p_1-6-144p_1}{12\sqrt{p_1(1-p_1)}} \leq Z_X \leq \frac{144p_1+6-144p_1}{12\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

$$=P\left(-\frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}} \leq Z_X \leq \frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

$$=2P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

또 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(576p_2, 576p_2(1-p_2))$ 를 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-576p_2}{24\sqrt{p_2(1-p_2)}}$ 로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P\left(\left|\frac{Y}{576}-p_2\right| \leq \frac{1}{48}\right)$$

$$=P\left(p_2-\frac{1}{48} \leq \frac{Y}{576} \leq p_2+\frac{1}{48}\right)$$

$$=P(576p_2-12 \leq Y \leq 576p_2+12)$$

$$=P\left(\frac{576p_2-12-576p_2}{24\sqrt{p_2(1-p_2)}} \leq Z_Y \leq \frac{576p_2+12-576p_2}{24\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right)$$

$$=P\left(-\frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}} \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right)$$

$$=2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$p_1+p_2=1$ 에서 $p_2=1-p_1$ 이고 $1-p_2=p_1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right)=2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

$$\therefore P\left(\left|\frac{X}{144}-p_1\right| \leq \frac{1}{24}\right)=P\left(\left|\frac{Y}{576}-p_2\right| \leq \frac{1}{48}\right)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

24 답 ③

예약을 취소하거나 실제 탑승하지 않는 사람의 수를 X 명이라 하면 예약한 사람은 총 400명이고 좌석을 예약한 사람이 취소하거나 실제 탑승하지 않을 확률이 10%이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X)=400 \times \frac{1}{10}=40, V(X)=400 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}=36$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따르므로

$Z=\frac{X-40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

예약한 사람 중 실제 비행기를 타려고 공항에 나온 사람들이 모두 비행기에 탑승하려면 예약을 취소하거나 실제 탑승하지 않는 사람의 수가 31명 이상이어야 하므로 구하는 확률은 400-369=31

$$P(X \geq 31)=P\left(Z \geq \frac{31-40}{6}\right)$$

$$=P(Z \geq -1.5)=P(Z \leq 1.5)$$

$$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$=0.5+0.4332$$

$$=0.9332$$

25 답 ③

한 개의 주사위를 1번 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수일 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \text{이므로 주사위를 } n \text{번 던져서 3의 배수의 눈의 수가 나오는 횟수}$$

를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X)=n \times \frac{1}{3}=\frac{n}{3}, V(X)=n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{2}{9}n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주사위를 n 번 던져서 3의 배수의 눈의 수가 나오지 않는 횟수는 $n-X$ 이므로 주사위를 n 번 던진 후 받은 구슬의 개수의 합을 Y 라 하면

$$Y=3X+(n-X)=2X+n$$

이때 받은 구슬의 개수의 합의 기댓값이 750이므로 $E(Y)=750$ 에서

$$E(2X+n)=750, 2E(X)+n=750$$

$$2 \times \frac{n}{3}+n=750 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\frac{5}{3}n=750 \quad \therefore n=450$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$E(X)=150, V(X)=100$$

$$\therefore V(Y)=V(2X+n)=2^2V(X)=4 \times 100=400$$

이때 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(750, 20^2)$ 을 따르므로

$Z=\frac{Y-750}{20}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 주사위를 n 번 던진 후 받은 구슬의 개수의 합이 780 이상일 확률은

$$P(Y \geq 780)=P\left(Z \geq \frac{780-750}{20}\right)$$

$$=P(Z \geq 1.5)$$

$$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$=0.5-0.4332$$

$$=0.0668$$

26 답 159

순서쌍 1개를 택할 때, $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$ 이 모두 홀수가 아닐 확률, 즉 모두 짝수일 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}=\frac{1}{16}$$

이므로 홀수가 적어도 1개인 순서쌍일 확률은

$$1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

따라서 3840개의 순서쌍 중에서 홀수가 적어도 1개인 순서쌍의 개수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3840, \frac{15}{16}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 3840 \times \frac{15}{16} = 3600, V(X) = 3840 \times \frac{15}{16} \times \frac{1}{16} = 225$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(3600, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-3600}{15}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 3615) &= P\left(Z \geq \frac{3615-3600}{15}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.341 \\ &= 0.159 \end{aligned}$$

따라서 $p=0.159$ 이므로
 $1000p=159$

step 3 최고난도 문제

| 82~83쪽

01 $\frac{11}{4}$ 02 $\frac{5}{16}$ 03 ⑤ 04 987 05 ② 06 ③
 07 ①

01 **답** $\frac{11}{4}$

1단계 $f(x-2)$ 구하기

$$f(x) = \begin{cases} a & (x < a) \\ x & (x \geq a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x-2) = \begin{cases} a & (x-2 < a) \\ x-2 & (x-2 \geq a) \end{cases} = \begin{cases} a & (x < a+2) \\ x-2 & (x \geq a+2) \end{cases}$$

2단계 a 의 값 구하기

(i) $0 < a \leq 4$ 일 때,

$2 < a+2 \leq 6$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(a-a) & (x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x < a+2) \\ \frac{2}{9}\{x-(x-2)\} & (a+2 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

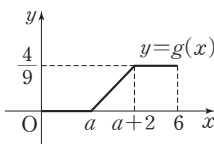
$$= \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x < a+2) \\ \frac{4}{9} & (a+2 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times [(6-a) + \{6-(a+2)\}] \times \frac{4}{9} = 1$$

$$5-a = \frac{9}{4} \quad \therefore a = \frac{11}{4}$$



(ii) $4 < a \leq 6$ 일 때,

$6 < a+2 \leq 8$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(a-a) & (x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x \leq 6) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x \leq 6) \end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (6-a) \times \frac{2(6-a)}{9} = 1$$

$$a^2 - 12a + 36 = 9, a^2 - 12a + 27 = 0$$

$$(a-3)(a-9) = 0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=9$$

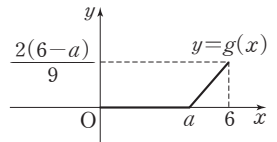
그런데 $4 < a \leq 6$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a > 6$ 일 때,

$$a+2 > 8 \text{이므로 } g(x) = \frac{2}{9}(a-a) = 0$$

따라서 확률밀도함수의 성질을 만족시키지 않으므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = \frac{11}{4}$



idea

02 **답** $\frac{5}{16}$

1단계 a 의 값 구하기

함수 $g(k)$ 에 대하여 $g(k) \geq g(5)$ 이므로 $g(k)$ 는 $k=5$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이므로 함수

$$g(k) = P(k-1 \leq X \leq k+3) \text{의 값이 최소이려면 } \frac{(k-1) + (k+3)}{2} = a,$$

즉 $a=k+1$ 이어야 한다.

$$\therefore a=k+1=5+1=6$$

2단계 b 의 값 구하기

$$\begin{aligned} g(5) &= P(4 \leq X \leq 8) \\ &= P(4 \leq X \leq 6) + P(6 \leq X \leq 8) \\ &= 2P(6 \leq X \leq 8) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times f(8) \\ &= 2f(8) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2f(8) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

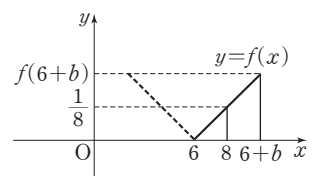
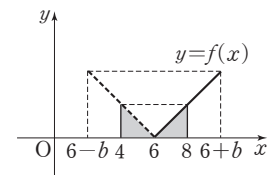
$$f(8) = \frac{1}{8}$$

따라서 그림에서 삼각형의 닮음에 의하여

$$2 : \frac{1}{8} = b : f(6+b)$$

$$2f(6+b) = \frac{b}{8}$$

$$\therefore f(6+b) = \frac{b}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



이때 $P(6 \leq X \leq 6+b) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times b \times f(6+b) = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times b \times \frac{b}{16} = \frac{1}{2} (\because \textcircled{1})$$

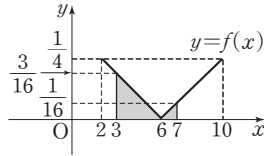
$$b^2 = 16 \quad \therefore b = 4 (\because b \geq 2)$$

3단계 $f(x)$ 구하기

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16}(x-6) & (2 \leq x \leq 6) \\ \frac{1}{16}(x-6) & (6 \leq x \leq 10) \end{cases}$$

4단계 $P(3 \leq X \leq 7)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore P(3 \leq X \leq 7) &= P(3 \leq X \leq 6) + P(6 \leq X \leq 7) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{16} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$



03 답 ⑤

1단계 σ' 의 값 구하기

확률변수 X 는 정규분포 $N(k^2, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-k^2}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(3k \leq X \leq 3k+20) = 0.4778 \text{에서}$$

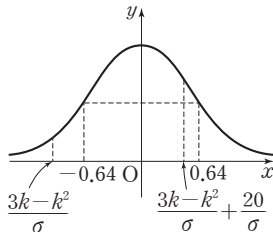
$$P\left(\frac{3k-k^2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3k+20-k^2}{\sigma}\right) = 0.4778$$

$$P\left(\frac{3k-k^2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3k-k^2}{\sigma} + \frac{20}{\sigma}\right) = 0.4778$$

$$\text{이때 } P(-0.64 \leq Z \leq 0.64) = P(|Z| \leq 0.64) = 0.4778 \text{이고}$$

$$\left(\frac{3k-k^2}{\sigma} + \frac{20}{\sigma}\right) - \frac{3k-k^2}{\sigma} = \frac{20}{\sigma}, \quad 0.64 - (-0.64) = 1.28 \text{이므로}$$

$$\frac{20}{\sigma} \geq 1.28 \text{이어야 한다.}$$



이때 σ 의 값이 최대이려면 $\frac{20}{\sigma}$ 의 값이 최소가 되어야 하므로 σ 의 최댓값 σ' 에 대하여

$$\frac{20}{\sigma'} = 1.28 \quad \therefore \sigma' = \frac{125}{8}$$

2단계 k 의 값 구하기

$$\text{두 직선 } x = \frac{3k-k^2}{\sigma'}, \quad x = \frac{3k-k^2}{\sigma'} + \frac{20}{\sigma'} \text{이 } y \text{축에 대하여 대칭이므로}$$

$$\frac{3k-k^2}{\sigma'} = -0.64 \rightarrow \frac{3k-k^2}{\sigma'} + \frac{20}{\sigma'} = 0.64 \text{를 이용해도 된다.}$$

$$\frac{3k-k^2}{\frac{125}{8}} = -0.64, \quad 3k-k^2 = -10$$

$$k^2 - 3k - 10 = 0, \quad (k+2)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = 5 (\because k > 0)$$

3단계 $k+8\sigma'$ 의 값 구하기

$$\therefore k+8\sigma' = 5 + 8 \times \frac{125}{8} = 130$$

04 답 987

1단계 a_n 을 확률변수 Z 로 나타내기

확률변수 X 가 정규분포 $N(0, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X}{2}$ 로 놓으면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= P\left(X \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) - P\left(X \geq \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= P\left(Z \leq (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\right) - P\left(Z \geq (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

2단계 $\sum_{n=1}^8 (-1)^n a_n + P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2^9}\right)$ 의 값 구하기

$$a_1 = P\left(Z \leq -\frac{1}{2^2}\right) - P\left(Z \geq \frac{1}{2^3}\right)$$

$$a_2 = P\left(Z \leq \frac{1}{2^3}\right) - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^4}\right)$$

$$a_3 = P\left(Z \leq -\frac{1}{2^4}\right) - P\left(Z \geq \frac{1}{2^5}\right)$$

$\vdots$

이므로

$$\sum_{n=1}^8 (-1)^n a_n$$

$$= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_8$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{2^2}\right) + P\left(Z \geq \frac{1}{2^3}\right) + P\left(Z \leq \frac{1}{2^3}\right) - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^4}\right)$$

$$-P\left(Z \leq -\frac{1}{2^4}\right) + P\left(Z \geq \frac{1}{2^5}\right) + \cdots + P\left(Z \leq \frac{1}{2^9}\right) - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{2^2}\right) + \left\{P\left(Z \geq \frac{1}{2^3}\right) + P\left(Z \leq \frac{1}{2^3}\right)\right\}$$

$$- \left\{P\left(Z \geq -\frac{1}{2^4}\right) + P\left(Z \leq -\frac{1}{2^4}\right)\right\}$$

$$+ \cdots + \left\{P\left(Z \geq \frac{1}{2^9}\right) + P\left(Z \leq \frac{1}{2^9}\right)\right\} - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{4}\right) + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{4}\right) + 1 - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^8 (-1)^n a_n + P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2^9}\right)$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{4}\right) + 1 - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) + 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) + 1 - \left\{P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)\right\}$$

$$+ P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P(Z \geq 0.25) + 1 - 0.5$$

$$= -\{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.25)\} + 0.5$$

$$= -(0.5 - 0.0987) + 0.5 = 0.0987$$

3단계 $10000p$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } p = 0.0987 \text{이므로 } 10000p = 987$$

05 답 ②

1단계 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형 파악하기

정규분포를 따르는 두 확률변수 X , Y 의 표준편차 σ_1 , σ_2 에 대하여

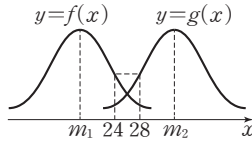
$\sigma_1 = \sigma_2$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 모양이 같고, 두

확률변수 X , Y 의 평균이 각각 m_1 , m_2 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 각각 직선 $x=m_1$, $x=m_2$ 에 대하여 대칭

이다.

또 $f(24)=g(28)$ 이고 (가)에서 $m_1 < 24$, $m_2 > 28$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



2단계 (가)를 만족시키는 식 세우기

$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 라 하면 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma^2)$, $N(m_2, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m_1}{\sigma}$, $Z_Y = \frac{Y-m_2}{\sigma}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 $P(m_1 \leq X \leq 24) = P(28 \leq Y \leq m_2)$ 이므로 (가)에서

$$P(m_1 \leq X \leq 24) = P(28 \leq Y \leq m_2) = 0.4772$$

$$P\left(\frac{m_1-m_1}{\sigma} \leq Z_X \leq \frac{24-m_1}{\sigma}\right) = 0.4772 \text{에서}$$

$$P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{24-m_1}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{24-m_1}{\sigma} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $P\left(\frac{28-m_2}{\sigma} \leq Z_Y \leq \frac{m_2-m_2}{\sigma}\right) = 0.4772$ 에서

$$P\left(\frac{28-m_2}{\sigma} \leq Z_Y \leq 0\right) = 0.4772$$

$$P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m_2-28}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{m_2-28}{\sigma} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\frac{24-m_1}{\sigma} = \frac{m_2-28}{\sigma}, \quad 24-m_1 = m_2-28$$

$$\therefore m_1+m_2=52 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

3단계 (나)를 만족시키는 식 세우기

(나)의 $P(Y \geq 36) = 1 - P(X \leq 24)$ 에서

$$P\left(Z_Y \geq \frac{36-m_2}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z_X \leq \frac{24-m_1}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Z_Y \geq \frac{36-m_2}{\sigma}\right) = P\left(Z_X \geq \frac{24-m_1}{\sigma}\right)$$

따라서 $\frac{36-m_2}{\sigma} = \frac{24-m_1}{\sigma}$ 이므로

$$36-m_2=24-m_1$$

$$\therefore m_1-m_2=-12 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

4단계 m_1, m_2, σ 의 값 구하기

③, ④을 연립하여 풀면

$$m_1=20, \quad m_2=32$$

$m_1=20$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{24-20}{\sigma}=2, \quad \frac{4}{\sigma}=2$$

$$\therefore \sigma=2$$

5단계 $P(18 \leq X \leq 21)$ 의 값 구하기

$$\therefore P(18 \leq X \leq 21) = P\left(\frac{18-20}{2} \leq Z_X \leq \frac{21-20}{2}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z_X \leq 0.5)$$

$$= P(-1 \leq Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq 0.5)$$

$$= P(0 \leq Z_X \leq 1) + P(0 \leq Z_X \leq 0.5)$$

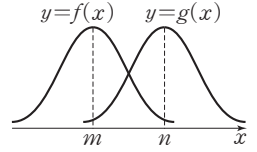
$$= 0.3413 + 0.1915$$

$$= 0.5328$$

06 답 ③

1단계 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형 파악하기

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 3으로 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 모양이 같고 각각 직선 $x=m, x=n$ 에 대하여 대칭이다. 이때 $m < n$ 이므로 두 함수



$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

2단계 $h(t)$ 구하기

$\{f(x)-f(t)\}\{g(x)-f(t)\}=0$ 에서

$$f(x)=f(t) \text{ 또는 } g(x)=f(t)$$

따라서 $h(t)$ 는 직선 $y=f(t)$ 가 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수이다.

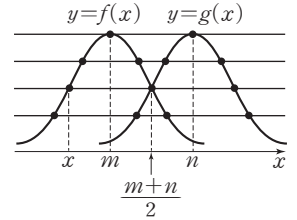
$$x + \frac{m+n}{2} = 2m \text{에서}$$

$$2x + m + n = 4m$$

$$2x = 3m - n$$

$$\therefore x = \frac{3m-n}{2}$$

$$\therefore h(t) = \begin{cases} 2 & (t=m) \\ 3 & \left(t=\frac{3m-n}{2} \text{ 또는 } t=\frac{m+n}{2}\right) \\ 4 & \left(t \neq \frac{3m-n}{2}, t \neq \frac{m+n}{2}\right) \end{cases}$$



3단계 m, n 의 값 구하기

이때 $h(10) < h(13) < h(16)$ 이므로

$$h(10)=2, \quad h(13)=3, \quad h(16)=4$$

따라서 $m=10, \frac{m+n}{2}=13$ 이므로

$$n=16$$

4단계 $P(X \geq 4) + P(Y \leq 13)$ 의 값 구하기

즉, 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(10, 3^2), N(16, 3^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-10}{3}, Z_Y = \frac{Y-16}{3}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \geq 4) + P(Y \leq 13)$$

$$= P\left(Z_X \geq \frac{4-10}{3}\right) + P\left(Z_Y \leq \frac{13-16}{3}\right)$$

$$= P(Z_X \geq -2) + P(Z_Y \leq -1)$$

$$= P(Z_X \leq 2) + P(Z_Y \geq 1)$$

$$= P(Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq 2) + P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.4772 + 0.5 - 0.3413$$

$$= 1.1359$$

07 답 ①

1단계 모든 경우의 수 구하기

두 주머니 A, B에서 각각 1개의 공을 2번 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_5P_2 \times {}_4P_2 = 20 \times 12 = 240$$

2단계 사건 A가 일어날 확률 구하기

두 주머니 A, B에서 첫 번째 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 각각 a, b 라 하고, 두 번째 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 각각 c, d 라 하자.

(i) $a+b=c+d=2$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1)$ 이고, 이때 순서쌍 (c, d) 는 존재하지 않음

따라서 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 0

step ① 핵심 문제

| 84~85쪽

01 $\frac{13}{64}$	02 11	03 ④	04 ⑤	05 0.1587
06 64	07 106	08 ③	09 25	10 ②
12 81				

01 답 $\frac{13}{64}$

확률의 총합은 1이므로

$$a+b+b=1 \quad \therefore a=1-2b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

 $\bar{X}=2$ 인 경우는 $\frac{X_1 + X_2}{2}=2$, 즉 $X_1 + X_2=4$ 인 경우이므로 순서쌍 (X_1, X_2) 는 (1, 3), (3, 1)

$$\therefore P(\bar{X}=2) = ab + ba = 2ab$$

$$\text{즉, } 2ab = \frac{3}{16} \text{이므로 } ab = \frac{3}{32}$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } (1-2b) \times b = \frac{3}{32}$$

$$64b^2 - 32b + 3 = 0, (8b-1)(8b-3) = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{8} \text{ 또는 } b = \frac{3}{8}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = \frac{1}{8} \text{일 때 } a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{8} \text{일 때 } a = \frac{1}{4}$$

$$\text{그런데 } a > b \text{이므로 } a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

이때 $\bar{X}=3$ 인 경우는 $\frac{X_1 + X_2}{2}=3$, 즉 $X_1 + X_2=6$ 인 경우이므로 순서쌍 (X_1, X_2) 는 (1, 5), (3, 3), (5, 1)

$$\therefore P(\bar{X}=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{64}$$

02 답 11

$$E(X) = 5 \text{이므로 } E(\bar{X}) = E(X) = 5$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 58 - 5^2 = 33$$

이때 표본의 크기가 n 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{33}{n}$$

$$\therefore E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = \frac{33}{n} + 5^2 = \frac{33}{n} + 25$$

$$\text{즉, } \frac{33}{n} + 25 \geq 28 \text{이므로}$$

$$\frac{33}{n} \geq 3 \quad \therefore n \leq 11$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 11이다.(ii) $a+b+c+d=3$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (1, 2), (2, 1)의 2개이고, 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수는 첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 같을 수 없으므로, 즉 각각의 경우에 대하여 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $2-1=1$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$2 \times 1 = 2$$

(iii) $a+b+c+d=4$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개이고, 각각의 경우에 대하여 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $3-1=2$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

(iv) $a+b+c+d=5$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4개이고, 각각의 경우에 대하여 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $4-1=3$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

(v) $a+b+c+d=6$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 4개이고, 각각의 경우에 대하여 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $4-1=3$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

(vi) $a+b+c+d=7$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (3, 4), (4, 3), (5, 2)의 3개이고, 각각의 경우에 대하여 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $3-1=2$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

(vii) $a+b+c+d=8$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (4, 4), (5, 3)의 2개이고, 각각의 경우에 대하여 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $2-1=1$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$2 \times 1 = 2$$

(viii) $a+b+c+d=9$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 (5, 4)이고, 이때 순서쌍 (c, d) 는 존재하지 않으므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 0

(i)~(viii)에서 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $(2+6+12) \times 2 = 40$ 이므로 사건 A 가 일어날 확률은 $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$ 이다.

3단계 확률변수가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기

720번의 시행 중 사건 A 가 일어나는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(720, \frac{1}{6})$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120, V(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따른다.4단계 사건 A 가 110번 이하 또는 140번 이상 일어날 확률 구하기

$$\text{즉, } Z = \frac{X-120}{10} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

따르므로 사건 A 가 110번 이하 또는 140번 이상 일어날 확률은

$$P(X \leq 110) + P(X \geq 140)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{110-120}{10}\right) + P\left(Z \geq \frac{140-120}{10}\right)$$

$$= P(Z \leq -1) + P(Z \geq 2) = P(Z \geq 1) + P(Z \geq 2)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) + P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.341 + 0.5 - 0.477 = 0.182$$

03 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{5}{6} \quad \dots\dots ㉠$$

$$E(X^2) = \frac{16}{3} \text{에서}$$

$$0^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times a + 4^2 \times b = \frac{16}{3}$$

$$\therefore 4a + 16b = \frac{16}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{6}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}$$

이때 표본의 크기가 20이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{20} = \frac{1}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{15}$$

04 답 ⑤

모집단이 정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(70, \frac{10^2}{25})$, 즉 $N(70, 2^2)$ 을 따르고 크기가 100인

표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N(70, \frac{10^2}{100})$, 즉 $N(70, 1^2)$ 을 따른다.

$$\neg. E(\bar{X}) = E(\bar{Y}) = 70$$

$$\neg. \sigma(\bar{X}) = 2, \sigma(\bar{Y}) = 1 \text{이므로 } \sigma(\bar{X}) > \sigma(\bar{Y})$$

$$\text{ㄷ. } Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 70}{2}, Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - 70}{1} \text{으로 놓으면 두 확률변수 } Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}} \text{는 모}$$

두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \leq a) = P(\bar{Y} \leq b)$ 에서

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{a-70}{2}\right) = P(Z_{\bar{Y}} \leq b-70)$$

$$\text{따라서 } \frac{a-70}{2} = b-70 \text{이므로}$$

$$a-70 = 2b-140 \quad \therefore 2b-a=70$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \text{ㄷ}$ 이다.

05 답 0.1587

모집단이 정규분포 $N(10, 2^2)$ 을 따르므로 임의추출한 25대의 자동차의 세차 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$$N\left(10, \frac{2^2}{25}\right), \text{ 즉 } N\left(10, \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) \text{을 따른다.}$$

$$\text{이때 } Z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{2}{5}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

따르므로 구하는 확률은

$$P(25\bar{X} \leq 240) = P\left(\bar{X} \leq \frac{48}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{\frac{48}{5} - 10}{\frac{2}{5}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

06 답 64

모집단이 정규분포 $N(50, 4^2)$ 을 따르므로 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{4^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(50, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$\text{이때 } Z = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

$$\text{따르므로 } P(\bar{X} \geq 49) = 0.9772 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{49-50}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9772$$

$$P\left(Z \geq -\frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.9772$$

$$P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.9772$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.9772$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.4772$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772 \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 2, \sqrt{n} = 8$$

$$\therefore n = 64$$

07 답 106

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(|X-m| \leq 12) = 0.9544 \text{에서}$$

$$P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$P\left(|Z| \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$P\left(-\frac{12}{\sigma} \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4772 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772 \text{이므로}$$

$$\frac{12}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 6 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$ 을 따른다.

$$\dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

$$\text{이때 } Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - m}{2} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z_{\bar{X}} \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

$$\text{따르므로 } P(X \leq 112) = P(\bar{X} \geq 96) \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{112-m}{6}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{96-m}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } \frac{112-m}{6} = -\frac{96-m}{2} \text{이므로}$$

$$112-m = 3m-288$$

$$4m = 400$$

$$\therefore m = 100 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore m + \sigma = 100 + 6 = 106 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

08 답 ③

확률변수 X 가 따르는 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$ 이라 하면

$$P(X \geq 3.4) = \frac{1}{2} \text{에서 } m = 3.4$$

따라서 확률변수 X 는 정규분포 $N(3.4, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-3.4}{\sigma}$ 로

놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 3.9) + P(Z \leq -1) = 1 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right) + P(Z \leq -1) = 1$$

$$P\left(Z \leq \frac{0.5}{\sigma}\right) + P(Z \geq 1) = 1$$

$$\text{따라서 } \frac{0.5}{\sigma} = 1 \text{이므로 } \sigma = 0.5$$

즉, 확률변수 X 는 정규분포 $N(3.4, 0.5^2)$ 을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(3.4, \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $N(3.4, 0.1^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-3.4}{0.1}$ 로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 3.55) &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3.55-3.4}{0.1}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 1.5) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

09 답 25

표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $63.22 \leq m \leq 73.54$ 와 같으므로

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 63.22 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 73.54 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 10.32$$

$$\sqrt{n} = 5 \quad \therefore n = 25$$

10 답 ②

모표준편차가 5, 표본의 크기가 n 이고 $P(0 \leq Z \leq 1.6) = 0.445$ 에서 $P(|Z| \leq 1.6) = 0.89$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 89%의 신뢰구간은

$$\bar{X} - 1.6 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.6 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{8}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{X} \leq \frac{8}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |\bar{X} - m| \leq \frac{8}{\sqrt{n}}$$

이때 $|\bar{X} - m| < 1$ 이 성립하려면 $\frac{8}{\sqrt{n}} < 1$ 이어야 하므로

$$\sqrt{n} > 8 \quad \therefore n > 64$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 65이다.

11 답 10

표본평균을 $\bar{x}$ 분이라 하면 모표준편차가 σ 분, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore \bar{x} - 0.245\sigma \leq m \leq \bar{x} + 0.245\sigma$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x} - 0.245\sigma, \quad b = \bar{x} + 0.245\sigma$$

이때 $b - a = 4.9$ 이므로

$$\bar{x} + 0.245\sigma - (\bar{x} - 0.245\sigma) = 4.9$$

$$0.49\sigma = 4.9 \quad \therefore \sigma = 10$$

다른 풀이

모표준편차가 σ 분, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{64}} = 0.49\sigma$$

$$\text{즉, } b - a = 0.49\sigma \text{이므로 } 0.49\sigma = 4.9 \quad \therefore \sigma = 10$$

12 답 81

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} (k > 0)$ 라 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정할 신뢰구간의 길이가 18이므로

$$2 \times k \times \frac{10}{\sqrt{9}} = 18 \quad \therefore k = 2.7$$

따라서 신뢰구간의 길이가 6이 되도록 하는 표본의 크기를 n 이라 하면

$$2 \times 2.7 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 6, \quad \sqrt{n} = 9 \quad \therefore n = 81$$

step 2 고난도 문제

| 86~90쪽

01 $\frac{3}{7}$	02 26	03 $\frac{32}{3}$	04 $\frac{50}{9}$	05 ①	06 24
07 ④	08 ①	09 606	10 ⑤	11 530	12 ③
13 16	14 0.07	15 ②	16 ③	17 ②	18 ②
19 ④	20 ⑤	21 356	22 64	23 ③	

01 답 $\frac{3}{7}$

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$\bar{X} < 2 \text{에서 } \frac{X_1 + X_2}{2} < 2 \quad \therefore X_1 + X_2 < 4$$

따라서 순서쌍 (X_1, X_2) 는 $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ 이고, 이 중에서 $\bar{X}$ 가 자연수인 경우는 $(1, 1)$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

02 답 26

주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하면 $\bar{X}$ 는 임의추출한 크기가 2인 표본의 표본평균이다.

$\bar{X}=1$ 인 경우는 2번의 시행에서 모두 1의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(\bar{X}=1)=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}\text{이므로}$$

$$(n+1)^2=49, n+1=7 (\because n>0)$$

$$\therefore n=6$$

따라서 주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 6개가 들어 있으므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

$$E(X)=1\times\frac{1}{7}+3\times\frac{6}{7}=\frac{19}{7}$$

$$\therefore E(\bar{X})=E(X)=\frac{19}{7}$$

따라서 $p=7, q=19$ 이므로

$$p+q=26$$

03 답 $\frac{32}{3}$

주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하면 $\bar{X}$ 는 임의추출한 크기가 3인 표본의 표본평균이다.

$\bar{X}=1$ 인 경우는 3번의 시행에서 모두 1의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(\bar{X}=1)=P(X=1)\times P(X=1)\times P(X=1)$$

$$\text{즉, } \{P(X=1)\}^3=\frac{1}{8}\text{이므로 } P(X=1)=\frac{1}{2}$$

$\bar{X}=6$ 인 경우는 3번의 시행에서 모두 6의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(\bar{X}=6)=P(X=6)\times P(X=6)\times P(X=6)$$

$$\text{즉, } \{P(X=6)\}^3=\frac{1}{27}\text{이므로 } P(X=6)=\frac{1}{3}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} P(X=3) &= 1 - \{P(X=1) + P(X=6)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3}=3$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{3}=14$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=14-3^2=5$$

$$\text{따라서 } E(\bar{X})=E(X)=3, V(\bar{X})=\frac{V(X)}{3}=\frac{5}{3}\text{이므로}$$

$$E(\bar{X}^2)=V(\bar{X})+\{E(\bar{X})\}^2=\frac{5}{3}+3^2=\frac{32}{3}$$

04 답 $\frac{50}{9}$

60장의 카드 중에서 1장을 임의추출할 때, 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하자.

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}=6$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

따라서 이 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면

$$V(\bar{X})=\frac{V(X)}{10}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{18}$$

이때 $Y=10\bar{X}$ 이므로

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(10\bar{X}) = 10^2 V(\bar{X}) \\ &= 100 \times \frac{1}{18} = \frac{50}{9} \end{aligned}$$

05 답 ①

임의로 꺼낸 4장의 카드에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수를 확률변수 X 라 하면 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 4, 5, 6, 7이다.

7장의 카드 중에서 4장을 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_7C_4={}_7C_3=35$$

(i) $X=4$ 일 때,

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=4)=\frac{1}{35}$$

(ii) $X=5$ 일 때,

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 카드 중에서 3장을 꺼내고 나머지는 5가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=5)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_4}=\frac{{}_4C_1}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$$

(iii) $X=6$ 일 때,

1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 카드 중에서 3장을 꺼내고 나머지는 6이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=6)=\frac{{}_5C_3}{{}_7C_4}=\frac{{}_5C_2}{{}_7C_4}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

(iv) $X=7$ 일 때,

1, 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 카드 중에서 3장을 꺼내고 나머지는 7이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=7)=\frac{{}_6C_3}{{}_7C_4}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{35} + 5 \times \frac{4}{35} + 6 \times \frac{2}{7} + 7 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$$

$$E(X^2) = 4^2 \times \frac{1}{35} + 5^2 \times \frac{4}{35} + 6^2 \times \frac{2}{7} + 7^2 \times \frac{4}{5} = \frac{208}{5}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{208}{5} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

따라서 이 모집단에서 크기가 32인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\bar{X}$ 의 분산은

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{32} = \frac{1}{32} \times \frac{16}{25} = \frac{1}{50}$$

$$\therefore V(5\bar{X} + 3) = 5^2 V(\bar{X}) = 25 \times \frac{1}{50} = \frac{1}{2}$$

06 답 24

모집단이 정규분포 $N(10, 5^2)$ 을 따르므로 크기가 16인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(10, \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{5}{4}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(\bar{X} \leq a) = P(Z \geq b)$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{a-10}{\frac{5}{4}}\right) = P(Z \leq -b)$$

따라서 $\frac{a-10}{\frac{5}{4}} = -b$ 이므로

$$b = \frac{4(10-a)}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 b 는 정수이므로 $10-a$ 는 5의 배수이어야 하고 $|a| \leq 5$ 이므로 a 의 값은 $-5, 0, 5$ 이다.

따라서 $\textcircled{7}$ 에서 b 의 값은 12, 8, 4이므로 모든 b 의 값의 합은 $12+8+4=24$

07 답 ④

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80, \quad V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64$$

따라서 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따르므로 크기가 n_1 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(80, \frac{8^2}{n_1}\right)$, 즉

$N\left(80, \left(\frac{8}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$ 을 따르고 크기가 n_2 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포

$N\left(80, \frac{8^2}{n_2}\right)$, 즉 $N\left(80, \left(\frac{8}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 80}{\frac{8}{\sqrt{n_1}}}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - 80}{\frac{8}{\sqrt{n_2}}}$ 으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}}$ 는

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

ㄱ. n_1, n_2 의 값에 상관없이 항상 $E(\bar{X}) = E(\bar{Y})$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } P(\bar{X} \leq 70) &= P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{70-80}{\frac{8}{\sqrt{n_1}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{-5\sqrt{n_1}}{4}\right) \\ &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{5\sqrt{n_1}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$P(\bar{Y} \geq 100) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{100-80}{\frac{8}{\sqrt{n_2}}}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{5\sqrt{n_2}}{2}\right)$$

이때 $P(\bar{X} \leq 70) = P(\bar{Y} \geq 100)$ 에서

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{5\sqrt{n_1}}{4}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{5\sqrt{n_2}}{2}\right)$$

따라서 $\frac{5\sqrt{n_1}}{4} = \frac{5\sqrt{n_2}}{2}$ 이므로

$$\sqrt{n_1} = 2\sqrt{n_2} \quad \therefore n_1 = 4n_2$$

$$\therefore P(\bar{X} \geq a) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{a-80}{\frac{8}{\sqrt{n_1}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{(a-80)\sqrt{n_1}}{8}\right)$$

$$P(\bar{Y} \geq a) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{a-80}{\frac{8}{\sqrt{n_2}}}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{(a-80)\sqrt{n_2}}{8}\right)$$

$a > 80$ 에서 $a-80 > 0$ 이고, $n_1 < n_2$ 이므로

$$\frac{(a-80)\sqrt{n_1}}{8} < \frac{(a-80)\sqrt{n_2}}{8}$$

$$\therefore P(\bar{X} \geq a) > P(\bar{Y} \geq a)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ①

모집단이 정규분포 $N(16, 2^2)$ 을 따르므로 임의추출한 학생 36명의 100m 달리기 기록의 평균을 $\bar{X}$ 초라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(16, \frac{2^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(16, \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 16}{\frac{1}{3}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - 16| \geq 0.5) &= P\left(\left|\frac{\bar{X} - 16}{\frac{1}{3}}\right| \geq \frac{0.5}{\frac{1}{3}}\right) \\ &= P(|Z| \geq 1.5) \\ &= P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 1.5) + P(Z \geq 1.5) \\ &= 2P(Z \geq 1.5) \\ &= 2\{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)\} \\ &= 2 \times (0.5 - 0.4332) = 0.1336 \end{aligned}$$

09 답 606

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(2m-a \leq X \leq a) = 0.9544$ 에서

$$P\left(\frac{2m-a-m}{8} \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.9544$$

$$P\left(-\frac{a-m}{8} \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.9544$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.9544$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{a-m}{8} = 2 \quad \therefore a = 16 + m \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \text{배점 50\%}$$

크기가 16인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$

을 따르므로 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - m}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}
\therefore P(|\bar{X}-a+12|\leq 1) &= P(-1\leq \bar{X}-a+12\leq 1) \\
&= P(a-13\leq \bar{X}\leq a-11) \\
&= P(m+3\leq \bar{X}\leq m+5) \quad (\because \textcircled{1}) \\
&= P\left(\frac{m+3-m}{2}\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{m+5-m}{2}\right) \\
&= P(1.5\leq Z_{\bar{X}}\leq 2.5) \\
&= P(0\leq Z_{\bar{X}}\leq 2.5)-P(0\leq Z_{\bar{X}}\leq 1.5) \\
&= 0.4938-0.4332=0.0606 \quad \dots\dots\dots \text{배점 } 40\% \\
\therefore 10000\times P(|\bar{X}-a+12|\leq 1) &= 10000\times 0.0606=606 \quad \dots\dots \text{배점 } 10\%
\end{aligned}$$

10 답 ⑤

확률변수 X 의 표준편차를 σ 라 하면 (4)에서 확률변수 Y 의 표준편차는 $\frac{3}{2}\sigma$ 이므로 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(220, \sigma^2)$,

$N\left(240, \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(220, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉

$N\left(220, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고 크기가 $9n$ 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포

$N\left(240, \left(\frac{\frac{3}{2}\sigma}{\sqrt{9n}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(240, \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르므로 $Z_{\bar{X}}=\frac{\bar{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$,

$Z_{\bar{Y}}=\frac{\bar{Y}-240}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}}$ 는 모두 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X}\leq 215)=0.1587 \text{에서 } P\left(Z_{\bar{X}}\leq \frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$$

$$P\left(Z_{\bar{X}}\leq -\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.1587, P\left(Z_{\bar{X}}\geq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$P(Z_{\bar{X}}\geq 0)-P\left(0\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$0.5-P\left(0\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$\therefore P\left(0\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$ 이므로

$$\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}=1 \quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$$

$$\therefore \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(\bar{Y}\geq 235) &= P\left(Z_{\bar{Y}}\geq \frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)=P(Z_{\bar{Y}}\geq -2) \\
&= P(Z_{\bar{Y}}\leq 2)=P(Z_{\bar{Y}}\leq 0)+P(0\leq Z_{\bar{Y}}\leq 2) \\
&= 0.5+0.4772=0.9772
\end{aligned}$$

11 답 530

모집단이 정규분포 $N(120, \sigma^2)$ 을 따르므로 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(120, \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉

$N\left(120, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 을 따르고, $Z_{\bar{X}}=\frac{\bar{X}-120}{\frac{\sigma}{5}}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

표본평균이 116 이상 124 이하일 확률이 0.9544이므로

$$P(116\leq \bar{X}\leq 124)=0.9544$$

$$P\left(\frac{116-120}{\frac{\sigma}{5}}\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{124-120}{\frac{\sigma}{5}}\right)=0.9544$$

$$P\left(-\frac{20}{\sigma}\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{20}{\sigma}\right)=0.9544$$

$$2P\left(0\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{20}{\sigma}\right)=0.9544$$

$$\therefore P\left(0\leq Z_{\bar{X}}\leq \frac{20}{\sigma}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$ 이므로

$$\frac{20}{\sigma}=2 \quad \therefore \sigma=10$$

따라서 평균이 120, 표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본의 표본평균을 $\bar{Y}$ 라 하면 $\bar{Y}$ 는 정규분포

$N\left(120, \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(120, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_{\bar{Y}}=\frac{\bar{Y}-120}{5}$ 으로 놓으면

확률변수 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

표본의 총합이 a 이상일 확률이 0.0228이므로

$$P(4\bar{Y}\geq a)=0.0228$$

$$P\left(\bar{Y}\geq \frac{a}{4}\right)=0.0228$$

$$P\left(Z_{\bar{Y}}\geq \frac{\frac{a}{4}-120}{5}\right)=0.0228$$

$$P\left(Z_{\bar{Y}}\geq \frac{a-480}{20}\right)=0.0228$$

$$P(Z_{\bar{Y}}\geq 0)-P\left(0\leq Z_{\bar{Y}}\leq \frac{a-480}{20}\right)=0.0228$$

$$0.5-P\left(0\leq Z_{\bar{Y}}\leq \frac{a-480}{20}\right)=0.0228$$

$$\therefore P\left(0\leq Z_{\bar{Y}}\leq \frac{a-480}{20}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$ 이므로

$$\frac{a-480}{20}=2$$

$$a-480=40$$

$$\therefore a=520$$

$$\therefore a+\sigma=520+10=530$$

12 답 ③

모집단이 정규분포 $N(50, a^2)$ 을 따르므로 임의추출한 가전제품 9개의

무게의 평균을 $\bar{X}$ kg이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{a^2}{9}\right)$, 즉

$N\left(50, \left(\frac{a}{3}\right)^2\right)$ 을 따르고, $Z=\frac{\bar{X}-50}{\frac{a}{3}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정

규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

모평균과 표본평균의 차가 a^2 kg 이하일 확률이 92 % 이상이므로

$$P(|\bar{X}-50|\leq a^2)\geq 0.92$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-50}{\frac{a}{3}}\right|\leq \frac{a^2}{\frac{a}{3}}\right)\geq 0.92$$

$$P(|Z|\leq 3a)\geq 0.92$$

$$P(-3a\leq Z\leq 3a)\geq 0.92$$

$$2P(0\leq Z\leq 3a)\geq 0.92$$

$$\therefore P(0\leq Z\leq 3a)\geq 0.46 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $P(Z \leq 1.8) = 0.96$ 에서
 $P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.96$
 $0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.96$
 $\therefore P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.46$

즉, ①을 만족시키려면 $3a \geq 1.8$ 이어야 하므로 $a \geq 0.6$
따라서 구하는 a 의 최솟값은 0.6이다.

13 답 16

A 제품에 대하여 모집단이 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{m}{8}\right)^2\right)$ 을 따르므로 크기가

25인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\left(\frac{m}{8}\right)^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{m}{40}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - m}{\frac{m}{40}}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} \geq \frac{19}{20}m\right) &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{\frac{19}{20}m - m}{\frac{m}{40}}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq -2) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 2) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 0) + P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) \end{aligned}$$

또 B 제품에 대하여 모집단이 정규분포 $N\left(\frac{9}{10}m, \left(\frac{m}{10}\right)^2\right)$ 을 따르므로

크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(\frac{9}{10}m, \frac{\left(\frac{m}{10}\right)^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(\frac{9}{10}m, \left(\frac{m}{10\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - \frac{9}{10}m}{\frac{m}{10\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P\left(\bar{Y} \geq \frac{19}{20}m\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\frac{19}{20}m - \frac{9}{10}m}{\frac{m}{10\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{19}{20}m\right) + P\left(\bar{Y} \geq \frac{19}{20}m\right) = 1 \text{에서}$$

$$0.5 + P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) + P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 1$$

$$P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) + P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.5$$

따라서 $\frac{\sqrt{n}}{2} = 2$ 이므로

$$\sqrt{n} = 4 \quad \therefore n = 16$$

14 답 0.07

모집단이 정규분포 $N(120, 8^2)$ 을 따르므로 비누 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(120, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(120, 4^2)$ 을 따른다. 배점 20%

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 120}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 생산한 비누 세트가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} \leq 459.52) &= P(\bar{X} \leq 114.88) \\ &= P\left(Z \leq \frac{114.88 - 120}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1.28) = P(Z \geq 1.28) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.28) \\ &= 0.5 - 0.4 = 0.1 \quad \dots \dots \dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

따라서 비누 400세트 중에서 불량품인 세트의 수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항분포 $B(400, 0.1)$ 을 따르고

$$E(Y) = 400 \times 0.1 = 40, \quad V(Y) = 400 \times 0.1 \times 0.9 = 36$$

이므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

..... 배점 20%

이때 $Z_Y = \frac{Y - 40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \leq 31) &= P\left(Z_Y \leq \frac{31 - 40}{6}\right) = P(Z_Y \leq -1.5) \\ &= P(Z_Y \geq 1.5) = P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 = 0.07 \quad \dots \dots \dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

15 답 ②

7시 45분에 집에서 출발하여 8시 10분까지 학교에 도착하려면 집에서 학교까지 가는 데 걸리는 시간이 25분 이하이어야 한다.

이때 집에서 A 정류장까지 걸어가는 데 걸리는 시간과 E 정류장에서 학교까지 걸어가는 데 걸리는 시간은 각각 5분, 7분으로 항상 일정하므로 버스를 타고 A 정류장에서 E 정류장까지 이동하는 데 걸리는 시간이 13분 이하이어야 한다.

각 정류장 사이를 버스로 이동하는 데 걸리는 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로 정류장 사이를 4번 이동하는 데 걸리는 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분이라 하면 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포

$$N\left(3, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}\right), \text{ 즉 } N\left(3, \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \text{을 따른다.}$$

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 3}{\frac{1}{4}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} > 13) &= P\left(\bar{X} > \frac{13}{4}\right) = P\left(Z > \frac{\frac{13}{4} - 3}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= P(Z > 1) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

16 답 ③

표본평균이 $\bar{X}$, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} \bar{X} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \\ -\frac{3.92}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{X} \leq \frac{3.92}{\sqrt{n}}, \quad |m - \bar{X}| \leq \frac{3.92}{\sqrt{n}} \quad \therefore f(n) = \frac{3.92}{\sqrt{n}} \\ \therefore f(16) = \frac{3.92}{\sqrt{16}} = 0.98 < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(4n) = \frac{3.92}{\sqrt{4n}} = \frac{3.92}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}f(n)$$

$$\therefore 0 < a < b \text{에서 } \frac{a}{b} < 1 \text{이므로}$$

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \frac{\frac{3.92}{\sqrt{b}}}{\frac{3.92}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} < 1 \quad \therefore f(a) > f(b)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 답 ②

모표준편차가 5, 표본의 크기가 25이므로 표본평균이 $\bar{x}_1$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - 1.96 \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96$$

이 신뢰구간이 $80 - a \leq m \leq 80 + a$ 와 같으므로

$$\bar{x}_1 = 80, a = 1.96$$

또 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n 이므로 표본평균이 $\bar{x}_2$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\text{이 신뢰구간이 } \frac{15}{16}\bar{x}_1 - \frac{5}{7}a \leq m \leq \frac{15}{16}\bar{x}_1 + \frac{5}{7}a \text{와 같으므로}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{15}{16}\bar{x}_1, 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5}{7}a$$

$$\text{이때 } \bar{x}_1 = 80 \text{이므로 } \bar{x}_2 = \frac{15}{16}\bar{x}_1 = \frac{15}{16} \times 80 = 75$$

$$a = 1.96 \text{이므로 } 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5}{7}a \text{에서}$$

$$1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5}{7} \times 1.96, \sqrt{n} = 7 \quad \therefore n = 49$$

$$\therefore n + \bar{x}_2 = 49 + 75 = 124$$

18 답 ②

모표준편차가 σ , 표본의 크기가 100이므로 표본평균이 $\bar{x}_1$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - 0.196\sigma \leq m \leq \bar{x}_1 + 0.196\sigma$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x}_1 - 0.196\sigma, b = \bar{x}_1 + 0.196\sigma$$

또 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 400이므로 표본평균이 $\bar{x}_2$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore \bar{x}_2 - 0.129\sigma \leq m \leq \bar{x}_2 + 0.129\sigma$$

이 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 와 같으므로

$$c = \bar{x}_2 - 0.129\sigma$$

$$a = c \text{에서 } \bar{x}_1 - 0.196\sigma = \bar{x}_2 - 0.129\sigma \text{이므로}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.067\sigma$$

$$\text{이때 } \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.34 \text{이므로}$$

$$0.067\sigma = 1.34 \quad \therefore \sigma = 20$$

$$\therefore b - a = \bar{x}_1 + 0.196\sigma - (\bar{x}_1 - 0.196\sigma) = 0.392\sigma \\ = 0.392 \times 20 = 7.84$$

19 답 ④

확률변수 X 가 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-30}{2}$ 으로 놓으

면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(24 \leq X \leq 36) = \frac{a}{100} \text{에서}$$

$$P\left(\frac{24-30}{2} \leq Z \leq \frac{36-30}{2}\right) = \frac{a}{100} \quad \therefore P(-3 \leq Z \leq 3) = \frac{a}{100}$$

이때 표본평균이 80, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m 을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간은

$$80 - 3 \times \frac{12}{\sqrt{81}} \leq m \leq 80 + 3 \times \frac{12}{\sqrt{81}} \quad \therefore 76 \leq m \leq 84$$

따라서 추정한 신뢰구간에 속하는 자연수는 76, 77, 78, ..., 84의 9개이다.

20 답 ⑤

모표준편차가 25, 크기가 245인 표본의 표본평균을 $\bar{x}$ 라 할 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{25}{\sqrt{245}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{25}{\sqrt{245}}$$

$$\therefore \bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}}$$

이 신뢰구간이 $\alpha \leq m \leq \beta$ 와 같으므로

$$\alpha = \bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}}, \beta = \bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 α, β 가 이차방정식 $5x^2 - 70x + 2k = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{-70}{5} = 14, \alpha\beta = \frac{2k}{5}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \alpha + \beta = \bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}} + \bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}} = 2\bar{x}$$

$$\alpha + \beta = 14 \text{에서 } 2\bar{x} = 14 \quad \therefore \bar{x} = 7$$

또 $\textcircled{1}$ 에서

$$\alpha\beta = \left(\bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}}\right) = \bar{x}^2 - \frac{49}{5} = 7^2 - \frac{49}{5} = \frac{196}{5}$$

$$\alpha\beta = \frac{2k}{5} \text{에서 } \frac{2k}{5} = \frac{196}{5}, 2k = 196 \quad \therefore k = 98$$

21 답 356

두 공장 A, B에서 생산하는 제품의 무게의 평균을 각각 m_1g, m_2g 이라 하자.

A 공장에서 생산하는 제품에 대하여 표본평균이 120, 표준편차가 3, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m_1 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$120 - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{36}} \leq m_1 \leq 120 + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore 118.71 \leq m_1 \leq 121.29$$

또 B 공장에서 생산하는 제품에 대하여 표본평균이 a , 표준편차가 1.5, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m_2 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$a - 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{36}} \leq m_2 \leq a + 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore a - 0.49 \leq m_2 \leq a + 0.49$$

따라서 두 신뢰구간의 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 이라면

$$118.71 \leq a + 0.49 \text{이고 } a - 0.49 \leq 121.29 \text{이어야 한다.}$$

$$\therefore 118.22 \leq a \leq 121.78$$

따라서 $M = 121.78, m = 118.22$ 이므로

$$100(M - m) = 100 \times 3.56 = 356$$

22 답 64

모표준편차가 1, 표본의 크기가 81이고, $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.46$ 에서 $P(|Z| \leq 1.8) = 0.92$ 이므로 모평균 m 을 신뢰도 92%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$l = 2 \times 1.8 \times \frac{1}{\sqrt{81}} = 0.4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ ($k > 0$)라 하면 모평균 m 을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정

한 신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{2}$ 이므로

$$\frac{l}{2} = 2 \times k \times \frac{1}{\sqrt{81}}, 0.2 = \frac{2}{9}k \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore k = 0.9$$

따라서 $P(|Z| \leq 0.9) = \frac{\alpha}{100}$ 이므로

$$2P(0 \leq Z \leq 0.9) = \frac{\alpha}{100}, 2 \times 0.32 = \frac{\alpha}{100} \quad \therefore \alpha = 64$$

23 답 ③

ㄱ. $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha_1}{100}$ ($k > 0$)이라 하면 $l_1 = 2k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$ 이고,

$$P\left(\bar{X} - k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \leq m \leq \bar{X} + k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right) = \frac{\alpha_1}{100} \text{이다.}$$

이때 $k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{l_1}{2}$ 이므로

$$P\left(\bar{X} - \frac{l_1}{2} \leq m \leq \bar{X} + \frac{l_1}{2}\right) = \frac{\alpha_1}{100}$$

$$\therefore P\left(m - \frac{l_1}{2} \leq \bar{X} \leq m + \frac{l_1}{2}\right) = \frac{\alpha_1}{100}$$

ㄴ. $P(|Z| \leq k_1) = \frac{\alpha_1}{100}$ ($k_1 > 0$), $P(|Z| \leq k_2) = \frac{\alpha_2}{100}$ ($k_2 > 0$)라 하면

$$l_1 = 2k_1 \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}, l_2 = 2k_2 \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = 2k_2 \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$$

이때 $\alpha_1 < \alpha_2$ 이면 $k_1 < k_2$ 이므로 $l_1 < l_2$ 이다.

ㄷ. $\alpha_1 = \alpha_2$ 이므로 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha_1}{100} = \frac{\alpha_2}{100}$ ($k > 0$)라 하면

$$l_1 = 2k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}, l_2 = 2k \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = 2k \times \frac{2\sigma_1}{\sqrt{2n_1}} = 2\sqrt{2}k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$$

$$\therefore l_2 = \sqrt{2}l_1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

step 3 최고난도 문제

| 91쪽

01 23

02 ④

03 0.001

04 472500원

01 답 23

1단계 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y 라 하고, Y 의 확률분포 구하기
주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y 라 할 때, Y 의 확률분포를 다음과 같이 표로 나타내자.

Y	1	2	3	4	합계
$P(Y=y)$	a	b	c	d	1

$X=4$ 일 때는 확인한 4개의 수가 모두 1이어야 하므로

$$P(X=4) = a \times a \times a \times a = a^4$$

$$\textcircled{ㄱ} \text{에서 } a^4 = \frac{1}{81} \quad \therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because 0 \leq a \leq 1)$$

$X=16$ 일 때는 확인한 4개의 수가 모두 4이어야 하므로

$$P(X=16) = d \times d \times d \times d = d^4$$

$$\textcircled{ㄱ} \text{에서 } 16d^4 = \frac{1}{81} \quad \therefore d = \frac{1}{6} \quad (\because 0 \leq d \leq 1)$$

한편 확률의 총합은 1이므로

$$a + b + c + d = 1$$

$$\frac{1}{3} + b + c + \frac{1}{6} = 1$$

$$\therefore b + c = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

확인한 4개의 수의 평균을 $\bar{Y}$ 라 하면 $X = 4\bar{Y}$ 이므로

$$E(X) = E(4\bar{Y}) = 4E(\bar{Y}) = 4E(Y)$$

$$= 4\left(1 \times \frac{1}{3} + 2 \times b + 3 \times c + 4 \times \frac{1}{6}\right)$$

$$= 4(1 + 2b + 3c)$$

ㄴ의 $E(X) = 9$ 에서

$$4(1 + 2b + 3c) = 9$$

$$\therefore 2b + 3c = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}$$

2단계 $V(X)$ 의 값 구하기

$$E(Y) = \frac{1}{4}E(X) = \frac{9}{4}$$

$$E(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{4}$$

$$\therefore V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{25}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{19}{16}$$

$$\therefore V(X) = V(4\bar{Y}) = 4^2 V(\bar{Y})$$

$$= 4^2 \times \frac{V(Y)}{4} = 4V(Y)$$

$$= 4 \times \frac{19}{16} = \frac{19}{4}$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=4$, $q=19$ 이므로

$$p+q=23$$

02 답 ④

1단계 표본평균 $\bar{X}$ 의 값 구하기

4개의 공에 적혀 있는 숫자 1, 2, a , b 를 확률변수 X 라 하자.

2개의 공에 적혀 있는 수를 각각 X_1 , X_2 라 할 때, 표본평균 $\bar{X}$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$X_1 \backslash X_2$	1	2	a	b
1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{a+1}{2}$	$\frac{b+1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{a+2}{2}$	$\frac{b+2}{2}$
a	$\frac{a+1}{2}$	$\frac{a+2}{2}$	a	$\frac{a+b}{2}$
b	$\frac{b+1}{2}$	$\frac{b+2}{2}$	$\frac{a+b}{2}$	b

2단계 $\bar{X}$ 의 값 사이의 대소 관계 파악하기

이때 $2 < a < b$ 이므로 $\rightarrow 1. 2. a, b$ 가 서로 다른 자연수이므로 a, b 는 2보다 큰 자연수이다.

$$1 < \frac{3}{2} < 2 \leq \frac{a+1}{2} < \frac{a+2}{2} < a < \frac{a+b}{2} < b,$$

$$2 < \frac{a+2}{2} \leq \frac{b+1}{2} < \frac{b+2}{2} < \frac{a+b}{2} < b$$

3단계 $a+b$ 의 값이 최대일 때, a, b 의 값 구하기

$$\text{이때 } P(\bar{X} \leq 10) = \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \text{이고}$$

$$P(\bar{X}=1) = \frac{1}{16}, P\left(\bar{X}=\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{16}, P(\bar{X}=2) = \frac{1}{16},$$

$$P\left(\bar{X}=\frac{a+1}{2}\right) = \frac{2}{16}, P\left(\bar{X}=\frac{a+2}{2}\right) = \frac{2}{16}, P\left(\bar{X}=\frac{b+1}{2}\right) = \frac{2}{16},$$

$$P(\bar{X}=a) = \frac{1}{16}, P\left(\bar{X}=\frac{b+2}{2}\right) = \frac{2}{16}$$

에서

$$P(\bar{X}=1) + P\left(\bar{X}=\frac{3}{2}\right) + P(\bar{X}=2) + P\left(\bar{X}=\frac{a+1}{2}\right) + P\left(\bar{X}=\frac{a+2}{2}\right) + P\left(\bar{X}=\frac{b+1}{2}\right) = \frac{10}{16}$$

이므로

$$\frac{a+2}{2} \leq 10, \frac{b+1}{2} \leq 10, a > 10, \frac{b+2}{2} > 10$$

$$a \leq 18, b \leq 19, a > 10, b > 18$$

$$\therefore 10 < a \leq 18, 18 < b \leq 19$$

따라서 $a+b$ 의 값이 최대일 때는 $a=18, b=19$ 일 때이다.

4단계 $E(\bar{X})$ 의 값 구하기

$$\therefore E(\bar{X}) = E(X)$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 18 \times \frac{1}{4} + 19 \times \frac{1}{4} = 10$$

03 답 0.001

1단계 토마토 16개의 무게의 평균이 따르는 정규분포 구하기

모집단이 정규분포 $N(200, 20^2)$ 을 따르므로 토마토 16개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(200, \frac{20^2}{16}\right)$, 즉

$N(200, 5^2)$ 을 따른다.

2단계 남은 4개의 토마토의 무게의 합의 범위 구하기

$$\text{이때 } Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-200}{5} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z_{\bar{X}} \text{는 표준정규분포 } N(0, 1)$$

을 따른다.

우재가 토마토 12개를 수확한 후 잔 토마토 무게의 합이 2400g이므로 우재가 상금을 받기 위해 수확해야 하는 남은 4개의 토마토의 무게의 합을 k g이라 하면

$$P(16\bar{X} \geq k+2400) \leq \frac{67}{1000}$$

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{k}{16} + 150\right) \leq 0.067$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{\frac{k}{16} + 150 - 200}{5}\right) \leq 0.067$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{k}{80} - 10\right) \leq 0.067$$

$$P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{k}{80} - 10\right) \leq 0.067$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{k}{80} - 10\right) \leq 0.067$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{k}{80} - 10\right) \geq 0.433$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.433 \text{이므로}$$

$$\frac{k}{80} - 10 \geq 1.5 \quad \therefore k \geq 920$$

3단계 우재가 상금을 받을 확률 구하기

한편 우재가 추가로 수확해야 하는 토마토 4개의 무게의 평균을 $\bar{Y}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(200, \frac{20^2}{4}\right)$, 즉 $N(200, 10^2)$ 을 따르

므로 $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-200}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 우재가 상금을 받으려면 추가로 수확하는 토마토 4개의 무게의 합이 920g 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{Y} \geq 920) &= P(\bar{Y} \geq 230) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{230-200}{10}\right) \\ &= P(Z_{\bar{Y}} \geq 3) = P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.499 = 0.001 \end{aligned}$$

04 답 472500원

1단계 날개로 판매할 때, 판매 이익 구하기

공장에서 생산하는 캔들 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-150}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z

는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

캔들 1개가 불량품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 140) &= P\left(Z \leq \frac{140-150}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34 = 0.16 \end{aligned}$$

따라서 캔들 3000개 중 불량품으로 판매하지 못하는 캔들의 개수는 $3000 \times 0.16 = 480$ (개)이므로 캔들 3000개를 날개로 판매할 때, 판매 이익은

$$(3000 - 480) \times 2000 - 3000 \times 500 = 3540000 \text{(원)}$$

2단계 4개씩 한 세트 묶어 판매할 때, 판매 이익 구하기

한 세트를 구성하는 캔들 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(150, \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(150, 5^2)$ 을 따르므로

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-150}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

캔들 한 세트가 불량품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} \leq 560) &= P(\bar{X} \leq 140) = P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{140-150}{5}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq -2) = P(Z_{\bar{X}} \geq 2) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

캔들 3000개로 만들 수 있는 세트의 수는 $\frac{3000}{4} = 750$ 이므로 불량품으로 판매하지 못하는 세트의 수는

$$750 \times 0.02 = 15$$

이때 캔들 한 세트의 정가는 $2000 \times 4 - 500 = 7500$ (원)이므로 캔들 3000개를 4개씩 한 세트 묶어 판매할 때, 판매 이익은

$$(750 - 15) \times 7500 - 3000 \times 500 = 4012500 \text{(원)}$$

3단계 판매 이익의 차 구하기

따라서 캔들 3000개를 모두 날개로 판매할 때와 모두 세트로 묶어 판매할 때의 판매 이익의 차는

$$4012500 - 3540000 = 472500 \text{(원)}$$

01 ③	02 36	03 $\frac{32}{3}$	04 $\frac{29}{81}$	05 3750	06 ②
07 ④	08 0.3413	09 815	10 0.3721		
11 ①	12 5.6	13 ⑤			

01 답 ③

확률변수 X 의 확률분포에 대하여 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+c+c+b+a=1 \quad \therefore a+b+c=\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X)=1 \times a + 3 \times b + 5 \times c + 7 \times c + 9 \times b + 11 \times a$$

$$=12a+12b+12c$$

$$=12(a+b+c)$$

$$=12 \times \frac{1}{2} (\because \textcircled{1})$$

$$=6$$

$$E(X^2)=1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times c + 9^2 \times b + 11^2 \times a$$

$$=122a+90b+74c$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=122a+90b+74c-36$$

또 확률변수 Y 의 확률분포에 대하여 확률의 총합은 1이므로

$$(d-c)+(d-b)+(d-a)+(d-a)+(d-b)+(d-c)=1$$

$$6d-2(a+b+c)=1$$

$$6d-2 \times \frac{1}{2}=1 (\because \textcircled{1}) \quad \therefore d=\frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$E(Y)=(d-c)+2(d-b)+3(d-a)+4(d-a)+5(d-b)+6(d-c)$$

$$=21d-7(a+b+c)$$

$$=21 \times \frac{1}{3} - 7 \times \frac{1}{2} (\because \textcircled{1}, \textcircled{2})$$

$$=\frac{7}{2}$$

$$E(Y^2)=(d-c)+2^2(d-b)+3^2(d-a)+4^2(d-a)+5^2(d-b)+6^2(d-c)$$

$$=91d-25a-29b-37c$$

$$=\frac{91}{3}-25a-29b-37c (\because \textcircled{2})$$

$$\therefore V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{91}{3}-25a-29b-37c-\frac{49}{4}$$

$$V(Y)-\frac{1}{4}V(X)=\frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\frac{91}{3}-25a-29b-37c-\frac{49}{4}-\frac{1}{4}(122a+90b+74c-36)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{111}{2}a+\frac{103}{2}b+\frac{111}{2}c=\frac{107}{4}, \quad \frac{111}{2}(a+c)+\frac{103}{2}b=\frac{107}{4}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a+c=\frac{1}{2}-b \text{이므로}$$

$$\frac{111}{2}\left(\frac{1}{2}-b\right)+\frac{103}{2}b=\frac{107}{4}$$

$$\frac{111}{4}-4b=\frac{107}{4}, \quad 4b=1 \quad \therefore b=\frac{1}{4}$$

02 답 36

5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 시행을 2번 반복하는 모든 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.

(i) $X=2$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, b) \text{는 } (1, 1) \text{의 1가지이므로 } P(X=2)=\frac{1}{25}$$

(ii) $X=3$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, b) \text{는 } (1, 2), (2, 1) \text{의 2가지이므로 } P(X=3)=\frac{2}{25}$$

(iii) $X=4$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3가지이므로

$$P(X=4)=\frac{3}{25}$$

(iv) $X=5$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 의 4가지이므로

$$P(X=4)=\frac{4}{25}$$

(v) $X=6$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5가지

$$\text{이므로 } P(X=6)=\frac{5}{25}$$

(vi) $X=7$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)$ 의 4가지이므로

$$P(X=7)=\frac{4}{25}$$

(vii) $X=8$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(3, 5), (4, 4), (5, 3)$ 의 3가지이므로

$$P(X=8)=\frac{3}{25}$$

(viii) $X=9$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, b) \text{는 } (4, 5), (5, 4) \text{의 2가지이므로 } P(X=9)=\frac{2}{25}$$

(ix) $X=10$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, b) \text{는 } (5, 5) \text{의 1가지이므로 } P(X=10)=\frac{1}{25}$$

(i)~(ix)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{25} + 3 \times \frac{2}{25} + 4 \times \frac{3}{25} + 5 \times \frac{4}{25} + 6 \times \frac{5}{25} + 7 \times \frac{4}{25} \\ &\quad + 8 \times \frac{3}{25} + 9 \times \frac{2}{25} + 10 \times \frac{1}{25} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{25} + 3^2 \times \frac{2}{25} + 4^2 \times \frac{3}{25} + 5^2 \times \frac{4}{25} + 6^2 \times \frac{5}{25} + 7^2 \times \frac{4}{25} \\ &\quad + 8^2 \times \frac{3}{25} + 9^2 \times \frac{2}{25} + 10^2 \times \frac{1}{25} \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=40-6^2=4$$

$$\therefore V(Y)=V(3X+2)=3^2V(X)=9 \times 4=36$$

03 답 $\frac{32}{3}$

주사위를 10번 던져서 4 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 5 이상의 눈의 수가 나오는 횟수는 $10-Y$ 이므로 주어진 시행을 10번 반복하여 이동된 점 P의 좌표는 $(2Y, 10-Y)$ 이다.

따라서 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$$X=\frac{|6Y+4(10-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|2Y+40|}{5}=\frac{2}{5}Y+8 (\because Y \geq 0)$$

주사위를 한 번 던져서 4 이하의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이므로
확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(Y) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\therefore E(X) = E\left(\frac{2}{5}Y + 8\right) = \frac{2}{5}E(Y) + 8 = \frac{2}{5} \times \frac{20}{3} + 8 = \frac{32}{3}$$

04 답 29/81

추가된 볼펜 중 파란색 볼펜의 개수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

이때 9개의 볼펜 중에서 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜인 사건을 A , 추가된 볼펜 중 파란색 볼펜이 2개 이상인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

$$(i) X=0일 때, P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

추가된 볼펜 3개 중 파란색 볼펜이 없는 경우이므로 문구점에 있는 9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 2개이고, 이 중에서 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은 $\frac{2}{9}$ 이다.

$$\therefore P(A) = \frac{8}{27} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{243}$$

$$(ii) X=1일 때, P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

추가된 볼펜 3개 중 파란색 볼펜이 1개인 경우이므로 문구점에 있는 9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 3개이고, 이 중에서 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 이다.

$$\therefore P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$(iii) X=2일 때, P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

추가된 볼펜 3개 중 파란색 볼펜이 2개인 경우이므로 문구점에 있는 9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 4개이고, 이 중에서 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은 $\frac{4}{9}$ 이다.

$$\therefore P(A) = \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{81}$$

$$(iv) X=3일 때, P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

추가된 볼펜 3개가 모두 파란색 볼펜인 경우이므로 문구점에 있는 9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 5개이고, 이 중에서 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은 $\frac{5}{9}$ 이다.

$$\therefore P(A) = \frac{1}{27} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{243}$$

$$(i) \sim (iv)에서 P(A) = \frac{16}{243} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{5}{243} = \frac{1}{3}$$

$$(iii), (iv)에서 P(A \cap B) = \frac{8}{81} + \frac{5}{243} = \frac{29}{243}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{29}{243}}{\frac{1}{3}} = \frac{29}{81}$$

05 답 3750

30개의 제품 한 상자에 포함된 불량품의 개수를 확률변수 X , 1개의 제품이 불량품일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(30, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 30p, V(X) = 30p(1-p)$$

$$\text{이때 } E(X) = m \text{에서 } 30p = m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } V(X) = \frac{24}{5} \text{에서 } 30p(1-p) = \frac{24}{5}$$

$$30p - 30p^2 = \frac{24}{5}, p^2 - p + \frac{4}{25} = 0$$

$$\left(p - \frac{1}{5}\right)\left(p - \frac{4}{5}\right) = 0 \quad \therefore p = \frac{1}{5} \text{ 또는 } p = \frac{4}{5}$$

그런데 $p = \frac{4}{5}$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $m = 24 > 10$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $p = \frac{1}{5}$ 이므로

$$E(X) = 30p = 30 \times \frac{1}{5} = 6$$

불량품 한 개에 필요한 애프터서비스 비용이 a 원이므로 불량품 X 개에 대한 애프터서비스 비용 aX 원의 기댓값은

$$E(aX) = aE(X) = 6a$$

한 상자의 제품을 모두 검사하는 비용이 애프터서비스로 인해 필요한 비용의 기댓값의 2배이므로

$$45000 = 2 \times 6a \quad \therefore a = 3750$$

06 답 ②

$0 \leq x \leq 2$ 인 모든 x 에 대해서 $f(x) + g(x) = k$ (k 는 상수)이므로

$$g(x) = -f(x) + k$$

이때 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여

대칭이동한 후 y 축의 방향으로 k 만큼

평행이동한 것이므로 그림과 같다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직

선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면 그림에서 색칠한 부분의 넓이도 S_1 이고, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = 0$,

$x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1 = S_2 = 1$$

따라서 $S_1 + S_2 = 2$ 이므로 $2k = 2 \quad \therefore k = 1$

$$\text{이때 } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{2}{3} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

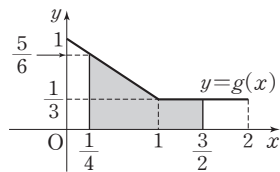
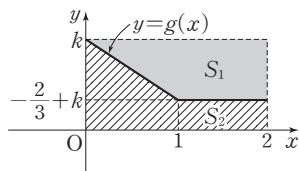
$$g(x) = -f(x) + 1 = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{3} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고

$$P\left(\frac{k}{4} \leq Y \leq \frac{3}{2}k\right) = P\left(\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{16} + \frac{1}{6} = \frac{29}{48} \end{aligned}$$



07 답 ④

$$\sum_{n=1}^9 P(X \leq n) = P(X \leq 1) + P(X \leq 2) + P(X \leq 3) + P(X \leq 4) \\ + P(X \leq 5) + P(X \leq 6) + P(X \leq 7) + P(X \leq 8) \\ + P(X \leq 9)$$

이때 정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \leq 1) + P(X \leq 9) = P(X \leq 1) + P(X \geq 1) = 1 \\ P(X \leq 2) + P(X \leq 8) = P(X \leq 2) + P(X \geq 2) = 1 \\ P(X \leq 3) + P(X \leq 7) = P(X \leq 3) + P(X \geq 3) = 1 \\ P(X \leq 4) + P(X \leq 6) = P(X \leq 4) + P(X \geq 4) = 1 \\ \therefore \sum_{n=1}^9 P(X \leq n) \\ = \{P(X \leq 1) + P(X \leq 9)\} + \{P(X \leq 2) + P(X \leq 8)\} \\ + \{P(X \leq 3) + P(X \leq 7)\} + \{P(X \leq 4) + P(X \leq 6)\} \\ + P(X \leq 5)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 0.5 = 4.5$$

따라서 $a=4.5$ 이므로 $20a=90$

08 답 0.3413

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(12, 3^2), N(18, 3^2)$ 을 따르므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 각각 직선 $x=12, x=18$ 에 대하여 대칭이고, 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 3으로 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 일치한다.

$\therefore g(x) = f(x-6)$
이때 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 a 이므로 $f(a) = g(a)$ 에서

$$f(a) = f(a-6) \\ \text{함수 } y=f(x) \text{의 그래프는 직선 } x=12 \text{에 대하여 대칭이므로} \\ \frac{a+(a-6)}{2} = 12, 2a=30 \quad \therefore a=15$$

확률변수 Y 는 정규분포 $N(18, 3^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{Y-18}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
 $\therefore P(a \leq Y \leq 18) = P(15 \leq Y \leq 18)$

$$= P\left(\frac{15-18}{3} \leq Z \leq \frac{18-18}{3}\right) \\ = P(-1 \leq Z \leq 0) \\ = P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.3413$$

09 답 815

A, B 과목 시험 점수를 각각 X 점, Y 점이라 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2), N\left(m+3, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-(m+3)}{\frac{\sigma}{3}} \text{으로 놓으면 두 확률변수 } Z_X, Z_Y \text{는}$$

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 A 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.2이므로

$$P(X \geq 80) = 0.2 \text{에서 } P\left(Z_X \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$P(Z_X \geq 0) - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.3$$

이때 $(0 \leq Z \leq 0.85) = 0.3$ 이므로 $\frac{80-m}{\sigma} = 0.85$

$$80-m = 0.85\sigma \quad \therefore m = 80 - 0.85\sigma \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

A 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.2이고, A, B 두 과목의 시험 점수가 모두 80점 이상일 확률이 0.01이므로 B 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률을 p 라 하면

$$0.2 \times p = 0.01 \quad \therefore p = 0.05$$

$$\text{즉, } P(Y \geq 80) = 0.05 \text{에서 } P\left(Z_Y \geq \frac{80-m-3}{\frac{\sigma}{3}}\right) = 0.05$$

$$P\left(Z_Y \geq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$P(Z_Y \geq 0) - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.45$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.45$ 이므로 $\frac{3(77-m)}{\sigma} = 1.65$

$$77-m = 0.55\sigma \quad \therefore m = 77 - 0.55\sigma \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 80 - 0.85\sigma = 77 - 0.55\sigma$$

$$0.3\sigma = 3 \quad \therefore \sigma = 10$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } m = 77 - 0.55 \times 10 = 71.5$$

$$\therefore 10(m+\sigma) = 10 \times (71.5 + 10) = 815$$

10 답 0.3721

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2), N(m+\sigma, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-(m+\sigma)}{\sigma}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y

는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(Y \geq 4a) = 1 - P(X \leq 2a)$ 에서

$$P(X \leq 2a) + P(Y \geq 4a) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{2a-m}{\sigma}\right) + P\left(Z_Y \geq \frac{4a-m-\sigma}{\sigma}\right) = 1 \text{이므로}$$

$$\frac{2a-m}{\sigma} = \frac{4a-m-\sigma}{\sigma}$$

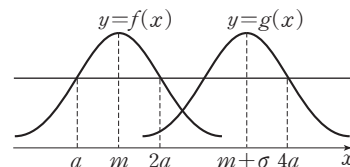
따라서 $a = \frac{\sigma}{2}$ 이므로 $a > 0$ ($\because \sigma > 0$)

한편 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 서로 같고 평균이 각각 $m, m+\sigma$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 각각 직선 $x=m, x=m+\sigma$ 에 대하여 대칭이고 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 σ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $f(2a) = g(4a)$ 이고, $f(a) = g(4a)$ 이므로

$$f(a) = f(2a)$$

즉, 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$\therefore m = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma}{2} = \frac{3}{4}\sigma$$

따라서 확률변수 Y 의 평균은 $m + \sigma = \frac{3}{4}\sigma + \sigma = \frac{7}{4}\sigma$ 이므로 확률변수

$Z_Y = \frac{Y - \frac{7}{4}\sigma}{\sigma}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(2a \leq Y \leq 4a) &= P(\sigma \leq Y \leq 2\sigma) \\ &= P\left(\frac{\sigma - \frac{7}{4}\sigma}{\sigma} \leq Z_Y \leq \frac{2\sigma - \frac{7}{4}\sigma}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{3}{4} \leq Z_Y \leq \frac{1}{4}\right) \\ &= P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3}{4}\right) + P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{4}\right) \\ &= P(0 \leq Z_Y \leq 0.75) + P(0 \leq Z_Y \leq 0.25) \\ &= 0.2734 + 0.0987 = 0.3721 \end{aligned}$$

11 답 ①

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(330, \sigma^2)$, $N(345, (3\sqrt{2}\sigma)^2)$ 을 따르므로 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(330, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(330, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고 크기가 $8n$ 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(345, \frac{(3\sqrt{2}\sigma)^2}{8n}\right)$, 즉 $N\left(345, \left(\frac{3\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 330}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - 345}{\frac{3\sigma}{2\sqrt{n}}}$ 로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}}$

는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(330 \leq \bar{X} \leq 340) = 0.4772 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{330 - 330}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{340 - 330}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.4772$$

$$P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{10\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{10\sqrt{n}}{\sigma} = 2 \quad \therefore \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \frac{3\sigma}{2\sqrt{n}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(\bar{Y} \geq 360) &= P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{360 - 345}{\frac{3\sigma}{2\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{15}{\frac{15}{2}}\right) = P(Z_{\bar{Y}} \geq 2) \\ &= P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

12 답 5.6

모표준편차가 σ , 표본의 크기가 196이므로 표본평균이 $\bar{x}_1$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{196}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{196}}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - 0.14\sigma \leq m \leq \bar{x}_1 + 0.14\sigma$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x}_1 - 0.14\sigma, \quad b = \bar{x}_1 + 0.14\sigma$$

또 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 400이므로 표본평균이 $\bar{x}_2$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore \bar{x}_2 - 0.129\sigma \leq m \leq \bar{x}_2 + 0.129\sigma$$

이 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 와 같으므로

$$c = \bar{x}_2 - 0.129\sigma$$

$$a = c \text{에서 } \bar{x}_1 - 0.14\sigma = \bar{x}_2 - 0.129\sigma \text{이므로 } \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.011\sigma$$

$$\text{이때 } \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.22 \text{에서 } 0.011\sigma = 0.22 \quad \therefore \sigma = 20$$

$$\begin{aligned} \therefore b - a &= \bar{x}_1 + 0.14\sigma - (\bar{x}_1 - 0.14\sigma) = 0.28\sigma \\ &= 0.28 \times 20 = 5.6 \end{aligned}$$

13 답 ⑤

9개의 공 중에서 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c 라 하고, 주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 Y 라 할 때, 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	합계
$P(Y=y)$	$\frac{a}{9}$	$\frac{b}{9}$	$\frac{c}{9}$	1

$X=5$ 일 때는 확인한 5개의 수가 모두 1이어야 하므로

$$P(X=5) = \frac{a}{9} \times \frac{a}{9} \times \frac{a}{9} \times \frac{a}{9} \times \frac{a}{9} = \left(\frac{a}{9}\right)^5$$

$X=15$ 일 때는 확인한 5개의 수가 모두 3이어야 하므로

$$P(X=15) = \frac{c}{9} \times \frac{c}{9} \times \frac{c}{9} \times \frac{c}{9} \times \frac{c}{9} = \left(\frac{c}{9}\right)^5$$

$$P(X=5) = 32P(X=15) \text{에서}$$

$$\left(\frac{a}{9}\right)^5 = 32 \times \left(\frac{c}{9}\right)^5, \quad a^5 = 32c^5 \quad \therefore a = 2c$$

이때 a, c 는 9 이하의 자연수이므로 $a=2, c=1$ 또는 $a=4, c=2$

(i) $a=2, c=1$ 일 때, ↗ $a=6, c=3$ 인 경우에는 $b=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$a + b + c = 9 \text{에서 } b = 6 \text{이므로}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{6}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

$$E(Y^2) = 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{6}{9} + 3^2 \times \frac{1}{9} = \frac{35}{9}$$

$$\therefore V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{35}{9} - \left(\frac{17}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}$$

확인한 5개의 수의 평균을 $\bar{Y}$ 라 하면 $X=5\bar{Y}$ 이므로

$$V(X) = V(5\bar{Y}) = 5^2 V(\bar{Y}) = 25 \times \frac{V(Y)}{5}$$

$$= 5V(Y) = 5 \times \frac{26}{81} = \frac{130}{81}$$

(ii) $a=4, c=2$ 일 때,

$$a + b + c = 9 \text{에서 } b = 3 \text{이므로}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

$$E(Y^2) = 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{3}{9} + 3^2 \times \frac{2}{9} = \frac{34}{9}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{34}{9} - \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{50}{81}$$

확인한 5개의 수의 평균을 $\bar{Y}$ 라 하면 $X=5\bar{Y}$ 이므로

$$V(X) = V(5\bar{Y}) = 5^2 V(\bar{Y}) = 25 \times \frac{V(Y)}{5}$$

$$= 5V(Y) = 5 \times \frac{50}{81} = \frac{250}{81}$$

(i), (ii)에서 모든 $V(X)$ 의 값의 합은 $\frac{130}{81} + \frac{250}{81} = \frac{380}{81}$

memo*

memo

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.