

수학의 신

고등수학(하)

정답과 해설



01 집합

step 1 핵심 문제 14~15쪽

01 ③ 02 ① 03 48 04 ① 05 27 06 ④
 07 $\neg, \cup, \cap$ 08 16 09 ② 10 32 11 ④
 12 23

step 2 고난도 문제 16~20쪽

01 ④ 02 864 03 -21 04 ⑤ 05 7 06 ③
 07 8 08 ④ 09 11 10 ① 11 ③ 12 80
 13 98 14 ④ 15 ② 16 12 17 $\neg, \cup, \cap$
 18 11 19 64 20 16 21 12 22 22 23 ③
 24 ④ 25 4 26 225 27 ② 28 30

step 3 최고난도 문제 21~23쪽

01 131 02 10 03 ⑤ 04 62 05 22 06 ④
 07 ② 08 28 09 ③ 10 ③ 11 61 12 31

02 명제

step 1 핵심 문제 24~25쪽

01 ② 02 9 03 4 04 ③ 05 ④ 06 1
 07 $\neg, \cup$ 08 ③ 09 ⑤ 10 ① 11 68

step 2 고난도 문제 26~30쪽

01 ③ 02 ① 03 256 04 ③ 05 $\cup, \cap$ 06 15
 07 ① 08 ⑤ 09 77 10 ③ 11 ③ 12 ①
 13 ④ 14 ③ 15 ⑤ 16 ④ 17 3 18 ⑤
 19 ② 20 $\frac{5}{2}$ 21 ② 22 ④ 23 ④ 24 ②

step 3 최고난도 문제 31~33쪽

01 ② 02 32 03 17 04 ④ 05 26 06 ③
 07 ② 08 ③ 09 39 10 10 11 28

기출 변형 문제로 단원 마스터 34~37쪽

01 $\neg, \cap$ 02 ② 03 64 04 ④ 05 5 06 21
 07 ③ 08 ⑤ 09 ② 10 ⑤ 11 ⑤ 12 ⑤
 13 ① 14 8 15 ①

03 함수

step 1 핵심 문제 40~41쪽

01 ① 02 $\frac{5}{6}$ 03 ③ 04 9 05 5 06 ②
 07 ① 08 -1 09 ④ 10 ③
 11 $k < -2$ 또는 $k > 2$ 12 4

step 2 고난도 문제 42~46쪽

01 5 02 $\neg, \cup, \cap$ 03 ④ 04 29 05 ①
 06 8 07 34 08 ④ 09 ⑤ 10 ③
 11 $-4 < k < 0$ 또는 $k > 1$ 12 $1 \leq m \leq 2$ 13 11
 14 ③ 15 ① 16 6 17 3 18 12 19 ④
 20 24 21 ① 22 ⑤ 23 ③ 24 70 25 $-\frac{98}{3}$
 26 $\frac{49}{8}$ 27 1

step 3 최고난도 문제 47~49쪽

01 ④ 02 36 03 ② 04 ④ 05 40 06 ⑤
 07 ① 08 ④ 09 27 10 ⑤

04 유리함수

step 1 핵심 문제 50~51쪽

- 01 ④ 02 151 03 ① 04 ⑤ 05 $a \geq 6$ 06 ④
 07 $-20 < m \leq 0$ 08 ③ 09 ② 10 $\neg, \cup, \cap$
 11 ① 12 3

step 2 고난도 문제 52~56쪽

- 01 ① 02 ② 03 10 04 $-52, 80$ 05 16
 06 ④ 07 ① 08 ② 09 ① 10 $\neg, \cup, \cap$
 11 ③ 12 18 13 ⑤ 14 21 15 ④ 16 $\frac{8}{5}$
 17 -9 18 ⑤ 19 ⑤ 20 1 21 7 22 ①
 23 8 24 ①

step 3 최고난도 문제 57~59쪽

- 01 12 02 ② 03 ⑤ 04 ① 05 ③ 06 ④
 07 9 08 ⑤ 09 $\frac{2}{3}$ 10 ① 11 ① 12 42

05 무리함수

step 1 핵심 문제 60~61쪽

- 01 ③ 02 ② 03 $-\frac{10}{3}$ 04 ③ 05 2 06 36
 07 ⑤ 08 ③ 09 $\frac{17}{2}$ 10 $\frac{55}{4}$ 11 ① 12 ③

step 2 고난도 문제 62~66쪽

- 01 ④ 02 ⑤ 03 ④ 04 ② 05 ③ 06 2
 07 $-\frac{13}{4} < a < -3$ 08 ③ 09 $\frac{1}{5}$ 10 $\frac{49}{4}$ 11 $\frac{135}{8}$
 12 10 13 ⑤ 14 24 15 ① 16 14 17 ④
 18 ⑤ 19 ③ 20 ② 21 $\frac{121}{16}$ 22 ④ 23 1

step 3 최고난도 문제 67~69쪽

- 01 ⑤ 02 18 03 65 04 ① 05 ① 06 ②
 07 5 08 4 09 ② 10 12

기출 변형 문제로 단원 마스터 70~73쪽

- 01 4 02 ③ 03 8 04 55 05 1 06 24
 07 $3\sqrt{2}$ 08 2 09 ① 10 2 11 2 12 ④
 13 70 14 12 15 41 16 ⑤

06 경우의 수

step 1 핵심 문제 76~77쪽

- 01 ③ 02 ④ 03 720 04 88 05 ② 06 216
 07 288 08 ③ 09 ⑤ 10 480 11 155 12 ④

step 2 고난도 문제 78~82쪽

- 01 11 02 ③ 03 24 04 ⑤ 05 6 06 ③
 07 ④ 08 ① 09 576 10 240 11 264 12 ④
 13 336 14 200 15 450 16 ④ 17 15 18 246
 19 210 20 ④ 21 64 22 720 23 ④ 24 ②
 25 ②

step 3 최고난도 문제 83~85쪽

- 01 285 02 960 03 2016 04 729 05 ② 06 45
 07 64 08 ① 09 504 10 396

기출 변형 문제로 단원 마스터 86~87쪽

- 01 768 02 1080 03 30 04 ③ 05 ① 06 36
 07 ④ 08 96

01 집합

step 1 핵심 문제

| 14~15쪽

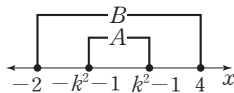
- 01 ③ 02 ① 03 48 04 ① 05 27 06 ④
 07 $\neg, \cup, \subset$ 08 16 09 ② 10 32 11 ④
 12 23

01 답 ③

$\neg$. 집합 A 의 원소는 $\{1\}, \{1, 2\}, \emptyset$
 $\therefore 1 \notin A$
 $\cup$. $1 \notin A, 2 \notin A$ 이므로 $\{1, 2\} \not\subset A$
 $\subset$. $\{1, 2\} \in A$ 이므로 $\{\{1, 2\}\} \subset A$
 $\therefore \{\{1, 2\}\} \in B$
 $\cap$. $\emptyset \in A$, 즉 $\{\emptyset\} \subset A$ 이므로 $\{\emptyset\} \in B$
 $\therefore \{\{\emptyset\}\} \subset B$
 따라서 보기에서 옳은 것은 $\subset, \cap$ 이다.

02 답 ①

$|x+1| \leq k^2$ 에서
 $-k^2 \leq x+1 \leq k^2, -k^2-1 \leq x \leq k^2-1$
 $\therefore A = \{x | -k^2-1 \leq x \leq k^2-1\}$
 $x^2-2x-8 \leq 0$ 에서
 $(x+2)(x-4) \leq 0, -2 \leq x \leq 4$
 $\therefore B = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$
 $A \subset B$ 가 되도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 그림과 같으므로
 $-2 \leq -k^2-1, k^2-1 \leq 4$
 즉, $k^2 \leq 1, k^2 \leq 5$ 에서 $k^2 \leq 1$ 이므로 $-1 \leq k \leq 1$
 따라서 구하는 실수 k 의 최솟값은 -1 이다.



03 답 48

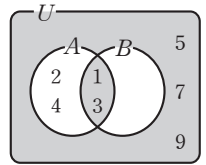
$A_{25} = \{x | x \text{는 } \sqrt{25} \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5\}$
 이때 $A_n \subset A_{25}$ 에서 집합 A_n 은 7 이상의 홀수를 원소로 가질 수 없으므로
 $1 \leq \sqrt{n} < 7 \quad \therefore 1 \leq n < 49$
 따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

04 답 ①

3^n-1 에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면 2, 8, 26, 80, 242, ...
 따라서 3^n-1 을 5로 나누었을 때의 나머지는 차례대로 2, 3, 1, 0, 2, ...
 즉, 2, 3, 1, 0이 반복되므로 $A = \{0, 1, 2, 3\}$
 $4n+1$ 에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...
 따라서 $4n+1$ 을 10으로 나누었을 때의 나머지는 차례대로 5, 9, 3, 7, 1, 5, ...
 즉, 5, 9, 3, 7, 1이 반복되므로 $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $\therefore A-B = \{0, 2\}$
 따라서 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은 2이다.

05 답 27

집합 $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림의 색칠한 부분과 같다.
 이때 $A \cap \{(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)\} = \{1, 3\}$ 이므로 $A \cap B = \{1, 3\}$
 $\therefore A-B = \{2, 4\}, (A \cup B)^c = \{5, 7, 9\}$
 따라서 $B^c = \{2, 4, 5, 7, 9\}$ 이므로 집합 B^c 의 모든 원소의 합은 $2+4+5+7+9=27$



06 답 ④

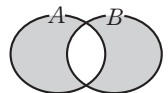
$(A-B^c) \cup (B^c-A^c) = \{A \cap (B^c)^c\} \cup \{B^c \cap (A^c)^c\}$
 $= (A \cap B) \cup (B^c \cap A)$
 $= (A \cap B) \cup (A-B)$
 $= A$
 따라서 $A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$
 $\neg$. $A \cap B^c = A-B = \emptyset$
 $\cup$. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = B^c$
 $\subset$. $A^c \cup B = U$
 $\cap$. $A \cap (A-B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B)$
 $= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B)$
 $= A \cap B = A$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 $\subset, \cap$ 이다.

07 답 $\neg, \cup, \subset$

$\neg$. $(A \cap B)^c \cap B = B - (A \cap B) = B - A$
 $\cup$. $\{A \cap (A \cup B)\} \cap \{A \cup (A^c \cap B)\} = A \cap \{A \cup (A^c \cap B)\}$
 $= A \cap \{(A \cup A^c) \cap (A \cup B)\}$
 $= A \cap \{U \cap (A \cup B)\}$
 $= A \cap (A \cup B) = A$

$\subset$. 집합 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림의 색칠한 부분과 같다.
 따라서 $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$ 이면
 $A-B = \emptyset$ 이고 $B-A = \emptyset$ 이므로 $A=B$ 이다.
 따라서 보기에서 항상 옳은 것은 $\neg, \cup, \subset$ 이다.



다른 풀이

$\neg$. $(A \cap B)^c \cap B = (A^c \cup B^c) \cap B$
 $= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap B)$
 $= (A^c \cap B) \cup \emptyset$
 $= A^c \cap B = B - A$

08 답 16

$A \subset A \cup X, B \subset B \cup X$ 이고, $A \cup X = B \cup X$ 이므로
 $A \subset B \cup X, B \subset A \cup X$
 $A \subset B \cup X$ 에서 $1 \in A, 2 \in A$ 이지만 $1 \notin B, 2 \notin B$ 이므로
 $1 \in X, 2 \in X \quad \dots \dots \textcircled{1}$
 $B \subset A \cup X$ 에서 $5 \in B, 6 \in B$ 이지만 $5 \notin A, 6 \notin A$ 이므로
 $5 \in X, 6 \in X \quad \dots \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 집합 X 는 전체집합 U 의 원소 중 1, 2, 5, 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 조건을 만족시키는 부분집합 X 의 개수는 $2^{8-4} = 2^4 = 16$

09 답 ②

두 집합 A 와 B 가 서로소이므로 $A \cap B = \emptyset$ 에서 $A \cap B \cap C = \emptyset$
 $\therefore n(A \cap B) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$
 $n(A) = 16, n(C) = 23, n(A \cup C) = 30$ 이므로
 $n(A \cap C) = n(A) + n(C) - n(A \cup C)$
 $= 16 + 23 - 30 = 9$
 $n(B) = 15, n(C) = 23, n(B \cup C) = 28$ 이므로
 $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$
 $= 15 + 23 - 28 = 10$
 $\therefore n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$
 $+ n(A \cap B \cap C)$
 $= 16 + 15 + 23 - 0 - 10 - 9 + 0$
 $= 35$

10 답 32

A 모바일 채팅앱에 가입한 학생의 집합을 A, B 모바일 채팅앱에 가입한 학생의 집합을 B라 하면
 $n(A) = 24, n(B) = 19$ 배점 10%
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이고 $n(A \cup B) \leq 30$ 이므로
 $24 + 19 - n(A \cap B) \leq 30$
 $\therefore n(A \cap B) \geq 13$ ㉠ 배점 40%
 $n(A \cap B) \leq n(A) = 24, n(A \cap B) \leq n(B) = 19$ 에서
 $n(A \cap B) \leq 19$ ㉡ 배점 30%
 ㉠, ㉡에서
 $13 \leq n(A \cap B) \leq 19$
 따라서 A 모바일 채팅앱과 B 모바일 채팅앱에 모두 가입한 학생 수의 최댓값은 19, 최솟값은 13이므로 그 합은
 $19 + 13 = 32$ 배점 20%

비법 NOTE

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A) \geq n(B)$ 일 때
 (1) $n(A \cap B)$ 가 최댓값인 경우
 $B \subset A$ 일 때이므로 $n(A \cap B) = n(B)$
 (2) $n(A \cap B)$ 가 최솟값인 경우
 $A \cup B = U$ 일 때이므로 $n(A \cup B) = n(U)$

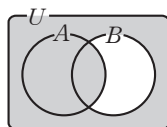
11 답 ④

$n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = 45$ 이므로
 $n(A \cap B) = n(U) - n((A \cap B)^c) = 50 - 45 = 5$
 $n(A \cup B^c) = n((A^c \cap B)^c) = n(U) - n(B \cap A^c)$ 이고
 $n(B \cap A^c) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 28 - 5 = 23$ 이므로
 $n(A \cup B^c) = 50 - 23 = 27$

다른 풀이

집합 $A \cup B^c$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림의 색칠한 부분과 같고

$n(A \cap B) = n(U) - n((A \cap B)^c)$
 $= 50 - 45 = 5$
 $\therefore n(A \cup B^c) = n(U) - n(B) + n(A \cap B)$
 $= 50 - 28 + 5 = 27$



12 답 23

3과 2의 최소공배수는 6이고, 5와 2의 최소공배수는 10이므로
 $(A_3 \cup A_5) \cap A_2 = (A_3 \cap A_2) \cup (A_5 \cap A_2) = A_6 \cup A_{10}$ 배점 30%
 이때 6과 10의 최소공배수는 30이므로
 $n(A_6 \cup A_{10}) = n(A_6) + n(A_{10}) - n(A_6 \cap A_{10})$
 $= n(A_6) + n(A_{10}) - n(A_{30})$ 배점 30%
 100 이하의 6의 배수는 6, 12, 18, ..., 96이므로
 $n(A_6) = 16$
 100 이하의 10의 배수는 10, 20, 30, ..., 100이므로
 $n(A_{10}) = 10$
 100 이하의 30의 배수는 30, 60, 90이므로
 $n(A_{30}) = 3$
 따라서 구하는 원소의 개수는
 $n(A_6) + n(A_{10}) - n(A_{30}) = 16 + 10 - 3 = 23$ 배점 40%

비법 NOTE

자연수 k 의 배수의 집합을 A_k 라 하면
 (1) 두 자연수 k, l 에 대하여 l 이 k 의 배수이면 $A_l \subset A_k$ 이므로 $A_k \cup A_l = A_k$,
 $A_k \cap A_l = A_l$ 이다.
 (2) 세 자연수 k, l, m 에 대하여 m 이 k 와 l 의 공배수이면 $A_m \subset A_k \cap A_l$ 이고,
 $A_k \cap A_l = A_m$ 일 때 m 은 k 와 l 의 최소공배수이다.
 (3) 세 자연수 k, l, n 에 대하여 n 이 k 와 l 의 공약수이면 $A_k \cup A_l \subset A_n$ 이다.

step 2 고난도 문제

| 16~20쪽

01 ④	02 864	03 - 21	04 ⑤	05 7	06 ③
07 8	08 ④	09 11	10 ①	11 ③	12 80
13 98	14 ④	15 ②	16 12	17 ㄱ, ㄴ, ㄷ	
18 11	19 64	20 16	21 12	22 22	23 ③
24 ④	25 4	26 225	27 ②	28 30	

01 답 ④

$a \in B$ 이므로 $a = \sqrt{a}$ 또는 $a = \sqrt{b}$ 또는 $a = 9$
 (i) $a = \sqrt{a}$ 일 때,
 $a^2 = a$ 이므로 $a^2 - a = 0, a(a - 1) = 0 \therefore a = 1$ ($\because a$ 는 자연수)
 $b \in B$ 이고 $a < b$ 이므로 $b \neq \sqrt{b} \therefore b = 9$
 $\hookrightarrow b = \sqrt{b}$ 이면 $b = 1$ 이므로 $a < b$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.
 따라서 $B = \{1, 2, 3, 9\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은
 $1 + 2 + 3 + 9 = 15$
 (ii) $a = \sqrt{b}$ 일 때,
 $b = a^2$ 이고 $b \in B$ 이므로
 $a^2 = \sqrt{a}$ 또는 $a^2 = 9$
 ① $a^2 = \sqrt{a}$ 에서 $a^4 = a, a^4 - a = 0, a(a^3 - 1) = 0$
 $a(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \therefore a = 1$ ($\because a$ 는 자연수)
 이때 $b = a^2 = 1$ 이므로 $a < b$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.
 ② $a^2 = 9$ 에서 $a = 3$ ($\because a$ 는 자연수)
 이때 $b = a^2 = 9$ 이므로 $B = \{\sqrt{3}, 2, 3, 9\}$
 따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은
 $\sqrt{3} + 2 + 3 + 9 = 14 + \sqrt{3}$

(iii) $a=9$ 일 때,

$$b=\sqrt{a}=3 \text{ 또는 } b=\sqrt{b}$$

① $b=3$ 이면 $a < b$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

② $b=\sqrt{b}$ 에서 $b^2=b$, $b^2-b=0$

$$b(b-1)=0 \quad \therefore b=1 \quad (\because b \text{는 자연수})$$

이때 $b=1$ 이므로 $a < b$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 B 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 집합 B 의 모든 원소의 합의 최댓값은 $14+\sqrt{3}$

02 답 864

집합 S 의 원소 중 (a) 를 만족시키는 순서쌍 $(a, 12-a)$ 는

$(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6)$

이때 (a) 에서 집합 A 의 모든 원소의 곱을 5로 나누었을 때의 나머지가 0

이 아니므로 집합 A 의 원소로 가능한 순서쌍 $(a, 12-a)$ 는

$(1, 11), (3, 9), (4, 8), (6, 6)$

$\hookrightarrow A$ 는 집합이므로 6은 하나의 원소이다.

(a) 를 만족시키는 집합 A 는 $\{1, 3, 9, 11\}$ 또는 $\{1, 4, 8, 11\}$ 또는

$\{3, 4, 8, 9\}$ 이다.

따라서 집합 A 의 모든 원소의 곱의 최댓값은

$$3 \times 4 \times 8 \times 9 = 864$$

03 답 -21

$x^2-2x-15 > 0$ 에서

$$(x+3)(x-5) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 5$$

$$\therefore A = \{x \mid x < -3 \text{ 또는 } x > 5\}$$

$A \cup B = U$, $A \cap B = \{x \mid 5 < x \leq 6\}$ 을 만족

시키려면 그림에서

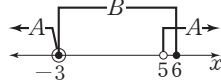
$$B = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$$

해가 $-3 \leq x \leq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+3)(x-6) \leq 0 \quad \therefore x^2-3x-18 \leq 0$$

따라서 $a=-3$, $b=-18$ 이므로

$$a+b=-21$$



04 답 ⑤

$A_4 = \{x \mid f(4x)=0, 0 \leq x \leq 1\}$ 이므로 $f(4x)=0$ 에서

$$4x - [4x] = 0 \quad \therefore 4x = [4x]$$

즉, A_4 는 $0 \leq x \leq 1$ 일 때 $4x$ 가 정수가 되도록 하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이므로

$$A_4 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

$A_6 = \{x \mid f(6x)=0, 0 \leq x \leq 1\}$ 이므로 $f(6x)=0$ 에서

$$6x - [6x] = 0 \quad \therefore 6x = [6x]$$

즉, A_6 는 $0 \leq x \leq 1$ 일 때 $6x$ 가 정수가 되도록 하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이므로

$$A_6 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$$

따라서 $A_4 \cup A_6 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 1\right\}$ 이므로

$$n(A_4 \cup A_6) = 9$$

05 답 7

(a) 에서 $4 \in A$ 이므로 $\sqrt{4}=2 \in B$

(b) 에서 $4 \in B$ 이므로 $4^2=16 \in A$

즉, $A = \{4, 16, c\}$, $B = \{2, 4, \sqrt{c}\}$ 로 놓을 수 있다.

(c) 에서 집합 A 의 원소 중 2개는 집합 B 의 원소이어야 하므로

$16 \in B$ 또는 $c \in B$ 이어야 한다.

(i) $16 \in B$ 일 때,

$\sqrt{c}=16$ 이므로 $c=16^2 \notin A$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $c \in B$ 일 때, $\hookrightarrow c$ 는 100 이하의 자연수이어야 한다.

$$c=2 \text{ 또는 } c=\sqrt{c}$$

① $c=2$ 이면 $\sqrt{c}=\sqrt{2} \notin B$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

② $c=\sqrt{c}$ 에서 $c^2=c$ $\hookrightarrow \sqrt{c}$ 는 100 이하의 자연수이어야 한다.

$$c^2-c=0, c(c-1)=0 \quad \therefore c=1 \quad (\because c \text{는 자연수})$$

(i), (ii)에서 $1 \in B$ 이므로 $B = \{1, 2, 4\}$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1+2+4=7$$

06 답 ③

$z=a+bi$ 에서 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$$

$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$$

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

위의 복소수 중에서 그 값이 실수인 것은 $z+\bar{z}$ 와 $z\bar{z}$ 이므로

$$A \cap R = \{2a, a^2+b^2\} = \{6, 13\}$$

(i) $2a=6$, $a^2+b^2=13$ 일 때,

$$a=3 \text{ 이므로 } b^2=4 \text{ 에서 } b=-2 \text{ 또는 } b=2$$

(ii) $2a=13$, $a^2+b^2=6$ 일 때,

$$a=\frac{13}{2} \text{ 이므로 } b^2=6-\left(\frac{13}{2}\right)^2 < 0$$

이때 조건을 만족시키는 실수 b 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$, $b=-2$ 또는 $a=3$, $b=2$ 이므로

$$|a+b|=1 \text{ 또는 } |a+b|=5$$

따라서 $|a+b|$ 의 최댓값은 5이다.

07 답 8

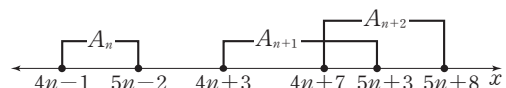
$A_n = \{x \mid 4n-1 \leq x \leq 5n-2\}$ 이므로

$$A_{n+1} = \{x \mid 4n+3 \leq x \leq 5n+3\}, A_{n+2} = \{x \mid 4n+7 \leq x \leq 5n+8\}$$

자연수 n 에 대하여 $A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \emptyset$ 을 만족시키려면 세 부분집합

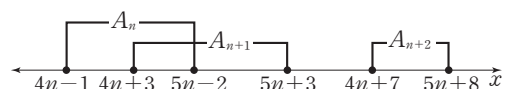
A_n , A_{n+1} , A_{n+2} 중 어느 두 집합만 교집합이 공집합이어도 된다.

(i) $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$ 인 경우



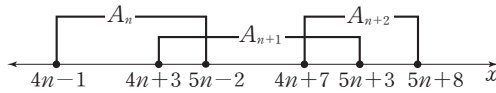
$$5n-2 < 4n+3 \text{ 이어야 하므로 } n < 5$$

(ii) $A_{n+1} \cap A_{n+2} = \emptyset$ 인 경우



$$5n+3 < 4n+7 \text{ 이어야 하므로 } n < 4$$

(iii) $A_n \cap A_{n+2} = \emptyset$ 인 경우



$5n-2 < 4n+7$ 이어야 하므로 $n < 9$

(i), (ii), (iii)에서 $n < 9$ 이므로 구하는 자연수 n 의 최댓값은 8이다.

08 답 ④

집합 S 의 부분집합은

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, S$

$\emptyset \in X$ 이면 $(\clubsuit)$ 에서 $S \in X$ 이고, $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \cup S = S$, $S \cup S = S$ 이므로 $(\clubsuit)$ 를 만족시키는 집합 X 는 $\{\emptyset, S\}$

또 $(\clubsuit)$ 를 만족시키도록 집합 X 에 동시에 포함되는 원소인 집합을 순서쌍으로 나타내면

$(\{a\}, \{b, c\}), (\{b\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{a, b\})$

이때 $\{a\}, \{b, c\}$ 를 원소로 가지면 $(\clubsuit)$ 에 의하여 합집합인 $\{a, b, c\} = S$ 도 원소이고, S 가 원소이면 $\emptyset$ 도 원소이다.

같은 방법으로 하여 $(\clubsuit)$ 를 만족시키는 집합 X 를 구하면

$\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, S\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, S\}, \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, S\},$

$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S\}$

따라서 구하는 집합 X 의 개수는 5이다.

09 답 11

$(\clubsuit)$ 에서 $2 \in A, 6 \in A, 7 \in A$ 이고 $n(A) = 5$ 이므로 집합 A 의 나머지 두 원소를 a, b ($a < b$)라 하면 $(\clubsuit)$ 에서 집합 A 의 모든 원소의 합이 21이므로 $a + b + 2 + 6 + 7 = 21 \quad \therefore a + b = 6$

이때 집합 A 의 모든 원소는 자연수이므로

$a = 1, b = 5 \quad \therefore A = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ 배점 40%

또 $(\clubsuit)$ 에서 $2 \in B, 6 \in B, 7 \in B$ 이고 $n(B) = 5$ 이므로 집합 B 의 나머지 두 원소를 c, d ($c < d$)라 하면 $(\clubsuit)$ 에서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합이 32이므로

$1 + 2 + 5 + 6 + 7 + c + d = 32 \quad \therefore c + d = 11$

이때 집합 B 의 모든 원소는 자연수이므로

$c = 1, d = 10$ 또는 $c = 3, d = 8$

$\therefore B = \{1, 2, 6, 7, 10\}$ 또는 $B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$

그런데 $\{1+k, 2+k, 5+k, 6+k, 7+k\} = \{1, 2, 6, 7, 10\}$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않고, $k=1$ 일 때,

$\{1+k, 2+k, 5+k, 6+k, 7+k\} = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ 이므로

$B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ 배점 40%

따라서 $B - A = \{3, 8\}$ 이므로 구하는 모든 원소의 합은

$3 + 8 = 11$ 배점 20%

다른 풀이

집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 하자.

$(\clubsuit)$ 에서 $S(A) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 21$ 이므로

$S(B) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 5k = 21 + 5k$

$(\clubsuit)$ 에서 $S(A \cup B) = 32$

$(\clubsuit)$ 에서 $S(A \cap B) = 15$ 이므로

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$ 에서

$32 = 21 + (21 + 5k) - 15 \quad \therefore k = 1$ 배점 40%

이때 $A \cap B = \{2, 6, 7\}$ 에서 $2 \in A, 6 \in A, 7 \in A$ 이므로

$3 \in B, 7 \in B, 8 \in B \quad \therefore B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ 배점 40%

따라서 $B - A = B - (A \cap B) = \{3, 8\}$ 이므로 구하는 모든 원소의 합은

$3 + 8 = 11$ 배점 20%

10 답 ①

$A - B = \{4\}$ 이므로 $f(A - B) = 4$

$f(B) = 1 + 2 + 3 + 5 = 11$ 이므로 $(\clubsuit)$ 에서

$4 < f(C) < 11$

이때 집합 C 는 자연수를 원소로 가지므로 원소의 합도 자연수이다.

따라서 $f(C)$ 의 값이 될 수 있는 것은 5, 6, 7, ..., 10이다.

또 $(\clubsuit)$ 에서 $n(A \cap C) = 2$ 이므로 집합 C 는 집합 A 의 원소 1, 2, 3, 4 중 2개만 원소로 가져야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 C 는

$\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \rightarrow$ 집합 A 의 원소 2개만으로 이루어진 집합

$\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\},$

$\{2, 3, 5\} \rightarrow$ 집합 A 의 원소 2개와 집합 A 의 원소가 아닌 원소 1개로 이루어진 집합의 11개이다.

11 답 ③

$\neg, A \cap B = \{2, 5\}$ 에서 $2 \in A, 5 \in A$

2와 5가 k 의 약수이므로 k 는 10의 배수이다.

이때 k 는 18 이하의 자연수이므로 $k = 10$

$\neg, A \cap B = \{5, 6\}$ 에서 $5 \in A, 6 \in A$

5와 6이 k 의 약수이므로 k 는 30의 배수이다.

이때 k 는 18 이하의 자연수이므로 존재하지 않는다.

$\neg, (i) A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때,

$\neg$ 에서 $k = 10$ 이므로 $A = \{1, 2, 5, 10\}$

따라서 $A - B = \{1, 10\}$ 이므로 모든 원소의 합은 11이다.

(ii) $A \cap B = \{2, 6\}$ 일 때,

$2 \in A, 6 \in A$

2와 6이 k 의 약수이므로 k 는 6의 배수이다.

이때 k 는 18 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 6, 12, 18이다.

① $k = 6$ 일 때,

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로

$A - B = \{1, 3\}$

따라서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은 4이다.

② $k = 12$ 일 때,

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$A - B = \{1, 3, 4, 12\}$

따라서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은 20이다.

③ $k = 18$ 일 때,

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로

$A - B = \{1, 3, 9, 18\}$

따라서 모든 원소의 합은 31이다.

(iii) $A \cap B = \{5, 6\}$ 일 때,

$\neg$ 에서 k 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 k 의 값은 10, 18이므로 그 합은 28이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

12 답 80

$$A^c = \{7, 8, 9, 10\}, B^c = \{1, 2, 3, 9, 10\}$$

(가)에서 $X \cup \{7, 8, 9, 10\} = X \cup \{1, 2, 3, 9, 10\}$ 이므로

$$\{1, 2, 3\} \subset X, \{7, 8\} \subset X$$

$$\therefore \{1, 2, 3, 7, 8\} \subset X \subset U$$

이때 (나)에서 집합 X 의 원소의 개수가 6 이상이므로 집합 X 는 1, 2, 3, 7, 8이 아닌 원소를 1개 이상 더 가져야 한다. 배점 30%

이때 1, 2, 3, 7, 8이 아닌 원소 중 가장 작은 원소는 4이므로

$$X = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \text{ 일 때, } S \text{ 는 최소이고 최솟값은}$$

$$1+2+3+4+7+8=25 \quad \text{배점 30\%}$$

또 $X=U$ 일 때, S 는 최대이고 최댓값은

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 \quad \text{배점 30\%}$$

따라서 S 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$55+25=80 \quad \text{배점 10\%}$$

13 답 98

$k \geq 2$ 이므로

$$A = \{x \mid (x-1)(x-k) > 0\} = \{x \mid x < 1 \text{ 또는 } x > k\}$$

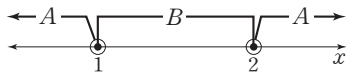
$$B = \{x \mid x^2 - (a^2 + 2a)x + 2a^3 \leq 0\} = \{x \mid (x-2a)(x-a^2) \leq 0\} \text{에서}$$

$$a=1 \text{ 일 때, } B = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

$$a \geq 2 \text{ 일 때, } B = \{x \mid 2a \leq x \leq a^2\}$$

(i) $k=2$ 일 때,

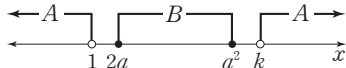
$$A = \{x \mid x < 1 \text{ 또는 } x > 2\} \text{ 이므로}$$



$A \cap B = \emptyset$ 이 되는 경우는 $a=1$ 일 때뿐이다.

$$\therefore f(2)=1$$

(ii) $k \geq 3$ 일 때,



$A \cap B = \emptyset$ 이 되는 경우는 $a^2 \leq k$

이때 $a^2 < 10^2$ 이면 $f(k) < 10$ 이므로 가능한 k 의 값은

$$3, 4, \dots, 99$$

(i), (ii)에서 $f(k) < 10$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수는

$$1+97=98$$

$$\rightarrow 99-3+1=97$$

14 답 ④

$$A \cup B^c = U \text{에서}$$

$$(A^c \cap B)^c = U, (B-A)^c = U$$

따라서 $B-A = \emptyset$ 이므로 $B \subset A$

이차방정식 $x^2 + mx + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 8$$

(i) $m^2 - 8 < 0$, 즉 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ 일 때,

이차방정식 $x^2 + mx + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 가지므로 $B = \emptyset$

따라서 $B \subset A$ 를 만족시키므로 정수 m 의 값은

$$-2, -1, 0, 1, 2$$

(ii) $m^2 - 8 \geq 0$, 즉 $m \leq -2\sqrt{2}$ 또는 $m \geq 2\sqrt{2}$ 일 때,

$B \subset A$ 이라면 이차방정식 $x^2 + mx + 2 = 0$ 의 두 실근이 $a, a+1$ 이어야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + (a+1) = -m \quad \dots\dots ㉠$$

$$a(a+1) = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉡ \text{에서 } a^2 + a - 2 = 0, (a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$-m = 1+2 \quad \therefore m = -3$$

(i), (ii)에서 구하는 정수 m 은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 6개이다.

15 답 ②

$$\neg. (A-B)-C = (A \cap B^c) \cap C^c$$

$$= A \cap (B^c \cap C^c)$$

$$= A \cap (B \cup C)^c$$

$$\neg. (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c$$

$$= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)$$

$$= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B \cap C^c)$$

$$= (A \cap B) \cap C^c$$

$$= (A \cap B) - C$$

ㄷ. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 3\}$ 이라 하면

$$A \cup C = \{1, 2, 3\}, B \cup C = \{1, 2, 3\},$$

$$A \cap C = \{1, 3\}, B \cap C = \{1\}$$

이때 $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ 이고 $(B \cap C) \subset (A \cap C)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

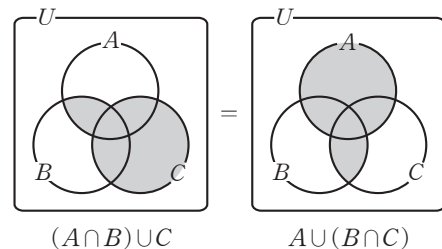
16 답 12

$$X * Y = X \cap (X^c \cup Y) = (X \cap X^c) \cup (X \cap Y)$$

$$= \emptyset \cup (X \cap Y) = X \cap Y$$

이므로 $(A * B) \cup C = A \cup (B * C)$ 에서

$$(A \cap B) \cup C = A \cup (B \cap C)$$



위의 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 서로 같으려면

$C - (A \cup B) = \emptyset, A - (B \cup C) = \emptyset$ 이어야 한다.

$$\therefore (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

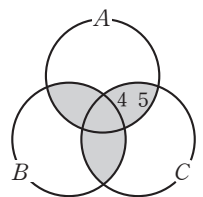
이때 $(A \cap C) - B = \{4, 5\}$ 이므로

$$B \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

$$= \{1, 2, 3, 6\}$$

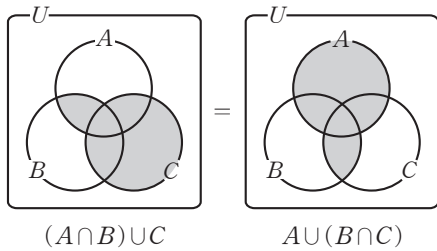
따라서 집합 $B \cap (A \cup C)$ 의 모든 원소의 합은

$$1+2+3+6=12$$



다른 풀이

$$(A * B) \cup C = A \cup (B * C) \text{에서 } (A \cap B) \cup C = A \cup (B \cap C)$$

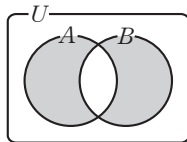


$A=C$ 인 경우 위의 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 서로 같으므로
 $(A \cap B) \cup A = A \cup (B \cap A) = A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $(A \cap C) - B = A - B = \{4, 5\}$ 이므로
 $B \cap (A \cup C) = B \cap A = A - (A - B) = \{1, 2, 3, 6\}$
 따라서 집합 $B \cap (A \cup C)$ 의 모든 원소의 합은
 $1+2+3+6=12$

17 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

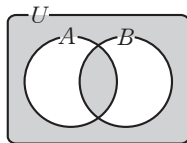
$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

따라서 $A \triangle B$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



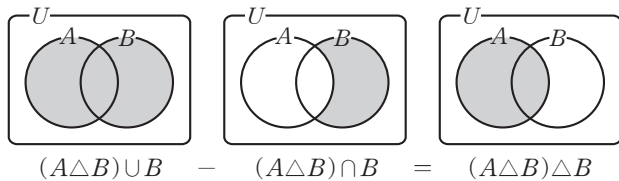
$$\neg. A \triangle B^c = (A \cup B^c) - (A \cap B^c)$$

따라서 $A \triangle B^c$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.
 $\therefore A \triangle B^c = (A \triangle B)^c$



$$\neg. (A \triangle B) \triangle B = \{(A \triangle B) \cup B\} - \{(A \triangle B) \cap B\}$$

$(A \triangle B) \triangle B$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$$\therefore (A \triangle B) \triangle B = A$$

$$\neg. A \triangle B = A \text{이면 } B - A = \emptyset, A \cap B = \emptyset \text{ 이므로 } B = \emptyset$$

$$\therefore A - B^c = A \cap B = \emptyset = B$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

비법 NOTE

두 집합 A, B 에 대하여 $A - B$ 와 $B - A$ 의 합집합, 즉 $(A - B) \cup (B - A)$ 를 대칭차집합이라 하고 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.

이때 $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 하면

$$(1) A \triangle A = \emptyset, A \triangle \emptyset = A$$

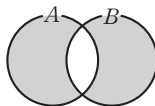
$$(2) A \triangle B = B \triangle A \rightarrow \text{교환법칙이 성립한다.}$$

$$(3) (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \rightarrow \text{결합법칙이 성립한다.}$$

$$(4) (A \triangle B) \triangle A = B, (A \triangle B) \triangle B = A$$

참고 대칭차집합과 같은 집합

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$$



18 답 11

(가)에서

$$\begin{aligned} A \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) = A - B = \{4\} \end{aligned}$$

또 $A \cap B = A - (A - B) = \{3, 5\}$ 이므로 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.

(나)에서

$$\begin{aligned} (A \cup X) - B &= (A \cup X) \cap B^c \\ &= (A \cap B^c) \cup (X \cap B^c) \\ &= (A - B) \cup (X - B) \\ &= \{4\} \cup (X - B) \end{aligned}$$

따라서 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수가 1이려면 집합 $X - B$ 가 공집합이거나 $\{4\}$ 이어야 한다.

$$U = (A \cap B) \cup (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{이고 } 4 \notin B \text{ 이므로}$$

(i) $X - B = \emptyset$ 일 때,

$$n(X) = 1 \text{에서 } X = \{1\} \text{ 또는 } X = \{2\} \text{ 또는 } X = \{3\} \text{ 또는 } X = \{5\}$$

$$\therefore B = \{1, 2, 3, 5\}$$

(ii) $X - B = \{4\}$ 일 때,

$$n(X) = 1 \text{에서 } X = \{4\}$$

$$\therefore \{3, 5\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 5\}$$

(i), (ii)에서 $B = \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1+2+3+5=11$$

idea

19 답 64

$(A \cap B) \cup X = A \cap X$ 일 때, 모든 집합 X 에 대하여

$$X \subset (A \cap B) \cup X = A \cap X \subset X \text{ 이므로}$$

$$X = (A \cap B) \cup X = A \cap X$$

$$X = (A \cap B) \cup X \text{에서 } A \cap B \subset X \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$X = A \cap X \text{에서 } X \subset A \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑, ㉒에서 $A \cap B \subset X \subset A$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중 집합 $A \cap B$ 의 원소인

7, 8, 9, 10을 모두 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{10-4} = 2^6 = 64$$

20 답 16

$$(X - A) \subset (A - X) \text{에서}$$

$$(X - A) \cap (A - X) = X - A \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} (X - A) \cap (A - X) &= (X \cap A^c) \cap (A \cap X^c) \\ &= (A \cap A^c) \cap (X \cap X^c) = \emptyset \end{aligned}$$

즉, $X - A = \emptyset$ 이므로 $X \subset A$

따라서 집합 X 는 집합 $A = \{1, 2, 5, 10\}$ 의 부분집합이므로 구하는 부분집합 X 의 개수는 $2^4 = 16$

21 답 12

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\} \text{이므로 } X \cap (A \cup B) = \emptyset \text{에서}$$

$$1 \notin X, 2 \notin X, 3 \notin X, 5 \notin X, 6 \notin X$$

$$A^c = \{4, 5, 6, \dots, n\} \text{이므로 } X \cup B = A^c \text{에서}$$

$$X = \{4, 7, 8, 9, \dots, n\}$$

따라서 집합 X 의 부분집합의 개수는 2^{n-5} 이므로

$$2^{n-5} = 128 \text{에서 } 2^{n-5} = 2^7$$

$$n - 5 = 7 \quad \therefore n = 12$$

22 답 22

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.

이때 $A \cap B = \{2\}$ 이므로 다음과 같이 집합 $A \cap B$ 의 원소가 집합 X 에 포함되는 경우와 그렇지 않은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $2 \in X$ 인 경우

$X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키는 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.

$$\therefore 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

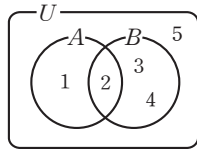
(ii) $2 \notin X$ 인 경우

$X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키려면 집합 X 는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4도 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X 는 $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 6개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수는

$$16 + 6 = 22$$



23 답 ③

$f(n)$ 은 n 을 반드시 원소로 갖고 n 보다 작은 자연수는 원소로 갖지 않는 집합 X 의 부분집합의 개수이므로

$$f(n) = 2^{10-1-(n-1)} = 2^{10-n} \quad (\text{단, } 1 \leq n \leq 10)$$

$$\neg. f(8) = 2^{10-8} = 2^2 = 4$$

$\cup. a=1, b=9$ 라 하면 $1 \in X, 9 \in X$ 이고 $1 < 9$ 이지만

$$f(1) = 2^{10-1} = 2^9 = 512, f(9) = 2^{10-9} = 2 \text{이므로}$$

$$f(1) > f(9)$$

$\cap. f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9)$

$$= 2^{10-1} + 2^{10-3} + 2^{10-5} + 2^{10-7} + 2^{10-9}$$

$$= 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1$$

$$= 512 + 128 + 32 + 8 + 2$$

$$= 682$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \cap$ 이다.

비법 NOTE

집합 X 의 부분집합 중 특정한 k 개의 원소는 포함하고 특정한 l 개는 포함하지 않는 부분집합의 개수 $\Rightarrow 2^{n-k-l}$

24 답 ④

$$(A-B) \cap (B-A) = \emptyset \text{이므로}$$

$$n((A-B) \cup (B-A)) = n(A-B) + n(B-A)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - 2 \times n(A \cap B)$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 99\}, B = \{2, 5, 8, 11, \dots, 98\} \text{이므로}$$

$$n(A) = 50, n(B) = 33$$

$$A \cap B = \{5, 11, 17, \dots, 95\}$$

이때 $A \cap B = \{x | x = 6k - 1, k \text{는 자연수}\}$ 이므로

$$n(A \cap B) = 16$$

$$\therefore n((A-B) \cup (B-A)) = 50 + 33 - 2 \times 16 = 51$$

25 답 4

$$n(A \cap B^c \cap C^c) = n(A \cap (B \cup C)^c)$$

$$= n(A - (B \cup C))$$

$$= n(A) - n(A \cap (B \cup C))$$

$$= 23 - n(A \cap (B \cup C))$$

따라서 $n(A \cap B^c \cap C^c)$ 의 값이 최소이려면 $n(A \cap (B \cup C))$ 의 값이 최대이어야 한다.

이때 집합 $A \cap (B \cup C)$ 와 벤다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 그림과 같이 나타내면 $n(B) = 15$ 이므로

$$b + d + 10 = 15, b + d = 5$$

이때 d 의 값이 최대이어야 하므로 $d = 5$

$$n(C) = 18 \text{이므로}$$

$$c + e + 10 = 18, c + e = 8$$

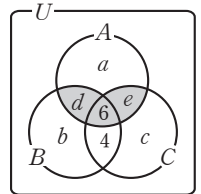
이때 e 의 값이 최대이어야 하므로 $e = 8$

$$n(A \cap (B \cup C)) \text{의 최댓값은}$$

$$d + e + 6 = 5 + 8 + 6 = 19$$

따라서 $n(A \cap B^c \cap C^c)$ 의 최솟값은

$$23 - 19 = 4$$



26 답 225

고등학교 1학년 학생 전체의 집합을 U 라 하고, 두 동아리 A, B에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B 라 하자.

$n(U) = N$ 이라 하면

$$n(A) = \frac{2}{5}N, n(B) = \frac{3}{4}N, n(A \cap B) = \frac{1}{3}N$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{5}N + \frac{3}{4}N - \frac{1}{3}N = \frac{49}{60}N$$

한편 $n((A \cup B)^c) = 55$ 이고, $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 이므로

$$55 = N - \frac{49}{60}N, \frac{11}{60}N = 55 \quad \therefore N = 300$$

$$\therefore n(B) = \frac{3}{4}N = \frac{3}{4} \times 300 = 225$$

따라서 동아리 B에 가입한 학생 수는 225이다.

27 답 ②

은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(A \cup B) = 35 + 30 = 65$$

㉞에서 $n(A) + n(B) = 82$ 이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 82 - 65 = 17$$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 65 - 17 = 48$$

㉞에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 각각 24이다.

따라서 은행 A 또는 은행 B를 이용하는 여자 고객의 수는 30이고 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 24이므로 은행 A와

은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$$30 - 24 = 6$$

(나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수가 같으므로 이를 x 라 하면 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는 $35-x$ 이고 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-x$ 이다.

(가)에서

$$\{x+2(35-x)\} + \{x+2(30-x)\} = 82$$

$$(-x+70) + (-x+60) = 82$$

$$2x = 48 \quad \therefore x = 24$$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$$30 - 24 = 6$$

28 답 30

세 제품 A, B, C를 선호하는 고객의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(A)=30, n(B)=24, n(C)=16,$$

$$n(A \cap B \cap C)=0,$$

$$n(A \cup B \cup C)=50 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

이때 한 개의 제품만 선호하는 고객의 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.

따라서 세 제품 중 한 개의 제품만을 선호하는 고객의 수는

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$- \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)\} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B \cup C)$$

$$= 30 + 24 + 16 - 50 = 20$$

이므로 구하는 고객의 수는

$$50 - 20 = 30 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

세 제품 A, B, C를 선호하는 고객의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(A)=30, n(B)=24, n(C)=16,$$

$$n(A \cap B \cap C)=0,$$

$$n(A \cup B \cup C)=50 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

이때 벤다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의

개수를 그림과 같이 나타내면

$$a+b+c+d+e+f=50 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a+d+f=30 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$b+d+e=24 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$c+e+f=16 \quad \dots\dots \text{㉣} \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

㉠+㉢+㉣를 하면

$$a+b+c+2(d+e+f)=70$$

㉠을 대입하면

$$50 + d + e + f = 70$$

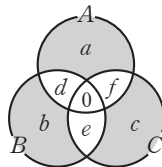
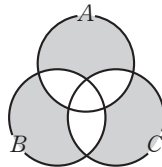
$$\therefore d + e + f = 20$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a+b+c+20=50$$

$$\therefore a+b+c=30$$

따라서 구하는 고객의 수는 30이다. $\dots\dots\dots \text{배점 50\%}$



step 3 최고난도 문제

01 131	02 10	03 ⑤	04 62	05 22	06 ④
07 ②	08 28	09 ③	10 ③	11 61	12 31

01 답 131

1단계 n 의 조건 파악하기

집합 $A_3 \cap A_n$ 은 3과 n 의 공배수의 집합이고 $A_3 \cap A_n = A_{3n}$ 에서 n 과 3의 최소공배수가 $3n$ 이므로 n 과 3은 서로소이다.

$$147 \notin A_3^c \cup A_n \text{에서 } 147 \notin (A_3 \cap A_n^c)^c \text{이므로}$$

$$147 \in A_3 \cap A_n^c \quad \therefore 147 \in A_3 - A_n$$

이때 $147 \notin A_n$ 이므로 n 은 147의 약수가 아니다.

따라서 n 은 3의 배수도 아니고 147의 약수도 아니다.

2단계 n 의 개수 구하기

200 이하인 3의 배수는 66개, 147의 약수는 1, 3, 7, 21, 49, 147의 6개이고, 이때 200 이하의 3의 배수이면서 147의 약수인 수는 3, 21, 147의 3개이므로 조건을 만족시키는 200 이하의 자연수 n 의 개수는

$$200 - 66 - 6 + 3 = 131$$

idea

02 답 10

1단계 x 와 y 사이의 관계 이해하기

(나)에서 $x \in X$ 일 때, x 의 배수 또는 약수는 집합 X 의 원소가 될 수 있다.

2단계 집합 X 구하기

1은 모든 자연수의 약수이므로 1이 원소가 되는 경우는 나머지 원소끼리 배수 또는 약수이면 된다.

(i) $1 \in X$ 일 때,

1보다 큰 10 이하의 두 자연수 $x, y (x < y)$ 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값이 자

$$\text{연수가 되는 경우는 } \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{10}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}$$

따라서 1과 위의 분모, 분자에 사용된 x, y 의 값을 이용하여 조건을

만족시키는 집합 X 를 구하면 $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 8\},$

$\{1, 2, 10\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 10\}, \{1, 2, 4, 8\}$

(ii) $1 \notin X$ 일 때,

$$\frac{4}{2}, \frac{8}{4}, \frac{8}{2} \text{이 모두 자연수이다.}$$

$$X = \{2, 4, 8\}$$

3단계 집합 X 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수는 10이다.

03 답 ⑤

1단계 $k=1, 2, 3, \dots$ 일 때 집합 A_k 구하기

$$k=1 \text{일 때, } A_1 = \{1\}$$

$$k=2 \text{일 때, } A_2 = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$k=3 \text{일 때, } A_3 = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$k=4 \text{일 때, } A_4 = \{4, 6\}$$

$$k=5 \text{일 때, } A_5 = \{5\}$$

$$k=6 \text{일 때, } A_6 = \{6\}$$

$$k=7 \text{일 때, } A_7 = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$k=8 \text{일 때, } A_8 = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$k=9 \text{일 때, } A_9 = \{1, 9\}$$

$$k=10 \text{일 때, } A_{10} = \{0\}$$

$$k=11 \text{일 때, } A_{11} = \{1\}$$

:

2단계 집합 A_k 의 원소에 관한 규칙 이해하기

이때 $A_2=A_8$, $A_3=A_7$ 이고 10 이하인 자연수 l 에 대하여 $A_l=A_{10+l}$ 이 성립한다.

3단계 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$ 의 값 구하기

$A_2=A_8$ 에서 $f(2)=8$, $f(8)=2$, $A_3=A_7$ 에서 $f(3)=7$, $f(7)=3$

$A_1=A_{11}$, $A_4=A_{14}$, $A_5=A_{15}$, $A_6=A_{16}$, $A_9=A_{19}$ 에서

$f(1)=11$, $f(4)=14$, $f(5)=15$, $f(6)=16$, $f(9)=19$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$$=11+8+7+14+15+16+3+2+19$$

$$=95$$

04 답 62

1단계 $\frac{5+p}{2} \in X$ 임을 알기

$5 \in X$ 이므로 (나)에서 $\frac{5+p}{2} \in X$

2단계 $\frac{5+p}{2}$ 가 홀수일 경우 p 의 값 구하기

(i) $\frac{5+p}{2}$ 가 홀수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{5+p}{2}+p}{2} \in X \text{이므로 } \frac{5+3p}{4} \in X$$

① $\frac{5+3p}{4}$ 가 홀수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{5+3p}{4}+p}{2} \in X \text{이므로 } \frac{5+7p}{8} \in X$$

이때 $n(X)=3$ 이므로

$$\frac{5+7p}{8}=5 \text{ 또는 } \frac{5+7p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{ 또는 } \frac{5+7p}{8}=\frac{5+3p}{4}$$

$$\frac{5+7p}{8}=5 \text{에서 } p=5$$

$$\frac{5+7p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{에서 } p=5$$

$$\frac{5+7p}{8}=\frac{5+3p}{4} \text{에서 } p=5$$

따라서 $p=5$ 일 때, 집합 X 는 5를 원소로 갖는다.

이때 집합 X 의 나머지 두 원소를 a , b 라 하면 a , b 는 모두 짝수

이므로 $\rightarrow$ 홀수인 경우는 $p=5$ 인 경우에 모두 포함된다.

$$\frac{a}{2}=5 \text{에서 } a=10, \frac{b}{2}=10 \text{에서 } b=20$$

따라서 $p=5$ 일 때, $X=\{5, 10, 20\}$ 이다.

② $\frac{5+3p}{4}$ 가 짝수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{5+3p}{4}}{2} \in X \text{이므로 } \frac{5+3p}{8} \in X$$

이때 $n(X)=3$ 이므로

$$\frac{5+3p}{8}=5 \text{ 또는 } \frac{5+3p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{ 또는 } \frac{5+3p}{8}=\frac{5+3p}{4}$$

$$\frac{5+3p}{8}=5 \text{에서 } p=\frac{35}{3}$$

$$\frac{5+3p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{에서 } p=-15$$

$$\frac{5+3p}{8}=\frac{5+3p}{4} \text{에서 } p=-\frac{5}{3}$$

이때 p 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

3단계 $\frac{5+p}{2}$ 가 짝수인 경우 p 의 값 구하기

(ii) $\frac{5+p}{2}$ 가 짝수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{5+p}{2}}{2} \in X \text{이므로 } \frac{5+p}{4} \in X$$

① $\frac{5+p}{4}$ 가 홀수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{5+p}{4}+p}{2} \in X \text{이므로 } \frac{5+5p}{8} \in X$$

이때 $n(X)=3$ 이므로

$$\frac{5+5p}{8}=5 \text{ 또는 } \frac{5+5p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{ 또는 } \frac{5+5p}{8}=\frac{5+p}{4}$$

$$\frac{5+5p}{8}=5 \text{에서 } p=7$$

$$\frac{5+5p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{에서 } p=15$$

$$\frac{5+5p}{8}=\frac{5+p}{4} \text{에서 } p=\frac{5}{3}$$

이때 p 는 자연수이므로 $p=7$ 또는 $p=15$

$$p=7 \text{일 때, (나)에서 } \frac{5+7}{2}=6 \in X, \frac{6}{2}=3 \in X, \frac{3+7}{2}=5 \in X$$

이므로 $X=\{3, 5, 6\}$ 이 되어 조건을 만족시킨다.

$$p=15 \text{일 때, (나)에서 } \frac{5+15}{2}=10 \in X, \frac{10}{2}=5 \in X \text{이므로 집합}$$

X 는 5, 10을 원소로 갖고, 이때 집합 X 의 나머지 한 원소를 20

이라 하면 $\frac{20}{2}=10 \in X$ 이므로 $X=\{5, 10, 20\}$ 이 되어 조건을

만족시킨다. $\hookrightarrow$ 조건을 만족시키는 어떤 원소 1개가 존재하면 된다.

② $\frac{5+p}{4}$ 가 짝수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{5+p}{4}}{2} \in X \text{이므로 } \frac{5+p}{8} \in X$$

이때 $n(X)=3$ 이므로

$$\frac{5+p}{8}=5 \text{ 또는 } \frac{5+p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{ 또는 } \frac{5+p}{8}=\frac{5+p}{4}$$

$$\frac{5+p}{8}=5 \text{에서 } p=35$$

$$\frac{5+p}{8}=\frac{5+p}{2} \text{에서 } p=-5$$

$$\frac{5+p}{8}=\frac{5+p}{4} \text{에서 } p=-5$$

이때 p 는 자연수이므로 $p=35$

$$p=35 \text{일 때, (나)에서 } \frac{5+35}{2}=20 \in X, \frac{20}{2}=10 \in X,$$

$$\frac{10}{2}=5 \in X \text{이므로 } X=\{5, 10, 20\} \text{이 되어 조건을 만족시킨다.}$$

4단계 조건을 만족시키는 자연수 p 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 p 의 값은 5, 7, 15, 35이므로 구하는 모든 자연수 p 의 값의 합은 $5+7+15+35=62$

05 답 22

1단계 $A_2 \cap A_3 = A_6$ 임을 이용하여 자연수 p 의 값 구하기

(가)에서 $A_2 \cap A_3$ 은 2의 배수이면서 3의 배수의 집합이므로 2와 3의 공배수의 집합이다. 이때 2와 3의 최소공배수가 6이므로 $A_2 \cap A_3 = A_6$

따라서 $k=6$ 이므로 $A_p \subset A_6$ 을 만족시키는 자연수 p 의 값은 6, 12, 18, ...이다.

2단계 자연수 q 의 값 구하기

(나)에서 $B_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로 집합 B_{20} 의 모든 원소의 합은 42이다.

(i) q 가 20의 약수인 경우

$B_q \cup B_{20} = B_{20}$ 이므로 집합 $B_q \cup B_{20}$ 의 모든 원소의 합이 42가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) q 가 20의 약수가 아닌 경우

집합 $B_q - B_{20}$ 에 포함되는 원소가 존재하고 $(q+50) - 42 = q+8$ 이므로 집합 $B_q - B_{20}$ 의 원소 중에서 q 를 제외한 모든 원소의 합이 8이어야 한다. 이때 $8 = 1+7 = 2+6 = 3+5 = 1+2+5 = 1+3+4$ 이므로 $B_q - B_{20}$ 의 원소로 가능한 수는 8, q 뿐이다.

따라서 $8 \in B_q$ 에서 8은 q 의 약수이므로 가능한 자연수 q 의 값은 16, 40이다.

3단계 $p+q$ 의 최솟값 구하기

따라서 $p+q$ 의 최솟값은 $p=6, q=16$ 일 때 22이다.

06 답 ④

1단계 $i^m + (-i)^n$ 의 m, n 에 값을 대입하여 가능한 a 의 값 구하기

$i^2 = -1, i^4 = 1, i^6 = -1, (-i)^2 = -1, (-i)^4 = 1, (-i)^6 = -1$ 이므로 가능한 $a = i^m + (-i)^n$ 의 값은 $-2, 0, 2$ 이다.

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg. A = \{2\}, B = \{2, 4\}$ 이면 $i^2 + (-i)^2 = -2, i^2 + (-i)^4 = 0$ 따라서 $C = \{-2, 0\}$ 이므로 $n(C) = 2$ 이다.

3단계 $\cup$ 이 옳은지 확인하기

$\cup. A = \{2\}, B = \{2, 4, 6\}$ 이라 하면 $n(A \cup B) = 3$ 이고 $n(A \cap B) = 1$ 이지만 $C = \{-2, 0\}$ 이므로 $n(C) = 2$ 이다.

4단계 $\cap$ 이 옳은지 확인하기

$\cap. 전체집합 U$ 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 3$ 이고 $n(A \cap B) = 0$ 인 경우는 $A = \{2, 4\}, B = \{6\}$ 또는 $A = \{6\}, B = \{2, 4\}$ 또는 $A = \{2, 6\}, B = \{4\}$ 또는 $A = \{4\}, B = \{2, 6\}$ 또는 $A = \{4, 6\}, B = \{2\}$ 또는 $A = \{2\}, B = \{4, 6\}$ 위의 6가지 경우 각각에 대하여 $C = \{-2, 0\}$ 또는 $C = \{0\}$ 이므로 $0 \in C$ 이다.

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

07 답 ②

1단계 x 의 값을 구하여 집합 A_k 유추하기

집합 A_k 는 전체집합 U 의 부분집합이므로 x 는 20 이하의 자연수이고 x 와 $y-k$ 는 30의 약수이다.

이때 $y \in U$ 에서 $y-k < 20$ 이므로 $x \neq 1$

또 $x \in U$ 에서 $x \neq 30$ 이므로 $y-k \neq 1$

따라서 $y-k$ 의 값에 따른 x 의 값은 다음 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$\therefore A_k \subset \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$

2단계 집합 B 를 구하고 k 의 값에 따른 집합 $A_k \cap B^c$ 유추하기

$\frac{30-x}{5} \in U$ 에서 $30-x$ 는 5의 배수이므로 $30-x=5a$ 에서 $x=30-5a$ ($a=2, 3, 4, 5$)
 $B = \{5, 10, 15, 20\} \therefore A_k \cap B^c \subset \{2, 3, 6\}$

(i) $2 \in A_k \cap B^c$, 즉 $2 \in A_k$ 일 때,

$x=2, y-k=15$ 에서 $y=15+k \leq 20$ 이므로 $k \leq 5$

(ii) $3 \in A_k \cap B^c$, 즉 $3 \in A_k$ 일 때,

$x=3, y-k=10$ 에서 $y=10+k \leq 20$ 이므로 $k \leq 10$

(iii) $6 \in A_k \cap B^c$, 즉 $6 \in A_k$ 일 때,

$x=6, y-k=5$ 에서 $y=5+k \leq 20$ 이므로 $k \leq 15$

(i), (ii), (iii)에서

$k \leq 5$ 일 때, $A_k \cap B^c = \{2, 3, 6\}$

$5 < k \leq 10$ 일 때, $A_k \cap B^c = \{3, 6\}$

$10 < k \leq 15$ 일 때, $A_k \cap B^c = \{6\}$

3단계 $n(A_k \cap B^c) = 1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수 구하기

따라서 $n(A_k \cap B^c) = 1$ 을 만족시키는 자연수 k 는 11, 12, 13, 14, 15의 5개이다.

idea 08 답 28

1단계 n 의 값 구하기

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$ 이므로

$$n+2=16 \quad \therefore n=14$$

2단계 a 의 값 구하기

집합 A 의 부분집합 중 원소 a 를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1} = 8$$

또 나머지 3개의 원소 각각에 대하여 집합 A 의 부분집합 중 그 원소를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1} = 8$$

따라서 공집합을 제외한 집합 A 의 모든 부분집합에 각 원소가 8번씩 들어가므로 모든 부분집합의 모든 원소의 합은

$$8(a+a+1+a+2+a+3) = 32a+48$$

이때 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ 의 값은 공집합과 집합 A 를 제외한 나머지 14개의 부분집합의 모든 원소의 합이므로

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = (32a+48) - (4a+6) = 28a+42 \quad \text{← 집합 } A \text{의 모든 원소의 합이다.}$$

따라서 $28a+42=98$ 이므로 $a=2$

3단계 $n \times a$ 의 값 구하기

$$\therefore n \times a = 14 \times 2 = 28$$

09 답 ③

1단계 $S(C-B)$ 의 값이 홀수임을 알기

(가)에서 $B \subset C$ 이므로 $S(B) + S(C) = 2S(B) + S(C-B)$

이때 (나)에서 $S(B) + S(C)$ 의 값이 홀수이고, $2S(B)$ 의 값은 짝수이므로 $S(C-B)$ 의 값은 홀수이다.

2단계 $S(C-B)$ 의 값이 홀수인 각각의 경우에 대하여 집합 B 의 개수 구하기

(i) $S(C-B) = 1$ 인 경우 $\rightarrow S(A) = 10$ 이므로 $S(C-B)$ 의 값은 10 이하의 홀수이다.

$C-B = \{1\}$ 일 때뿐이다.

따라서 집합 B 는 $\{2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합과 같으므로 집합 B 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$

(ii) $S(C-B) = 3$ 인 경우

$C-B = \{3\}$ 또는 $C-B = \{1, 2\}$ 일 때이다.

따라서 집합 B 가 $\{1, 2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이거나 $\{3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합과 같으므로 집합 B 의 개수는

$$(2^3 - 1) + (2^2 - 1) = 7 + 3 = 10$$

(iii) $S(C-B)=5$ 인 경우

$C-B=\{1, 4\}$ 또는 $C-B=\{2, 3\}$ 일 때이다.

따라서 집합 B 가 $\{2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이거나 $\{1, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합과 같으므로 집합 B 의 개수는

$$(2^2-1)+(2^2-1)=3+3=6$$

(iv) $S(C-B)=7$ 인 경우

$C-B=\{3, 4\}$ 또는 $C-B=\{1, 2, 4\}$ 일 때이다.

따라서 집합 B 가 $\{1, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이거나 $\{3\}$ 일 때이므로 집합 B 의 개수는

$$(2^2-1)+1=3+1=4$$

(v) $S(C-B)=9$ 인 경우

$C-B=\{2, 3, 4\}$ 일 때이므로 집합 B 가 $\{1\}$ 일 때뿐이다.

3단계 순서쌍 (B, C) 의 개수 구하기

(i)~(v)에서 집합 B 의 개수는 $7+10+6+4+1=28$

이때 집합 B 가 결정되면 집합 C 는 하나로 결정되므로 집합 B 의 개수와 순서쌍 (B, C) 의 개수는 같다.

따라서 구하는 순서쌍 (B, C) 의 개수는 28이다.

10 답 ③

1단계 집합 A_k 구하기

9 이하의 자연수 k 를 대입하여 집합 A_k 를 구하면

$$A_1=\{x|0\leq x\leq 2\}, A_2=\{x|1\leq x\leq 3\}, A_3=\{x|2\leq x\leq 4\},$$

$$A_4=\{x|3\leq x\leq 5\}, A_5=\{x|4\leq x\leq 6\}, A_6=\{x|5\leq x\leq 7\},$$

$$A_7=\{x|6\leq x\leq 8\}, A_8=\{x|7\leq x\leq 9\}, A_9=\{x|8\leq x\leq 10\}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\neg. A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x|0\leq x\leq 2\} \cap \{x|1\leq x\leq 3\} \cap \{x|2\leq x\leq 4\} \\ = \{2\}$$

3단계 $\cup$ 이 옳은지 확인하기

$\cup. |l-m|\leq 2$ 이고 l, m 은 자연수이므로

$$|l-m|=0 \text{ 또는 } |l-m|=1 \text{ 또는 } |l-m|=2$$

(i) $|l-m|=0$ 일 때, $m=l$ 이므로 $A_l \cap A_m = A_l \neq \emptyset$

(ii) $|l-m|=1$ 일 때,

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1 = \{x|1\leq x\leq 2\} \neq \emptyset$$

$$A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_2 = \{x|2\leq x\leq 3\} \neq \emptyset$$

$\vdots$

$$A_8 \cap A_9 = A_9 \cap A_8 = \{x|8\leq x\leq 9\} \neq \emptyset$$

(iii) $|l-m|=2$ 일 때,

$$A_1 \cap A_3 = A_3 \cap A_1 = \{2\} \neq \emptyset$$

$$A_2 \cap A_4 = A_4 \cap A_2 = \{3\} \neq \emptyset$$

$\vdots$

$$A_7 \cap A_9 = A_9 \cap A_7 = \{8\} \neq \emptyset$$

(i), (ii), (iii)에서 $|l-m|\leq 2$ 일 때, 두 집합 A_l 과 A_m 은 서로소가 아니다.

4단계 $\supset$ 이 옳은지 확인하기

$\supset. A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap A_{k+3} = \emptyset (k=1, 2, \dots, 6)$ 이고

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}, A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \{5\}, A_7 \cap A_8 \cap A_9 = \{8\}$ 이므로 모든 A_k 와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합은 $\{2, 5, 8\}$ 이고, 이 집합의 원소의 개수는 3이다.

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

11 답 61

1단계 조건 ㉠을 만족시키는 집합 A 에 대하여 $n(A)$ 의 최댓값 구하기

전체집합 U 의 원소 중 5로 나누었을 때의 나머지가 각각 0, 1, 2, 3, 4인 원소 전체의 집합을 차례대로 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 라 하면 이 5개의 집합은 모두 원소의 개수가 20이다.

㉡에서 집합 A 의 원소는 5로 나누었을 때의 나머지가 0인 수이므로

$$A \subset P_0$$

따라서 $n(A) \leq n(P_0) = 20$ 이므로 $n(A)$ 의 최댓값은 20이다.

2단계 조건 ㉢을 만족시키는 집합 B 에 대하여 $n(B)$ 의 최댓값 구하기

㉢에서 집합 B 는 5로 나누었을 때의 나머지의 합이 0 또는 5인 두 수를 동시에 포함하지 않아야 한다.

따라서 집합 B 는 집합 P_0 의 원소를 하나만 포함하거나 4개의 집합 $P_1 \cup P_2$ 또는 $P_1 \cup P_3$ 또는 $P_2 \cup P_4$ 또는 $P_3 \cup P_4$ 의 부분집합이므로

$$n(B) \leq n(P_1 \cup P_2) + 1 \\ = \frac{n(P_1) + n(P_2)}{2} + 1 \\ = 41 \quad \leftarrow P_1 \cap P_2 = \emptyset$$

즉, $n(B)$ 의 최댓값은 41이다.

3단계 $n(A) + n(B)$ 의 최댓값 구하기

따라서 $n(A) + n(B)$ 의 최댓값은

$$20 + 41 = 61$$

12 답 31

1단계 조건 ㉠을 만족시키는 세 집합 A_p, A_q, A_r 유추하기

$p=p_1^2, q=q_1^2, r=r_1^2 r_2$ (p_1, q_1, r_1, r_2 는 소수, $r_1 \neq r_2$)이면

$\leftarrow$ 약수의 개수가 6인 수 중 가장 작은 수를 생각한다.

$$A_p = \{1, p_1, p_1^2\}, A_q = \{1, q_1, q_1^2\}, A_r = \{1, r_1, r_1^2, r_2, r_1 r_2, r_1^2 r_2\}$$

이므로 ㉡를 만족시킨다.

2단계 조건 ㉢을 만족시키는 p, q, r 의 값 구하기

(i) $p_1=2, q_1=3, r_1=2, r_2=3$ 인 경우

$$p=4, q=9, r=12 \text{ 이므로 } A_p = \{1, 2, 4\}, A_q = \{1, 3, 9\},$$

$$A_r = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

따라서 $A_p \cup A_q \cup A_r = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ 이므로 모든 원소의 합은

$$1+2+3+4+6+9+12=37$$

(ii) $p_1=2, q_1=3, r_1=3, r_2=2$ 인 경우

$$p=4, q=9, r=18 \text{ 이므로 } A_p = \{1, 2, 4\}, A_q = \{1, 3, 9\},$$

$$A_r = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

따라서 $A_p \cup A_q \cup A_r = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 18\}$ 이므로 모든 원소의 합은

$$1+2+3+4+6+9+18=43$$

(iii) $p_1=2, q_1=3, r_1=2, r_2=5$ 인 경우

$$p=4, q=9, r=20 \text{ 이므로 } A_p = \{1, 2, 4\}, A_q = \{1, 3, 9\},$$

$$A_r = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

따라서 $A_p \cup A_q \cup A_r = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 20\}$ 이므로 모든 원소의 합은

$$1+2+3+4+5+9+10+20=54$$

(i), (ii), (iii)에서 집합 $A_p \cup A_q \cup A_r$ 의 모든 원소의 합이 40보다 크고 50보다 작을 때는 $p=4, q=9, r=18$ 인 경우이다.

3단계 $p+q+r$ 의 값 구하기

$$\therefore p+q+r=4+9+18=31$$

step 1 핵심 문제

| 24~25쪽

01 ② 02 9 03 4 04 ③ 05 ④ 06 1
07 $\neg, \perp$ 08 ③ 09 ⑤ 10 ① 11 68

01 답 ②

$\neg$. $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이 아니다.
 $\perp$. $R \not\subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 참이 아니다.
 $\sqsubset$. $Q \not\subset P^c$ 이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 참이 아니다.
 $\sqsupset$. $R \subset P$ 에서 $P^c \subset R^c$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.
 따라서 보기에서 항상 참인 명제는 $\sqsupset$ 이다.

02 답 9

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+8x+2k-1 \leq 0$ 이다.'가 거짓이라면 이 명제의 부정인 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+8x+2k-1 > 0$ 이다.'가 참이
 어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+8x+2k-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - 2k + 1 < 0 \quad \therefore k > \frac{17}{2}$$

따라서 구하는 정수 k 의 최솟값은 9이다.

03 답 4

명제 (가)가 참이라면

$$\{x|x>0\} \subset \{x|x>1-k\} \text{ 이어야 하므로}$$

$$1-k \leq 0 \quad \therefore k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

명제 (나)가 참이라면

$$\{x|x<0\} \cap \{x|x \geq k-5\} \neq \emptyset \text{ 이어야 하므로}$$

$$k-5 < 0 \quad \therefore k < 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $1 \leq k < 5$

따라서 구하는 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

04 답 ③

$\neg$. 명제: $ab > 0$ 에서 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 이고, 이때 $a+b > 0$
 이므로 $a > 0, b > 0$ 이다.

따라서 명제가 참이므로 대우도 참이다.

역: $a > 0, b > 0$ 이면 $a+b > 0, ab > 0$ 이다. (참)

$\perp$. 명제: $a^2+b^2=2ab$ 이면 $a^2-2ab+b^2=0$, 즉 $(a-b)^2=0$ 이므로
 $a=b$ 이지만 $a=b, a \neq 0$ 인 경우에는 $ab \neq 0$ 이다.

따라서 명제가 거짓이므로 대우도 거짓이다.

역: $ab=0$ 이면 $a=0$ 또는 $b=0$ 이다.

이때 $a=0, b \neq 0$ 인 경우에는 $a^2+b^2 > 0$ 이 되어 $a^2+b^2 \neq 2ab$ 이
 다. (거짓)

$\sqsubset$. 명제: $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나만 홀수이고,

(홀수) $\times$ (짝수) = (짝수)이므로 ab 는 짝수이다.

따라서 명제가 참이므로 대우도 참이다.

역: ab 가 짝수이면 a, b 중 하나가 짝수이거나 a, b 모두 짝수이다.

이때 a, b 가 모두 짝수인 경우에는 $a+b$ 가 짝수이다. (거짓)

따라서 보기에서 역은 거짓이지만 대우는 참인 명제는 $\sqsubset$ 이다.

05 답 ④

명제 $p \rightarrow \sim r$ 의 역 $\sim r \rightarrow p$ 가 참이므로 그 대우 $\sim p \rightarrow r$ 도 참이다.
 또 명제 $r \rightarrow q$ 의 대우 $\sim q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 명제 $r \rightarrow q$ 도 참이다.
 이때 두 명제 $\sim q \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 명제 $\sim q \rightarrow p$
 도 참이고, 그 대우 $\sim p \rightarrow q$ 도 참이다.
 따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

06 답 1

$$x^2-x-12 < 0 \text{ 에서}$$

$$(x+3)(x-4) < 0 \quad \therefore -3 < x < 4$$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x | -3 < x < 4\}, Q = \{x | x \geq a\}, R = \{x | x < b\} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

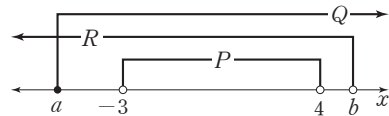
이때 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$$P \subset Q \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

또 p 는 r 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset R \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 모두 만족시키도록 세 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면
 그림과 같다.



즉, $a \leq -3$ 이고 $b \geq 4$ 이어야 하므로 a 의 최댓값은 -3 , b 의 최솟값은 4
 이다.

따라서 구하는 합은

$$-3 + 4 = 1 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

07 답 $\neg, \perp$

$\neg$. $p \rightarrow q$: $ab \leq 0$ 에서 $a > 0, b < 0$ 또는 $a < 0, b > 0$ 또는 $a=0$ 또는
 $b=0$ 이므로 $|a| + |b| \geq |a+b|$ 이다. (참)

$q \rightarrow p$: [반례] $a > 0, b > 0$ 이면 $|a| + |b| = |a+b|$ 이지만 $ab > 0$
 이다. (거짓)

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은
 아니다.

$\perp$. $p \rightarrow q$: $a^2+b^2=0$ 에서 $a=b=0$ 이므로 $a^3-b^3=0$ 이다. (참)

$q \rightarrow p$: [반례] $a=b=1$ 이면 $a^3-b^3=0$ 이지만 $a^2+b^2 \neq 0$ 이다.

(거짓)

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은
 아니다.

$\sqsubset$. $\sim q \rightarrow \sim p$: [반례] $a=1, b=1, c=0$ 이면

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ 이지만}$$

$$a^2+b^2+c^2 \neq ab+bc+ca \text{ 이다. (거짓)}$$

$\sim p \rightarrow \sim q$: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

$$\text{즉, } a=b=c \text{ 이므로 } (a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ 이다.}$$

(참)

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은
 아니다.

따라서 보기에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은
 $\neg, \perp$ 이다.

08 답 ③

주어진 명제의 대우는

‘ n 이 3의 배수가 아니면 $7n^2-1$ 은 3의 배수이다.’

n 이 자연수이고 3의 배수가 아니면

$n=3k-1$ 또는 $n=\boxed{3k-2}$ (k 는 자연수)로 놓을 수 있다.

(i) $n=3k-1$ 일 때,

$$7n^2-1=7(3k-1)^2-1=3\boxed{21k^2-14k+2}$$

이고 $\boxed{21k^2-14k+2}$ 는 자연수이므로 $7n^2-1$ 은 3의 배수이다.

(ii) $n=\boxed{3k-2}$ 일 때,

$$7n^2-1=7(3k-2)^2-1=3\boxed{21k^2-28k+9}$$

이고 $\boxed{21k^2-28k+9}$ 는 자연수이므로 $7n^2-1$ 은 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

따라서 $f(k)=3k-2$, $g(k)=21k^2-14k+2$, $h(k)=21k^2-28k+9$ 이므로

$$f(k)+g(k)-h(k)=17k-9$$

$$\therefore f(5)+g(5)-h(5)=85-9=76$$

09 답 ⑤

ㄱ. $a>0$, $b>0$ 이므로

$$a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab>0$$

$$\therefore a^2+b^2>ab$$

ㄴ. $a>0$, $b>0$ 이므로

$$|a|+|b|>0, |a-b|\geq 0$$

$$(|a|+|b|)^2-(|a-b|)^2$$

$$=(a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$$

$$=4ab>0 (\because |a||b|=|ab|=ab)$$

$$\therefore |a-b|<|a|+|b|$$

ㄷ. $a>0$, $b>0$ 이므로

$$\sqrt{2a+2b}>0, \sqrt{a}+\sqrt{b}>0$$

$$(\sqrt{2a+2b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2a+2b-(a+b+2\sqrt{ab})$$

$$=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

$$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}\leq \sqrt{2a+2b}$$

따라서 보기에서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ①

$$(2a-3b)\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right)=13-6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

이때 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a} \text{ 일 때 성립}\right)$$

$$\therefore (2a-3b)\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right)\leq 13-6\times 2=1$$

따라서 $c\geq 1$ 이므로 실수 c 의 최솟값은 1이다.

11 답 68

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\{x^2+(2y)^2\}\geq (2x+y)^2 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=4y \text{ 일 때 성립}\right)$$

배점 50%

$$\text{이때 } x^2+4y^2=8 \text{ 이므로 } (2x+y)^2\leq \frac{17}{4}\times 8=34$$

$$\therefore -\sqrt{34}\leq 2x+y\leq \sqrt{34} \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 $M=\sqrt{34}$, $m=-\sqrt{34}$ 이므로

$$M^2+m^2=34+34=68 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

step 2 고난도 문제

| 26~30쪽

01 ③	02 ①	03 256	04 ③	05 ㄴ, ㄷ	06 15
07 ①	08 ⑤	09 77	10 ③	11 ③	12 ①
13 ④	14 ③	15 ⑤	16 ④	17 3	18 ⑤
19 ②	20 $\frac{5}{2}$	21 ②	22 ④	23 ④	24 ②

01 답 ③

ㄱ. 명제 $p\rightarrow\sim q$ 가 참이므로 $P\subset Q^c$

$$\therefore P\cap Q=\emptyset$$

ㄴ. 명제 $q\rightarrow\sim r$ 가 참이므로 $Q\subset R^c$

$$\therefore R\subset Q^c$$

이때 ㄱ에서 $P\subset Q^c$ 이므로 $(P\cup R)\subset Q^c$

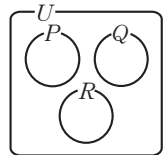
$$\therefore Q\subset (P\cup R)^c$$

ㄷ. [반례] 세 집합 P, Q, R 의 포함 관계가 벤다이

어그램과 같을 때, 즉 $P\cap Q=\emptyset$ 이고

$R\cap Q=\emptyset$ 이면 $P\subset Q^c$, $Q\subset R^c$ 이지만

$P\cup Q\cup R\neq U$ 이다.



따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

02 답 ①

$$x^2-(a-2)x-(2a^2+a-1)<0 \text{ 에서}$$

$$x^2-(a-2)x-(a+1)(2a-1)<0$$

$$(x+a+1)(x-2a+1)<0$$

$$\therefore -a-1< x < 2a-1 \quad (\because a \text{ 는 양수})$$

따라서 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P=\{x|-a-1< x < 2a-1\}$$

$$|x-4|\geq 2 \text{ 에서 } x-4\leq -2 \text{ 또는 } x-4\geq 2$$

$$\therefore x\leq 2 \text{ 또는 } x\geq 6$$

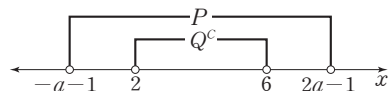
따라서 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q=\{x|x\leq 2 \text{ 또는 } x\geq 6\}$$

명제 $\sim p\rightarrow q$ 가 참이려면 $P^c\subset Q$

$$\therefore Q^c\subset P$$

따라서 $Q^c\subset P$ 가 되도록 두 집합 P, Q^c 을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $-a-1\leq 2$ 이고 $6\leq 2a-1$ 이어야 하므로

$$a\geq -3 \text{ 이고 } a\geq \frac{7}{2}$$

$$\therefore a\geq \frac{7}{2}$$

따라서 구하는 양수 a 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

03 답 256

$$x^2 \leq 2x + 8 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4$$

이때 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$

$$\therefore \{1, 2, 3, 4\} \subset Q$$

즉, 집합 Q 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4를 원소로 갖는 부분집합과 같으므로 집합 Q 의 개수는

$$2^{8-4} = 2^4 = 16$$

또 명제 $\sim p \rightarrow r$ 가 참이므로 $P^c \subset R$

$$\therefore \{5, 6, 7, 8\} \subset R$$

즉, 집합 R 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 5, 6, 7, 8을 원소로 갖는 부분집합과 같으므로 집합 R 의 개수는

$$2^{8-4} = 2^4 = 16$$

따라서 두 집합 Q, R 의 순서쌍 (Q, R) 의 개수는

$$16 \times 16 = 256$$

04 답 ③

(i) A가 진실을 말한 경우

A는 P별에 살고 있으므로 A가 한 말은 거짓이 되어 가정에 모순이다.

(ii) A가 거짓을 말한 경우

A는 Q별에 살고, P별에 사는 외계인이 있다.

① B가 진실을 말한 경우

B는 P별에 살고, Q별에 사는 외계인이 2명이므로 C는 Q별에 산다.

② B가 거짓을 말한 경우

B는 Q별에 살고, Q별에 사는 외계인은 2명이 아니어야 한다.
따라서 C도 Q별에 살고 있지만 P별에 사는 외계인이 없으므로 가정에 모순이다.

(i), (ii)에 의하여 A, C는 Q별에 살고, B는 P별에 산다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

05 답 ㄴ, ㄷ

세 부분집합 P, Q, R 가 각각 세 조건 p, q, r 의 진리집합이고 $P \subset Q, Q^c \subset P, R^c \subset P$ 이므로 세 명제 $p \rightarrow q, \sim q \rightarrow p, \sim r \rightarrow p$ 가 모두 참이다.

ㄱ. $R^c \subset P$ 에서 $P \cap R^c \neq \emptyset$ 이면 $P \not\subset R$ 이므로 명제 $p \rightarrow r$ 는 참이 아니다.

ㄴ. 두 명제 $\sim r \rightarrow p, p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제 $\sim r \rightarrow q$ 도 참이다.

ㄷ. $Q^c \subset P$ 이고 $P \subset Q$ 이므로

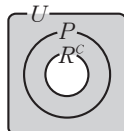
$$Q^c \subset Q$$

이때 $Q \cap Q^c = \emptyset$ 이고 $Q \neq \emptyset$ 이므로

$$Q^c = \emptyset \quad \therefore Q = U$$

따라서 명제 ' $x \in U$ 인 모든 x 에 대하여 q 이다.'는 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.



06 답 15

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 10ax + 5b \leq 0$ 이다.'가 거짓이라면 이 명제의 부정인 '모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 10ax + 5b > 0$ 이다.'가 참이 된다.배점 30%

(i) $a=0$ 일 때,

$$0 \times x^2 + 0 \times x + 5b > 0 \text{에서 } b > 0$$

이때 b 는 10 이하의 정수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, 10)$ 의 10개이다.배점 20%

(ii) $a>0$ 일 때,

이차방정식 $ax^2 + 10ax + 5b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 25a^2 - 5ab < 0, 5a(5a - b) < 0$$

$$5a - b < 0 (\because a > 0) \quad \therefore b > 5a$$

이때 a, b 는 10 이하의 정수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10)$ 의 5개이다.

.....배점 20%

(iii) $a<0$ 일 때,

이차함수 $y = ax^2 + 10ax + 5b$ 의 그래프는 위로 볼록하므로 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 10ax + 5b > 0$ 인 경우가 존재하지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 10 이하의 정수 a, b 는 존재하지 않는다.

.....배점 20%

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$10 + 5 = 15 \quad \dots \text{배점 } 10\%$$

비법 NOTE

(1) '모든 x 에 대하여 p 이다.'

전체집합의 모든 원소가 조건 p 를 만족시킨다는 것이 거짓임을 보이기 위해서는 조건 p 를 거짓이 되게 하는 원소 x 가 적어도 하나 존재함을 보이면 된다.

(2) '어떤 x 에 대하여 p 이다.'

조건 p 를 만족시키는 x 가 존재한다는 것이 거짓임을 보이기 위해서는 전체집합의 모든 원소가 조건 p 를 만족시키지 않음을 보이면 된다.

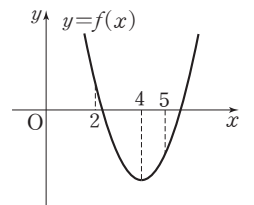
07 답 ①

$f(x) = x^2 - 8x + n$ 이라 할 때, $2 \leq x \leq 5$ 인 어떤 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이라면 $f(x) \geq 0$ 을 만족시키는 실수 x 가 $2 \leq x \leq 5$ 인 범위에서 적어도 하나 존재해야 하므로 $2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$f(x) = x^2 - 8x + n = (x-4)^2 + n - 16$ 에서
함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 4는 $2 \leq x \leq 5$ 에 속하고 $f(2) = n - 12$,
 $f(4) = n - 16$, $f(5) = n - 15$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $n - 12$ 를 갖는다.

즉, $n - 12 \geq 0$ 이어야 하므로 $n \geq 12$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 12이다.



08 답 ⑤

ㄱ. 역: ' $x^2 > y^2$ 이면 $|x| > |y|$ 이다.'

$$x^2 > y^2 \text{에서 } x^2 - y^2 > 0, (x-y)(x+y) > 0$$

$$\therefore x-y > 0, x+y > 0 \text{ 또는 } x-y < 0, x+y < 0$$

즉, $-x < y < x$ 또는 $x < y < -x$ 이므로 $|x| > |y|$ 이다. (참)

ㄴ. 역의 대우: ' $(x-1)^2+y^2=0$ 이면 $3x+2y=3$ 이다.'

$$(x-1)^2+y^2=0 \text{에서 } x=1, y=0$$

이를 $3x+2y=3$ 에 대입하면 성립하므로 참이다.

따라서 주어진 명제의 역의 대우가 참이므로 역도 참이다.

ㄷ. 역: ' $x < y < 0$ 이면 $x^3y^2 < x^2y^3$ 이다.'

$$x^3y^2 < x^2y^3 \text{에서 } x^3y^2 - x^2y^3 < 0$$

$$x^2y^2(x-y) < 0 \quad \therefore xy \neq 0 \text{이고 } x < y$$

따라서 $x < y < 0$ 이면 $xy \neq 0$ 이고 $x < y$ 이다. (참)

따라서 보기에서 주어진 명제의 역이 참인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09 답 77

명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow p$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로

$$P \subset Q, Q \subset P \quad \therefore P=Q$$

이때 $a < b < c$ 라 하면 $a+b < a+c < b+c$ 이므로

$$a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a+c=10 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$b+c=11 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C} \text{을 하면 } 2(a+b+c)=30$$

$$a+b+c=15 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{D} - \textcircled{C} \text{을 하면 } a=4$$

$$\textcircled{D} - \textcircled{B} \text{을 하면 } b=5$$

$$\textcircled{D} - \textcircled{A} \text{을 하면 } c=6$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=16+25+36=77$$

10 답 ③

명제 ' $2a+1 \in A$ 이면 $a \in A^c$ 이다.'가 참이므로 그 대우인 ' $a \in A$ 이면 $2a+1 \notin A$ 이다.'도 참이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$1 \in A \text{이면 } 3 \notin A \text{이다.}$$

$$2 \in A \text{이면 } 5 \notin A \text{이다.}$$

$$3 \in A \text{이면 } 7 \notin A \text{이다.}$$

$$4 \in A \text{이면 } 9 \notin A \text{이다. } \rightarrow a \geq 5 \text{이면 } 2a+1 \geq 11 \text{이 되어 } 2a+1 \notin S \text{이다.}$$

따라서 위의 네 명제의 대우인 다음 명제도 모두 참이다.

$$3 \in A \text{이면 } 1 \notin A \text{이다.}$$

$$5 \in A \text{이면 } 2 \notin A \text{이다.}$$

$$7 \in A \text{이면 } 3 \notin A \text{이다.}$$

$$9 \in A \text{이면 } 4 \notin A \text{이다.}$$

따라서 집합 A 는 4개의 순서쌍 (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)에 각각 포함된 2개의 수 중 하나씩만 원소로 가져야 하므로 집합 A 의 원소의 합이 최대이려면 이 중 1, 5, 7, 9가 집합 A 의 원소이어야 하고, 6, 8, 10은 모두 집합 A 의 원소이어야 한다.

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합의 최댓값은

$$1+5+6+7+8+9+10=46$$

11 답 ③

네 조건 p, q, r, s 를 다음과 같이 정하자.

p : 10대, 20대에게 선호도가 높다.

q : 판매량이 많다.

r : 가격이 싸다.

s : 기능이 많다.

이때 시장 조사의 결과 (㉠), (㉡), (㉢)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\textcircled{㉠} p \rightarrow q$$

$$\textcircled{㉡} r \rightarrow q$$

$$\textcircled{㉢} s \rightarrow p$$

각각의 보기를 네 조건 p, q, r, s 로 표현하면 다음과 같다.

$$\textcircled{1} s \rightarrow \sim r$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\textcircled{2} \sim r \rightarrow \sim q$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\textcircled{3} \sim q \rightarrow \sim s$$

두 명제 $s \rightarrow p, p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제 $s \rightarrow q$ 도 참이고, 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim s$ 도 참이다.

$$\textcircled{4} p \rightarrow s$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\textcircled{5} p \rightarrow \sim r$$

참, 거짓을 알 수 없다.

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

12 답 ①

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ 이고, r 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset R$ 이다.

따라서 $3 \in Q$ 이므로 $a=3$ 또는 $a+b^2=3$

(i) $a=3$ 일 때,

$$Q=\{3, b^2+3\}, R=\{4, b+1, 9b\}$$

이때 $Q \subset R$ 이고 b 는 자연수이므로

$$b+1=3 \quad \therefore b=2$$

따라서 $Q=\{3, 7\}, R=\{3, 4, 18\}$ 이므로

$$Q \not\subset R$$

(ii) $a+b^2=3$ 일 때,

a, b 는 자연수이므로 $a=2, b=1$

따라서 $Q=\{2, 3\}, R=\{2, 3, 4\}$ 이므로

$$Q \subset R$$

(i), (ii)에서 $a=2, b=1$ 이므로

$$a+b=3$$

13 답 ④

ㄱ. $p \rightarrow q$: $A \cap B = U$ 이면 $A=B=U$ (참)

$q \rightarrow p$: [반례] $U=\{1, 2\}$ 에 대하여 $A=\{1\}, B=\{1\}$ 이면

$$A=B \text{이지만 } A \cap B \neq U \text{이다. (거짓)}$$

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 q 는 p 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄴ. $p \rightarrow q$: $A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = U$ 에서

$$A^c \cap B = \emptyset$$

따라서 $B-A = \emptyset$ 이므로 $B \subset A$

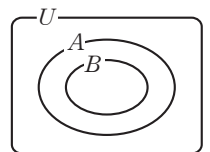
$$\therefore A^c - B^c = \emptyset \text{ (참)}$$

$q \rightarrow p$: $A^c - B^c = \emptyset$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이므로

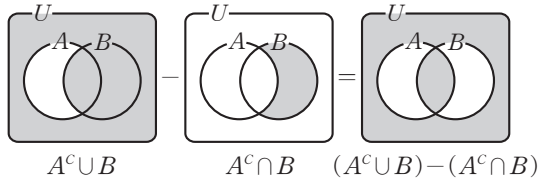
$$B \subset A$$

$$\therefore A \cup B^c = U \text{ (참)}$$

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.



ㄷ. 집합 $(A^c \cup B) - (A^c \cap B)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$p \rightarrow q: (A^c \cup B) - (A^c \cap B) = \emptyset$ 이라면 $A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \cup B = U$ 이어야 한다. (참)
 $q \rightarrow p$: [반례] $U = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ 이면 $A \cap B = \emptyset$ 이지만 $A \cup B \neq U$ 이다. (거짓)
 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 q 는 p 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
 따라서 보기에서 조건 q 가 조건 p 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 답 ③

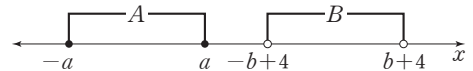
세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자.
 $p: x^2 = a^2$ 에서 $x^2 - a^2 = 0, (x+a)(x-a) = 0$
 $\therefore x = -a$ 또는 $x = a$
 따라서 $a=0$ 이면 $P = \{0\}$, $a \neq 0$ 이면 $P = \{-a, a\}$
 $q: x^3 = a^3$ 에서 $x^3 - a^3 = 0, (x-a)(x^2 + ax + a^2) = 0$
 $\therefore x = a$ ($\because x^2 + ax + a^2 \neq 0$)
 따라서 $a=0$ 이면 $Q = \{0\}$, $a \neq 0$ 이면 $Q = \{a\}$
 $r: x^4 = a^4$ 에서 $x^4 - a^4 = 0, (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$
 $(x+a)(x-a)(x^2 + a^2) = 0$
 $\therefore x = -a$ 또는 $x = a$ ($\because x^2 + a^2 \neq 0$)
 따라서 $a=0$ 이면 $R = \{0\}$, $a \neq 0$ 이면 $R = \{-a, a\}$
 $\therefore P = R$ 이므로 r 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.
 $\therefore a \neq 0$ 이면 $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 $\therefore r$ 가 q 이기 위한 충분조건이면 $R \subset Q$ 이므로 $a=0$ 이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 답 ⑤

$p: |a| + |b| = 0$ 에서 $|a| = 0, |b| = 0$ 이므로 $a = b = 0$
 $q: a^2 - 2ab + b^2 = 0$ 에서 $(a-b)^2 = 0$ 이므로 $a = b$
 $r: |a+b| = |a-b|$ 에서 $|a+b|^2 = |a-b|^2$
 $a^2 + 2|a||b| + b^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$
 $4|a||b| = 0$
 $\therefore a = 0$ 또는 $b = 0$
 $\therefore p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 $\therefore \sim p: a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
 $\sim r: a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$
 따라서 $\sim r \Rightarrow \sim p$ 이므로 $\sim p$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다.
 $\therefore q$ 이고 $r: a = b = 0$
 따라서 $(q$ 이고 $r) \Leftrightarrow p$ 이므로 $(q$ 이고 $r)$ 는 p 이기 위한 필요충분 조건이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

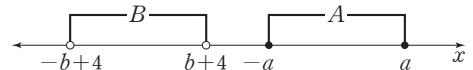
16 답 ④

$(x-a)(x+a) \leq 0$ 에서 $-a \leq x \leq a$ ($\because a > 0$)
 $\therefore A = \{x | -a \leq x \leq a\}$
 $|x-4| < b$ 에서 $-b+4 < x < b+4$ ($\because b > 0$)
 $\therefore B = \{x | -b+4 < x < b+4\}$
 따라서 $A \cap B = \emptyset$ 을 만족시키는 경우는 다음과 같다.
 (i) $a \leq -b+4$ 일 때,



$$\therefore a + b \leq 4$$

(ii) $b+4 \leq -a$ 일 때,



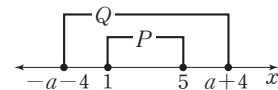
$$\therefore a + b \leq -4$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 이를 만족시키는 a, b 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $A \cap B = \emptyset$ 이기 위한 필요충분조건은 $a + b \leq 4$ 이다.

17 답 3

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-5) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq x \leq 5 \quad \therefore P = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$
 $||x| - 4| \leq a$ 에서
 $-a \leq |x| - 4 \leq a \quad \therefore -a+4 \leq |x| \leq a+4$
 $\therefore Q = \{x | -a+4 \leq |x| \leq a+4\}$ 배점 20%
 이때 p 가 q 이기 위한 충분조건이라면 $P \subset Q$ 이어야 한다. 배점 10%
 (i) $-a+4 < 0$, 즉 $a > 4$ 일 때,
 $-a+4 \leq |x| \leq a+4$ 에서
 $|x| \leq a+4 \quad \therefore -a-4 \leq x \leq a+4$
 따라서 $P \subset Q$ 가 되도록 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



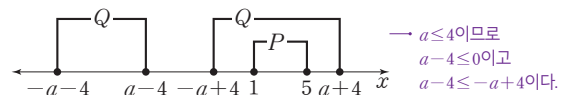
즉, $-a-4 \leq 1$ 이고 $5 \leq a+4$ 이므로

$$a \geq -5$$
이고 $a \geq 1 \quad \therefore a \geq 1$

그런데 $a > 4$ 이므로 $a > 4$ 배점 30%

(ii) $-a+4 \geq 0$, 즉 $a \leq 4$ 일 때, $\begin{cases} m > 0, n > 0 \text{ 일 때,} \\ m \leq |x| \leq n \text{ 은 } m \leq -x \leq n \text{ 또는 } m \leq x \leq n \text{ 이므로} \\ -n \leq x \leq -m \text{ 또는 } m \leq x \leq n \text{ 이다.} \end{cases}$
 $-a+4 \leq |x| \leq a+4$ 에서
 $-a+4 \leq -x \leq a+4$ 또는 $-a+4 \leq x \leq a+4$
 $\therefore -a-4 \leq x \leq -a-4$ 또는 $-a+4 \leq x \leq a+4$

따라서 $P \subset Q$ 가 되도록 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $-a+4 \leq 1$ 이고 $5 \leq a+4$ 이므로

$$a \geq 3$$
이고 $a \geq 1 \quad \therefore a \geq 3$

그런데 $a \leq 4$ 이므로 $3 \leq a \leq 4$ 배점 30%

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는 $a \geq 3$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 3이다. 배점 10%

18 답 ⑤

- ㄱ. $(a+4b+1)-2(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{ab})$
 $= (a+4b+4\sqrt{ab})-2(\sqrt{a}+2\sqrt{b})+1$
 $= (\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-2(\sqrt{a}+2\sqrt{b})+1$
 $= (\sqrt{a}+2\sqrt{b}-1)^2 \geq 0$
 $\therefore a+4b+1 \geq 2(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{ab})$
- ㄴ. $a-1=X, b+1=Y$ (X, Y 는 실수)로 놓으면
 $(|X|+|Y|)^2-(X+Y)^2$
 $= X^2+2|X||Y|+Y^2-X^2-2XY-Y^2$
 $= 2(|XY|-XY) \geq 0$ ($\because |XY| \geq XY$)
 $\therefore |X|+|Y| \geq |X+Y|$
 $\therefore |a-1|+|b+1| \geq |a+b|$
- ㄷ. $a>0, b>0, c>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ca}$ 이므로
 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ca}$
 $= 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$
 (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
- 따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 답 ②

- $x+1=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고
 $\frac{x+1}{x^2-x+2} = \frac{t}{(t-1)^2-(t-1)+2}$
 $= \frac{t}{t^2-3t+4} = \frac{1}{t+\frac{4}{t}-3} \quad \dots\dots ①$
- 이때 $t>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $t+\frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \times \frac{4}{t}} = 4$ (단, 등호는 $t=\frac{4}{t}$ 일 때 성립)
 즉, $t+\frac{4}{t}$ 의 최솟값은 4이고, $t+\frac{4}{t}$ 의 값이 최소인 경우는 $t=\frac{4}{t}$, 즉
 $t=2$ 일 때이므로 $x+1=t$ 에서 $x=1$ 일 때이다.
 따라서 $x=1$ 일 때 ①은 최댓값 1을 가지므로 $a=1, b=1$
 $\therefore a+b=2$

비법 NOTE

- 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하는 경우
 (1) 두 양수에 대하여 합이 일정할 때, 곱의 최댓값을 구하는 경우
 (2) 두 양수에 대하여 곱이 일정할 때, 합의 최솟값을 구하는 경우

20 답 $\frac{5}{2}$

- $4x+2y=k$ ($k>0$)라 하자.
 이때 $\frac{1}{x}>0, \frac{2}{y}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times \frac{2}{y}}$ (단, 등호는 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$ 일 때 성립)
 이때 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 의 값이 최소인 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$, 즉 $y=2x$ 일 때이므로
 $4x+2y=k$ 에서 $x=\frac{k}{8}, y=\frac{k}{4}$ 일 때이다.

따라서 $\alpha=\frac{k}{8}, \beta=\frac{k}{4}$ 이므로

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{8} + \frac{8}{4} = \frac{5}{2}$$

21 답 ②

- $P=a^2-ab+b^2-a-b+1$ 이라 하고
 $a=x+y, b=x-y \quad \dots\dots ①$
 로 놓으면 $a+b=2x, ab=x^2-y^2$ 이므로
 $P=a^2-ab+b^2-a-b+1$
 $= (a+b)^2-3ab-(a+b)+1$
 $= (2x)^2-3(x^2-y^2)-2x+1$
 $= x^2+3y^2-2x+1$
 $= (x-1)^2+3y^2$
- 이때 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $P \geq 0$ 이므로 부등식
 $a^2-ab+b^2 \geq a+b-1$ 이 성립한다.
 이때 등호는 $(x-1)^2+3y^2=0$, 즉 $x=1, y=0$ 일 때 성립하므로 ①에서
 $a=\boxed{1}, b=\boxed{1}$ 일 때이다.
 따라서 $f(x)=(x-1)^2, p=1, q=1$ 이므로
 $f(12pq)=f(12)=11^2=121$

22 답 ④

- $\overline{BC}=x, \overline{CA}=y$ ($x>0, y>0$)로 놓으면
 $4\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=4x^2+y^2$
 (ㄴ)의 $\overline{BC}+\overline{CA}=10$ 에서
 $x+y=10$
 이때 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right\}\{(2x)^2+y^2\} \geq (x+y)^2$ (단, 등호는 $\frac{2x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{1}$ 일 때 성립)
 $\frac{5}{4}(4x^2+y^2) \geq 10^2$
 $4x^2+y^2 \geq 80$
 이때 $4x^2+y^2$ 의 값이 최소인 경우는 $\frac{2x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{1}$, 즉 $4x=y$ 일 때이므로

- $x+y=10$ 에서 $x=2, y=8$ 일 때이다.
 따라서 $4\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$ 의 값이 최소일 때 $\overline{BC}=2, \overline{CA}=8$ 이다.
 이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}=8, \overline{BC}=2$ 인 이등변삼각
 형이므로 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H
 라 하면

$$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$$

삼각형 ABH에서

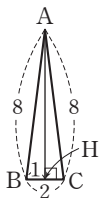
$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{8^2-1^2}=3\sqrt{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

비법 NOTE

- 코시-슈바르츠의 부등식을 이용하는 경우
 (1) 제곱의 합이 일정할 때, 일차식의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 경우
 (2) 일차식의 합이 일정할 때, 제곱의 합의 최솟값을 구하는 경우



idea
23 답 ④

$a=x^2+3, b=y+1$ 로 놓으면

$$\left(\frac{1}{x^2+3} + \frac{4}{y+1}\right)(x^2+y+4) = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$$

$$= 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b}$$

이때 $\frac{b}{a} > 0, \frac{4a}{b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{b}{a} = \frac{4a}{b} \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$ 의 값이 최소인 경우는 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$

($\because a > 0, b > 0$)일 때이므로 $y+1=2(x^2+3)$ 에서

$y=2x^2+5(x>0)$ 일 때이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 바르게 나타낸 것은 ④이다.

24 답 ②

직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$ 이므로 점 P(a, b)

를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{a}{b}(x-a) + b$$

$x=0$ 을 대입하면

$$y = \frac{a^2}{b} + b$$

$$\therefore Q\left(0, \frac{a^2}{b} + b\right)$$

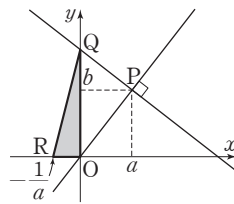
즉, 점 R(-1/a, 0)에 대하여 삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{a} \times \left(\frac{a^2}{b} + b\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

이때 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 1 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \text{ 일 때 성립})$$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.



step ③ 최고난도 문제

| 31~33쪽

01 ②	02 32	03 17	04 ④	05 26	06 ③
07 ②	08 ③	09 39	10 10	11 28	

01 답 ②

1단계 주어진 명제가 참일 때, 진리집합 사이의 포함 관계 알기

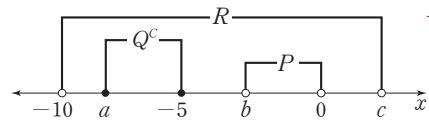
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

세 명제 $p \rightarrow q, p \rightarrow r, \sim r \rightarrow q$ 가 모두 참이 되려면

$P \subset Q, P \subset R, R^c \subset Q$ 이어야 한다.

2단계 진리집합 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내기

이때 $P \subset Q$ 에서 $P \cap Q^c = \emptyset$ 이고 $R^c \subset Q$ 에서 $Q^c \subset R$ 이므로 이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



$\rightarrow a+b+c$ 의 최솟값을 구해야 하므로 $a \leq -5, b \leq 0$ 인 경우만 생각하면 된다.

3단계 $a+b+c$ 의 최솟값 구하기

따라서 $-10 < a \leq b, -5 \leq b \leq c, c \geq 0$ 이어야 하므로 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 최솟값은 $a=-9, b=-5, c=0$ 일 때이다.

$$\therefore a+b+c = -9 + (-5) + 0 = -14$$

02 답 32

1단계 $a^2+b^2 \leq 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

$a^2+b^2 \leq 10$ 에서 a, b는 정수이므로

$|b|=0$ 일 때, $|a|=0, 1, 2, 3 \rightarrow b=0$ 이고 $a=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$|b|=1$ 일 때, $|a|=0, 1, 2, 3 \rightarrow b=\pm 1$ 이고 $a=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$|b|=2$ 일 때, $|a|=0, 1, 2 \rightarrow b=\pm 2$ 이고 $a=0, \pm 1, \pm 2$

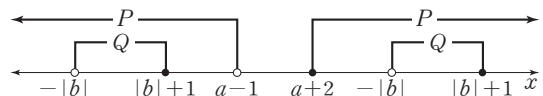
$|b|=3$ 일 때, $|a|=0, 1 \rightarrow b=\pm 3$ 이고 $a=0, \pm 1$

따라서 $a^2+b^2 \leq 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$1 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 5 + 2 \times 3 = 37$$

2단계 $q \rightarrow p$ 가 참이 되도록 하는 진리집합 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이려면 $Q \subset P$ 이어야 하므로 이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 $|b|+1 < a-1$ 또는 $a+2 \leq -|b|$ 이므로

$$a > |b|+2 \text{ 또는 } a \leq -|b|-2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

3단계 $q \rightarrow p$ 가 참이 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i) $a > |b|+2$ 일 때

① $|b|=0$ 일 때, $a > 2$

따라서 순서쌍 (a, b)는

(3, 0)

② $|b| \geq 1$ 일 때, $a > 3$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(ii) $a \leq -|b|-2$ 일 때

① $|b|=0$ 일 때, $a \leq -2$

따라서 순서쌍 (a, b)는

(-2, 0), (-3, 0)

② $|b|=1$ 일 때, $a \leq -3$

따라서 순서쌍 (a, b)는

(-3, -1), (-3, 1)

③ $|b| \geq 2$ 일 때, $a \leq -4$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 ①을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (3, 0), (-2, 0),

(-3, 0), (-3, -1), (-3, 1)의 5개이다.

4단계 $q \rightarrow p$ 가 거짓이 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

따라서 명제 $q \rightarrow p$ 가 거짓이 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$37 - 5 = 32$$

idea
03 답 17

1단계 주어진 명제 이해하기

두 점 A(6, 1), B(2, 5)에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하면 M(4, 3)

삼각형 ABC의 외접원의 중심이 선분 AB의 중점이면 선분 AB는 외접원의 지름이므로 이 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{2}$$

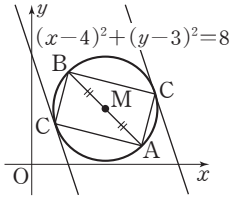
즉, 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 주어진 명제가 참이 되려면 점 C는 원 $\textcircled{1}$ 위의 점이어야 한다.

2단계 주어진 명제가 참이 되는 경우 찾기

그림에서 명제 '직선 $y = -3x + k$ 위의 어떤 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 선분 AB의 중점이다.'가 참이 되려면 직선 $y = -3x + k$ 와 원 $\textcircled{1}$ 이 적어도 한 점에서 만나야 한다.



3단계 주어진 명제가 참이 되도록 하는 k의 값의 범위 구하기

직선 $y = -3x + k$, 즉 $3x + y - k = 0$ 과 원 $\textcircled{1}$ 의 교점이 한 개 이상이면 이 직선과 원의 중심 M(4, 3) 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|12 + 3 - k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$|15 - k| \leq 4\sqrt{5}, -4\sqrt{5} \leq 15 - k \leq 4\sqrt{5}$$

$$\therefore 15 - 4\sqrt{5} \leq k \leq 15 + 4\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

4단계 자연수 k의 개수 구하기

이때 $8 < 4\sqrt{5} < 9$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$6 < k < 24$$

따라서 직선 $y = -3x + k$ 와 원 $\textcircled{1}$ 이 적어도 한 점에서 만나도록 하는 자연수 k는 7, 8, ..., 23의 17개이다.

04 답 ④

1단계 조건 (가) 이해하기

$$(가) \text{의 } (|a| + |b|)x \leq 2x - a^2 + b^2 \text{에서}$$

$$(|a| + |b| - 2)x \leq b^2 - a^2$$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $\rightarrow mx \leq n$ 이 항상 성립하려면 $m=0, n \geq 0$ 이다.

$$|a| + |b| - 2 = 0, b^2 - a^2 \geq 0$$

$$\therefore |a| + |b| = 2, a^2 \leq b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 조건 (나) 이해하기

(나)에서 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2 - b^2 < a^2 - 4$ '가 거짓이므로 이 명제의 부정 '모든 실수 x에 대하여 $x^2 - b^2 \geq a^2 - 4$ '는 참이다.

$$x^2 - b^2 \geq a^2 - 4 \text{에서 } x^2 \geq a^2 + b^2 - 4$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq a^2 + b^2 - 4$ 가 성립하려면 $a^2 + b^2 - 4 \leq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore a^2 + b^2 \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

3단계 $2a^2 - 3b^2$ 의 최댓값과 최솟값 구하기

$$|a| = X, |b| = Y \text{로 놓으면 } X \geq 0, Y \geq 0 \text{이고}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$X + Y = 2, X^2 \leq Y^2, X^2 + Y^2 \leq 4$$

이때 $Y = 2 - X$ 이므로

$$X^2 \leq Y^2 \text{에서 } X^2 \leq (2 - X)^2$$

$$4X \leq 4 \quad \therefore X \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$X^2 + Y^2 \leq 4 \text{에서 } X^2 + (2 - X)^2 \leq 4$$

$$2X^2 - 4X \leq 0, 2X(X - 2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq X \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 $0 \leq X \leq 1$

$$\therefore 2a^2 - 3b^2 = 2X^2 - 3Y^2 = 2X^2 - 3(2 - X)^2$$

$$= -X^2 + 12X - 12 = -(X - 6)^2 + 24$$

따라서 $X = 1$ 일 때 최댓값 -1 을 갖고, $X = 0$ 일 때 최솟값 -12 를 갖는다.

4단계 $M - m$ 의 값 구하기

따라서 $M = -1, m = -12$ 이므로

$$M - m = -1 - (-12) = 11$$

05 답 26

1단계 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 성질 파악하기

$f(x) = x^2 - 2x + 6 = (x - 1)^2 + 5$ 이므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

$$\text{한편 } g(x) = -|x - t| + 11 = \begin{cases} x - t + 11 & (x < t) \\ -x + t + 11 & (x \geq t) \end{cases} \text{이므로 함수}$$

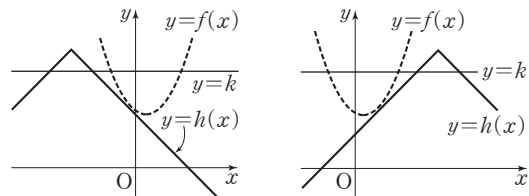
$y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = t$ 에 대하여 대칭이다.

2단계 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형 그리기

따라서 함수 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) < g(x)) \\ g(x) & (f(x) \geq g(x)) \end{cases}$ 의 그래프의 개형은 다음과

같이 세 가지로 나타난다.

(i) 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때, 모든 x의 값에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이므로 $h(x) = g(x)$ 이다.

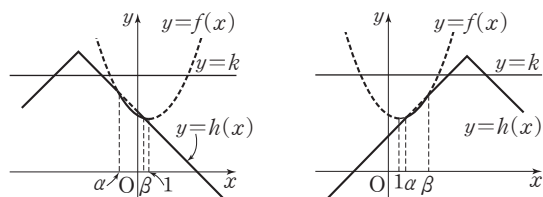


따라서 그림에서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점의 x좌표가

α, β ($\alpha < \beta \leq 1$ 또는 $1 \leq \alpha < \beta$)일 때,

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (x < \alpha) \\ f(x) & (\alpha \leq x < \beta) \\ g(x) & (x \geq \beta) \end{cases}$$



따라서 그림에서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다.

(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표가

α, β ($\alpha < 1 < \beta$)일 때

① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=11$ 일 때,

$$x^2-2x+6=-x+12 \text{에서}$$

$$x^2-x-6=0, (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

이때 $\beta > 1$ 이므로 $\beta=3$

$$g(3)=-|3-1|+11=9$$

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와

직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값은 5뿐이다.

② $f(\alpha) > f(\beta)$ 일 때,

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선

$y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나

도록 하는 실수 k 의 값은 5와

$f(\beta)$ ($5 < f(\beta) < 9$)이다.

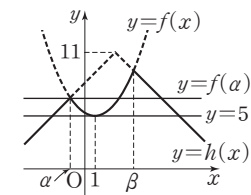
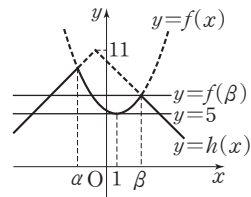
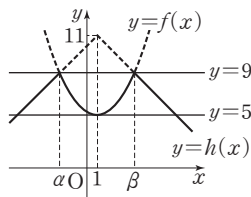
③ $f(\alpha) < f(\beta)$ 일 때,

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선

$y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나

도록 하는 실수 k 의 값은 5와

$f(\alpha)$ ($5 < f(\alpha) < 9$)이다.



3단계 명제가 참이 되도록 하는 k 의 값의 범위 구하기

(i), (ii), (iii)에서 명제 ‘어떤 실수 t 에 대하여 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 는 서로 다른 세 점에서 만난다.’가 참이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $5 < k < 9$

4단계 모든 자연수 k 의 값의 합 구하기

따라서 자연수 k 의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$$5+6+7+8=26$$

06 답 ③

1단계 두 조건 p, q 파악하기

$p: (x+2a)^2+(y-a)^2=0$ 에서 $x=-2a, y=a$

$q: x^2+kxy+ky^2=0$ 에서

$$\left(x+\frac{k}{2}y\right)^2+ky^2-\frac{k^2}{4}y^2=0, \left(x+\frac{k}{2}y\right)^2+\left(k-\frac{k^2}{4}\right)y^2=0$$

$$\text{이때 } k-\frac{k^2}{4}>0 \text{에서 } k^2-4k<0, k(k-4)<0$$

$$\therefore 0 < k < 4$$

$$\text{따라서 } 0 < k < 4 \text{이면 } x+\frac{k}{2}y=0, y^2=0 \text{이므로 } x=0, y=0$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$\neg. a=0 \text{이면 } P=\{(x, y) | (0, 0)\}$$

$$k=2 \text{ 이면 } Q=\{(x, y) | (0, 0)\}$$

즉, $P=Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\neg. a \neq 0 \text{ 이면 } P=\{(x, y) | (-2a, a) (a \neq 0)\}$$

$$0 < k < 4 \text{ 이면 } Q=\{(x, y) | (0, 0)\}$$

즉, $P \not\subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이 아니다.

4단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg. a \neq 0$ 이면 $P=\{(x, y) | (-2a, a) (a \neq 0)\}$ 이고 p 가 q 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이므로 $(-2a, a) \in Q$ 이어야 한다.

따라서 $x^2+kxy+ky^2=0$ 에 $x=-2a, y=a$ 를 대입하면

$$4a^2-2ka^2+ka^2=0, a^2(4-k)=0$$

$$\therefore k=4 (\because a \neq 0)$$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

07 답 ②

1단계 주어진 조건 이해하기

$$x+y+z=2 \text{에서 } y+z=2-x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=12 \text{에서 } y^2+z^2=12-x^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $y^2+z^2 \geq 0$ 이므로 $12-x^2 \geq 0, x^2 \leq 12$

$$\therefore -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

2단계 x 의 값의 범위 구하기

y, z 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2 \text{ (단, 등호는 } y=z \text{ 일 때 성립)}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면

$$2(12-x^2) \geq (2-x)^2$$

$$3x^2-4x-20 \leq 0, (x+2)(3x-10) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{10}{3} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 실수 x 의 값의 범위는

$$-2 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

3단계 x 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{10}{3}$, 최솟값은 -2 이므로 구하는 합은

$$\frac{10}{3} + (-2) = \frac{4}{3}$$

다른 풀이

$$x+y+z=2 \text{에서 } y+z=2-x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=12 \text{에서 } y^2+z^2=12-x^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $y^2+z^2 \geq 0$ 이므로 $12-x^2 \geq 0, x^2 \leq 12$

$$\therefore -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$y^2+z^2=(y+z)^2-2yz$ 이므로 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면

$$12-x^2=(2-x)^2-2yz$$

$$\therefore yz=x^2-2x-4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

이때 두 실수 y, z 를 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식

$$t^2-(y+z)t+yz=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D=(y+z)^2-4yz \geq 0$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ 을 대입하면

$$(2-x)^2-4(x^2-2x-4) \geq 0$$

$$3x^2-4x-20 \leq 0, (x+2)(3x-10) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{10}{3} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{5}$ 에서 실수 x 의 값의 범위는

$$-2 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{10}{3}$, 최솟값은 -2 이므로 구하는 합은

$$\frac{10}{3} + (-2) = \frac{4}{3}$$

idea
08 답 ③

1단계 $a + \frac{1}{a} = X, 2b + \frac{1}{2b} = Y$ 로 놓고 $X+Y$ 구하기

$a + \frac{1}{a} = X, 2b + \frac{1}{2b} = Y$ ($X > 0, Y > 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned} X+Y &= a + \frac{1}{a} + 2b + \frac{1}{2b} \\ &= (a+2b) + \frac{a+2b}{2ab} \\ &= 1 + \frac{1}{2ab} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

2단계 $X+Y$ 의 최솟값 구하기

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $a+2b \geq 2\sqrt{2ab}$ (단, 등호는 $a=2b$ 일 때 성립)

$$1 \geq 2\sqrt{2ab}, 2ab \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2ab} \geq 4$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } X+Y = 1 + \frac{1}{2ab} \geq 1 + 4 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

3단계 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(2b + \frac{1}{2b}\right)^2$ 의 최솟값 구하기

X, Y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2+1^2)(X^2+Y^2) \geq (X+Y)^2$ (단, 등호는 $X=Y$ 일 때 성립)

$$X^2+Y^2 \geq \frac{1}{2}(X+Y)^2$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(2b + \frac{1}{2b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{25}{2}$$

따라서 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(2b + \frac{1}{2b}\right)^2$ 의 최솟값은 $\frac{25}{2}$ 이다.

09 답 39

1단계 $S(A) \times S(B)$ 의 값 구하기

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A \cap B = \{5, 7\}$ 이므로

$$\begin{aligned} S(A) \times S(B) &= S(A \cup B) \times S(A \cap B) \\ &= (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7) \times (5 \times 7) \\ &= 2^2 \times 5^2 \times 6^2 \times 7^2 \\ &= 420^2 \end{aligned}$$

2단계 $S(A)+S(B)$ 의 최솟값 구하기

이때 $S(A) > 0, S(B) > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} S(A)+S(B) &\geq 2\sqrt{S(A) \times S(B)} \\ &= 2\sqrt{420^2} = 2 \times 420 \\ &= 840 \quad (\text{단, 등호는 } S(A)=S(B) \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

3단계 $S(A)+S(B)$ 의 값이 최소일 때, 두 집합 A, B 구하기

$S(A)+S(B)$ 의 값이 최소일 때, $S(A)=S(B)=420$ 이고

$S(A \cap B)=35$ 이므로

$$S(A-B)=S(B-A)=12$$

이때 $n(A) < n(B)$ 를 만족시켜야 하므로 두 집합 A, B 는

$$A = \{2, 5, 6, 7\}, B = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

$$\text{또는 } A = \{3, 4, 5, 7\}, B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은 19 또는 20이므로

$$p+q = 19+20 = 39$$

10 답 10

1단계 두 직선 l, m 의 방정식 구하기

두 직선 l, m 이 원 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ 의 넓이를 4등분 하므로

두 직선 l, m 은 원의 중심 $(1, 3)$ 을 지나고 서로 수직인 직선이다.

직선 l 의 기울기가 a ($0 < a < 3$)이므로 직선 m 의 기울기는

$$b = -\frac{1}{a}$$

따라서 두 직선 l, m 의 방정식은

$$l: y = a(x-1) + 3, m: y = -\frac{1}{a}(x-1) + 3$$

2단계 S_1, S_2 구하기

직선 l 의 x 절편과 y 절편은 각각 $1 - \frac{3}{a}, 3 - a$ 이므로 직선 l 과 x 축, y 축

으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{a} - 1 \right) (3 - a) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{9}{a} - 6 \right) \quad (\because 0 < a < 3)$$

직선 m 의 x 절편과 y 절편은 각각 $1 + 3a, 3 + \frac{1}{a}$ 이므로 직선 m 과 x 축,

y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_2 는

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(1 + 3a \right) \left(3 + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(9a + \frac{1}{a} + 6 \right) \quad (\because 0 < a < 3)$$

3단계 S_1+S_2 의 최솟값 구하기

$$\therefore S_1+S_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(a + \frac{9}{a} - 6 \right) + \left(9a + \frac{1}{a} + 6 \right) \right\} = \frac{1}{2} \left(10a + \frac{10}{a} \right)$$

이때 $10a > 0, \frac{10}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(10a + \frac{10}{a} \right) &\geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{10a \times \frac{10}{a}} \\ &= 10 \quad (\text{단, 등호는 } 10a = \frac{10}{a} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 S_1+S_2 의 최솟값은 10이다.

11 답 28

1단계 $\overline{PM} = x, \overline{PN} = y$ 로 놓고 x, y 사이의 관계식 구하기

$\overline{PM} = x, \overline{PN} = y$ 로 놓으면

$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle APC$ 에서

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times x + \frac{1}{2} \times 3 \times y$$

$$\frac{3}{2} = x + \frac{3}{2}y \quad \therefore 2x + 3y = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

2단계 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$ 의 최솟값 구하기

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}} = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} \text{이고}$$

$$3 \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} \right) = (2x+3y) \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} \right) \quad (\because \textcircled{㉠})$$

$$= 13 + \frac{6x}{y} + \frac{6y}{x}$$

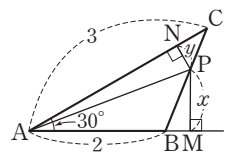
이때 $\frac{6x}{y} > 0, \frac{6y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 13 + \frac{6x}{y} + \frac{6y}{x} &\geq 13 + 2 \sqrt{\frac{6x}{y} \times \frac{6y}{x}} \\ &= 25 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{6x}{y} = \frac{6y}{x} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} \geq \frac{25}{3}$ 이므로 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값은 $\frac{25}{3}$ 이다.

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=3, q=25$ 이므로 $p+q=28$



01 ㄱ, ㄷ	02 ②	03 64	04 ④	05 5	06 21
07 ③	08 ⑤	09 ②	10 ⑤	11 ⑤	12 ⑤
13 ①	14 8	15 ①			

01 답 ㄱ, ㄷ

- ㄱ. $n(A \cap B) = 3$ 에서 $A \cap B = \{2, 3, 5\}$ 이므로
 $2 \in A, 3 \in A, 5 \in A$
 $2, 3, 5$ 가 k 의 약수이므로 k 는 30의 배수이다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 $k = 30$
- ㄴ. $n(A \cap B) = 2$ 에서
 $A \cap B = \{2, 3\}$ 또는 $A \cap B = \{2, 5\}$ 또는 $A \cap B = \{3, 5\}$
 (i) $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, $2 \in A, 3 \in A, 5 \notin A$
 따라서 k 는 6의 배수이고 5의 배수는 아니다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 6, 12, 18, 24, 36이다.
 (ii) $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때, $2 \in A, 5 \in A, 3 \notin A$
 따라서 k 는 10의 배수이고 3의 배수는 아니다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 10, 20, 40이다.
 (iii) $A \cap B = \{3, 5\}$ 일 때, $3 \in A, 5 \in A, 2 \notin A$
 따라서 k 는 15의 배수이고 2의 배수는 아니다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 15이다.
 (i), (ii), (iii)에서 k 는 6, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 36, 40의 9개이다.
- ㄷ. $n(A \cap B) = 1$ 에서
 $A \cap B = \{2\}$ 또는 $A \cap B = \{3\}$ 또는 $A \cap B = \{5\}$
 이때 $n(A)$ 의 값, 즉 k 의 약수의 개수가 홀수이려면 k 는 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.
 (i) $A \cap B = \{2\}$ 일 때, $2 \in A, 3 \notin A, 5 \notin A$
 따라서 k 는 2의 배수이고, 3과 5의 배수는 아니다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 4, 16이다.
 (ii) $A \cap B = \{3\}$ 일 때, $3 \in A, 2 \notin A, 5 \notin A$
 따라서 k 는 3의 배수이고, 2와 5의 배수는 아니다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 9이다.
 (iii) $A \cap B = \{5\}$ 일 때, $5 \in A, 2 \notin A, 3 \notin A$
 따라서 k 는 5의 배수이고, 2와 3의 배수는 아니다.
 이때 k 는 40 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 25이다.
 (i), (ii), (iii)에서 $n(A)$ 의 값이 홀수가 되도록 하는 k 는 4, 9, 16, 25의 4개이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 답 ②

(가)에서

$$\begin{aligned} (A \cup B^c) \cup B &= A \cup U \\ &= U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ B \cap (A \cup B^c) &= (B \cap A) \cup (B \cap B^c) \\ &= (B \cap A) \cup \emptyset \\ &= A \cap B = \{5, 6\} \\ \therefore B - A &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

(나)에서

$$\begin{aligned} B - (A \cap X) &= B \cap (A \cap X)^c \\ &= B \cap (A^c \cup X^c) \\ &= (B \cap A^c) \cup (B \cap X^c) \\ &= \{1, 2\} \cup (B - X) \quad \xrightarrow{B-A} \end{aligned}$$

이때 집합 $B - (A \cap X)$ 의 원소의 개수가 2이므로
 $B - X \subset \{1, 2\}$

$$\therefore 5 \in X, 6 \in X$$

따라서 $\{5, 6\} \subset X \subset U$ 이므로 집합 X 의 모든 원소의 합의 최댓값은
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때이고 최솟값은 $X = \{5, 6\}$ 일 때이다.

$$\therefore M = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, m = 5 + 6 = 11$$

$$\therefore M + m = 32$$

03 답 64

$$\begin{aligned} (X - A^c)^c \cup (A - X) &= (X \cap A)^c \cup (A \cap X^c) \\ &= (X^c \cup A^c) \cup (A \cap X^c) \\ &= \{(X^c \cup A^c) \cup A\} \cap \{(X^c \cup A^c) \cup X^c\} \\ &= \{X^c \cup (A^c \cup A)\} \cap \{(X^c \cup X^c) \cup A^c\} \\ &= (X^c \cup U) \cap (X^c \cup A^c) \\ &= U \cap (X^c \cup A^c) \\ &= X^c \cup A^c \\ &= (X \cap A)^c \end{aligned}$$

즉, $(X \cap A)^c = A^c$ 이므로

$$X \cap A = A \quad \therefore A \subset X$$

이때 $A = \{1, 2, 5, 10\}$ 이므로 집합 X 는 1, 2, 5, 10을 모두 원소로 갖는 전체집합 U 의 부분집합이다.

따라서 구하는 부분집합 X 의 개수는

$$2^{10-4} = 2^6 = 64$$

04 답 ④

$A^c = \{3, 4, 5, 6\}$ 이고 $A^c \cap B = \{3, 4\}$ 이므로 다음과 같이 집합 $A^c \cap B$ 의 원소가 집합 X 에 포함되는 경우와 그렇지 않은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $3 \in X$ 또는 $4 \in X$ 인 경우

3을 원소로 갖는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

4를 원소로 갖는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

3, 4를 모두 원소로 갖는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

따라서 3 또는 4를 원소로 갖는 집합 X 의 개수는

$$32 + 32 - 16 = 48$$

(ii) $3 \notin X$ 이고 $4 \notin X$ 인 경우

3, 4를 제외한 집합 A^c 의 원소는 5, 6이고 3, 4를 제외한 집합 B 의 원소는 2이므로 집합 X 는 3, 4를 원소로 갖지 않고 2, 5 또는 2, 6을 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X 는 $\{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}$ 의 6개이다.

(i), (ii)에서 구하는 부분집합 X 의 개수는

$$48 + 6 = 54$$

05 답 5

모바일 앱 A와 모바일 앱 B를 이용하는 사람의 집합을 각각 A, B라 하면

$$n(A \cup B) = 90$$

(가)에서 $n(A) + n(B) = 105$ 이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 105 - 90 = 15$$

따라서 두 모바일 앱 A, B 중 한 가지만 이용하는 사람의 수는

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 90 - 15 = 75$$

(나)에서 두 모바일 앱 A, B 중 한 가지만 이용하는 남자의 수는 40, 두 모바일 앱 A, B 중 한 가지만 이용하는 여자의 수는 35이다.

따라서 모바일 앱 A 또는 B를 이용하는 여자의 수는 40이고 두 모바일 앱 A, B 중 한 가지만 이용하는 여자의 수는 35이므로 두 모바일 앱 A, B를 모두 이용하는 여자의 수는

$$40 - 35 = 5$$

다른 풀이

(나)에서 두 모바일 앱 A, B 중 한 가지만 이용하는 여자의 수를 x 라 하면 두 모바일 앱 A, B 중 한 가지만 이용하는 남자의 수는 $x+5$ 이다. 또 두 모바일 앱 A, B를 모두 이용하는 여자의 수는 $40-x$ 이고, 두 모바일 앱 A, B를 모두 이용하는 남자의 수는 $50-(x+5)=45-x$ 이다.

(가)에서

$$\{(x+5) + 2(45-x)\} + \{x + 2(40-x)\} = 105$$

$$(-x+95) + (-x+80) = 105$$

$$2x = 70 \quad \therefore x = 35$$

따라서 두 모바일 앱 A, B를 모두 이용하는 여자의 수는

$$40 - 35 = 5$$

06 답 21

$3 \in X$ 이므로 (나)에서 $\frac{3+p}{2} \in X$

(i) $\frac{3+p}{2}$ 가 홀수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{3+p}{2} + p}{2} \in X \text{이므로 } \frac{3+3p}{4} \in X$$

이때 $n(X) = 2$ 이므로

$$\frac{3+3p}{4} = 3 \text{ 또는 } \frac{3+3p}{4} = \frac{3+p}{2}$$

$$\frac{3+3p}{4} = 3 \text{에서 } p=3, \frac{3+3p}{4} = \frac{3+p}{2} \text{에서 } p=3$$

따라서 $p=3$ 일 때, 집합 X 는 3을 원소로 갖는다.

이때 집합 X 의 나머지 한 원소를 a 라 하면 a 는 짝수이므로

$$\frac{a}{2} = 3 \text{에서 } a=6 \quad \text{홀수인 경우는 } p=3 \text{인 경우에 모두 포함된다.}$$

따라서 $p=3$ 일 때, $X = \{3, 6\}$

(ii) $\frac{3+p}{2}$ 가 짝수일 때,

$$(나)에서 \frac{\frac{3+p}{2} + p}{2} \in X \text{이므로 } \frac{3+p}{4} \in X$$

이때 $n(X) = 2$ 이므로

$$\frac{3+p}{4} = 3 \text{ 또는 } \frac{3+p}{4} = \frac{3+p}{2}$$

$$\frac{3+p}{4} = 3 \text{에서 } p=9, \frac{3+p}{4} = \frac{3+p}{2} \text{에서 } p=-3$$

이때 p 는 자연수이므로 $p=9$

$p=9$ 일 때, (가)에서 $\frac{3+9}{2} = 6 \in X, \frac{6}{2} = 3 \in X$ 이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $p=9$ 일 때, $X = \{3, 6\}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 p 의 값은 3, 9이고 $X = \{3, 6\}$

$$\therefore m = 3+9=12, n = 3+6=9 \quad \therefore m+n=21$$

07 답 ③

집합 A_k 는 전체집합 U 의 부분집합이므로 x 는 30 이하의 자연수이고 $y-k$ 는 48의 약수이다.

이때 $y \in U$ 에서 $y-k < 30$ 이므로 $x \neq 1$

또 $x \in U$ 에서 $x \neq 48$ 이므로 $y-k \neq 1$

따라서 $y-k$ 의 값에 따른 x 의 값은 다음 표와 같다.

$y-k$	2	3	4	6	8	12	16	24
x	24	16	12	8	6	4	3	2

$$\therefore A_k \subset \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$$

$$\frac{48-x}{6} \in U \text{에서 } 48-x \text{는 6의 배수이므로}$$

$$B = \{6, 12, 18, 24, 30\} \quad \therefore A_k \cap B^c \subset \{2, 3, 4, 8, 16\}$$

(i) $2 \in A_k \cap B^c$, 즉 $2 \in A_k$ 일 때,

$$x=2, y-k=24 \text{에서 } y=24+k \leq 30 \text{이므로 } k \leq 6$$

(ii) $3 \in A_k \cap B^c$, 즉 $3 \in A_k$ 일 때,

$$x=3, y-k=16 \text{에서 } y=16+k \leq 30 \text{이므로 } k \leq 14$$

(iii) $4 \in A_k \cap B^c$, 즉 $4 \in A_k$ 일 때,

$$x=4, y-k=12 \text{에서 } y=12+k \leq 30 \text{이므로 } k \leq 18$$

(iv) $8 \in A_k \cap B^c$, 즉 $8 \in A_k$ 일 때,

$$x=8, y-k=6 \text{에서 } y=6+k \leq 30 \text{이므로 } k \leq 24$$

(v) $16 \in A_k \cap B^c$, 즉 $16 \in A_k$ 일 때,

$$x=16, y-k=3 \text{에서 } y=3+k \leq 30 \text{이므로 } k \leq 27$$

(i)~(v)에서

$$k \leq 6 \text{일 때, } A_k \cap B^c = \{2, 3, 4, 8, 16\}$$

$$6 < k \leq 14 \text{일 때, } A_k \cap B^c = \{3, 4, 8, 16\}$$

$$14 < k \leq 18 \text{일 때, } A_k \cap B^c = \{4, 8, 16\}$$

$$18 < k \leq 24 \text{일 때, } A_k \cap B^c = \{8, 16\}$$

$$24 < k \leq 27 \text{일 때, } A_k \cap B^c = \{16\}$$

따라서 $n(A_k \cap B^c) = 2$ 가 되도록 하는 자연수 k 는 19, 20, 21, 22, 23, 24의 6개이다.

08 답 ⑤

ㄱ. $a=2$ 일 때,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x | 1 \leq x \leq 3\} \cup \{x | 2 \leq x \leq 4\} \cup \{x | 3 \leq x \leq 5\} = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$$

따라서 집합 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 의 원소 중 자연수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

ㄴ. 두 자연수 $l, m (l < m)$ 에 대하여 두 집합 A_l, A_m 이 서로소이면

$$A_l \cap A_m = \emptyset, \text{ 즉 } \{x | l \leq x \leq l+a\} \cap \{x | m \leq x \leq m+a\} = \emptyset \text{이므로 } l+a < m, \text{ 즉 } m-l > a \text{이다.}$$

ㄷ. $a=3$ 이면 $A_k = \{x | k \leq x \leq k+3, x \text{는 실수}\}$

$A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap A_{k+3} \cap A_{k+4} = \emptyset$ ($k=1, 2, 3, \dots, 12$)이고

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{4\}$, $A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 = \{8\}$,

$A_9 \cap A_{10} \cap A_{11} \cap A_{12} = \{12\}$, $A_{13} \cap A_{14} \cap A_{15} \cap A_{16} = \{16\}$ 이므로

$k \leq 16$ 인 모든 자연수 k 에 대하여 모든 집합 A_k 와 서로소가 아닌 유한집합 중 원소의 개수가 최소인 집합은 $\{4, 8, 12, 16\}$ 이고, 이 집합의 모든 원소의 합은

$$4+8+12+16=40$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09 답 ②

$f(x) = x^2 - 6x + n + 4 = (x-3)^2 + n - 5$ 라 할 때, $0 \leq x \leq n$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이라면 $0 \leq x \leq n$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

(i) $n < 3$ 일 때,

$0 \leq x \leq n$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=n$ 일 때 최솟이므로 $f(n) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } n^2 - 5n + 4 \geq 0 \text{이므로 } (n-1)(n-4) \geq 0$$

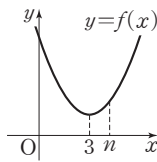
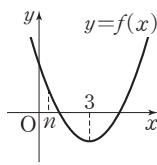
$$\therefore n \leq 1 \text{ 또는 } n \geq 4$$

그런데 $n < 3$ 이므로 $n \leq 1$

(ii) $n \geq 3$ 일 때,

$0 \leq x \leq n$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최솟이므로 $f(3) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } n - 5 \geq 0 \text{이므로 } n \geq 5$$



(i), (ii)에서 $n \leq 1$ 또는 $n \geq 5$

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n 은 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10의 7개이다.

10 답 ⑤

네 조건 p, q, r, s 를 다음과 같이 정하자.

p : 가격이 비싸다. q : 선호도가 높다.

r : 가성비가 높다. s : 판매량이 많다.

이때 시장 조사의 결과 ㉠, ㉡, ㉢를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{㉠ } p \rightarrow \sim q$$

$$\text{㉡ } q \rightarrow r$$

$$\text{㉢ } r \rightarrow s$$

각각의 보기를 네 조건 p, q, r, s 로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{① } p \rightarrow \sim r$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\text{② } r \rightarrow q$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\text{③ } s \rightarrow q$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\text{④ } \sim r \rightarrow \sim s$$

참, 거짓을 알 수 없다.

$$\text{⑤ } q \rightarrow (s \text{이고 } \sim p)$$

두 명제 $q \rightarrow r, r \rightarrow s$ 가 모두 참이므로 명제 $q \rightarrow s$ 도 참이다.

또 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 대우 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 명제 $q \rightarrow (s \text{이고 } \sim p)$ 는 참이다.

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

11 답 ⑤

$$p: a^3b^2+ab^4=0 \text{에서 } ab^2(a^2+b^2)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } b=0$$

$$q: a^2+ab+b^2 \leq 0 \text{에서 } \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \leq 0$$

$$\text{즉, } a = -\frac{b}{2}, b=0 \text{이므로 } a=b=0$$

$r: |a+b| = |a| + |b|$ 에서

$$a=0 \text{ 또는 } b=0 \text{ 또는 } a>0, b>0 \text{ 또는 } a<0, b<0$$

ㄱ. $q \Rightarrow r$ 이므로 q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $p \Rightarrow r$ 이므로 r 는 p 이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. p 이고 r 이면 $a=0$ 또는 $b=0$

즉, $q \Rightarrow (p \text{이고 } r)$ 이므로 $(p \text{이고 } r)$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 답 ⑤

직선 PQ의 기울기는 $\frac{\frac{4}{a} + \frac{4}{b}}{\frac{4}{a} + \frac{4}{b}} = \frac{4}{ab}$ 이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선과

평행하고 점 R(-a, b)를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4}{ab}(x+a) + b \quad \therefore S\left(0, b + \frac{4}{b}\right)$$

또 $H_1(a, 0), H_2\left(0, \frac{4}{a}\right)$ 이므로

$$\overline{OS} + \overline{OH_1} + \overline{OH_2} = b + \frac{4}{b} + a + \frac{4}{a} = \left(a + \frac{4}{a}\right) + \left(b + \frac{4}{b}\right)$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } a = \frac{4}{a} \text{일 때 성립})$$

$$b + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{b \times \frac{4}{b}} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } b = \frac{4}{b} \text{일 때 성립})$$

$$\therefore \overline{OS} + \overline{OH_1} + \overline{OH_2} \geq 4 + 4 = 8$$

따라서 $\overline{OS} + \overline{OH_1} + \overline{OH_2}$ 의 최솟값은 8이다.

13 답 ①

$f(x) = -4x^2 + \frac{5}{2}$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

한편 $g(x) = |x-t| + 1 = \begin{cases} -x+t+1 & (x < t) \\ x-t+1 & (x \geq t) \end{cases}$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의

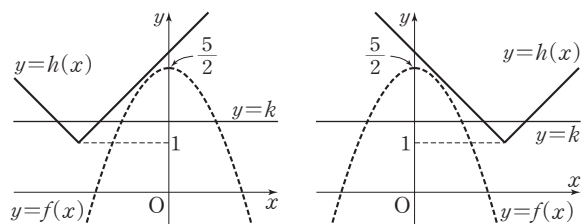
그래프는 직선 $x=t$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (g(x) < f(x)) \\ g(x) & (g(x) \geq f(x)) \end{cases}$ 의 그래프의 개형은 다음과

같이 세 가지로 나타난다.

(i) 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,

모든 x 의 값에 대하여 $f(x) \leq g(x)$ 이므로 $h(x) = g(x)$ 이다.

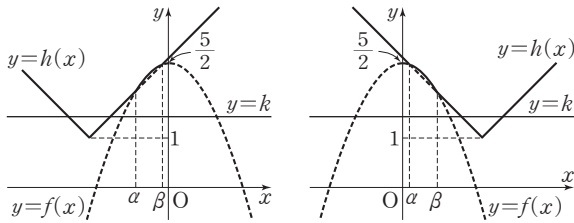


따라서 그림에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표가

α, β ($\alpha < \beta \leq 0$ 또는 $0 \leq \alpha < \beta$)일 때,

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (x < \alpha) \\ f(x) & (\alpha \leq x < \beta) \\ g(x) & (x \geq \beta) \end{cases}$$



따라서 그림에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표가

α, β ($\alpha < 0 < \beta$)일 때

① $f(\alpha) = f(\beta)$, 즉 $t=0$ 일 때,

$$-4x^2 + \frac{5}{2} = x + 1 \text{에서}$$

$$8x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(4x+3)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

이때 $\beta > 0$ 이므로

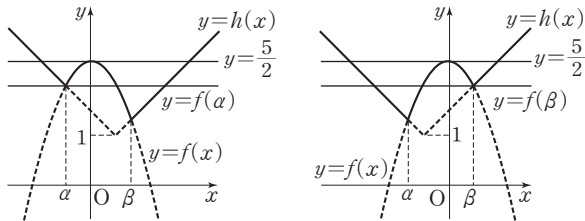
$$\beta = \frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < k \leq f(0)$$

$$\therefore \frac{3}{2} < k \leq \frac{5}{2}$$

② $f(\alpha) > f(\beta)$ 또는 $f(\alpha) < f(\beta)$ 일 때,



함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$f(\alpha) > f(\beta) \text{일 때, } f(\alpha) \leq k \leq f(0)$$

$$\therefore f(\alpha) \leq k \leq \frac{5}{2}$$

$$f(\alpha) < f(\beta) \text{일 때, } f(\beta) \leq k \leq f(0)$$

$$\therefore f(\beta) \leq k \leq \frac{5}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 명제 ‘어떤 실수 t 에 대하여 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수는 3 이상이다.’가 참이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$\frac{3}{2} < k \leq \frac{5}{2} \left(\because f(\alpha) > \frac{3}{2}, f(\beta) > \frac{3}{2} \right)$$

따라서 자연수 k 의 값은 2이다.

14 답 8

두 직선 l, m 이 원 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$ 의 넓이를 4등분 하므로 두 직선 l, m 은 원의 중심 $(2, 4)$ 를 지나고 서로 수직인 직선이다.

직선 l 의 기울기가 t ($t > 0$)이므로 직선 m 의 기울기는

$$-\frac{1}{t}$$

따라서 직선 m 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{t}(x-2) + 4$$

직선 m 의 x 절편과 y 절편이 각각 $2+4t, 4+\frac{2}{t}$ 이므로 직선 m 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{1}{2} \times (2+4t) \times \left(4+\frac{2}{t}\right) \\ = 2\left(4t + \frac{1}{t} + 4\right) \quad (\because t > 0)$$

이때 $t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{4t \times \frac{1}{t}} = 4 \quad \left(\text{단, 등호는 } 4t = \frac{1}{t} \text{일 때 성립} \right)$$

이때 $4t + \frac{1}{t}$ 의 값이 최소인 경우는 $4t = \frac{1}{t}$, 즉 $t = \frac{1}{2}$ 일 때이므로 $f(t)$ 의 최솟값은

$$2\left(4t + \frac{1}{t} + 4\right) = 2 \times 8 = 16$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, k = 16$ 이므로

$$ak = 8$$

15 답 ①

삼각형 ABC 의 넓이를 S 라 하고

$\overline{DE} = x, \overline{DF} = y$ 로 놓으면

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DE} + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DF}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times x + \frac{1}{2} \times 6 \times y$$

$$\therefore S = 4x + 3y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(4x + 3y) \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} \right) = 25 + 12 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

이때 $\frac{x}{y} > 0, \frac{y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$25 + 12 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq 25 + 24 \sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}} \\ = 49 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \text{일 때 성립} \right)$$

$$\therefore (4x + 3y) \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} \right) \geq 49$$

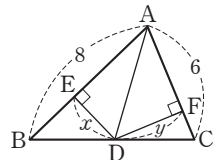
위의 식에 ①을 대입하면

$$S \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} \right) \geq 49 \quad \therefore \frac{4}{x} + \frac{3}{y} \geq \frac{49}{S}$$

따라서 $\frac{4}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값은 $\frac{49}{S}$ 이다.

이때 $\frac{4}{\overline{DE}} + \frac{3}{\overline{DF}}$, 즉 $\frac{4}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값이 $\frac{7}{3}$ 이므로

$$\frac{49}{S} = \frac{7}{3} \quad \therefore S = 21$$



step 1 핵심 문제

| 40~41쪽

01 ① 02 $\frac{5}{6}$ 03 ③ 04 9 05 5 06 ②

07 ① 08 -1 09 ④ 10 ③

11 $k < -2$ 또는 $k > 2$ 12 4

01 답 ①

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이어야 하므로

$$2x^2 - x = 2x - 1, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2x-1)(x-1)=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{\frac{1}{2}, 1\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로구하는 집합 X 의 개수는 $\hookrightarrow \{\frac{1}{2}\}, \{1\}, \{\frac{1}{2}, 1\}$

$$2^2 - 1 = 3$$

02 답 $\frac{5}{6}$

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(1+1)=f(1)+f(1)$$

$$\therefore f(2)=2f(1)$$

①의 양변에 $x=1, y=2$ 를 대입하면

$$f(1+2)=f(1)+f(2)$$

$$\therefore f(3)=f(1)+f(2)=f(1)+2f(1)=3f(1)$$

$$f(1)+f(2)+f(3)=10 \text{이므로}$$

$$f(1)+2f(1)+3f(1)=10, \quad 6f(1)=10$$

$$\therefore f(1)=\frac{5}{6}$$

①의 양변에 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f(1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

03 답 ③

 $x \geq 2$ 일 때, $f(x) = -x^2 - 4x + k = -(x+2)^2 + 4 + k$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $f(2)$ 를 갖는다.따라서 집합 $X = \{x | x \geq 2\}$ 에서 집합 $Y = \{y | y \leq 8\}$ 로의 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이라면 $f(2)=8$ 이어야 하므로

$$-(2+2)^2 + 4 + k = 8$$

$$\therefore k=20$$

04 답 9

함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 $f(x)=x$ (i) $x < 0$ 일 때, $x = -1$ (ii) $0 \leq x < 4$ 일 때,

$$-x+4=x \text{에서 } 2x=4 \quad \therefore x=2$$

(iii) $x \geq 4$ 일 때,

$$x^2 - 5x - 16 = x \text{에서 } x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x+2)(x-8)=0 \quad \therefore x=8 \quad (\because x \geq 4)$$

(i), (ii), (iii)에서 $X = \{-1, 2, 8\}$ 이므로

$$a+b+c = -1+2+8=9$$

05 답 5

함수 h 는 항등함수이므로 $h(3)=3$

$$\therefore f(0)=g(1)=h(3)=3$$

함수 f 는 상수함수이므로 $f(1)=f(2)=f(3)=f(0)=3$

$$g(0)g(1)+g(2)g(3)=f(3) \text{에서}$$

$$3g(0)+g(2)g(3)=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 함수 g 는 일대일대응이고 $g(1)=3$ 이므로

$$\{g(0), g(2), g(3)\} = \{0, 1, 2\}$$

따라서 ①을 만족시키려면

$$g(0)=1, g(2)=2, g(3)=0 \text{ 또는 } g(0)=1, g(2)=0, g(3)=2$$

$$\therefore f(1)+g(2)+g(3)=5$$

06 답 ②

 $f(a)=b$ 라 하면 $(f \circ f)(a)=4$ 에서

$$f(f(a))=f(b)=4$$

주어진 그래프에서 $f(b)=4$ 를 만족시키는 b 의 값은

$$b=2 \text{ 또는 } b=4$$

$$\therefore f(a)=2 \text{ 또는 } f(a)=4$$

(i) $f(a)=2$ 일 때, $a=3$ (ii) $f(a)=4$ 일 때, $a=2$ 또는 $a=4$ (i), (ii)에서 $a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$ 따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$2+3+4=9$$

07 답 ①

$$f^1(x)=f(x)=-x+2$$

$$f^2(x)=(f \circ f)(x)=f(f(x))=-(-x+2)+2=x$$

:

$$\therefore f^n(x) = \begin{cases} -x+2 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{10}(2)+f^{11}(2)=2+(-2+2)=2$$

08 답 -1

$$f(2)=-1$$

$$f^2(2)=(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(-1)=1$$

$$f^3(2)=(f \circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(1)=0$$

$$f^4(2)=(f \circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(0)=-2$$

$$f^5(2)=(f \circ f^4)(2)=f(f^4(2))=f(-2)=2$$

$$f^6(2)=(f \circ f^5)(2)=f(f^5(2))=f(2)=-1$$

:

즉, $f^n(2)$ 의 값은 $-1, 1, 0, -2, 2$ 가 이 순서대로 반복된다.

$$\therefore f(2)+f^2(2)+f^3(2)+\dots+f^{16}(2)$$

$$=3 \times \{-1+1+0+(-2)+2\} + (-1)$$

$$=-1$$

09 답 ④

함수 $f(x)$ 의 함숫값을 구하면
 $f(0)=0, f(1)=2, f(2)=4, f(3)=1, f(4)=3$
 함수 $g: X \rightarrow X$ 는 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족시키므로
 $(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0)$ 에서 $f(g(0)) = g(f(0))$
 $f(0)=0$ 이므로 $f(g(0)) = g(0) \quad \therefore g(0)=0$
 $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(3)$ 에서 $f(g(3)) = g(f(3))$
 $f(3)=1$ 이고 $g(1)=3$ 이므로 $f(g(3))=3$
 이때 $f(4)=3$ 이므로 $g(3)=4$
 $\therefore g(0)+g(3)=0+4=4$

10 답 ③

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 에서 $f(f(4)) = 4$
 이때 $f(4)=5$ 이므로 $f(5)=4$
 $(f \circ f)(x) = x$ 이라면 집합 X 의 임의의 두 원소
 a, b ($a=1, 2, 3, b=1, 2, 3$)에 대하여 $a=b$ 이면 $f(a)=a, a \neq b$ 이면
 $f(a)=b, f(b)=a$ 이어야 한다.
 (i) $f(a)=a$ 인 경우
 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$ 이므로 함수 f 의 개수는 1
 (ii) $f(a)=b, f(b)=a$ ($a \neq b$)인 경우
 a, b 가 될 수 있는 수는 (1, 2), (1, 3), (2, 3)의 3가지이고, 이 각
 각에 대하여 나머지 1개의 원소는 자기 자신에 대응하면 된다. 즉,
 $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=3$
 또는 $f(1)=3, f(2)=2, f(3)=1$
 또는 $f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2$
 이므로 함수 f 의 개수는 3
 (i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는
 $1+3=4$

11 답 $k < -2$ 또는 $k > 2$

$f(x) = |2x+1| + kx - 3$ 에서
 (i) $2x+1 < 0$, 즉 $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,
 $f(x) = -(2x+1) + kx - 3 = (k-2)x - 4$
 (ii) $2x+1 \geq 0$, 즉 $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,
 $f(x) = (2x+1) + kx - 3 = (k+2)x - 2$
 (i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} (k-2)x - 4 & \left(x < -\frac{1}{2}\right) \\ (k+2)x - 2 & \left(x \geq -\frac{1}{2}\right) \end{cases} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 는 일대일대응이어야 한다.
 $\dots\dots\dots \text{배점 20\%}$
 따라서 두 직선 $y = (k-2)x - 4, y = (k+2)x - 2$ 의 기울기의 부호가
 서로 같아야 하므로
 $(k-2)(k+2) > 0$
 $\therefore k < -2$ 또는 $k > 2 \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재한다. $\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

12 답 4

$(f \circ f)^{-1}(10) = (f^{-1} \circ f^{-1})(10) = f^{-1}(f^{-1}(10))$
 $f^{-1}(10) = a$ 라 하면 $f(a) = 10$
 $x > 4$ 일 때, $f(x) = x+3 > 7$ 이므로
 $a+3=10 \quad \therefore a=7$
 $f^{-1}(7) = b$ 라 하면 $f(b) = 7$
 $x \leq 4$ 일 때, $f(x) = 2x-1 \leq 7$ 이므로
 $2b-1=7 \quad \therefore b=4$
 $\therefore (f \circ f)^{-1}(10) = (f^{-1} \circ f^{-1})(10)$
 $= f^{-1}(f^{-1}(10))$
 $= f^{-1}(7) = 4$

다른 풀이

$y = 2x - 1$ ($x \leq 4$)이라 하면
 $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ ($y \leq 7$)
 x 와 y 를 서로 바꾸면
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ($x \leq 7$)
 $y = x + 3$ ($x > 4$)이라 하면
 $x = y - 3$ ($y > 7$)
 x 와 y 를 서로 바꾸면
 $y = x - 3$ ($x > 7$)
 $\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \leq 7) \\ x - 3 & (x > 7) \end{cases}$
 $\therefore (f \circ f)^{-1}(10) = (f^{-1} \circ f^{-1})(10)$
 $= f^{-1}(f^{-1}(10))$
 $= f^{-1}(7) = 4$

step 2 고난도 문제

| 42~46쪽

01 5	02 ㄱ, ㄴ, ㄷ	03 ④	04 29	05 ①
06 8	07 34	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 $-4 < k < 0$ 또는 $k > 1$	12 $1 \leq m \leq 2$	13 11		
14 ③	15 ①	16 6	17 3	18 12
19 ④				
20 24	21 ①	22 ⑤	23 ③	24 70
25 $-\frac{98}{3}$				
26 $\frac{49}{8}$	27 1			

01 답 5

$f(x) = g(x)$ 에서
 x 가 유리수일 때,
 $x^2 = kx, x(x-k) = 0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=k$
 x 가 무리수일 때,
 $-x^2 = kx, x(x+k) = 0$
 $\therefore x = -k$ ($\because x$ 는 무리수)

(i) $k=0$ 인 경우

x 가 유리수일 때, $x=0$

x 가 무리수일 때, 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $A_0=1$

(ii) $k=1$ 인 경우

x 가 유리수일 때, $x=0$ 또는 $x=1$

x 가 무리수일 때, 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $A_1=2$

(iii) $k=\sqrt{3}$ 인 경우

x 가 유리수일 때, $x=0$

x 가 무리수일 때, $x=-\sqrt{3}$

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $A_{\sqrt{3}}=2$

(i), (ii), (iii)에서

$$A_0+A_1+A_{\sqrt{3}}=1+2+2=5$$

02 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

α, β 가 삼차방정식 $x^3+1=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^3=-1, \beta^3=-1$$

$x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$ 에서 $\alpha \neq -1, \beta \neq -1$ 이므로 α, β 는 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 서로 다른 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$$

$$\neg. f(1)=\alpha+\beta=1$$

$$f(2)=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2=-1$$

$$\therefore f(1)+f(2)=0$$

$$\neg. f(n+3)=\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}$$

$$=\alpha^n \times \alpha^3 + \beta^n \times \beta^3$$

$$=-(\alpha^n+\beta^n) (\because \alpha^3=\beta^3=-1)$$

$$=-f(n)$$

$$\therefore f(n+3)+f(n)=0$$

ㄷ. $\neg$ 에서 $f(1)=1, f(2)=-1$ 이고

$$f(3)=\alpha^3+\beta^3=-1+(-1)=-2$$

이때 $\neg$ 에서 $f(n+3)=-f(n)$ 이므로

$$f(4)=-f(1)=-1, f(5)=-f(2)=1,$$

$$f(6)=-f(3)=2, f(7)=-f(4)=1,$$

$$f(8)=-f(5)=-1, f(9)=-f(6)=-2, \dots$$

따라서 함수 $f(n)$ 의 치역은 $\{-2, -1, 1, 2\}$

$$x^4-5x^2+4=0 \text{에서 } (x^2-1)(x^2-4)=0$$

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore \{x|x^4-5x^2+4=0\}=\{-2, -1, 1, 2\}$$

따라서 함수 $f(n)$ 의 치역은 집합 $\{x|x^4-5x^2+4=0\}$ 과 같다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

개념 NOTE

• 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

• $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy, x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

03 답 ④

1은 집합 X 의 원소 중 가장 작은 수이므로

$$f(2) \geq 1, f(3) \geq 1, f(4) \geq 1$$

(i) $f(2) \geq 1$ 이므로 $f(2) \geq f(1)$

$$f(1)=3 \text{에서 } f(1) \geq 2 \text{이므로 } f(1) \geq f(2)$$

$$\therefore f(2)=f(1)=3$$

(ii) $f(3) \geq 1$ 이므로 $f(3) \geq f(1)$

$$f(1)=3 \text{에서 } f(1) \geq 3 \text{이므로 } f(1) \geq f(3)$$

$$\therefore f(3)=f(1)=3$$

(iii) $f(4) \geq 1$ 이므로 $f(4) \geq f(1)=3$

$$\therefore f(4)=3 \text{ 또는 } f(4)=4$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(2)+f(4)$ 의 최솟값은

$$3+3=6$$

04 답 29

$$x < 1 \text{일 때, } f(x)=x^2+ax+5=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+5-\frac{a^2}{4}$$

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이므로 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표인 $-\frac{a}{2}$ 가 1보다

크거나 같아야 한다.

즉, $-\frac{a}{2} \geq 1$ 이어야 하므로 $a \leq -2$

함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이려면 $x=1$ 일

때 $y=x^2+ax+5, y=-x+b$ 의 값이 같아야 하므로

$$1+a+5=-1+b \quad \therefore b=a+7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a^2+ab=15$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$a^2+a(a+7)=15, 2a^2+7a-15=0$$

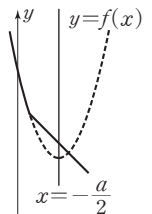
$$(a+5)(2a-3)=0$$

$$\therefore a=-5 \text{ 또는 } a=\frac{3}{2}$$

그런데 $a \leq -2$ 이므로 $a=-5$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=2$

$$\therefore a^2+b^2=(-5)^2+2^2=29$$



idea

05 답 ①

함수 f 가 항등함수이므로

$$f(x)=x$$

함수 g 가 상수함수이므로

$$g(x)=m \quad (1 \leq m \leq n, m \text{은 자연수})$$

$$\therefore f(n) \times \{g(1)+g(2)+g(3)+\dots+g(n)\}$$

$$=n \times (m+m+m+\dots+m)$$

$$=n \times mn$$

$$=mn^2$$

이때 $mn^2=768=3 \times 16^2$ 이므로

$$m=3, n=16 \quad (\because m \leq n)$$

$$\therefore g(n) \times \{f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\dots+(-1)^{n+1}f(n)\}$$

$$=g(16) \times \{f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\dots+f(15)-f(16)\}$$

$$=3 \times (1-2+3-4+\dots+15-16)$$

$$=3 \times \{(1-2)+(3-4)+\dots+(15-16)\}$$

$$=3 \times (-1) \times 8$$

$$=-24$$

06 답 8

(가)에서 함수 f 는 일대일대응이므로 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값이 될 수 있는 경우를 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 으로 나타내면

$(3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4), (5, 4, 3)$

(i) $(3, 4, 5)$ 또는 $(5, 4, 3)$ 인 경우

순서쌍 $(x, f(x)) (x=1, 2, 3)$ 를 좌표평면 위에 나타내면 세 점은 한 직선 위에 있다.

그런데 이차함수의 그래프는 직선과 최대 2개의 점에서 만날 수 있으므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $(3, 5, 4)$ 또는 $(4, 5, 3)$ 인 경우

$f(x)=ax^2-bx+10 (a>0)$ 에서 $f(2)$ 의 값이 가장 크므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $(4, 3, 5)$ 인 경우

$f(1)=4, f(2)=3, f(3)=5$ 에서

$a-b=-6, 4a-2b=-7, 9a-3b=-5$

이를 만족시키는 a, b 는 존재하지 않는다.

(iv) $(5, 3, 4)$ 인 경우

$f(1)=5, f(2)=3, f(3)=4$ 에서

$a-b=-5, 4a-2b=-7, 3a-b=-2$

연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{13}{2}$

(i)~(iv)에서 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{13}{2}$

$\therefore a+b=8$

07 답 34

$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}, Y=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(가)에서 함수 f 는 일대일대응이고, (나)에서 $f(1)=5$ 이므로 (나)를 만족시키는 $f(3), f(4)$ 의 값을 순서쌍 $(f(3), f(4))$ 으로 나타내면

$(1, 3)$ 또는 $(3, 1)$ 또는 $(7, 9)$ 또는 $(9, 7)$ 배점 30%

(i) $(1, 3)$ 인 경우 $\rightarrow f(3)=1, f(4)=3$

$f(2)=7, f(5)=9$ 또는 $f(2)=9, f(5)=7$ 이므로

$f(4)f(5)=3 \times 9=27$ 또는 $f(4)f(5)=3 \times 7=21$

(ii) $(3, 1)$ 인 경우 $\rightarrow f(3)=3, f(4)=1$

$f(2)=7, f(5)=9$ 또는 $f(2)=9, f(5)=7$ 이므로

$f(4)f(5)=1 \times 9=9$ 또는 $f(4)f(5)=1 \times 7=7$

(iii) $(7, 9)$ 인 경우 $\rightarrow f(3)=7, f(4)=9$

$f(2)=1, f(5)=3$ 또는 $f(2)=3, f(5)=1$ 이므로

$f(4)f(5)=9 \times 3=27$ 또는 $f(4)f(5)=9 \times 1=9$

(iv) $(9, 7)$ 인 경우 $\rightarrow f(3)=9, f(4)=7$

$f(2)=1, f(5)=3$ 또는 $f(2)=3, f(5)=1$ 이므로

$f(4)f(5)=7 \times 3=21$ 또는 $f(4)f(5)=7 \times 1=7$ 배점 60%

(i)~(iv)에서 $f(4)f(5)$ 의 최댓값은 27, 최솟값은 7이므로

$M=27, m=7$

$\therefore M+m=34$ 배점 10%

08 답 ④

$X=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(가)에서 $f(2)<4$ 이므로 $f(2)=2$

(나)에서 함수 f 는 일대일함수이므로 $f(4)=a$ 라 하면

(가)에서 $f(4)<8 \quad \therefore a=4$ 또는 $a=6$

이때 (다)에서 $(f \circ f)(4)=f(a)=8$ 이고 (가)에서 $f(a)<2a$ 이므로

$8<2a \quad \therefore a>4$

$\therefore a=6$

즉, $f(2)=2, f(4)=6, f(6)=8$ 이므로

$f(8)=4, f(10)=10$ 또는 $f(8)=10, f(10)=4$

$\therefore f(8)+f(10)=14$

09 답 ⑤

(i) 함수 f 의 치역의 원소가 1개인 경우 $\rightarrow f(0)=f(1)$

$f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개

$f(1)=f(0)$ 이어야 하므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1개

즉, 함수 f 의 개수는 $3 \times 1=3$

집합 Y 의 세 원소 a, b, c 에 대하여 $f(0)=f(1)=a$ 라 하면 $g(a)$

의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개

$g(b), g(c)$ 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 각각

4개

즉, 각각의 함수 f 에 대하여 함수 g 의 개수는 $4 \times 4 \times 4=64$

따라서 순서쌍 (f, g) 의 개수는 $3 \times 64=192$

(ii) 함수 f 의 치역의 원소가 2개인 경우 $\rightarrow f(0) \neq f(1)$

$f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(0)$ 의 값을 제외한 2개

즉, 함수 f 의 개수는 $3 \times 2=6$

집합 Y 의 세 원소 a, b, c 에 대하여 $f(0)=a, f(1)=b$ 라 하면 $g(a)$

의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개

이때 $g \circ f$ 가 상수함수이려면 $g(b)=g(a)$ 이어야 하므로 $g(b)$ 의

값이 될 수 있는 것은 1개

$g(c)$ 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 4개

즉, 각각의 함수 f 에 대하여 함수 g 의 개수는 $4 \times 1 \times 4=16$

따라서 순서쌍 (f, g) 의 개수는 $6 \times 16=96$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (f, g) 의 개수는

$192+96=288$

10 답 ③

ㄱ. $f(100)=f(10 \times 10+0)=f(10)+0$

$=f(10 \times 1+0)=f(1)+0$

$=f(10 \times 0+1)=f(0)+1=1$

ㄴ. $f(999)=f(10 \times 99+9)=f(99)+9$

$=f(10 \times 9+9)+9=f(9)+9+9$

$=f(10 \times 0+9)+9+9=f(0)+9+9+9$

$=9+9+9=27$

$(f \circ f)(999)=f(f(999))=f(27)$

$=f(10 \times 2+7)=f(2)+7$

$=f(10 \times 0+2)+7=f(0)+2+7$

$=2+7=9$

ㄷ. [반례] $n=15$ 일 때,

$f(15)=f(10 \times 1+5)=f(1)+5$

$=f(10 \times 0+1)+5=f(0)+1+5$

$=1+5=6$

$f(15)=6$ 은 6의 배수이지만 15는 6의 배수가 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

음이 아닌 정수 n 에 대하여

$n = a_m \times 10^m + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$ ($a_0, a_1, \dots, a_m$ 은 0 또는 한 자리의 자연수)일 때,

$$f(a_m \times 10^m + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0)$$

$$= f(a_m \times 10^{m-1} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$$

$$= f(a_m \times 10^{m-2} + \dots + a_2) + a_1 + a_0$$

$\vdots$

$$= a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

$$\therefore f(n) = a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

즉, $f(n)$ 은 n 의 각 자리의 숫자를 모두 더한 값을 함숫값으로 갖는 함수이다.

$$\neg. f(100) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\neg. f(999) = 9 + 9 + 9 = 27 \text{ 이므로}$$

$$(f \circ f)(999) = f(f(999)) = f(27)$$

$$= 2 + 7 = 9$$

$\square$. [반례] $f(15) = 1 + 5 = 6$ 은 6의 배수이지만 15는 6의 배수가 아니다. 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\square$ 이다.

11 답 $-4 < k < 0$ 또는 $k > 1$

$g(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) > 0$ 에서 $x < -2$ 또는 $x > 3$ 이므로

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) > 0$ 이 되려면 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) < -2$ 또는 $f(x) > 3$ 이어야 한다. 배점 30%

이때

$$f(x) = kx^2 - 2k^2x + k^3 + k^2 + 4k - 2$$

$$= k(x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 4k - 2$$

$$= k(x-k)^2 + k^2 + 4k - 2$$

이므로 k 의 값의 범위에 따라 나누면 다음과 같다.

(i) $k=0$ 일 때,

$$f(x) = -2 \text{ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

$$\therefore k \neq 0 \text{ 배점 20\%}$$

(ii) $k > 0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록한 모양으로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < -2$ 를 만족시키지 않으므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) > 3$ 이어야 한다.

이때 $f(x)$ 는 $x=k$ 일 때 최솟값 $k^2 + 4k - 2$ 를 가지므로

$$k^2 + 4k - 2 > 3$$

$$k^2 + 4k - 5 > 0, (k+5)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 1$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{ 이므로 } k > 1 \text{ 배점 20\%}$$

(iii) $k < 0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록한 모양으로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 3$ 을 만족시키지 않으므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) < -2$ 이어야 한다.

이때 $f(x)$ 는 $x=k$ 일 때 최댓값 $k^2 + 4k - 2$ 를 가지므로

$$k^2 + 4k - 2 < -2$$

$$k^2 + 4k < 0, k(k+4) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 0 \text{ 배점 20\%}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-4 < k < 0 \text{ 또는 } k > 1 \text{ 배점 10\%}$$

12 답 $1 \leq m \leq 2$

$$\text{주어진 함수 } y=f(x) \text{의 그래프에서 } f(x) = \begin{cases} 2 & (x < 2) \\ 3 & (x = 2) \\ -1 & (2 < x \leq 4) \\ 1 & (x > 4) \end{cases}$$

(i) $x < 2$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 3$$

(ii) $x = 2$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3) = -1$$

(iii) $2 < x \leq 4$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-1) = 2$$

(iv) $x > 4$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } (f \circ f)(x) = \begin{cases} 3 & (x < 2) \\ -1 & (x = 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases}$$

한편 $mx - y - m + 1 = 0$ 에서 $y = m(x-1) + 1$ 이므로 이 직선은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

$m > 0$ 일 때, 직선 $mx - y - m + 1 = 0$

이 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 만

나지 않으려면 그림과 같이 직선 CP

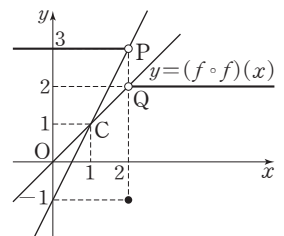
또는 직선 CQ이거나 두 직선 CP, CQ

사이에 존재하면 된다.

이때 직선 CP의 기울기는 $\frac{3-1}{2-1} = 2$,

직선 CQ의 기울기는 $\frac{2-1}{2-1} = 1$ 이므로 구하는 양수 m 의 값의 범위는

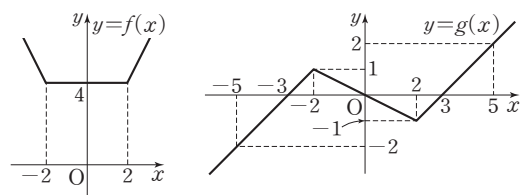
$$1 \leq m \leq 2$$



13 답 11

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (x < -2) \\ 4 & (-2 \leq x \leq 2) \\ 2x & (x > 2) \end{cases} \text{이므로 두 함수 } y=f(x), y=g(x) \text{의 그}$$

래프는 그림과 같다.



$(f \circ g)(k) = f(g(k)) = 4$ 가 되려면 $-2 \leq g(k) \leq 2$ 이어야 한다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서

(i) $k \leq -2$ 일 때, $k+3 = -2$ 에서 $k = -5$

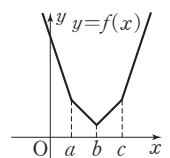
(ii) $k \geq 2$ 일 때, $k-3 = 2$ 에서 $k = 5$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $-5 \leq k \leq 5$

따라서 구하는 정수 k 는 $-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5$ 의 11개이다.

비법 NOTE

함수 $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$ ($a < b < c$)의 그래프는 그림과 같이 $x=a, x=b, x=c$ 에서 y 의 값을 구하여 두 점 사이를 선분으로 연결하여 그린다.



14 답 ③

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 2f(x) & (0 \leq f(x) < 1) \\ -f(x) + 3 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

(i) $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 일 때, $x=1$ 일 때를 기준으로 함수식이 바뀌고, $f(\frac{1}{2})=1$ 이므로 x 의 값의 범위를 $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq x < 1$, $1 \leq x \leq 2$ 일 때로 나눈다.

$$0 \leq f(x) < 1 \text{ 이므로 } (f \circ f)(x) = 2 \times 2x = 4x$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x < 1$ 일 때,

$$1 \leq f(x) < 2 \text{ 이므로 } (f \circ f)(x) = -2x + 3$$

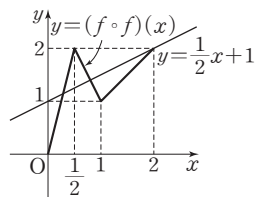
(iii) $1 \leq x \leq 2$ 일 때,

$$1 \leq f(x) \leq 2 \text{ 이므로}$$

$$(f \circ f)(x) = -(-x+3) + 3 = x$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } (f \circ f)(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -2x + 3 & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 의 교점의 개수는 3이다.



15 답 ①

(가)에서 $f(x) = ax(x-2)$ (a 는 상수)로 놓으면 (나)에서

$$ax(x-2) - 6(x-2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(ax-6)(x-2) = 0$$

이때 이차방정식의 실근의 개수가 1이려면 방정식 $ax-6=0$ 의 근도 $x=2$ 이어야 하므로

$$\frac{6}{a} = 2 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x(x-2)$$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -3$ 에서 $f(x)=t$ 로 놓으면 $f(t) = -3$ 이므로

$$3t(t-2) = -3, \quad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

즉, $f(x) = 1$ 이므로

$$3x(x-2) = 1 \quad \therefore 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{1}{3}$ 이다.

16 답 6

(가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, (나)에서 $f(x)$ 의 최댓값이 4이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (3, 4)이다.

즉, $f(3)=4$ 이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = 4$ 에서

$$f(f(x)) = 4 \quad \therefore f(x) = 3$$

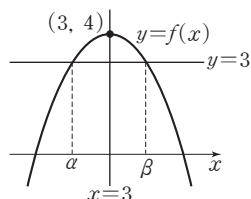
최고차항의 계수가 음수이므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 은

서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식

$f(x)=3$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



두 실근을 α, β 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3 \quad \therefore \alpha + \beta = 6$$

비밀 NOTE

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

(1) x 축에 대하여 대칭: $f(x) = f(-x)$

(2) y 축에 대하여 대칭: $f(x) = -f(x)$

(3) 원점에 대하여 대칭: $f(x) = -f(-x)$

(4) 직선 $x=\frac{a}{2}$ 에 대하여 대칭: $f(\frac{a}{2}+x) = f(\frac{a}{2}-x)$ 또는 $f(x) = f(a-x)$

(5) 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭: $f(a+x) = f(a-x)$ 또는 $f(x) = f(2a-x)$

17 답 3

함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.

$$(f \circ f)(2) = 1 \text{에서}$$

$$f(2) = 1 \text{ 또는 } f(2) = 2 \text{ 또는 } f(2) = 3 \text{ 또는 } f(2) = 4$$

(i) $f(2) = 1$ 인 경우

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = 1$$

$f(1) = f(2) = 1$ 이므로 함수 f 가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(2) = 2$ 인 경우

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(2) = 1$$

이는 $f(2) = 2$ 라는 가정을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(2) = 3$ 인 경우

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

$$f(2) = 3 \text{에서 } f^{-1}(3) = 2$$

$$f(3) \neq f^{-1}(3) \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(iv) $f(2) = 4$ 인 경우

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 1 \text{이므로}$$

$$f(3) = 2 \text{ 또는 } f(3) = 3$$

$f(3) = 2$ 이면 $f^{-1}(3) = 2$ 에서 $f(2) = 3$ 이 되어 $f(2) = 4$ 라는 가정을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(3) = 3$ 이므로 $f(1) = 2$

(i)~(iv)에서

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 1$$

$$\therefore f(1) - 2f(2) + 3f(3) = 2 - 2 \times 4 + 3 \times 3 = 3$$

18 답 12

(가)에서 $a \in X, a \in Y$ 이므로

$$a \in X \cap Y \quad \therefore a \in \{2, 4\}$$

이때 a 의 개수가 2이므로

$$a = 2 \text{ 또는 } a = 4$$

(나)의 $\frac{1}{2}f(a) = (f \circ f^{-1})(a)$ 에서

$$\frac{1}{2}f(a) = a \quad \therefore f(a) = 2a$$

$$\therefore f(2) = 4, \quad f(4) = 8$$

(다)에서 $f(1) \neq 2$ 이고 (가)에서 함수 f 는 일대일대응이므로

$$f(1) = 6, \quad f(3) = 2 \quad \therefore f^{-1}(2) = 3$$

$$\therefore f(2) \times f^{-1}(2) = 4 \times 3 = 12$$

19 답 ④

집합 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 두 부분집합 X, Y 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고,

$X \cap Y = \emptyset$ 이므로

$n(X) = n(Y) = 1$ 또는 $n(X) = n(Y) = 2$

(i) $n(X) = n(Y) = 1$ 인 경우

$X = \{1\}$ 일 때 $Y = \{2\}$, $X = \{1\}$ 일 때 $Y = \{3\}$,

$X = \{1\}$ 일 때 $Y = \{4\}$

즉, 함수 f 의 개수는 3

같은 방법으로 하면 $X = \{2\}$, $X = \{3\}$, $X = \{4\}$ 일 때, 함수 f 의 개수는 각각 3

따라서 함수 f 의 개수는 $3 \times 4 = 12$

(ii) $n(X) = n(Y) = 2$ 인 경우

$X = \{1, 2\}$ 일 때 $Y = \{3, 4\}$, $X = \{1, 3\}$ 일 때 $Y = \{2, 4\}$,

$\hookrightarrow f(1)=3, f(2)=4$ 또는 $f(1)=4, f(2)=3$

$X = \{1, 4\}$ 일 때 $Y = \{2, 3\}$, $X = \{2, 3\}$ 일 때 $Y = \{1, 4\}$,

$X = \{2, 4\}$ 일 때 $Y = \{1, 3\}$, $X = \{3, 4\}$ 일 때 $Y = \{1, 2\}$

함수 f 의 개수는 각각 2

따라서 함수 f 의 개수는 $2 \times 6 = 12$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$12 + 12 = 24$

20 답 24

$S = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$

집합 S 의 원소를 순서대로 4로 나누었을 때의 나머지를 나열하면

3, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 3

이므로 $f(11) = f(55) = f(99) = 3$, $f(22) = f(66) = 2$,

$f(33) = f(77) = 1$, $f(44) = f(88) = 0$

함수 $f(n)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로

$f^{-1}(0) = 44$ 또는 $f^{-1}(0) = 88 \rightarrow 44$ 와 88 중 하나만 원소로 가져야 하므로 2가지이다.

$f^{-1}(1) = 33$ 또는 $f^{-1}(1) = 77$

$f^{-1}(2) = 22$ 또는 $f^{-1}(2) = 66$

$f^{-1}(3) = 11$ 또는 $f^{-1}(3) = 55$ 또는 $f^{-1}(3) = 99$

따라서 집합 X 의 개수는

$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

21 답 ①

ㄱ. 집합 $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$ 의 모든 원소 x 에 대하여 $g(x) - f(x) = 1$

이므로 $f(x) = 5$ 인 x 가 존재하면 $g(x) = 6 \notin Z$

즉, 집합 $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$ 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq 4$ 이고

함수 f 는 일대일대응이므로

$\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$

$g(x) = f(x) + 1$ 에서

$\{g(2), g(3), g(4)\} = \{3, 4, 5\}$

따라서 함수 $g \circ f$ 의 치역은 Z 이다.

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$ 이고 함수 f 는 일대일대응

이므로 $f(1) = 5$

$\therefore f^{-1}(5) = 1 < 2$

ㄷ. ㄴ에서 $f(1) = 5$ 이므로 $f(3) < g(2) < f(1)$ 에서

$f(3) < g(2) < 5 \dots \dots \textcircled{1}$

(i) $g(2) = 3$ 인 경우

$f(2) = g(2) - 1 = 2$

함수 f 는 일대일대응이므로

$f(3) = 3$ 또는 $f(3) = 4$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(2) = 4$ 인 경우

$f(2) = g(2) - 1 = 3$

함수 f 는 일대일대응이므로

$f(3) = 2$ 또는 $f(3) = 4$

이때 ㉠에서 $f(3) < g(2) = 4$ 이므로

$f(3) = 2 \therefore f(4) = 4$

(i), (ii)에서 $g(2) = 4$, $f(4) = 4$

$\therefore f(4) + g(2) = 4 + 4 = 8$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

22 답 ⑤

$f^{-1}(a) = g(b)$ 에서 $f(g(b)) = a$

a 가 자연수이므로 가능한 $g(b)$ 의 값

은

$\frac{1}{2}, 1, 3, 5, \frac{11}{2}, 6$

$g(b) = \frac{1}{2}$ 에서 $b = 5$, $a = f(g(b)) = 1$

$g(b) = 1$ 에서 $b = 4$, $a = f(g(b)) = 2$

$g(b) = 3$ 에서 $b = 3$, $a = f(g(b)) = 3$

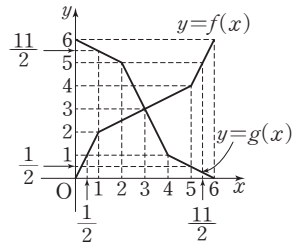
$g(b) = 5$ 에서 $b = 2$, $a = f(g(b)) = 4$

$g(b) = \frac{11}{2}$ 에서 $b = 1$, $a = f(g(b)) = 5$

$g(b) = 6$ 에서 $b = 0$, $a = f(g(b)) = 6$

따라서 $f^{-1}(a) = g(b)$ 를 만족시키는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개이다. $\rightarrow a=6, b=0$ 인 경우는 b 가 자연수가 아니다.



23 답 ③

$f(x) = 3x - 2$ 에서 $y = 3x - 2$ 라 하면

$3x = y + 2 \therefore x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

즉, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ 이므로

$g\left(\frac{1}{6}x + 2\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

이때 $\frac{1}{6}x + 2 = t$ 로 놓으면 $x = 6(t - 2)$ 이므로

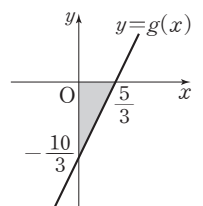
$g(t) = 2(t - 2) + \frac{2}{3} = 2t - \frac{10}{3}$

$\therefore g(x) = 2x - \frac{10}{3}$

따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으

므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{25}{9}$



idea
24 답 70

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 A는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같다.
 $-x^2+12=x$ 에서 $x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$
 $\therefore x=-4$ ($\because x \leq 0$) $\therefore A(-4, -4)$

이때 $f(-2)=8$ 에서 $f^{-1}(8)=-2$
 따라서 점 B(8, -2)는 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점 C는 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

$\therefore C(-2, 8)$

$\therefore BC=\sqrt{(-2-8)^2+(8+2)^2}=10\sqrt{2}$

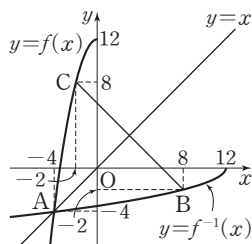
직선 BC의 방정식은

$$y-8=-(x+2) \quad \therefore x+y-6=0$$

점 A(-4, -4)와 직선 BC 사이의 거리는

$$\frac{|-4-4-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}=70$



개념 NOTE

• 좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 사이의 거리는

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

• 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

25 답 $-\frac{98}{3}$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이려면 $x=2$ 일 때 $y=\frac{1}{2}x-2$,

$y=kx-7$ 의 값이 같아야 하므로

$$1-2=2k-7 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x-2 & (x<2) \\ 3x-7 & (x\geq 2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$ 에서

$$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$$

$$\therefore f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=f^{-1}(x) \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

(i) $f(x)=0$ 인 경우

$$3x-7=0 \text{에서 } x=\frac{7}{3} \rightarrow \frac{1}{2}x-2=0 \text{이면 } x=4 \text{이므로 } x<2 \text{를 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$ 인 경우

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같다.

$$x<2 \text{일 때, } \frac{1}{2}x-2=x \text{에서 } x=-4$$

$$x\geq 2 \text{일 때, } 3x-7=x \text{에서 } x=\frac{7}{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \{x \mid (f(x))^2=f(x)f^{-1}(x)\}=\left\{-4, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}\right\}$$

따라서 모든 원소의 곱은

$$-4 \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{2} = -\frac{98}{3} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

26 답 $\frac{49}{8}$

$$f(x)=\begin{cases} -2(x-2)^2+k-1 & (x<2) \\ (x-2)^2+k-1 & (x\geq 2) \end{cases} \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

집합 $\{x \mid f(x)=g(x)\}$ 의 원소의 개수가 3이 되려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

이때 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

(i) $x<2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선

$y=x$ 와 접하는 경우

이차방정식 $-2x^2+8x+k-9=x$, 즉

$2x^2-7x-k+9=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=49-8(-k+9)=0$$

$$8k-23=0 \quad \therefore k=\frac{23}{8}$$

(ii) $x\geq 2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 접하는 경우

이차방정식 $x^2-4x+3+k=x$, 즉 $x^2-5x+3+k=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

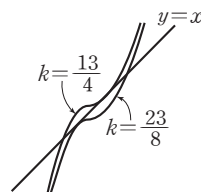
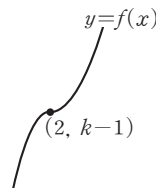
$$D_2=25-4(3+k)=0$$

$$13-4k=0 \quad \therefore k=\frac{13}{4}$$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$\frac{23}{8} < k < \frac{13}{4}$$

$$\text{따라서 } p=\frac{23}{8}, q=\frac{13}{4} \text{이므로 } p+q=\frac{49}{8}$$



idea
27 답 1

함수 $f(x)=mx+n$ 에 대하여 $f(a)=a$ ($a>0$), $0<m<1$ 이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 (a, a) 를 지나고 기울기가 1보다 큰 직선이다.

$$\text{따라서 함수 } g(x)=\begin{cases} f^{-1}(x) & (x<a) \\ f(x) & (x\geq a) \end{cases} \text{의}$$

그래프는 그림과 같다.

방정식 $(g \circ h)(x)=(h \circ g)(x)$ 에서

$$(g \circ h)(x)=g(h(x))=g(x+a)$$

$$(h \circ g)(x)=h(g(x))=g(x)+a$$

이때 함수 $y=g(x+a)$ 의 그래프는 함수

$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼

평행이동한 것이고, 함수 $y=g(x)+a$ 의

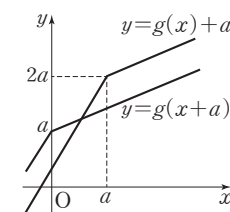
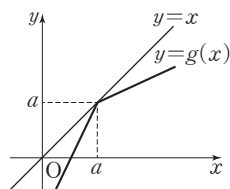
그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 y 축의 방

향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같

이 두 함수 $y=(g \circ h)(x)$, $y=(h \circ g)(x)$ 의

그래프는 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $(g \circ h)(x)=(h \circ g)(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



01 ④ 02 36 03 ② 04 ④ 05 40 06 ⑤
07 ① 08 ④ 09 27 10 ⑤

01 답 ④

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

ㄱ. [반례] $f(x)=c$ 라 하면

$$\{f(xy)\}^2=c^2, f(x^2)f(y^2)=c \times c=c^2$$

$$\therefore \{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$$

그런데 $c \neq 0$ 이면 $f(0)=c \neq 0$ 이다.

2단계 $\perp$ 이 옳은지 확인하기

ㄴ. $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$)라 하면

$$\{f(xy)\}^2=(axy+b)^2$$

$$=a^2x^2y^2+2abxy+b^2$$

$$f(x^2)f(y^2)=(ax^2+b)(ay^2+b)$$

$$=a^2x^2y^2+abx^2+aby^2+b^2$$

$$\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2) \text{에서}$$

$$a^2x^2y^2+2abxy+b^2=a^2x^2y^2+abx^2+aby^2+b^2$$

$$ab(x^2+y^2-2xy)=0$$

$$ab(x-y)^2=0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $b=0$

즉, $f(x)=ax$ ($a \neq 0$)이므로 이 함수의 그래프는 원점을 지난다.

3단계 $\supset$ 이 옳은지 확인하기

ㄷ. 임의의 실수 y 에 대하여

$$\{f(0)\}^2=f(0)f(y^2), f(0)\{f(0)-f(y^2)\}=0$$

$$\therefore f(0)=0 \text{ 또는 } f(0)=f(y^2)$$

$$f(0) \neq 0 \text{이면 } f(0)=f(y^2)$$

그런데 $f(1)=10^2, f(10)=10^5$ 에서 함수 $f(x)$ 는 상수함수가 아니므로 $f(0)=0$ ← 상수함수이면 모든 함수값이 같아야 한다.

$f(x)$ 를 k 차 다항함수라 하면 $f(0)=0$ 이므로 $(k-1)$ 차 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 $f(x)=xg(x)$ 로 나타낼 수 있다.

임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$ 이므로

$$(xy)^2\{g(xy)\}^2=x^2g(x^2)y^2g(y^2)$$

$$=(xy)^2g(x^2)g(y^2)$$

따라서 $\{g(xy)\}^2=g(x^2)g(y^2)$ 이므로 $(k-1)$ 차 다항함수 $g(x)$ 도 주어진 조건을 만족시킨다.

이때 $g(x)$ 도 상수함수가 아니므로 $g(0)=0$ 이고 $g(x)$ 도 x 를 인수로 갖는다. → $(k-2)$ 차 다항함수 $h(x)$ 에 대하여 $g(x)=xh(x)$

이와 같은 과정을 반복하면

$$f(x)=ax^k \text{ (단, } a \neq 0) \text{ — 임의의 } x, y \text{에 대하여 } \{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2) \text{이 성립한다.}$$

이때 $f(1)=10^2$ 에서 $a=100$

$$f(x)=100x^k \text{이므로 } f(10)=10^5 \text{에서}$$

$$100 \times 10^k=10^5, 10^k=10^3$$

$$\therefore k=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=100x^3 \text{이므로}$$

$$f(100)=100 \times 100^3=10^8$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 36

1단계 $k=1$ 일 때 $f(12)=18$ 을 만족시키는지 확인하기

(i) $k=1$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} f(f(x+2)) & (x < 20) \\ x-1 & (x \geq 20) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(12)=f(f(14)), f(14)=f(f(16)),$$

$$f(16)=f(f(18)), f(18)=f(f(20))=f(19),$$

$$f(19)=f(f(21))=f(20)=19 \text{이므로}$$

$$f(19)=f(18)=f(16)=f(14)=f(12)=19$$

즉, $k=1$ 일 때 성립하지 않는다.

2단계 $k=2$ 일 때 $f(12)=18$ 을 만족시키는지 확인하기

(ii) $k=2$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} f(f(x+4)) & (x < 20) \\ x-2 & (x \geq 20) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(12)=f(f(16)), f(16)=f(f(20))=f(18),$$

$$f(18)=f(f(22))=f(20)=18 \text{이므로}$$

$$f(18)=f(16)=f(12)=18$$

즉, $k=2$ 일 때 성립한다.

3단계 $k=3$ 일 때 $f(12)=18$ 을 만족시키는지 확인하기

(iii) $k=3$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} f(f(x+6)) & (x < 20) \\ x-3 & (x \geq 20) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(12)=f(f(18)), f(18)=f(f(24))=f(21)=18 \text{이므로}$$

$$f(18)=f(12)=18$$

즉, $k=3$ 일 때 성립한다.

4단계 $4 \leq k < 8$ 일 때 $f(12)=18$ 을 만족시키는지 확인하기

(iv) $4 \leq k < 8$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} f(f(x+2k)) & (x < 20) \\ x-k & (x \geq 20) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(12)=f(f(12+2k))=f(12+k)$$

$$\begin{matrix} 12+2k \geq 20 & 12+k < 20 \end{matrix}$$

$$=f(f(12+3k))=f(12+2k)$$

$$\begin{matrix} 12+3k > 20 & 12+2k \geq 20 \end{matrix}$$

$$=12+k$$

$$k=6 \text{이면 } f(12)=18$$

즉, $k=6$ 일 때 성립한다.

5단계 $k \geq 8$ 일 때 $f(12)=18$ 을 만족시키는지 확인하기

(v) $k \geq 8$ 일 때,

$$f(x)=\begin{cases} f(f(x+2k)) & (x < 20) \\ x-k & (x \geq 20) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(12)=f(f(12+2k))=f(12+k)$$

$$\begin{matrix} 12+2k > 20 & 12+k \geq 20 \end{matrix}$$

$$=12$$

즉, $k \geq 8$ 일 때 성립하지 않는다.

6단계 $f(12)=18$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 곱 구하기

(i)~(v)에서 $f(12)=18$ 을 만족시키는 자연수 k 의 값은 2, 3, 6이므로 모든 자연수 k 의 값의 곱은

$$2 \times 3 \times 6 = 36$$

03 답 ②

1단계 두 함수 f, g 가 일대일대응임을 확인하기

함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 아니라고 가정하면 합성함수 $g \circ f: X \rightarrow X$ 는 일대일대응도 아니고 항등함수도 아니므로 ㉡를 만족시키지 않는다.

따라서 함수 f 는 일대일대응이다.

같은 방법으로 함수 g 도 일대일대응이다.

2단계 $f(x) + g(x)$ 의 값 구하기

$f(1) + f(2) + \dots + f(9) = 45$, $g(1) + g(2) + \dots + g(9) = 45$ 이므로
 $\{f(1) + g(1)\} + \{f(2) + g(2)\} + \dots + \{f(9) + g(9)\} = 90 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

㉡에서 $f(x) + g(x)$ 의 값은 일정하므로

$f(x) + g(x) = k$ (k 는 상수)라 하면 ㉠에서

$$9k = 90 \quad \therefore k = 10$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

3단계 조건을 만족시키는 함수값 구하기

㉡에서 $(g \circ f)(x) = x$ 이므로 집합 X 의 임의의 원소 a, b 에 대하여 $f(a) = b$ 이면 $g(b) = a$ 이다.

$$f(1) = 8 \text{이므로 } g(8) = 1$$

$$g(8) = 1 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(8) = 9$$

$$f(8) = 9 \text{이므로 } g(9) = 8$$

$$g(9) = 8 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(9) = 2$$

$$f(9) = 2 \text{이므로 } g(2) = 9$$

$$g(2) = 9 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(2) = 1$$

$$f(2) = 1 \text{이므로 } g(1) = 2$$

한편 $f(5) = k$ 라 하면 $g(k) = 5$

$$g(k) = 5 \text{이면 } \textcircled{2} \text{에서 } f(k) = 5$$

$$f(k) = 5 \text{이면 } g(5) = k$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f(5) + g(5) = 10 \text{이므로}$$

$$k + k = 10, 2k = 10$$

$$\therefore k = 5$$

$$\therefore f(5) = 5, g(5) = 5$$

㉡에서 $f(3) \neq 6$ 이므로

$$f(3) = 3 \text{ 또는 } f(3) = 4 \text{ 또는 } f(3) = 7$$

(i) $f(3) = 3$ 인 경우

$$g(3) = 3 \text{이지만 } f(3) + g(3) = 6 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $f(3) = 4$ 인 경우

$$g(4) = 3 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(4) = 7$$

$$f(4) = 7 \text{이므로 } g(7) = 4$$

$$g(7) = 4 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(7) = 6$$

$$f(7) = 6 \text{이므로 } g(6) = 7$$

$$g(6) = 7 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(6) = 3$$

$$f(6) = 3 \text{이므로 } g(3) = 6$$

(iii) $f(3) = 7$ 인 경우

$$g(7) = 3 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(7) = 7$$

그런데 $f(3) = 7$ 이므로 f 는 일대일대응이 아니다.

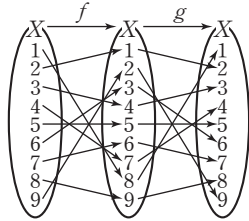
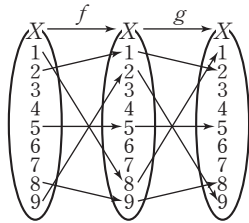
4단계 $(f \circ f \circ f)(7)$ 의 값 구하기

(i), (ii), (iii)에서

$$(f \circ f \circ f)(7) = f(f(f(7)))$$

$$= f(f(6))$$

$$= f(3) = 4$$



idea

04 답 ④

1단계 조건 $B \subset A$ 해석하기

이차방정식 $g(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$B \subset A \text{이므로 } \alpha \in A, \beta \in A$$

$$\text{즉, } (g \circ f)(\alpha) = g(f(\alpha)) = 0 \text{이므로}$$

$$f(\alpha) = \alpha \text{ 또는 } f(\alpha) = \beta$$

2단계 경우에 따라 $p+q$ 의 값 구하기

이때 이차방정식 $x^2 + 2x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0, \beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2$$

(i) $f(\alpha) = \alpha$ 인 경우

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + p\alpha + q = \alpha(\alpha^2 + 2\alpha - 2) + \alpha^2 + 2\alpha + p\alpha + q$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha + p\alpha + q \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha - 2 + p\alpha + q + 2$$

$$= p\alpha + q + 2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$f(\alpha) = \alpha \text{에서 } p\alpha + q + 2 = \alpha$$

이 식은 α 에 대한 항등식이므로

$$p = 1, q + 2 = 0$$

$$\therefore p = 1, q = -2$$

$$\therefore p + q = -1$$

(ii) $f(\alpha) = \beta$ 인 경우

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + p\alpha + q = p\alpha + q + 2$$

$$f(\alpha) = \beta \text{이고 } \alpha + \beta = -2 \text{에서 } \beta = -\alpha - 2 \text{이므로}$$

$$p\alpha + q + 2 = -\alpha - 2$$

이 식은 α 에 대한 항등식이므로

$$p = -1, q + 2 = -2$$

$$\therefore p = -1, q = -4$$

$$\therefore p + q = -5$$

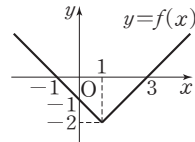
3단계 $p+q$ 의 최댓값 구하기

(i), (ii)에서 $p+q$ 의 최댓값은 -1 이다.

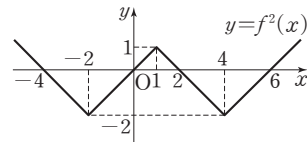
05 답 40

1단계 함수 $y = f^3(x)$ 의 그래프 그리기

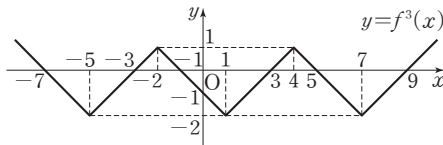
함수 $f(x) = |x-1| - 2$ 의 그래프는 함수 $y=x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 다음 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이므로 그림과 같다.



이때 함수 $y = (f \circ f)(x) = |f(x) - 1| - 2$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 다음 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이므로 그림과 같다.



같은 방법으로 하면 함수 $y=f^3(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



2단계 $S(n)$ 구하기

따라서 $y=f(x)$, $y=f^2(x)$, $y=f^3(x)$, ..., $y=f^n(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 차례대로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \right) + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 9$$

$$3 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \right) = 14$$

$$4 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \right) + 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \right) = 19$$

⋮

$$n \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \right) + (n-1) \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \right) = 5n-1$$

$$\therefore S(n) = 5n-1$$

3단계 n 의 값 구하기

$$S(n) = 199 \text{에서 } 5n-1=199$$

$$5n=200 \quad \therefore n=40$$

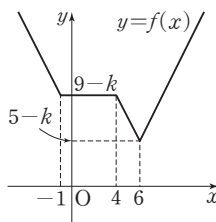
06 답 ⑤

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형 그리기

$$f(x) = |x+1| - |x-4| + 2|x-6| - k$$

$$= \begin{cases} -2x+7-k & (x < -1) \\ 9-k & (-1 \leq x < 4) \\ -2x+17-k & (4 \leq x < 6) \\ 2x-7-k & (x \geq 6) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



2단계 k 의 값의 범위 구하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=(f \circ f)(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(f(x))=f(x)$ 의 해와 같다.

방정식 $f(f(x))=f(x)$ 에서 $f(x)=t$ 로 놓으면 $f(t)=t$

방정식 $f(t)=t$ 의 실근을 α 라 하면 $\alpha=t=f(t)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 x 좌표가 α 이다.

즉, 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 서로 다른 실근의 개수는 방정식

$(f \circ f)(x)=f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

방정식 $f(x)=9-k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 무수히 많으므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수도 무수히 많다.

따라서 $-1 \leq 9-k \leq 4$ 에서 $-4 \leq k-9 \leq 1$

$$\therefore 5 \leq k \leq 10$$

3단계 모든 자연수 k 의 값의 합 구하기

따라서 구하는 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$5+6+7+8+9+10=45$$

07 답 ①

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 파악하기

(ㄱ)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로 $-4 \leq x \leq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

또 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x-8)$ 이므로 $4 \leq x \leq 12$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $-4 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것과 같다.

같은 방법으로 정수 k 에 대하여 $-4+8k \leq x \leq 4+8k$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $-4 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $8k$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

2단계 $(f \circ g)(x)$ 가 상수함수가 되기 위한 조건 찾기

$$x > 0 \text{에서 } \frac{|x|}{x} = 1$$

$$x < 0 \text{에서 } \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} n-1 & (x < 0) \\ n & (x = 0) \\ n+1 & (x > 0) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(x)$ 의 치역은 $\{n-1, n, n+1\}$

실수 전체의 집합에서 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 상수함수이려면 $f(n-1)=f(n)=f(n+1)$

즉, 연속인 세 정수에 대하여 $f(x)$ 의 값이 같아야 한다.

3단계 자연수 n 의 개수 구하기

연속인 세 정수에 대하여 $f(x)$ 의 값이 같은 경우는

$$n=1 \text{일 때, } f(0)=f(1)=f(2)=2$$

$$n=4 \text{일 때, } f(3)=f(4)=f(5)=0$$

$$n=7 \text{일 때, } f(6)=f(7)=f(8)=2$$

$$n=8 \text{일 때, } f(7)=f(8)=f(9)=2$$

$$n=9 \text{일 때, } f(8)=f(9)=f(10)=2$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $-4 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 반복되므로 60 이하의 자연수 n 의 값은

$$n=1+8 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$n=4+8 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$n=7+8 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$n=8+8 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

따라서 구하는 60 이하의 자연수 n 의 개수는

$$8+8+7+7=30$$

08 답 ④

1단계 $f(3)$, $g(3)$ 이 될 수 있는 값 찾기

(ㄱ)에서

$$f(3)=g(3)$$

$$f(3) \in Y, g(3) \in Z, Y \cap Z = \{5, 6\} \text{이므로}$$

$$f(3)=g(3)=5 \text{ 또는 } f(3)=g(3)=6$$

2단계 $f(3)$, $g(3)$ 의 값에 따라 $f(4)$, $g(6)$ 의 값 구하기

(i) $f(3)=g(3)=5$ 인 경우

두 함수 f , g 는 일대일 대응이고 $g(3)=5$ 이므로

(ㄴ)의 $g(f(2))=5$ 에서

$$f(2)=3$$

그런데 (ㄴ)에서 $f(2) \neq 3$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(3)=g(3)=6$ 인 경우

$$f(4)=3 \text{ 또는 } f(4)=4 \text{ 또는 } f(4)=5$$

① $f(4)=3$ 일 때,

$$(라)에서 g(3)-2=3$$

$$\therefore g(3)=5$$

그런데 $g(3)=6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $f(4)=4$ 일 때,

$$(라)에서 g(4)-2=4$$

$$\therefore g(4)=6$$

그런데 $g(3)=6$ 이므로 g 는 일대일대응이 아니다.

③ $f(4)=5$ 일 때,

$$(라)에서 g(5)-2=5$$

$$\therefore g(5)=7$$

(다)에서 $f(2) \neq 3$ 이므로

$$f(2)=4$$

(나)에서 $g(4)=5$

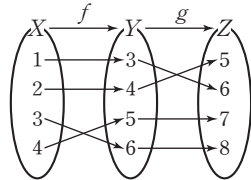
두 함수 f, g 는 일대일대응이므로

$$f(1)=3, g(6)=8$$

(i), (ii)에서 $f(4)=5, g(6)=8$

3단계 $f(4)+g(6)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(4)+g(6)=5+8=13$$



09 답 27

1단계 주어진 조건의 의미 파악하기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 방정식

$$f^{-1}(x)-kx=0, \text{ 즉 } f^{-1}(x)=kx \text{의 서로 다른 실근의 개수와 같다.}$$

두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이고, 직선 $y=kx$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=\frac{x}{k}$ 이

므로 방정식 $f^{-1}(x)=kx$ 의 서로 다른 실근의 개수는 방정식 $f(x)=\frac{x}{k}$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

2단계 k 의 값 구하기

$$f(x)=\frac{x}{k} \text{에서 } x^3-x^2+6x=\frac{x}{k}$$

$$kx^3-kx^2+6kx=x, x(kx^2-kx+6k-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } kx^2-kx+6k-1=0$$

방정식 $f(x)=\frac{x}{k}$ 의 실근의 개수가 2이어야 하므로 이차방정식

$$kx^2-kx+6k-1=0 \text{은 } 0 \text{이 아닌 중근을 가져야 한다.}$$

(i) 이차방정식 $kx^2-kx+6k-1=0$ 이 $x=0$ 을 근으로 갖지 않으므로

$$6k-1 \neq 0 \quad \therefore k \neq \frac{1}{6}$$

(ii) 이차방정식 $kx^2-kx+6k-1=0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4k(6k-1)=0, k^2-24k^2+4k=0$$

$$23k^2-4k=0, k(23k-4)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{4}{23}$$

$$\text{그런데 } k \neq 0 \text{이므로 } k=\frac{4}{23}$$

(i), (ii)에서 $k=\frac{4}{23}$

3단계 $a+b$ 의 값 구하기

따라서 $a=23, b=4$ 이므로

$$a+b=27$$

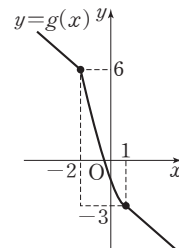
10 답 ⑤

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

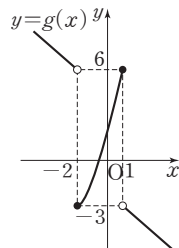
ㄱ. 함수 $g(x)$ 의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수

$g(x)$ 의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$ 는 일대일대응이다.

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$$\therefore f(-2)+f(1)=3$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx-1(a>0)$ 로 놓을 수 있다.

$$g(1)=f(1)=-3 \text{이면 } \neg \text{의 [그림 1]에서 } f(-2)=6 \text{이므로}$$

$$a+b-1=-3, 4a-2b-1=6$$

$$\therefore a+b=-2, 4a-2b=7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{8} \end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표는 $\frac{5}{2}$ 이다.

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 -2 이므로

$$f(x)=a(x+2)^2+p(a>0) \text{로 놓을 수 있다.}$$

$$\neg \text{의 [그림 2]에서 } f(-2)=-3, f(1)=6 \text{이므로}$$

$$p=-3, 9a+p=6$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore f(x)=(x+2)^2-3$$

$$\text{즉, } g(0)=f(0)=1 \text{이므로}$$

$$g^{-1}(1)=0$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

step 1 핵심 문제

| 50~51쪽

- 01 ④ 02 151 03 ① 04 ⑤ 05 $a \geq 6$ 06 ④
 07 $-20 < m \leq 0$ 08 ③ 09 ② 10 $\neg, \perp, \sqsubset$
 11 ① 12 3

01 답 ④

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{2x-1}{x}}} = \frac{1}{2 - \frac{x}{2x-1}} = \frac{1}{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{2x-1}{3x-2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(3x-2) + \frac{1}{3}}{3x-2} = \frac{1}{9x-6} + \frac{2}{3}$$

따라서 $a=9$, $b=-6$, $c=\frac{2}{3}$ 이므로

$$a+b+c = \frac{11}{3}$$

02 답 151

$$f(n) = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)-(2n-1)} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(50)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{50}{101}$$

따라서 $p=101$, $q=50$ 이므로

$$p+q=151$$

03 답 ①

함수 $y = \frac{4}{x-p} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 두 점근선의 방정식은

$$x=p, y=-3$$

$p \geq 0$ 이면 함수 $y = \frac{4}{x-p} - 3$ 의 그래프는 제1사분면을 지나므로

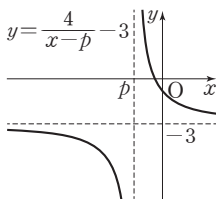
$$p < 0$$

$p < 0$ 일 때, 함수 $y = \frac{4}{x-p} - 3$ 의 그래프는 $x < p$ 에서 제3사분면만을 지나고, $x > p$ 에서 제1사분면을 지나지 않아야 한다.

즉, $x=0$ 일 때 y 의 값이 0 이하가 되어야 하므로

$$\frac{4}{-p} - 3 \leq 0 \quad \therefore p \leq -\frac{4}{3} \quad (\because p < 0)$$

따라서 정수 p 의 최댓값은 -2 이다.



04 답 ⑤

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 곡선이 $y=g(x)$ 이므로

$$g(x) = \frac{3(x+2)+k}{(x+2)+4} + 3 = \frac{3(x+6)+k-12}{x+6} + 3 = \frac{k-12}{x+6} + 6$$

곡선 $y=g(x)$ 의 두 점근선의 방정식은 $x=-6$, $y=6$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6, 6)$

점 $(-6, 6)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-6)=6$ 에서

$$\frac{-18+k}{-6+4} = 6, \quad k-18 = -12$$

$$\therefore k=6$$

다른 풀이

$$f(x) = \frac{3x+k}{x+4} = \frac{3(x+4)+k-12}{x+4} = \frac{k-12}{x+4} + 3$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=3$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-4, 3)$

곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=g(x)$ 의 두 점근선의 교점은 점 $(-4, 3)$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점 $(-6, 6)$ 과 같다.

점 $(-6, 6)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-6)=6$ 에서

$$\frac{-18+k}{-6+4} = 6, \quad k-18 = -12$$

$$\therefore k=6$$

05 답 $a \geq 6$

$$y = \frac{-ax+2}{x-3} = \frac{-a(x-3)-3a+2}{x-3} = \frac{-3a+2}{x-3} - a \text{이므로 유리함수}$$

$$y = \frac{-ax+2}{x-3} \text{의 그래프의 두 점근선의 방정식은}$$

$$x=3, y=-a$$

$$y = \frac{x-3}{x-a} = \frac{(x-a)+a-3}{x-a} = \frac{a-3}{x-a} + 1 \text{이므로 유리함수 } y = \frac{x-3}{x-a} \text{의}$$

그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=a, y=1$$

점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 21 이상이고 $a > 0$ 이므로

$$|a-3|(a+1) \geq 21$$

(i) $0 < a < 3$ 일 때,

$$-(a-3)(a+1) \geq 21, \quad a^2 - 2a + 18 \leq 0$$

$$(a-1)^2 + 17 \leq 0$$

이 부등식을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a \geq 3$ 일 때,

$$(a-3)(a+1) \geq 21, \quad a^2 - 2a - 24 \geq 0$$

$$(a+4)(a-6) \geq 0 \quad \therefore a \geq 6 \quad (\because a \geq 3)$$

(i), (ii)에서 구하는 양수 a 의 값의 범위는

$$a \geq 6$$

비법 NOTE

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(x+\frac{d}{c}) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{-\frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c} \text{이므로}$$

유리함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \text{이다.}$$

06 답 ④

$$x+9=-x-1 \text{에서 } x=-5$$

$$\text{이를 } y=x+9 \text{에 대입하면 } y=4$$

따라서 두 직선 $y=x+9$, $y=-x-1$ 의 교점의 좌표는 $(-5, 4)$

유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 두 직선 $y=x+9$, $y=-x-1$ 에 대하

여 대칭이므로 유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=-5, y=4$$

$$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a \text{이므로 유리함수}$$

$$y=\frac{ax+b}{x+c} \text{의 그래프의 두 점근선의 방정식은 } x=-c, y=a$$

$$\therefore c=5, a=4$$

따라서 유리함수 $y=\frac{4x+b}{x+5}$ 의 그래프가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$1=\frac{-4+b}{-1+5} \quad \therefore b=8$$

$$\therefore a-b+c=4-8+5=1$$

다른 풀이

$$x+9=-x-1 \text{에서 } x=-5$$

$$\text{이를 } y=x+9 \text{에 대입하면 } y=4$$

따라서 두 직선 $y=x+9$, $y=-x-1$ 의 교점의 좌표는 $(-5, 4)$

유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 두 직선 $y=x+9$, $y=-x-1$ 에 대하

여 대칭이므로 유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=-5, y=4$$

따라서 $y=\frac{k}{x+5}+4$ ($k \neq 0$)로 놓으면 이 유리함수의 그래프가 점

$$(-1, 1) \text{을 지나므로 } 1=\frac{k}{-1+5}+4 \quad \therefore k=-12$$

$$\text{즉, } y=\frac{-12}{x+5}+4=\frac{4x+8}{x+5} \text{이므로}$$

$$a=4, b=8, c=5 \quad \therefore a-b+c=1$$

07 답 $-20 < m \leq 0$

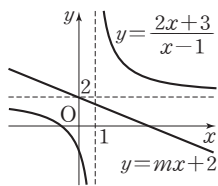
$y=\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2(x-1)+5}{x-1}=\frac{5}{x-1}+2$ 이므로 함수 $y=\frac{2x+3}{x-1}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=1, y=2$

직선 $y=mx+2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 함수 $y=\frac{2x+3}{x-1}$ 의 그

래프와 직선 $y=mx+2$ 가 만나지 않으려면

그림과 같아야 한다.배점 20%



(i) $m=0$ 일 때,
직선 $y=2$ 는 함수 $y=\frac{2x+3}{x-1}$ 의 그래프의 한 점근선이므로 만나지 않는다.배점 30%

(ii) $m \neq 0$ 일 때,

$$\frac{2x+3}{x-1}=mx+2 \text{에서 } 2x+3=mx^2+(2-m)x-2$$

$$\therefore mx^2-mx-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=m^2+20m < 0, m(m+20) < 0$$

$$\therefore -20 < m < 0 \quad \dots\dots\text{배점 30\%}$$

(i), (ii)에서 구하는 상수 m 의 값의 범위는 $-20 < m \leq 0$ 배점 20%

08 답 ③

$$\frac{3x-4}{x+2}=-x+k \text{에서 } 3x-4=-x^2+(k-2)x+2k$$

$$\therefore x^2-(k-5)x-2k-4=0$$

이 이차방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k-5, \alpha\beta=-2k-4$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(k-5)^2-4(-2k-4) \\ =k^2-2k+41 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 서로 다른 두 실근 α, β 는 두 교점 A, B의 x 좌표이고 두 교점 A, B는 모두 직선 $y=-x+k$ 위의 점이다.

따라서 $A(\alpha, -\alpha+k), B(\beta, -\beta+k)$ 라 하면 $\overline{AB}=4\sqrt{6}$ 에서

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(-\alpha+k+\beta-k)^2}=4\sqrt{6}, \sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=4\sqrt{6}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k^2-2k+41=48 \quad \therefore k^2-2k-7=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 k 의 값의 곱은 -7 이다.

09 답 ②

$$f(x)=\frac{2x-4}{7x+4} \text{이므로}$$

$$f(-1)=2$$

$$f^2(-1)=(f \circ f)(-1)=f(f(-1))=f(2)=0$$

$$f^3(-1)=(f \circ f^2)(-1)=f(f^2(-1))=f(0)=-1$$

$$f^4(-1)=(f \circ f^3)(-1)=f(f^3(-1))=f(-1)=2$$

:

즉, $f^n(-1)$ 의 값은 2, 0, -1 이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $999=3 \times 333, 1000=3 \times 333+1$ 이므로

$$f^{999}(-1)-f^{1000}(-1)=-1-2=-3$$

10 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$f(x)=\frac{x-1}{x}$$

$$f^2(x)=(f \circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f \circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{-x}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}}=x$$

$$f^4(x)=(f \circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x)=\frac{x-1}{x}$$

:

$$\therefore f^{3k+1}(x)=\frac{x-1}{x}, f^{3k+2}(x)=-\frac{1}{x-1}, f^{3k+3}(x)=x$$

$$(k=0, 1, 2, \dots)$$

ㄱ. $f^2(x)=-\frac{1}{x-1}$ 에서 $f^2(0)=1$ 이므로 함수 $y=f^2(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

$$\text{ㄴ. } 11=3 \times 3+2 \text{이므로 } f^{11}(x)=f^2(x)=-\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore p=0, q=-1, r=1 \quad \therefore p+q+r=0$$

$$\text{ㄷ. } 24=3 \times 8 \text{이므로 } f^{24}(x)=x$$

따라서 함수 $f^{24}(x)$ 는 항등함수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ①

$$y = \frac{2x+k}{-3x-1} \text{라 하면}$$

$$2x+k = -3xy-y, (3y+2)x = -y-k$$

$$\therefore x = \frac{-y-k}{3y+2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-x-k}{3x+2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-x-k}{3x+2}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2 \times \frac{2x+k}{-3x-1} + k}{-3 \times \frac{2x+k}{-3x-1} - 1}$$

$$= \frac{(4-3k)x+k}{-3x-3k+1} = \frac{(3k-4)x-k}{3x+3k-1}$$

$$f^{-1}(x) = (f \circ f)(x) \text{이므로 } \frac{-x-k}{3x+2} = \frac{(3k-4)x-k}{3x+3k-1} \text{에서}$$

$$3k-4 = -1, 3k-1 = 2$$

$$\therefore k=1$$

12 답 3

(가)에서 함수 $f(x)$ 가 $x \neq -2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(f(x))=x$ 이므로

$$f^{-1}(x) = f(x) (x \neq -2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나)에서 $f(-3) = -7$ 이므로

$$\frac{-3p+q}{-3+2} = -7$$

$$\therefore -3p+q=7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $f^{-1}(-3) = f(-3)$ 이므로

$$f^{-1}(-3) = -7 \quad \therefore f(-7) = -3$$

$$\frac{-7p+q}{-7+2} = -3$$

$$\therefore -7p+q=15 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$p = -2, q = 1$$

$$\therefore f(x) = \frac{-2x+1}{x+2}$$

따라서 ①에서

$$f^{-1}(-1) = f(-1) = \frac{2+1}{-1+2} = 3$$

01 답 ①

$$\frac{a+2b}{3c} = \frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = k (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$a+2b=3ck, 2b+3c=ak, 3c+a=2bk \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 식을 모두 더하면

$$2(a+2b+3c) = k(a+2b+3c)$$

$$a+2b+3c \neq 0 \text{이므로 } k=2$$

이를 ①에 대입하면

$$a+2b=6c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$2b+3c=2a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$3c+a=4b \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

②-③을 하면

$$a-3c=6c-2a \quad \therefore a=3c$$

이를 ④에 대입하면

$$3c+3c=4b \quad \therefore b=\frac{3}{2}c$$

$$\therefore \frac{a^3+8b^3+27c^3}{abc} = \frac{(3c)^3+8\left(\frac{3}{2}c\right)^3+27c^3}{3c \times \frac{3}{2}c \times c} = \frac{81c^3}{\frac{9}{2}c^3} = 18$$

02 답 ②

$$\frac{12m+36}{2m^2+3m} - \frac{12m+24}{2m^2+11m+15} + \frac{24}{4m^2+16m+15}$$

$$= \frac{12m+36}{m(2m+3)} - \frac{12m+24}{(m+3)(2m+5)} + \frac{24}{(2m+3)(2m+5)}$$

$$= \frac{12m+36}{(2m+3)-m} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m+3} \right)$$

$$- \frac{12m+24}{(2m+5)-(m+3)} \left(\frac{1}{m+3} - \frac{1}{2m+5} \right)$$

$$+ \frac{24}{(2m+5)-(2m+3)} \left(\frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2m+5} \right)$$

$$= 12 \left\{ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m+3} \right) - \left(\frac{1}{m+3} - \frac{1}{2m+5} \right) + \left(\frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2m+5} \right) \right\}$$

$$= 12 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+3} \right) = 12 \times \frac{(m+3)-m}{m(m+3)}$$

$$= \frac{36}{m(m+3)}$$

즉, 주어진 식의 값이 자연수가 되려면 $m, m+3$ 의 값이 모두 36의 약수이어야 하고, $m(m+3)$ 의 값은 36보다 작거나 같아야 한다.

따라서 자연수 m 의 값은 1, 3이므로 그 합은 4이다.

03 답 10

$$f(x) = \frac{bx+c}{x-a} = \frac{b(x-a)+ab+c}{x-a} = \frac{ab+c}{x-a} + b$$

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=a, y=b$$

따라서 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 (a, b) 에 대하여 대칭이다.

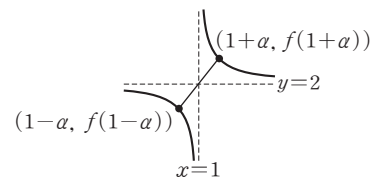
(가)에서 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a=1, b=2$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x+c}{x-1}$$

(나)에서 $f(0)=1$ 이므로

$$\frac{c}{-1} = 1 \quad \therefore c = -1$$



step 2 고난도 문제

| 52~56쪽

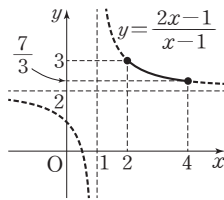
01 ①	02 ②	03 10	04 -52, 80	05 16
06 ④	07 ①	08 ②	09 ①	10 ㄱ, ㄴ, ㄷ
11 ③	12 18	13 ⑤	14 21	15 ④
16 $\frac{8}{5}$				
17 -9	18 ⑤	19 ⑤	20 1	21 7
22 ①				
23 8	24 ①			

따라서 유리함수 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$x=2$ 일 때 최댓값 $M = \frac{1}{2-1} + 2 = 3$,

$x=4$ 일 때 최솟값 $m = \frac{1}{4-1} + 2 = \frac{7}{3}$ 을 갖는다.

$$\therefore M+3m = 3 + 3 \times \frac{7}{3} = 10$$



04 답 -52, 80

$$f(x) = \frac{ax-b}{3x-1} = \frac{\frac{a}{3}(3x-1) + \frac{a}{3} - b}{3x-1} = \frac{a-3b}{9(x-\frac{1}{3})} + \frac{a}{3}$$

역함수 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 함수 $f(x)$ 의 치역과 같으므로 유리함수 $y=f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 2 \leq y \leq 5\}$

(i) $a-3b > 0$, 즉 $a > 3b$ 일 때,

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 $x=2$ 일 때 최댓값 5, $x=3$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

$$\text{따라서 } \frac{2a-b}{5} = 5, \frac{3a-b}{8} = 2 \text{에서}$$

$$2a-b=25, 3a-b=16$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-9, b=-43$$

$$\therefore a+b=-52$$

(ii) $a-3b < 0$, 즉 $a < 3b$ 일 때,

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 $x=2$ 일 때 최솟값 2, $x=3$ 일 때 최댓값 5를 갖는다.

$$\text{따라서 } \frac{2a-b}{5} = 2, \frac{3a-b}{8} = 5 \text{에서}$$

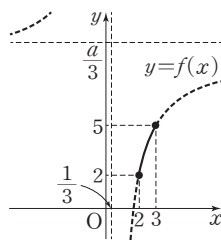
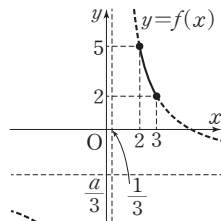
$$2a-b=10, 3a-b=40$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=30, b=50$$

$$\therefore a+b=80$$

(i), (ii)에서 $a+b$ 의 값은 -52, 80이다.



05 답 16

$$f(x) = \frac{4x+k}{x+1} = \frac{4(x+1)-4+k}{x+1} = \frac{k-4}{x+1} + 4 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

함수 $y=f(x)$ 에 대하여

(i) $k-4=0$, 즉 $k=4$ 일 때,

$$f(x)=4 \text{이므로 } X=\{4\}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 치역의 원소 중 정수의 개수는 1이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 배점 20%

(ii) $k-4 > 0$, 즉 $k > 4$ 일 때,

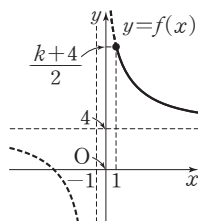
$$X = \left\{ y \mid 4 < y \leq \frac{k+4}{2} \right\} \text{이므로 } X \text{의 원소 중}$$

정수의 개수가 8이려면

$$12 \leq \frac{k+4}{2} < 13$$

$$24 \leq k+4 < 26$$

$$\therefore 20 \leq k < 22 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$



(iii) $k-4 < 0$, 즉 $k < 4$ 일 때,

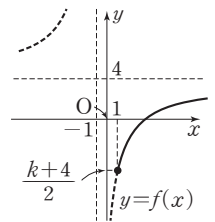
$$X = \left\{ y \mid \frac{k+4}{2} \leq y < 4 \right\} \text{이므로 } X \text{의 원소}$$

중 정수의 개수가 8이려면

$$-5 < \frac{k+4}{2} \leq -4$$

$$-10 < k+4 \leq -8$$

$$\therefore -14 < k \leq -12 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$



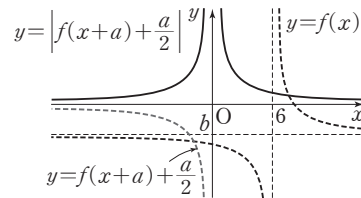
(i), (ii), (iii)에서 정수 k 의 값은 -13, -12, 20, 21이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-13 + (-12) + 20 + 21 = 16 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

06 답 ④

함수 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 의 그래프는 함수 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 그래프가 y 축에 대하여 대칭이려면 함수

$y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0$, $y=0$ 이어야 한다.



$$f(x) = \frac{a}{x-6} + b \text{에서 } f(x+a) + \frac{a}{2} = \frac{a}{x+a-6} + b + \frac{a}{2}$$

함수 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=6-a, y=b+\frac{a}{2}$$

이 점근선의 방정식이 $x=0, y=0$ 이어야 하므로

$$6-a=0, b+\frac{a}{2}=0 \quad \therefore a=6, b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{6}{x-6} - 3 \text{이므로}$$

$$f(b) = f(-3) = \frac{6}{-3-6} - 3 = -\frac{11}{3}$$

07 답 ①

$$f(x) = \frac{cx+d}{ax+b} = \frac{c\left(x+\frac{b}{a}\right) - \frac{bc}{a} + d}{a\left(x+\frac{b}{a}\right)} = \frac{-\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}}{x+\frac{b}{a}} + \frac{c}{a} \text{이므로 유리}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

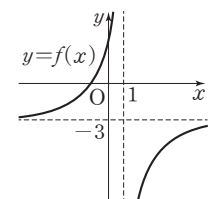
$$x = -\frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$$

㉞에서 두 점근선의 방정식이 $x=1, y=-3$ 이므로

$$-\frac{b}{a}=1, \frac{c}{a}=-3 \quad \therefore b=-a, c=-3a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지나려면 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같아야 하므로

$$f(0) = \frac{d}{b} > 0 \text{이어야 한다.}$$



㉠과 $\frac{d}{b} > 0$ 에서

$a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ 또는 $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$

(i) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ 일 때,

a, b, c 는 -20 이상 20 이하의 정수이므로 ㉠에서 순서쌍 (a, b, c) 는 $(-1, 1, 3), (-2, 2, 6), (-3, 3, 9), (-4, 4, 12), (-5, 5, 15), (-6, 6, 18)$

이때 d 는 $0 < d \leq 20$ 인 정수이다.

즉, $a+b+c+d$ 의 최솟값은 $a=-1, b=1, c=3, d=1$ 일 때 4 이다.

(ii) $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$ 일 때,

a, b, c 는 -20 이상 20 이하의 정수이므로 ㉠에서 순서쌍 (a, b, c) 는 $(1, -1, -3), (2, -2, -6), (3, -3, -9), (4, -4, -12), (5, -5, -15), (6, -6, -18)$

이때 d 는 $-20 \leq d < 0$ 인 정수이다.

즉, $a+b+c+d$ 의 최솟값은 $a=6, b=-6, c=-18, d=-20$ 일 때 -38 이다.

(i), (ii)에서 $a+b+c+d$ 의 최솟값은 -38 이다.

08 답 ②

두 집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$ 이 되려면 함수

$y = \left| \frac{x+k}{x-5} \right|$ ($k > -5$)의 그래프와 직선 $y = x+1$ 이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $y = \left| \frac{x+k}{x-5} \right|$ ($k > -5$)의 그래프는 함수 $y = \frac{x+k}{x-5}$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 함수 $y = \frac{x+k}{x-5} = \frac{k+5}{x-5} + 1$ ($k+5 > 0$)의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=5, y=1$ 이고 점 $(-k, 0)$ 을 지난다.

함수 $y = \left| \frac{x+k}{x-5} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = x+1$ 은 그림과 같고, $x > 5$ 일 때 한 점에서 만난다.

따라서 함수 $y = \left| \frac{x+k}{x-5} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = x+1$ 이 서로 다른 세 점에서 만나려면 $x < 5$ 일 때 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$x < 5$ 일 때 함수 $y = \left| \frac{x+k}{x-5} \right| = \frac{-x-k}{x-5}$ 의 그래프와 직선 $y = x+1$ 이 접하는 경우는

$$\frac{-x-k}{x-5} = x+1 \text{에서 } -x-k = x^2-4x-5$$

$$\therefore x^2-3x+k-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

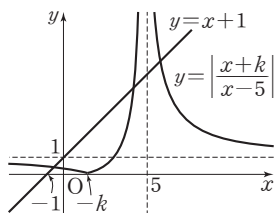
$$D = 9-4k+20=0 \quad \therefore k = \frac{29}{4}$$

이때 $k > -5$ 이므로 $x < 5$ 일 때 함수 $y = \left| \frac{x+k}{x-5} \right|$ 의 그래프와 직선

$y = x+1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-5 < k < \frac{29}{4}$$

따라서 $n(A \cap B) = 3$ 이 되도록 하는 정수 k 는 $-4, -3, \dots, 6, 7$ 의 12 개이다.



09 답 ①

삼각형 AFD와 삼각형 EFC는 닮음이므로

$$\overline{AD} : \overline{EC} = \overline{DF} : \overline{CF}$$

$$3 : x = \{f(x)+2\} : f(x)$$

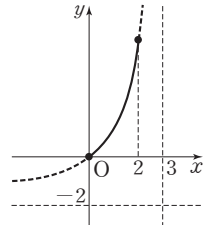
$$xf(x)+2x=3f(x), (x-3)f(x)=-2x$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $x-3 \neq 0$ 이므로

$$f(x) = \frac{-2x}{x-3} = \frac{-2(x-3)-6}{x-3} = -\frac{6}{x-3} - 2 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으

므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ①이다.



10 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$P\left(t, \frac{3}{t}\right)$ ($t > 0$)이라 하면 점 Q는 선분 OP를 $2:1$ 로 외분하는 점이므로

$$Q\left(2t, \frac{6}{t}\right)$$

$$\therefore B\left(0, \frac{6}{t}\right), D(2t, 0)$$

점 A의 y좌표는 $\frac{6}{t}$ 이므로 $\frac{6}{t} = \frac{3}{x}$ 에서 $x = \frac{t}{2}$

$$\therefore A\left(\frac{t}{2}, \frac{6}{t}\right)$$

점 C의 x좌표는 $2t$ 이므로 $y = \frac{3}{2t} \quad \therefore C\left(2t, \frac{3}{2t}\right)$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{t}{2}, \overline{AQ} = 2t - \frac{t}{2} = \frac{3}{2}t \text{이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{AQ} = 1 : 3$$

따라서 점 A는 선분 BQ를 $1:3$ 으로 내분한다.

$$\therefore \text{직선 AC의 기울기는 } \frac{\frac{3}{2t} - \frac{6}{t}}{2t - \frac{t}{2}} = -\frac{3}{t^2}$$

$$\text{직선 BD의 기울기는 } \frac{0 - \frac{6}{t}}{2t - 0} = -\frac{3}{t^2}$$

따라서 직선 AC의 기울기와 직선 BD의 기울기는 같다.

ㄷ. 점 P는 직사각형 ODQB의 대각선 OQ의 중점이므로 대각선 BD의 중점이다. 즉, 점 P는 직선 BD 위의 점이다.

직선 BD의 방정식은

$$\frac{x}{2t} + \frac{y}{\frac{6}{t}} = 1 \quad \therefore \frac{x}{2t} + \frac{ty}{6} = 1$$

$\frac{x}{2t} + \frac{ty}{6} = 1$ 에 $y = \frac{3}{x}$ 을 대입하면 $\rightarrow$ 함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 직선 BD의 교점의 x좌표를 구한다.

$$\frac{x}{2t} + \frac{t \times \frac{3}{x}}{6} = 1, \frac{x}{2t} + \frac{t}{2x} = 1$$

$$x^2 - 2tx + t^2 = 0 \quad \therefore (x-t)^2 = 0$$

방정식 $x^2 - 2tx + t^2 = 0$ 은 중근을 가지므로 직선 BD는 함수 $y = \frac{3}{x}$

의 그래프와 점 P에서 접한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ③

$P(k, -\frac{4}{k}) (k < 0)$ 라 하자.

점 P에서 접하는 직선의 방정식의 기울기를 m 이라 하면

$$y = m(x - k) - \frac{4}{k}$$

이 직선이 함수 $y = -\frac{4}{x}$ 의 그래프와 한 점에서 만나야 하므로 방정식

$$m(x - k) - \frac{4}{k} = -\frac{4}{x}, \text{ 즉 } mkx^2 - (mk^2 + 4)x + 4k = 0 \text{이 중근을 가져}$$

야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (mk^2 + 4)^2 - 16mk^2 = 0, m^2k^4 - 8mk^2 + 16 = 0$$

$$(mk^2 - 4)^2 = 0, mk^2 = 4 \quad \therefore m = \frac{4}{k^2}$$

함수 $y = -\frac{4}{x}$ 의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{4}{k^2}(x - k) - \frac{4}{k} \quad \therefore y = \frac{4}{k^2}x - \frac{8}{k}$$

$$\therefore A(2k, 0), B(0, -\frac{8}{k})$$

$$\neg. \overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{k^2 + \frac{16}{k^2}}$$

$$\neg. \text{삼각형 OAB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times (-2k) \times (-\frac{8}{k}) = 8$$

$$\neg. \overline{AB}^2 = 4k^2 + \frac{64}{k^2}$$

이때 $k^2 > 0$ 이므로

$$4k^2 + \frac{64}{k^2} \geq 2\sqrt{4k^2 \times \frac{64}{k^2}} = 32 \quad (\text{단, 등호는 } 4k^2 = \frac{64}{k^2} \text{일 때 성립})$$

$$\text{즉, } 4k^2 = \frac{64}{k^2} \text{일 때 } \overline{AB}^2 \text{이 최솟값을 가지므로 } k^4 = 16$$

$$(k + 2)(k - 2)(k^2 + 4) = 0 \quad \therefore k = -2 (\because k < 0)$$

따라서 $k = -2$, 즉 점 P의 x 좌표가 -2 일 때 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

개념 NOTE

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

12 답 18

점 P는 함수 $f(x) = \frac{2x}{6x-9}$ 의 그래프 위의 점이므로 $P(a, \frac{2a}{6a-9})$ 라 하면 $A(a, 0)$

$$\overline{OA} = \overline{AP} \text{이므로 } a = \frac{2a}{6a-9}, 2a = 6a^2 - 9a$$

$$6a^2 - 11a = 0, a(6a - 11) = 0$$

$$\therefore a = \frac{11}{6} (\because a > 0) \quad \therefore P(\frac{11}{6}, \frac{11}{6})$$

점 Q는 함수 $f(x) = \frac{2x}{6x-9}$ 의 그래프 위의 점이므로 $Q(b, \frac{2b}{6b-9})$ 라 하면 $C(b, 0)$

$$\overline{OC} = \overline{CQ} \text{이므로 } b = -\frac{2b}{6b-9}, 2b = -6b^2 + 9b$$

$$6b^2 - 7b = 0, b(6b - 7) = 0$$

$$\therefore b = \frac{7}{6} (\because b > 0) \quad \therefore Q(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6})$$

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OA} : \overline{OC} = 11 : 7 \text{이므로}$$

$$m = 11, n = 7 \quad \therefore m + n = 18$$

13 답 ⑤

두 점 $A(-1, -1), B(a, \frac{1}{a}) (a > 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-1) = \frac{\frac{1}{a} - (-1)}{a - (-1)} \{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a} - 1$$

따라서 $P(a-1, 0), Q(0, \frac{1}{a}-1)$ 이므로

$$\overline{OP} = a-1, \overline{OQ} = 1 - \frac{1}{a}$$

$$B'(a, 0) \text{이므로 } \overline{PB'} = a - (a-1) = 1, \overline{BB'} = \frac{1}{a}$$

두 삼각형 POQ, PB'B의 넓이 S_1, S_2 는

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OQ} = \frac{1}{2} (a-1) (1 - \frac{1}{a}) = \frac{a}{2} + \frac{1}{2a} - 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{PB'} \times \overline{BB'} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} - 1$$

이때 $\frac{a}{2} > 0, \frac{1}{a} > 0$ 이므로

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{a} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{1}{a}} - 1 = \sqrt{2} - 1 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a}{2} = \frac{1}{a} \text{일 때 성립})$$

따라서 $S_1 + S_2$ 의 최솟값은 $\sqrt{2} - 1$ 이다.

14 답 21

$P(a, \frac{k}{a-1} + 9) (a > 1)$ 라 하면 $H(a, 0)$

이때 $k > 0, a - 1 > 0$ 이므로

$$\overline{OH} + \overline{PH} = a + \frac{k}{a-1} + 9 = a - 1 + \frac{k}{a-1} + 10$$

$$\geq 2\sqrt{(a-1) \times \frac{k}{a-1}} + 10$$

$$= 2\sqrt{k} + 10 \quad (\text{단, 등호는 } a - 1 = \frac{k}{a-1} \text{일 때 성립})$$

삼각형 POH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times a \times (\frac{k}{a-1} + 9) = \frac{1}{2} (\frac{ka}{a-1} + 9a)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \frac{k(a-1) + k}{a-1} + 9(a-1) + 9 \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \frac{k}{a-1} + 9(a-1) + k + 9 \}$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ 2\sqrt{\frac{k}{a-1} \times 9(a-1)} + k + 9 \}$$

$$= 3\sqrt{k} + \frac{k+9}{2} \quad (\text{단, 등호는 } \frac{k}{a-1} = 9(a-1) \text{일 때 성립})$$

따라서 $\overline{OH} + \overline{PH}$ 의 최솟값 $2\sqrt{k} + 10$ 이 삼각형 POH의 넓이의 최솟값

$$3\sqrt{k} + \frac{k+9}{2} \text{의 } \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$2\sqrt{k} + 10 = \frac{2}{3} (3\sqrt{k} + \frac{k+9}{2})$$

$$2\sqrt{k} + 10 = 2\sqrt{k} + \frac{k+9}{3}$$

$$30 = k + 9 \quad \therefore k = 21$$

15 답 ④

점 $B(\alpha, \beta)$ 가 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$$\beta = \frac{2}{\alpha} \quad \therefore \alpha\beta = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$\alpha > \sqrt{2}$ 이므로

$$0 < \beta < \sqrt{2} \quad \therefore 0 < \beta < \alpha$$

두 점 B, C가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$C(\beta, \alpha)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{BC} &= \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)^2} \\ &= \sqrt{2}(\alpha-\beta) \quad (\because \alpha > \beta) \end{aligned}$$

직선 BC와 직선 $y=x$ 가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1 이고, 이 직선이 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은

$$y - \beta = -(x - \alpha)$$

$$\therefore x + y - (\alpha + \beta) = 0$$

점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|-2 + 2 - (\alpha + \beta)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \quad (\because \alpha > 0, \beta > 0)$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2}(\alpha - \beta) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \end{aligned}$$

삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha^2 - \beta^2 = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4(\alpha\beta)^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4 \times 2^2 = 64$$

그런데 $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ 이므로 $\alpha^2 + \beta^2 = 8$

16 답 $\frac{8}{5}$

$$x \geq 2 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{3x}{2+x-2} = 3$$

$$x < 2 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{3x}{2-(x-2)} = \frac{3x}{-x+4} = -\frac{12}{x-4} - 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 3 & (x \geq 2) \\ -\frac{12}{x-4} - 3 & (x < 2) \end{cases} \text{ 이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$(f \circ f)(x) = f(f(x))$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면

$$-3 < f(x) \leq 3 \text{ 이므로}$$

$$y = f(t) \quad (-3 < t \leq 3)$$

함수 $y=f(t)$ 는 $t \geq 2$ 일 때, 최댓값 3을 가지므로

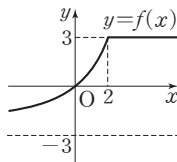
$$-\frac{3x}{-x+4} = 2 \text{ 에서 } 3x = -2x + 8 \quad \therefore x = \frac{8}{5}$$

즉, 함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $x \geq \frac{8}{5}$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

이때 함수 $(f \circ f)(x)$ 가 $x \leq a$ 에서 최댓값 3을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a \geq \frac{8}{5}$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{8}{5}$ 이다.



17 답 -9

$g(x) = f(x-3) + 1$ 이므로

$$g(x) = \frac{a(x-3)+b}{2(x-3)+1} + 1 = \frac{(a+2)x-3a+b-5}{2x-5}$$

$$y = \frac{(a+2)x-3a+b-5}{2x-5} \text{라 하면}$$

$$(a+2)x-3a+b-5 = (2x-5)y$$

$$(a+2-2y)x = 3a-b+5-5y$$

$$x = \frac{5y-3a+b-5}{2y-a-2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{5x-3a+b-5}{2x-a-2}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{5x-3a+b-5}{2x-a-2} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$g = g^{-1}$ 이므로

$$a+2=5 \quad \therefore a=3 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$g(x) = \frac{5x-14+b}{2x-5} \text{이고 } g(1)=4 \text{이므로}$$

$$\frac{5-14+b}{2-5} = 4, \quad -9+b = -12$$

$$\therefore b = -3 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore ab = -9 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

다른 풀이

$$f(x) = \frac{ax+b}{2x+1} \quad \dots\dots ㉠$$

$$g(x) = f(x-3) + 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$g(1)=4$ 이므로 ㉡에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = f(-2) + 1, \quad 4 = f(-2) + 1$$

$$\therefore f(-2) = 3$$

㉠에 $x=-2$ 를 대입하면

$$\frac{-2a+b}{-4+1} = 3$$

$$\therefore -2a+b = -9 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$g(1)=4$ 이고 $g = g^{-1}$ 이므로

$$g^{-1}(1) = 4 \quad \therefore g(4) = 1$$

㉡에 $x=4$ 를 대입하면

$$g(4) = f(1) + 1, \quad 1 = f(1) + 1$$

$$\therefore f(1) = 0$$

㉠에 $x=1$ 을 대입하면

$$\frac{a+b}{2+1} = 0$$

$$\therefore a+b = 0 \quad \dots\dots ㉣ \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a=3, \quad b=-3$$

$$\therefore ab = -9 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

idea

18 답 ⑤

$$f\left(\frac{4x+3}{2x-1}\right) = 2x \text{에 } x \text{ 대신 } \frac{x}{2} \text{를 대입하면}$$

$$f\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) = x$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \text{이라 하면}$$

$$2x+3=xy-y, (y-2)x=y+3$$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x+3}{x-2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x+3}{x-2} = \frac{(x-2)+5}{x-2} = \frac{5}{x-2} + 1$$

함수 $f(x) = \frac{5}{x-2} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$ 에 대하여 대칭이므로

로 함수 $f(x) = \frac{5}{x-2} + 1$ 의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$ 를 각각 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 두 직선 $y=x-2+1$, $y=-(x-2)+1$, 즉 $y=x-1$, $y=-x+3$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=-1$, $q=3$ 이므로

$$p+q=2$$

19 답 ⑤

$$f(x) = \frac{2x+b}{x-a} = \frac{2(x-a)+2a+b}{x-a} = \frac{2a+b}{x-a} + 2$$

유리함수 $y = \frac{k}{x-a} + b$ 의 그래프는 평행이동을 해도 k 의 값은 변하지 않으므로 (㉠)에서

$$2a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는

$$(a, 2)$$

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$ 를 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로

$$(2, a) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

(㉠)의 $f^{-1}(x) = f(x-4) - 4$ 에서 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는

$$(a+4, -2) \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉡, ㉣이 같으므로 $a=-2$

이를 ㉡에 대입하면

$$-4+b=3 \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=5$$

다른 풀이

$$f(x) = \frac{2x+b}{x-a} = \frac{2a+b}{x-a} + 2 \text{이므로 (㉠)에서}$$

$$2a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$y = \frac{2x+b}{x-a} \text{라 하면 } 2x+b=xy-ay$$

$$(y-2)x=ay+b, x = \frac{ay+b}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{ax+b}{x-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x-2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

(㉠)에서

$$\begin{aligned} f(x-4)-4 &= \frac{2(x-4)+b}{(x-4)-a} - 4 \\ &= \frac{2(x-4)+b-4(x-4-a)}{x-4-a} \\ &= \frac{-2x+4a+b+8}{x-4-a} \quad \dots\dots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

㉡, ㉣이 같으므로

$$a=-2$$

이를 ㉡에 대입하면

$$-4+b=3 \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=5$$

idea

20 답 1

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

$$f^{30}(x) = f^6(x) \text{에서}$$

$$(g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ f^{30})(x) = (g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ f^6)(x)$$

$$\therefore f^{24}(x) = x$$

$$f^{22}(x) = (g \circ g \circ f^{24})(x) = (g \circ g)(x)$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{에서 } y = \frac{2x-1}{x+1} \text{이라 하면}$$

$$2x-1=xy+y, (y-2)x=-y-1$$

$$x = \frac{-y-1}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-x-1}{x-2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{-x-1}{x-2}$$

$$\therefore f^{22}(x) = (g \circ g)(x) = g(g(x))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\left(\frac{-x-1}{x-2}\right)-1}{\frac{-x-1}{x-2}-2} \\ &= \frac{3}{-3x+3} = -\frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f^{22}(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=0$ 이므로

$$a=1, \beta=0$$

$$\therefore a+\beta=1$$

21 답 7

$$f(x) = \frac{bx-10a}{x-a} = \frac{b(x-a)+ab-10a}{x-a} = \frac{ab-10a}{x-a} + b \text{이므로 유리}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=a, y=b \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

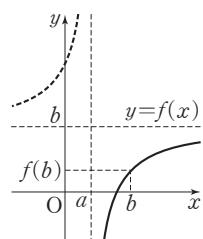
$a < x \leq b$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{5}{3}$ 이라면

그림과 같이 $ab-10a < 0$, $f(b) = \frac{5}{3}$ 이어야 한다.

$$f(b) = \frac{5}{3} \text{에서}$$

$$\frac{b^2-10a}{b-a} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore b^2-10a = \frac{5}{3}(b-a) \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=b, y=a$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형은 한 변의 길이가 $b-a$ 인 정사각형이다.

이 정사각형의 넓이가 9이므로

$$(b-a)^2=9$$

$$\therefore b-a=3 \quad (\because a < b)$$

$$\therefore b=a+3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

①에 ①을 대입하면

$$(a+3)^2-10a=\frac{5}{3}(a+3-a)$$

$$a^2+6a+9-10a-5=0$$

$$a^2-4a+4=0, (a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

이를 ①에 대입하면

$$b=5$$

$$\therefore a+b=7 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

22 답 ①

$$\neg. f(-x)=\frac{3 \times (-x)}{2+|-x|}=-\frac{3x}{2+|x|}=-f(x)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

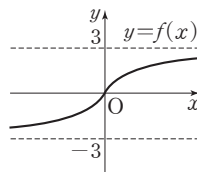
ㄴ. $x \geq 0$ 일 때,

$$f(x)=\frac{3x}{2+x}=\frac{3(x+2)-6}{x+2}=-\frac{6}{x+2}+3$$

ㄱ에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 그림과 같다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여

$$0 \leq |f(x)| < 3 \text{이다.}$$



ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\frac{3x}{2+|x|}=x \text{에서}$$

$$(i) x \geq 0 \text{일 때, } \frac{3x}{2+x}=x \text{이므로}$$

$$3x=x^2+2x, x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$(ii) x < 0 \text{일 때, } \frac{3x}{2-x}=x \text{이므로}$$

$$3x=2x-x^2, x^2+x=0$$

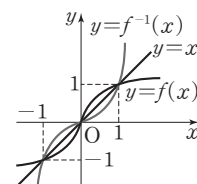
$$x(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \quad (\because x < 0)$$

(i), (ii)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ 점에서 만난다.

그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 경계 및 내부에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ 의 3개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.



23 답 8

함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 는 점 $(4, -4)$ 에 대하여 대칭이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(-4, 4)$ 에 대하여 대칭이다.

$$f(x)=\frac{k}{x+4}+4 \quad (k \neq 0) \text{라 하자.}$$

$$g(3)=p \text{에서 } f(p)=3 \text{이므로}$$

$$\frac{k}{p+4}+4=3, \frac{k}{p+4}=-1$$

$$\therefore k=-p-4$$

$$\therefore f(x)=\frac{-p-4}{x+4}+4=\frac{4x+12-p}{x+4}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같으므로

$$\frac{4x+12-p}{x+4}=x \text{에서}$$

$$4x+12-p=x^2+4x$$

$$x^2=12-p$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{12-p}$$

$\sqrt{12-p}=a \quad (a \geq 0)$ 로 놓으면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 좌표는

$$(-a, -a), (a, a)$$

두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(a+a)^2+(a+a)^2}=4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}a=4\sqrt{2} \quad \therefore a=2$$

따라서 $\sqrt{12-p}=2$ 이므로

$$12-p=4$$

$$\therefore p=8$$

24 답 ①

방정식 $(f \circ f)(x)-x=0$ 의 실근 α 는 함수 $y=(f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표이다.

$k \neq -9$ 이면 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고, $(f \circ f)(\alpha)=\alpha$ 에서 $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)$ 이므로 α 는 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같으므로

$$\frac{3x-18}{2x+k}=x \text{에서}$$

$$3x-18=2x^2+kx$$

$$\therefore 2x^2+(k-3)x+18=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D=(k-3)^2-144=0$$

$$(k-3)^2=144, k-3=\pm 12$$

$$\therefore k=15 \quad (\because k \neq -9)$$

이를 ①에 대입하면

$$2x^2+12x+18=0$$

$$x^2+6x+9=0$$

$$(x+3)^2=0 \quad \therefore x=-3$$

$$\therefore \alpha=-3$$

$$\therefore \alpha+k=12$$

01 12	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ③	06 ④
07 9	08 ⑤	09 $\frac{2}{3}$	10 ①	11 ①	12 42

01 답 12

1단계 두 직선 $y=x+\frac{5}{2}$, $y=-x+\frac{3}{2}$ 의 교점의 좌표 구하기

$$x+\frac{5}{2}=-x+\frac{3}{2} \text{에서 } x=-\frac{1}{2}$$

이를 $y=-x+\frac{3}{2}$ 에 대입하면 $y=2$

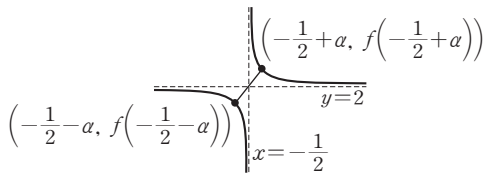
따라서 두 직선 $y=x+\frac{5}{2}$, $y=-x+\frac{3}{2}$ 의 교점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 2)$

2단계 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식 구하기

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y=x+\frac{5}{2}$, $y=-x+\frac{3}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$

3단계 점에 대한 대칭을 이용하여 식 세우기

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 점 $(-\frac{1}{2}, 2)$ 에 대하여 대칭이므로 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 임의의 두 점 $(-\frac{1}{2}+a, f(-\frac{1}{2}+a))$, $(-\frac{1}{2}-a, f(-\frac{1}{2}-a))$ 의 중점이 점 $(-\frac{1}{2}, 2)$ 이어야 한다.



$$\text{즉, } \frac{f(-\frac{1}{2}+a)+f(-\frac{1}{2}-a)}{2}=2 \text{에서}$$

$$f(-\frac{1}{2}+a)+f(-\frac{1}{2}-a)=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

4단계 $f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$ 의 값 구하기

①에 a 대신에 $-\frac{1}{2}-x$ 를 대입하면

$$f(-1-x)+f(x)=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②에 $x=0$ 을 대입하면 $f(-1)+f(0)=4$

②에 $x=1$ 을 대입하면 $f(-2)+f(1)=4$

②에 $x=2$ 를 대입하면 $f(-3)+f(2)=4$

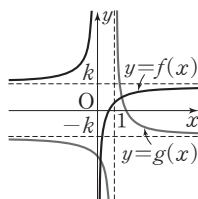
$$\therefore f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=4 \times 3=12$$

02 답 ②

1단계 k 의 값의 부호에 따른 함수 $h(k)$ 구하기

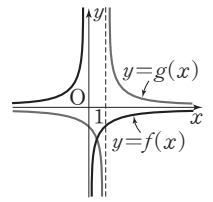
(i) $k>0$ 일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 그림과 같으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수는 2이다.



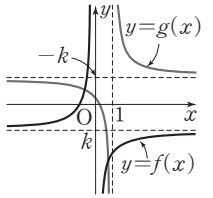
(ii) $k=0$ 일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 그림과 같으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.



(iii) $k<0$ 일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 그림과 같으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.



$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } h(k)=\begin{cases} 1 & (k \leq 0) \\ 2 & (k > 0) \end{cases}$$

2단계 $h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4$ 를 만족시키는 정수 k 의 값 구하기

연속하는 세 정수 k , $k+1$, $k+2$ 에 대하여 등식

$$h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4 \text{가 성립하려면 } h(k)=1, h(k+1)=1, h(k+2)=2 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $h(-1)=1$, $h(0)=1$, $h(1)=2$ 이므로 구하는 정수 k 의 값은 -1 이다.

03 답 ⑤

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식 구하기

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a \text{이므로 함수 } y=f(x)$$

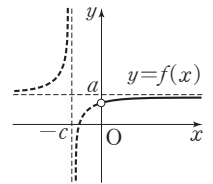
의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=-c, y=a$$

2단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형 파악하기

(i) $b-ac<0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 일대일함수이다.

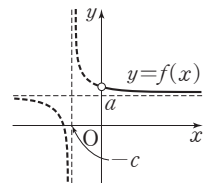


(ii) $b-ac=0$ 일 때,

$f(x)=a$ 에서 함수 $y=f(x)$ 는 상수함수이므로 일대일함수가 아니다.

(iii) $b-ac>0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 일대일함수이다.



3단계 순서쌍 (a, b, c) 의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 가 일대일함수가 되도록 하는 순서쌍

(a, b, c) 의 개수는 10 이하의 세 자연수로 만들 수 있는 모든 순서쌍의 개수에서 $b-ac=0$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수를 빼면 된다.

$$10 \text{ 이하의 자연수 } a, b, c \text{로 만들 수 있는 모든 순서쌍 } (a, b, c) \text{의 개수는 } 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$b-ac=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

① $b=1$ 일 때,

$ac=1$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 1)$ 의 1개

② $b=2$ 일 때,

$ac=2$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 2), (2, 1)$ 의 2개

③ $b=3$ 일 때,

$ac=3$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 3), (3, 1)$ 의 2개

④ $b=4$ 일 때,

$ac=4$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ 의 3개

⑤ $b=5$ 일 때,

$ac=5$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 5), (5, 1)$ 의 2개

⑥ $b=6$ 일 때,

$ac=6$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$ 의 4개

⑦ $b=7$ 일 때,

$ac=7$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 7), (7, 1)$ 의 2개

⑧ $b=8$ 일 때,

$ac=8$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$ 의 4개

⑨ $b=9$ 일 때,

$ac=9$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 9), (3, 3), (9, 1)$ 의 3개

⑩ $b=10$ 일 때,

$ac=10$ 이므로 순서쌍 (a, c) 는

$(1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)$ 의 4개

①~⑩에서 $b-ac=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$1+2+2+3+2+4+2+4+3+4=27$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일함수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$1000-27=973$$

idea 04 답 ①

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식 구하기

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(12+a)x-a^2-12a+2}{x-a} = \frac{(12+a)x-a(a+12)+2}{x-a} \\ &= \frac{(a+12)(x-a)+2}{x-a} = \frac{2}{x-a} + a+12 \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은
 $x=a, y=a+12$

2단계 원의 중심과 두 점근선의 교점이 일치할 때의 a 의 값 구하기

중심이 (a, a^2) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은
 $(x-a)^2+(y-a^2)^2=r^2$

원의 중심의 x 좌표는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 한 점근선 $x=a$ 위에 있다.

모든 실수 a 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 원

$(x-a)^2+(y-a^2)^2=r^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점 $(a, a+12)$ 와 원의 중심 (a, a^2) 이 일치할 때 교점이 2개 존재하면 된다.

$$a+12=a^2 \text{에서 } a^2-a-12=0$$

$$(a+3)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=4$$

3단계 반지름의 길이 구하기

(i) $a=4$ 일 때,

$f(x)=\frac{2}{x-4}+16$ 이고, 두 점근선의 교점의 좌표는

$(4, 16)$

함수 $f(x)=\frac{2}{x-4}+16$ 의 그래프 위의 한 점 $(p, \frac{2}{p-4}+16)$ 과 점 $(4, 16)$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\sqrt{(p-4)^2+\left(\frac{2}{p-4}+16-16\right)^2}$$

$$=\sqrt{(p-4)^2+\left(\frac{2}{p-4}\right)^2}$$

$$\therefore d^2=(p-4)^2+\left(\frac{2}{p-4}\right)^2$$

이때 $(p-4)^2>0, \left(\frac{2}{p-4}\right)^2>0$ 이므로

$$d^2=(p-4)^2+\left(\frac{2}{p-4}\right)^2$$

$$\geq 2\sqrt{(p-4)^2 \times \left(\frac{2}{p-4}\right)^2}$$

$$=4 \left(\text{단, 등호는 } (p-4)^2=\left(\frac{2}{p-4}\right)^2 \text{일 때 성립} \right)$$

즉, 점 $(4, 16)$ 과 함수 $f(x)=\frac{2}{x-4}+16$

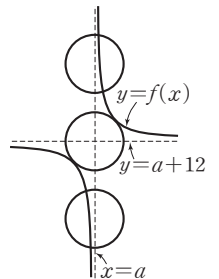
사이의 최단 거리는 2이므로 $r=2$ 일 때 원은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $a=-3$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 $r=2$ 일 때 원은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

한편 $r=2$ 이고 $a \neq -3, a \neq 4$ 인 경우는 원의 중심이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 한 점근선 $x=a$ 위에 있고 다른 점근선 $y=a+12$ 보다 위 또는 아래에 위치하게 되므로 원은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\therefore r=2$$



05 답 ③

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 이해하기

$g(x)=\frac{2x-5}{x-2}+a$ 로 놓으면 함수 $f(x)=\left|\frac{2x-5}{x-2}+a\right|$ 의 그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

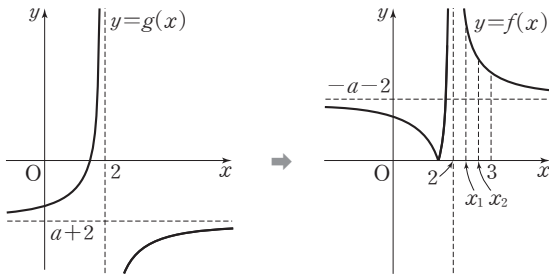
$$g(x)=\frac{2x-5}{x-2}+a=\frac{2(x-2)-1}{x-2}+a=-\frac{1}{x-2}+a+2$$

이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x=2, y=a+2$$

2단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기

(i) $a+2 \leq 0$, 즉 $a \leq -2$ 일 때,

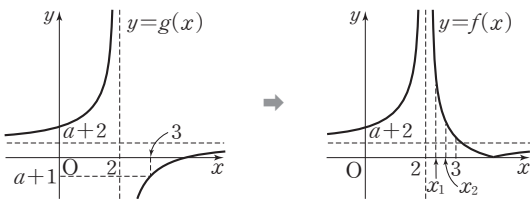


$2 < x_1 < x_2 < 3$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 이므로 $f(x_1) < 4 < f(x_2)$ 를 만족시키는 x_1, x_2 가 존재하지 않는다.

(ii) $a+2 > 0$, 즉 $a > -2$ 일 때,

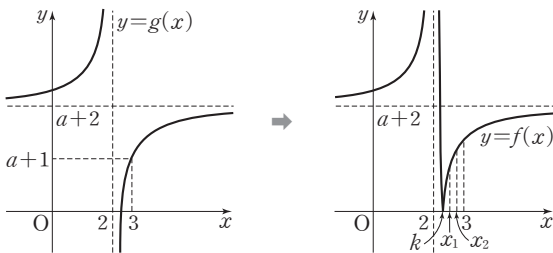
$$g(3) = a+1$$

① $a+1 \leq 0$, 즉 $-2 < a \leq -1$ 일 때,



$2 < x_1 < x_2 < 3$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 이므로 $f(x_1) < 4 < f(x_2)$ 를 만족시키는 x_1, x_2 가 존재하지 않는다.

② $a+1 > 0$, 즉 $a > -1$ 일 때,



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 k ($2 < k < 3$)라 하면 $k < x_2 < 3$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$, $x_1 < x_2$ 를 만족시키는 x_1 이 항상 존재한다.

이때 $f(x_1) < 4 < f(x_2)$ 를 만족시키려면 $k < x_2 < 3$ 이고 $f(x_2) > 4$ 인 x_2 가 존재해야 하므로 $f(3) > 4$

$$\text{즉, } f(3) = a+1 > 4 \text{에서}$$

$$a > 3$$

(i), (ii)에서 $a > 3$

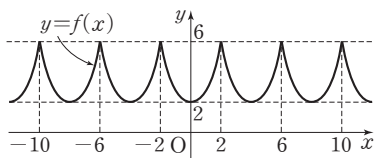
3단계 정수 a 의 최솟값 구하기

따라서 구하는 정수 a 의 최솟값은 4이다.

06 답 ④

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 그리기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



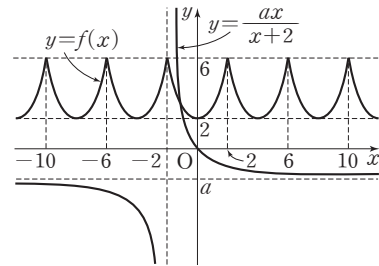
2단계 a 의 값의 범위 구하기

$$y = \frac{ax}{x+2} = \frac{a(x+2)-2a}{x+2} = -\frac{2a}{x+2} + a$$

이므로 함수 $y = \frac{ax}{x+2}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x = -2$, $y = a$

이고 점 $(0, 0)$ 을 지난다.

(i) $a < 0$ 일 때,

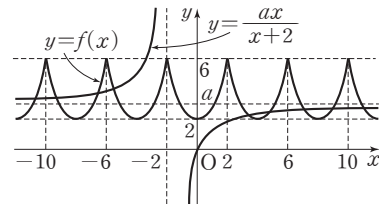


두 함수 $y=f(x)$, $y = \frac{ax}{x+2}$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다.

(ii) $a = 0$ 일 때,

$y = \frac{ax}{x+2}$ 에서 $y=0$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y = \frac{ax}{x+2}$ 의 그래프는 만나지 않는다.

(iii) $a > 0$ 일 때,



두 함수 $y=f(x)$, $y = \frac{ax}{x+2}$ 의 그래프가 무수히 많은 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a \leq 6$$

(i), (ii), (iii)에서 $2 \leq a \leq 6$

3단계 정수 a 의 값의 합 구하기

따라서 정수 a 의 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로 정수 a 의 값의 합은

$$2+3+4+5+6=20$$

07 답 9

1단계 점 $P(x, y)$ 를 x, y 에 대한 식으로 나타내기

함수 $y = \frac{9}{x-1} + 2$ ($x > 1$)의 그래프 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 = (x+4)^2 + y^2$$

$$\overline{PB}^2 = x^2 + (y+2)^2$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y + 20$$

$$2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y + 20 = k \text{ (} k \text{는 실수)라 하면}$$

$$2(x+2)^2 + 2(y+1)^2 = k - 10$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y+1)^2 = \frac{k}{2} - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 값이 최소일 때 점 P 의 위치 파악하기

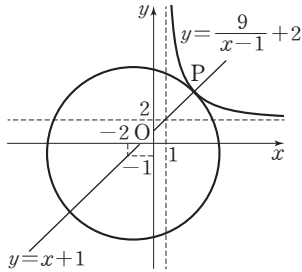
점 P 는 원 ① 위의 점이고, 원의 반지름의 길이가 최소일 때 k 의 값도 최소이다.

이때 점 P 는 함수 $y = \frac{9}{x-1} + 2$ ($x > 1$)의 그래프 위의 점이므로 점 P 가

원 ①과 함수 $y = \frac{9}{x-1} + 2$ 의 그래프의 접점일 때 k 의 값은 최소이다.

3단계 점 P의 x좌표와 y좌표의 합 구하기

그림과 같이 함수 $y = \frac{9}{x-1} + 2$ ($x > 1$)의 그래프의 두 점근선의 방정식의 교점의 좌표는 (1, 2)이고, 이 점과 원 ①의 중심 (-2, -1)은 직선 $y = x + 1$ 위의 점이므로 원 ①과 함수 $y = \frac{9}{x-1} + 2$ 의 그래프는 직선 $y = x + 1$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 원 ①과 함수 $y = \frac{9}{x-1} + 2$ ($x > 1$)의 그래프의 접점은 함수

$y = \frac{9}{x-1} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 의 교점과 같다.

$$\frac{9}{x-1} + 2 = x + 1 \text{에서 } \frac{9}{x-1} = x - 1$$

$$(x-1)^2 = 9, x-1 = \pm 3 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x = 4$

따라서 P(4, 5)이므로 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 $4 + 5 = 9$

08 답 ⑤

1단계 직선 OP와 직선 $x = 3$ 이 만나는 점을 Q라 하고 선분 QB의 길이 구하기

그림과 같이 직선 OP와 직선 $x = 3$ 이 만나는 점을 Q, 점 A에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 H, $\angle QOB = \theta$, $\overline{QB} = k$ 라 하자. 직각삼각형 QOB에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{QB}}{\overline{OB}} = \frac{k}{3} \quad \dots\dots ①$$

$\triangle ABO \cong \triangle AHO$ (RHA 합동)이므로

$$\overline{AH} = \overline{AB} = 1, \overline{OH} = \overline{OB} = 3$$

$\triangle QAH \sim \triangle QOB$ (AA 닮음)이므로 $\angle QAH = \angle QOB = \theta$

직각삼각형 QAH에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{HQ}}{\overline{AH}} = \overline{HQ} \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{에서 } \overline{HQ} = \frac{k}{3}$$

$\overline{OQ} = \overline{OH} + \overline{HQ} = 3 + \frac{k}{3}$ 이므로 직각삼각형 QOB에서

$$\overline{OQ}^2 = \overline{QB}^2 + \overline{OB}^2$$

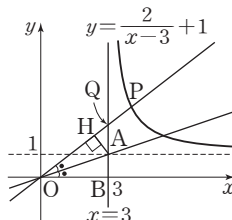
$$\left(3 + \frac{k}{3}\right)^2 = k^2 + 3^2, 9 + 2k + \frac{k^2}{9} = k^2 + 9$$

$$2k\left(\frac{4k}{9} - 1\right) = 0 \quad \therefore k = \frac{9}{4} \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore \overline{QB} = \frac{9}{4}$$

2단계 점 P의 x좌표 구하기

따라서 직선 OP의 기울기는 $\frac{k}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ 이므로 직선 OP의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$



직선 $y = \frac{3}{4}x$ 와 함수 $y = \frac{2}{x-3} + 1$ ($x > 3$)의 그래프의 교점의 x좌표는

$$\frac{3}{4}x = \frac{2}{x-3} + 1 \text{에서 } \frac{3x-4}{4} = \frac{2}{x-3}$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0, (3x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x > 3)$$

따라서 점 P의 좌표는 (4, 3)

3단계 선분 OP의 길이 구하기

$$\therefore \overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

09 답 $\frac{2}{3}$

1단계 직선 l_2 의 방정식 구하기

점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 m ($0 < m < \frac{3}{2}$)인 직선 l_2 의 방정식은

$$y - 3 = m(x - 2)$$

$$\therefore y = mx - 2m + 3$$

2단계 삼각형 OAR의 넓이를 m에 대한 식으로 나타내기

$R\left(\frac{2m-3}{m}, 0\right)$ 이므로 삼각형 OAR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left| \frac{2m-3}{m} \right| \times 3 = \left| \frac{6m-9}{2m} \right| = \frac{9-6m}{2m} \quad \left(\because 0 < m < \frac{3}{2} \right)$$

3단계 $\triangle OAR = \triangle OAQ + \triangle OQR$ 임을 이용하여 m의 값 구하기

유리함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 A(2, 3)에 대하여 대칭이므로

$$\overline{AB} = \overline{AO}, \overline{AP} = \overline{AQ}, \angle BAP = \angle OAQ$$

즉, 삼각형 OAQ와 삼각형 APB는 합동이므로 삼각형 OAQ의 넓이는 $\frac{5}{2}$ 이다.

$$\triangle OAR = \triangle OAQ + \triangle OQR \text{이므로}$$

$$\frac{9-6m}{2m} = \frac{5}{2} + \frac{5}{4}, \frac{9-6m}{2m} = \frac{15}{4}$$

$$36 - 24m = 30m, 54m = 36$$

$$\therefore m = \frac{2}{3}$$

idea

10 답 ①

1단계 선분 PQ의 길이가 최소가 되는 경우 파악하기

직선 $y = -x + 3$ 의 기울기가 -1이므로

$$\angle PQR = 45^\circ$$

따라서 직각삼각형 PQR는 $\overline{PR} = \overline{QR}$ 인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{PQ} = \sqrt{2} \overline{PR}$ 이므로 선분 PR의 길이가 최소일 때, 선분 PQ의 길이도 최소이다.

2단계 선분 PR의 길이가 최소가 되는 경우 파악하기

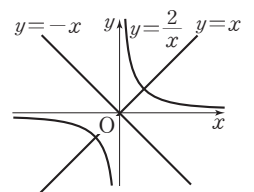
한편 함수 $y = \frac{2}{x-3}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 을 동시에 평행이동하여도 선분 PR의 길이는 변하지 않는다.

이때 함수 $y = \frac{2}{x-3}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 을 각각 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y = \frac{2}{x}$, $y = -x$ 이므로 선

분 PR의 길이의 최솟값은 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그

래프 위의 점에서 직선 $y = -x$ 까지의 거리의 최솟값과 같다.

이는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 원점 사이의 거리와 같다.



3단계 선분 PQ의 길이가 최소일 때, 삼각형 PQR의 넓이 구하기

$$\frac{2}{x} = x \text{에서 } x^2 = 2$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

즉, 교점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 또는 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 이므로 선분 PR의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

따라서 구하는 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PR}^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$$

11 답 ①

1단계 M의 값과 $p=M$ 일 때의 함수 $f(x)$ 구하기

$$f(x) = \frac{x+19}{2x-p} = \frac{\frac{1}{2}(2x-p) + 19 + \frac{p}{2}}{2x-p} = \frac{19 + \frac{p}{2}}{2x-p} + \frac{1}{2} \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = \frac{p}{2}, y = \frac{1}{2}$$

이때 p 는 자연수이므로

$$19 + \frac{p}{2} > 0, \frac{p}{2} > 0$$

따라서 $f(2) < f(6) < f(4)$ 를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같아야 하므로

$$2 < \frac{p}{2} < 4$$

$$\therefore 4 < p < 8$$

자연수 p 의 최댓값은 7이므로

$$M=7$$

$p=M=7$ 일 때의 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{x+19}{2x-7}$$

2단계 $f(x)$ 의 값을 구하여 조건 $g(f(6)) < g(f(4)) < g(f(2))$ 변형하기

$$f(2) = -7, f(4) = 23, f(6) = 5 \text{이므로}$$

$$g(f(6)) < g(f(4)) < g(f(2)) \text{에서}$$

$$g(5) < g(23) < g(-7) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

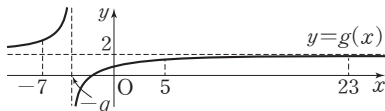
3단계 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 q 의 값의 범위 구하기

$$g(x) = \frac{2x+6}{x+q} = \frac{2(x+q)+6-2q}{x+q} = \frac{6-2q}{x+q} + 2 \text{이므로 함수 } g(x) \text{의}$$

그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = -q, y = 2$$

①을 만족시키려면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같아야 하므로



$$-7 < -q < 5$$

$$\therefore -5 < q < 7$$

그런데 $6-2q < 0$, 즉 $q > 3$ 이므로

$$3 < q < 7$$

4단계 자연수 q 의 개수 구하기

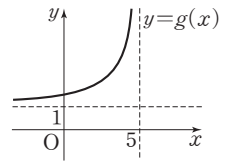
따라서 구하는 자연수 q 는 4, 5, 6의 3개이다.

12 답 42

1단계 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 파악하여 $g(t)$ 와 $g(t+2)$ 의 대소 비교하기

함수 $g(x) = 1 - \frac{2}{x-5} (x < 5)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $g(x)$ 는 $x < 5$ 에서 x 의 값이 커지면 $g(x)$ 의 값도 커진다.

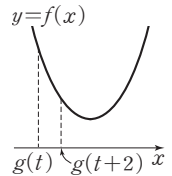
$$\therefore g(t) < g(t+2)$$



2단계 ㉠을 만족시키는 함수 $f(x)$ 골 파악하기

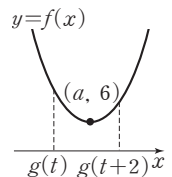
(i) $t < 1$ 일 때, $h(t) = f(g(t+2))$

함수 $f(x)$ 는 $x = g(t+2)$ 에서 최솟값을 가지므로 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표는 $g(t+2)$ 보다 크다.



(ii) $1 \leq t < 3$ 일 때, $h(t) = 6$

함수 $f(x)$ 는 최솟값 6을 가지므로 그림과 같이 $g(t) \leq x \leq g(t+2)$ 에 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가 포함되어야 하고, 이때 꼭짓점의 y 좌표는 6이어야 한다.



(i), (ii)에서 $h(t)$ 는 $t=1$ 일 때 $f(g(t+2))=6$ 이어야 한다.

$$f(g(1+2)) = 6 \text{에서}$$

$$f(g(3)) = 6$$

$$\text{이때 } g(3) = 1 - \frac{2}{3-5} = 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 6$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = a(x-2)^2 + 6 (a > 0)$ 으로 놓을 수 있다.

3단계 ㉠을 이용하여 함수 $f(x)$ 구하기

㉠에서 $h(-1) = 7$ 이므로

$$f(g(-1+2)) = 7$$

$$\therefore f(g(1)) = 7$$

$$\text{이때 } g(1) = 1 - \frac{2}{1-5} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 7$$

$$a\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + 6 = 7, \frac{a}{4} + 6 = 7$$

$$\therefore a = 4$$

$$\therefore f(x) = 4(x-2)^2 + 6$$

4단계 $f(5)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(5) = 4 \times 3^2 + 6 = 42$$

05 무리함수

step 1 핵심 문제

| 60~61쪽

- 01 ③ 02 ② 03 $-\frac{10}{3}$ 04 ③ 05 2 06 36
07 ⑤ 08 ③ 09 $\frac{17}{2}$ 10 $\frac{55}{4}$ 11 ① 12 ③

01 답 ③

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1+2x+2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3x+1}{x-1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(\sqrt{3}+1)+1}{(\sqrt{3}+1)-1}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}} = \frac{9+4\sqrt{3}}{3}$$

02 답 ②

$$y = \frac{cx+d}{ax+b} = \frac{\frac{c}{a}x + \frac{d}{a}}{x + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{c}{a}(x + \frac{b}{a}) + \frac{d}{a} - \frac{bc}{a^2}}{x + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{d}{a} - \frac{bc}{a^2}}{x + \frac{b}{a}} + \frac{c}{a}$$

이므로 유리함수 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$$

두 점근선의 교점의 x 좌표와 y 좌표는 모두 양수이므로

$$-\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{a} > 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 $b > 0, c < 0$

또 유리함수 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 그래프와 y 축의 교점의 y 좌표는 양수이므로

$$\frac{d}{b} > 0$$

이때 $b > 0$ 이므로 $d > 0$

$y = a\sqrt{bx+c} + d = a\sqrt{b(x + \frac{c}{b})} + d$ 이므로 무리함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의

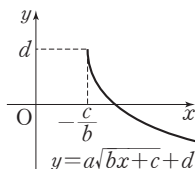
그래프는 함수 $y = a\sqrt{bx}$ ($a < 0, b > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$

만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-\frac{c}{b} > 0, d > 0$ 이므로 무리함수

$y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

따라서 무리함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프는 제1사분면, 제4사분면을 지난다.



03 답 $-\frac{10}{3}$

$-5 \leq x \leq -2$ 에서 함수 $g(x) = -x+5$ 는 $x = -5$ 일 때 최댓값 10을 갖고 $x = -2$ 일 때 최솟값 7을 갖는다.

함수 $f(x) = a\sqrt{-x-2} + b = a\sqrt{-(x+2)} + b$ ($a > 0$)는 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖고 $x = -5$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$f(-2) = 7, f(-5) = 10 \text{에서}$$

$$b = 7, a\sqrt{3} + b = 10 \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{3}\sqrt{-x-2} + 7 = \sqrt{-3(x+2)} + 7$$

$$f(k) = 9 \text{에서 } \sqrt{-3(k+2)} + 7 = 9$$

$$\sqrt{-3(k+2)} = 2, -3(k+2) = 4$$

$$k+2 = -\frac{4}{3} \quad \therefore k = -\frac{10}{3}$$

04 답 ③

함수 $y = 5 - 2\sqrt{1-x} = -2\sqrt{-(x-1)} + 5$ 의 그래프는 함수

$y = -2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = -x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 인 직선이다.

(i) 직선 $y = -x+k$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지날 때, $y = -x+k$

$$5 = -1+k \quad \therefore k = 6$$

(ii) 직선 $y = -x+k$ 가 함수

$y = 5 - 2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 y 축의 교

점을 지날 때,

함수 $y = 5 - 2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 3)$

직선 $y = -x+k$ 가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

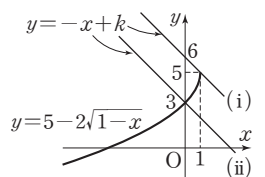
$$3 = 0+k \quad \therefore k = 3$$

(i), (ii)에서 함수 $y = 5 - 2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+k$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$3 < k \leq 6$$

따라서 정수 k 의 값은 4, 5, 6이므로 구하는 모든 정수 k 의 값의 합은

$$4+5+6=15$$



05 답 2

함수 $y = \sqrt{-x-2}$ 의 그래프와 직선

$y = mx$ 가 접하려면 그림과 같이 $m < 0$

이고, 방정식 $\sqrt{-x-2} = mx$ 가 오직 하

나의 실근을 가져야 한다.배점 30%

$\sqrt{-x-2} = mx$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2x^2 + x + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 8m^2 = 0, (2\sqrt{2}m - 1)(2\sqrt{2}m + 1) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 또는 } m = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

그런데 $m < 0$ 이므로 $m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 배점 30%

이를 ①에 대입하면

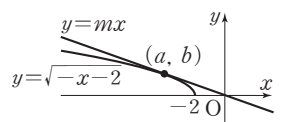
$$\frac{1}{8}x^2 + x + 2 = 0, x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 = 0 \quad \therefore x = -4$$

이를 $y = \sqrt{-x-2}$ 에 대입하면 $y = \sqrt{2}$

$$\therefore a = -4, b = \sqrt{2} \quad \dots\dots\text{배점 30\%}$$

$$\therefore mab = -\frac{\sqrt{2}}{4} \times (-4) \times \sqrt{2} = 2 \quad \dots\dots\text{배점 10\%}$$



06 답 36

점 A의 좌표를 $(a, 2\sqrt{3a})$ ($a > 0$)라 하면 $C(a, 0)$

점 A와 점 B의 y 좌표가 같으므로

$$2\sqrt{3a} = 2\sqrt{x} \quad \therefore x = 3a$$

$B(3a, 2\sqrt{3a})$ 이므로 $D(3a, 0)$

사각형 ACDB가 정사각형이므로 $\overline{AC} = \overline{CD}$ 에서

$$2\sqrt{3a} = 2a, \quad a = \sqrt{3a}$$

$$a^2 = 3a, \quad a(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0) \quad \therefore A(3, 6)$$

따라서 $\overline{AC} = 6$ 이므로 정사각형 ACDB의 넓이는

$$6 \times 6 = 36$$

07 답 ⑤

곡선 $y = \sqrt{x+3} - 3$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -\sqrt{x+3} + 3 \quad \therefore g(x) = -\sqrt{x+3} + 3$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{x+3} - 3 = -\sqrt{x+3} + 3 \text{에서 } \sqrt{x+3} = 3$$

$$x+3=9 \quad \therefore x=6 \quad \therefore A(6, 0)$$

직선 $x=k$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점 B의 좌표는 $(k, \sqrt{k+3}-3)$

직선 $x=k$ 가 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점 C의 좌표는 $(k, -\sqrt{k+3}+3)$

$$\overline{BC} = 4 \text{이므로 } |2\sqrt{k+3}-6| = 4$$

$$\text{이때 } k > 6 \text{이므로 } 2\sqrt{k+3}-6 = 4$$

$$\sqrt{k+3} = 5, \quad k+3 = 25 \quad \therefore k = 22$$

$$\therefore B(22, 2), C(22, -2)$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (22-6) \times 4 = 32$$

08 답 ③

$f^{-1}(g(x)) = 2x$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$f^{-1}(g(3)) = 6$$

$$\therefore g(3) = f(6) = \sqrt{6}$$

09 답 $\frac{17}{2}$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(a) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(a) \\ &= (g^{-1} \circ f)(a) \\ &= g^{-1}(f(a)) \end{aligned}$$

$$g^{-1}(f(a)) = \frac{4}{3} \text{에서 } f(a) = g\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{8}{3}-1}{\frac{4}{3}-1} = 5 \text{이므로 } f(a) = 5 \text{에서}$$

$$\sqrt{2a-1}+1=5, \quad \sqrt{2a-1}=4$$

$$2a-1=16, \quad 2a=17 \quad \therefore a = \frac{17}{2}$$

10 답 $\frac{55}{4}$

함수 $f(x) = \sqrt{-3x+a+b}$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $f(2) = 4$ 에서

$$\sqrt{-6+a+b} = 4, \quad \sqrt{-6+a} = 4-b$$

양변을 제곱하면

$$a-6 = b^2-8b+16 \quad \therefore a = b^2-8b+22 \quad \dots\dots ㉠$$

역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(4, 2)$ 를 지나므로 $f(4) = 2$ 에서

$$\sqrt{-12+a+b} = 2, \quad \sqrt{-12+a} = 2-b$$

양변을 제곱하면

$$a-12 = b^2-4b+4 \quad \therefore a = b^2-4b+16 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } b^2-8b+22 = b^2-4b+16$$

$$4b = 6 \quad \therefore b = \frac{3}{2}$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } a = \frac{9}{4} - 12 + 22 = \frac{49}{4}$$

$$\therefore a+b = \frac{49}{4} + \frac{3}{2} = \frac{55}{4}$$

11 답 ①

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하면 선분 PQ의 중점의 x 좌표가

$$\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore x_1+x_2 = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

무리함수 $f(x) = \sqrt{ax+4} - 2$ 의 그래프와 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 무리함수 $f(x) = \sqrt{ax+4} - 2$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로

$$\sqrt{ax+4} - 2 = x, \quad \sqrt{ax+4} = x+2$$

양변을 제곱하면

$$ax+4 = x^2+4x+4, \quad x^2+(4-a)x = 0$$

$$x(x+4-a) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a-4$$

$$\text{㉠에서 } x_1+x_2=3 \text{이므로 } a-4=3$$

$$\therefore a = 7$$

12 답 ③

함수 $f(x) = -3\sqrt{-x+1} + a = -3\sqrt{-(x-1)} + a$ 의 그래프는 함수 $y = -3\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x) = -3\sqrt{-x+1} + a$ 의 그래프와 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $f(x) = -3\sqrt{-x+1} + a$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

(i) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가

접할 때,

$$-3\sqrt{-x+1} + a = x \text{에서}$$

$$-3\sqrt{-x+1} = x-a$$

양변을 제곱하면

$$9(-x+1) = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\therefore x^2 - (2a-9)x + a^2 - 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2a-9)^2 - 4(a^2-9) = 0$$

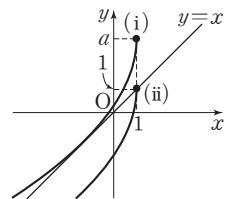
$$-36a + 117 = 0 \quad \therefore a = \frac{13}{4}$$

(ii) 점 $(1, a)$ 가 직선 $y = x$ 위에 있을 때,

$$a = 1$$

(i), (ii)에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에 서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는 $1 \leq a < \frac{13}{4}$

따라서 구하는 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

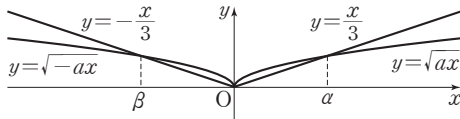


01 ④	02 ⑤	03 ④	04 ②	05 ③	06 2
07 $-\frac{13}{4} < a < -3$	08 ③	09 $\frac{1}{5}$	10 $\frac{49}{4}$	11 $\frac{135}{8}$	
12 10	13 ⑤	14 24	15 ①	16 14	17 ④
18 ⑤	19 ③	20 ②	21 $\frac{121}{16}$	22 ④	23 1

01 답 ④

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & (x \geq 0) \\ \sqrt{-ax} & (x < 0) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & (x \geq 0) \\ -\frac{x}{3} & (x < 0) \end{cases} \text{이므로 두 함수}$$

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다.



따라서 $\alpha + \beta = 0$ 이므로

$$\alpha = -\beta$$

$$\alpha\beta = -16 \text{에서 } \alpha^2 = 16$$

$$\therefore \alpha = 4, \beta = -4 \text{ 또는 } \alpha = -4, \beta = 4$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 원점이 아닌 두 교점의 좌표는

$$\left(4, \frac{4}{3}\right), \left(-4, \frac{4}{3}\right)$$

이때 점 $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ 는 함수 $f(x) = \sqrt{ax}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\frac{4}{3} = \sqrt{4a}, \frac{16}{9} = 4a$$

$$\therefore a = \frac{4}{9}$$

02 답 ⑤

$$x > 3 \text{일 때, } f(x) = \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{x-2} + 2$$

$$x \leq 3 \text{일 때, } f(x) = \sqrt{-(x-3)} + a$$

(가)에서 함수 f 의 치역은 $\{y | y > 2\}$ 이고, (나)에서 함수 f 가 일대일대응이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같아야 한다.

즉, $f(3) = 9$ 이므로

$$a = 9$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-2} & (x > 3) \\ \sqrt{3-x} + 9 & (x \leq 3) \end{cases}$$

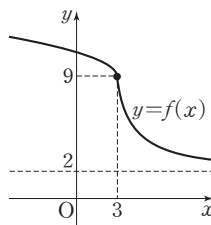
$$f(2) = 1 + 9 = 10 \text{이므로 } f(2)f(k) = 40 \text{에서}$$

$$10f(k) = 40 \quad \therefore f(k) = 4$$

$$x > 3 \text{일 때, } f(x) = \frac{2x+3}{x-2} < 9 \text{이므로}$$

$$\frac{2k+3}{k-2} = 4, 2k+3 = 4k-8$$

$$\therefore k = \frac{11}{2}$$



03 답 ④

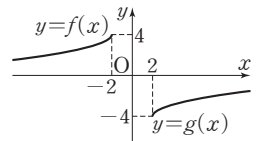
$f(x) = -\sqrt{kx+2k+4}$, $g(x) = \sqrt{-kx+2k-4}$ 라 하자.

$$\neg. -f(-x) = -(-\sqrt{-kx+2k+4}) = \sqrt{-kx+2k-4} = g(x)$$

따라서 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $k < 0$ 이면 두 곡선은 그림과 같으므로

만나지 않는다.

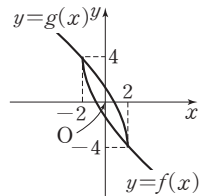


ㄷ. $\neg$ 에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이므로 $k > 0$ 일 때, 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 최댓값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -4)$ 를 지날 때이다.

따라서 $f(2) = -4$ 에서

$$-\sqrt{2k+2k+4} = -4, \sqrt{4k} = 8, 4k = 64 \quad \therefore k = 16$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.



개념 NOTE

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 서로

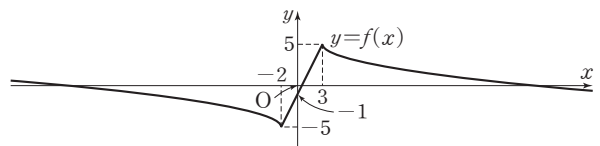
(1) x 축에 대하여 대칭 $\Rightarrow f(x) = -g(x)$

(2) y 축에 대하여 대칭 $\Rightarrow f(x) = g(-x)$

(3) 원점에 대하여 대칭 $\Rightarrow f(x) = -g(-x)$

04 답 ②

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 $g(t)$ 이므로

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < -5) \\ 2 & (t = -5) \\ 3 & (-5 < t < 5) \\ 2 & (t = 5) \\ 1 & (t > 5) \end{cases}$$

$x \leq -2$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$0 = \sqrt{-x-2}-5, \sqrt{-x-2} = 5$$

$$-x-2 = 25 \quad \therefore x = -27$$

$-2 < x < 3$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$0 = 2x-1 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$x \geq 3$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$0 = -\sqrt{x-3}+5, \sqrt{x-3} = 5$$

$$x-3 = 25 \quad \therefore x = 28$$

직선 $x=t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점 중에서 y 좌표가 양수인 점의 개수가 $h(t)$ 이므로

$$h(t) = \begin{cases} 1 & (t < -27) \\ 0 & (-27 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ 1 & (\frac{1}{2} < t < 28) \\ 0 & (t \geq 28) \end{cases}$$

- (i) $t \leq -5$ 일 때,
 $g(t) \leq 2, h(t) \leq 1$ 이므로 $g(t) + h(t) \leq 3$
- (ii) $-5 < t \leq \frac{1}{2}$ 일 때,
 $g(t) = 3, h(t) = 0$ 이므로 $g(t) + h(t) = 3$
- (iii) $\frac{1}{2} < t < 5$ 일 때,
 $g(t) = 3, h(t) = 1$ 이므로 $g(t) + h(t) = 4$
- (iv) $t \geq 5$ 일 때,
 $g(t) \leq 2, h(t) \leq 1$ 이므로 $g(t) + h(t) \leq 3$
- (i)~(iv)에서 $g(t) + h(t) = 4$ 를 만족시키는 t 의 값의 범위는
 $\frac{1}{2} < t < 5$ 이므로 구하는 정수 t 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

05 답 ③

$f(x) \geq g(x)$ 일 때, $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ 이므로
 $h(x) = \frac{3}{2}\{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)\} = 3f(x) = 3\sqrt{-x+2}$

$f(x) < g(x)$ 일 때, $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ 이므로
 $h(x) = \frac{3}{2}\{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)\} = 3g(x) = 3|x|$

두 함수 $f(x) = \sqrt{-x+2}, g(x) = |x|$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는
 $\sqrt{-x+2} = |x|$ 에서 양변을 제곱하면
 $-x+2 = x^2, x^2+x-2=0$
 $(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x = -2$ 또는 $x = 1$

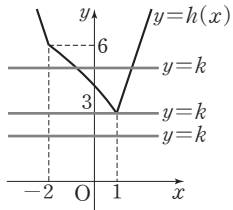
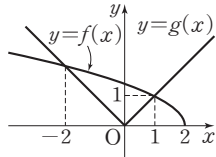
그림에서 $x > 1$ 일 때 $f(x) < g(x)$,
 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x) \geq g(x)$,
 $x < -2$ 일 때 $f(x) < g(x)$

즉, $h(x) = \begin{cases} 3x & (x > 1) \\ 3\sqrt{-x+2} & (-2 \leq x \leq 1) \\ -3x & (x < -2) \end{cases}$ 이므로

함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 $l(k) = \begin{cases} 0 & (k < 3) \\ 1 & (k = 3) \\ 2 & (k > 3) \end{cases}$ 이므로

$l(2) + l(3) + l(4) + l(5) = 0 + 1 + 2 + 2 = 5$

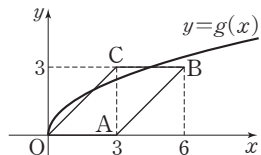
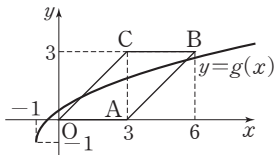


06 답 2

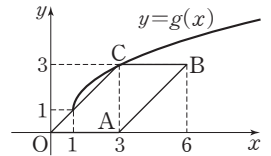
$f(x) = \sqrt{2x+4} - 2$ 에서
 $g(x) = \sqrt{2(x-k)} + 4 - 2 + k$

(i) $k = 1$ 일 때,
 $g(x) = \sqrt{2(x+1)} - 1$ 이고,
 $g(3) < 3$ 이므로 그림과 같이 함수
 $y = g(x)$ 의 그래프는 사각형
OABC의 네 변과 두 점에서 만난다.

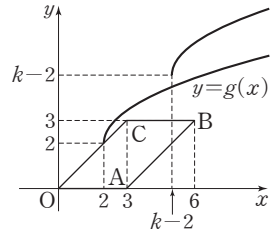
(ii) $k = 2$ 일 때,
 $g(x) = \sqrt{2x}$ 이고, $g(3) < 3$ 이므로 그
림과 같이 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는
사각형 OABC의 네 변과 세 점에서
만난다.



- (iii) $k = 3$ 일 때,
 $g(x) = \sqrt{2(x-1)} + 1$ 이고, $g(3) = 3$
이므로 그림과 같이 함수 $y = g(x)$ 의
그래프는 사각형 OABC의 네 변과
두 점에서 만난다.



- (iv) $k \geq 4$ 인 자연수일 때,
 $g(3) > 3$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그
래프는 그림과 같이 사각형 OABC
의 네 변과 한 점에서 만나거나 만나
지 않는다.



(i)~(iv)에서 구하는 자연수 k 의 값은 2이다.

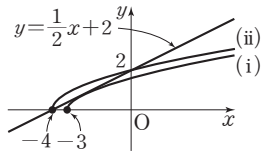
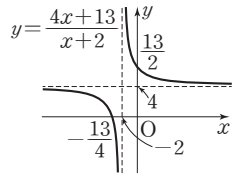
07 답 $-\frac{13}{4} < a < -3$

함수 $y = \frac{4x+13}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 4$ 의 그래프는
그림과 같고 두 점 $(-\frac{13}{4}, 0), (0, \frac{13}{2})$ 을
지난다.

함수 $y = \sqrt{x-a}$ 의 그래프가 함수
 $y = \frac{4x+13}{x+2}$ 의 그래프와 한 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는
 $a > -\frac{13}{4}$ ㉠ 배점 30%

(i) 함수 $y = \sqrt{x-a}$ 의 그래프가 직선
 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 에 접할 때,
 $\sqrt{x-a} = \frac{1}{2}x + 2$ 의 양변을 제곱하면
 $x - a = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
 $\therefore x^2 + 4x + 16 + 4a = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 4 - 16 - 4a = 0 \quad \therefore a = -3$

(ii) 함수 $y = \sqrt{x-a}$ 의 그래프가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때,
 $0 = \sqrt{-4-a} \quad \therefore a = -4$

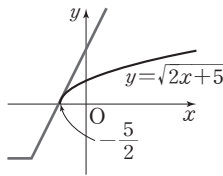


- (i), (ii)에서 함수 $y = \sqrt{x-a}$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 가 서로 다른 두
점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는
 $-4 \leq a < -3$ ㉡ 배점 50%
- ㉠, ㉡에서 구하는 a 의 값의 범위는
 $-\frac{13}{4} < a < -3$ 배점 20%

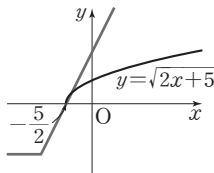
08 답 ③

$x \geq k$ 일 때, $y = x + (x-k) = 2x - k$
 $x < k$ 일 때, $y = x - (x-k) = k$
 $\therefore y = \begin{cases} 2x - k & (x \geq k) \\ k & (x < k) \end{cases}$

- (i) ① 직선 $y=2x-k$ 가 함수 $y=\sqrt{2x+5}$ 의 그래프에 접할 때,
 $2x-k=\sqrt{2x+5}$ 의 양변을 제곱하면
 $4x^2-4kx+k^2=2x+5$
 $4x^2-2(2k+1)x+k^2-5=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(2k+1)^2-4(k^2-5)=0 \quad \therefore k=-\frac{21}{4}$

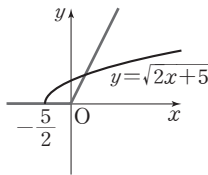


- ② 직선 $y=2x-k$ 가 점 $(-\frac{5}{2}, 0)$ 을 지날 때,
 $0=-5-k$
 $\therefore k=-5$

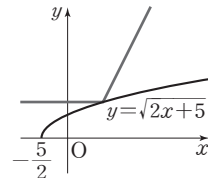


- ①, ②에서 $-\frac{21}{4} < k \leq -5$

- (ii) ① 직선 $y=kx$ 가 점 $(0, 0)$ 을 지날 때,
 $k=0$



- ② 함수 $y=\sqrt{2x+5}$ 의 그래프가 점 (k, k) 를 지날 때,
 $k=\sqrt{2k+5}$ 의 양변을 제곱하면
 $k^2=2k+5, k^2-2k-5=0$
 $k=1\pm\sqrt{6}$
 $\therefore k=1+\sqrt{6} (\because k>0)$



- ①, ②에서 $0 \leq k < 1+\sqrt{6}$

- (i), (ii)에서 두 함수 $y=\sqrt{2x+5}, y=x+|x-k|$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{21}{4} < k \leq -5 \text{ 또는 } 0 \leq k < 1+\sqrt{6}$$

따라서 구하는 정수 k 는 $-5, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

09 답 1/5

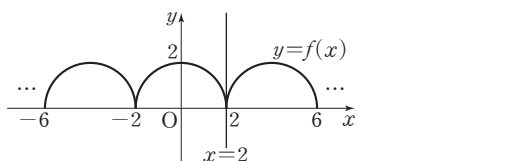
(가)에서 $f(x)=\sqrt{4-x^2} \geq 0$

$y=\sqrt{4-x^2}$ 이라 하고 양변을 제곱하면

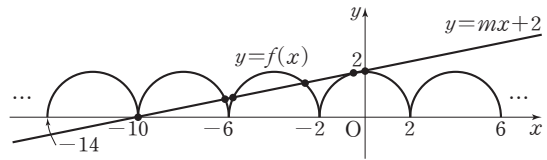
$$y^2=4-x^2 \quad \therefore x^2+y^2=4 (y \geq 0)$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2이면서 $y \geq 0$ 인 반원이다.

$f(x)=f(4-x)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, $f(x)=f(-x)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y=mx+2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지나고 $m > 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx+2$ 의 교점의 개수가 6이 되려면 그림과 같이 직선 $y=mx+2$ 가 점 $(-10, 0)$ 을 지나야 한다.



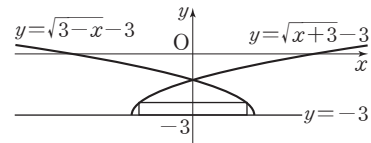
따라서 $0 = -10m + 2$ 이므로 $m = \frac{1}{5}$

10 답 49/4

$f(x)=\sqrt{x+3}-3, g(x)=\sqrt{3-x}-3$ 이라 하자.

$f(-x)=\sqrt{-x+3}-3=g(x)$ 이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 그림과 같이 두 함수 $y=\sqrt{x+3}-3, y=\sqrt{3-x}-3$ 의 그래프와 직선 $y=-3$ 으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 직선 $y=-3$ 위에 있는 직사각형도 y 축에 대하여 대칭이다.



직사각형의 세로의 길이를 $a (a > 0)$ 라 하면 함수 $y=\sqrt{3-x}-3$ 의 그래프와 직사각형이 만나는 점의 x 좌표는

$$-3+a=\sqrt{3-x}-3 \text{에서 } a=\sqrt{3-x}$$

양변을 제곱하면 $a^2=3-x \quad \therefore x=3-a^2$

직사각형의 둘레의 길이를 l 이라 하면

$$l=4(3-a^2)+2a=-4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{49}{4} (a>0)$$

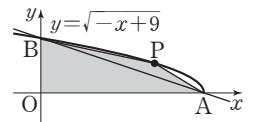
따라서 구하는 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은 $\frac{49}{4}$ 이다.

11 답 135/8

$A(9, 0), B(0, 3)$ 이므로 삼각형 OAB 의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 9 \times 3 = \frac{27}{2}$$



$\square OAPB = \triangle OAB + \triangle APB$ 이고 삼각형 OAB 의 넓이는 일정하므로 삼각형 APB 의 넓이가 최대일 때, 사각형 $OAPB$ 의 넓이가 최대이다.

이때 $\overline{AB} = \sqrt{9^2+3^2} = 3\sqrt{10}$ 이므로 점 P 와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때, 삼각형 APB 의 넓이가 최대이다.

두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore x+3y-9=0$$

점 P 의 y 좌표를 $a (a > 0)$ 라 하면 $a=\sqrt{-x+9}$

양변을 제곱하면 $a^2=-x+9 \quad \therefore x=9-a^2$

이때 점 $P(9-a^2, a)$ 와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|9-a^2+3a-9|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|-a^2+3a|}{\sqrt{10}} = \frac{\left|-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right|}{\sqrt{10}}$$

즉, $a = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값이 $\frac{9}{4\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{40}$ 이므로 삼각형 APB 의 넓이의

최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \frac{9\sqrt{10}}{40} = \frac{27}{8}$$

따라서 사각형 $OAPB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{27}{2} + \frac{27}{8} = \frac{135}{8}$$

12 답 10

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 함수 $y=x^2$ ($x \leq 0$)의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같고, 점 A를 같은 방법으로 대칭이동하면 점 B로 이동한다.

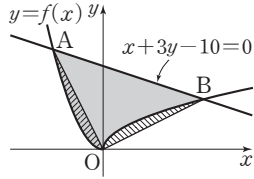
따라서 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{10}$$

원점 O와 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거

$$리를 d라 하면 $d = \frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \sqrt{10}$$$

$$따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$$$



13 답 ⑤

$$y = \begin{cases} a\sqrt{x} & (x \geq 0) \\ a\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases} \text{이므로 함수}$$

$y=a\sqrt{|x|}$ 의 그래프는 그림과 같다.

$b=a\sqrt{|x|}$ 에서 양변을 제곱하면

$$b^2 = a^2|x|, |x| = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore x = -\frac{b^2}{a^2} \text{ 또는 } x = \frac{b^2}{a^2}$$

이때 삼각형 OAB는 정삼각형이므로 직선 AB가 y 축과 만나는 점을 H라 하면 삼각형 OAH는 $\angle HOA = 30^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\text{즉, } \overline{AH} : \overline{OH} = 1 : \sqrt{3} \text{이므로 } \frac{b^2}{a^2} : b = 1 : \sqrt{3}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}b^2}{a^2}, a^2b = \sqrt{3}b^2, b(a^2 - \sqrt{3}b) = 0$$

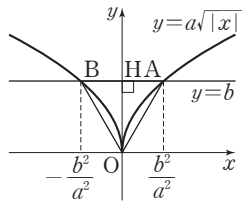
$$\therefore b=0 \text{ 또는 } a^2 = \sqrt{3}b$$

$$\text{그런데 } b > 0 \text{이므로 } a^2 = \sqrt{3}b \quad \therefore b = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{정삼각형 OAB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times \frac{2b^2}{a^2} \times b = \frac{b^3}{a^2}$$

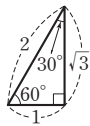
$$b = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \text{이므로 } \frac{b^3}{a^2} = \frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)^3}{a^2} = \frac{a^6}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{9}a^4$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{9}$$



개념 NOTE

세 내각의 크기가 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1 : \sqrt{3} : 2$



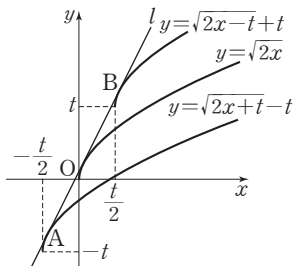
idea

14 답 24

두 함수 $y=\sqrt{2x+t}-t, y=\sqrt{2x-t}+t$ 의 그래프는 함수

$y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동하면 겹

쳐지므로 두 함수의 그래프에 접하는 직선 l 은 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프에 접한다.



이때 두 함수 $y=\sqrt{2x+t}-t, y=\sqrt{2x-t}+t$ 의 그래프의 시작점

$$\left(-\frac{t}{2}, -t\right), \left(\frac{t}{2}, t\right) \text{를 지나는 직선의 기울기는 } \frac{t+t}{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}}=2 \text{이므로 두}$$

함수의 그래프에 동시에 접하는 직선 l 의 기울기도 2이다.

직선 l 의 방정식을 $y=2x+a$ (a 는 실수)로 놓으면 직선 l 은 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프에 접하므로

$$\sqrt{2x}=2x+a$$

양변을 제곱하면

$$2x=4x^2+4ax+a^2 \quad \therefore 4x^2+2(2a-1)x+a^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2a-1)^2 - 4a^2 = 0$$

$$-4a+1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y=2x+\frac{1}{4}$

두 점 A, B 사이의 거리는 두 점 $\left(-\frac{t}{2}, -t\right), \left(\frac{t}{2}, t\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)^2 + (t+t)^2} = \sqrt{5}t$$

또 원점 O와 직선 $y=2x+\frac{1}{4}$, 즉 $8x-4y+1=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{1}{\sqrt{8^2+(-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{5}t \times \frac{\sqrt{5}}{20} = \frac{t}{8}$$

이때 $S(2t)+S(t)=9$ 이므로

$$\frac{t}{4} + \frac{t}{8} = 9, \frac{3t}{8} = 9$$

$$\therefore t=24$$

15 답 ①

정의역이 $\{x|x \geq 4\}$ 이므로 $a \geq 4$

$x \geq 4$ 에서 $f(x) \geq 9$ 이므로 $f(a)=b$ 라 하면

$$b \geq 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b)$$

$$g(b) = -\sqrt{b-4}+6 \text{이고 } \textcircled{1} \text{에서 } b-4 \geq 5 \text{이므로}$$

$g(b)$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 $b-4$ 의 값은 9, 16, 25이다.

(i) $b-4=9$, 즉 $b=13$ 일 때,

$$f(a)=13 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3a+4}+5=13, \sqrt{3a+4}=8$$

$$3a+4=64, 3a=60 \quad \therefore a=20$$

(ii) $b-4=16$, 즉 $b=20$ 일 때,

$$f(a)=20 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3a+4}+5=20, \sqrt{3a+4}=15$$

$$3a+4=225, 3a=221 \quad \therefore a=\frac{221}{3}$$

(iii) $b-4=25$, 즉 $b=29$ 일 때,

$$f(a)=29 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3a+4}+5=29, \sqrt{3a+4}=24$$

$$3a+4=576, 3a=572 \quad \therefore a=\frac{572}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 a 의 값은 20이다.

16 [답] 14

$$\begin{aligned}
 h(x) &= (g \circ f^{-1})^{-1}(x) \\
 &= (f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) \quad \dots \text{배점 20\%} \\
 g(x) &= \sqrt{3x-9}+4 \text{의 치역은 } \{y|y \geq 4\} \\
 y &= \sqrt{3x-9}+4 \text{라 하면 } y-4 = \sqrt{3x-9} \\
 \text{양변을 제곱하면} \\
 y^2 - 8y + 16 &= 3x - 9, \quad x = \frac{1}{3}y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{25}{3} \\
 x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \\
 y &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{25}{3} \\
 \therefore g^{-1}(x) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{25}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(x-4)^2 + 3 \quad (x \geq 4) \quad \dots \text{배점 20\%} \\
 x \geq 4 \text{일 때, 두 함수 } y=f(x), y=g^{-1}(x) \text{의 그래프는 } x \text{의 값이 커질수록 } y \text{의 값도 커진다.} \\
 \text{따라서 } 6 \leq x \leq 9 \text{에서 함수 } g^{-1}(x) \text{는 } x=9 \text{일 때 최댓값 } \frac{34}{3} \text{를 갖고,} \\
 x=6 \text{일 때 최솟값 } \frac{13}{3} \text{을 가지므로 함수 } h(x) = f(g^{-1}(x)) \text{는 } x=9 \text{일} \\
 \text{때 최댓값 } f\left(\frac{34}{3}\right) = \sqrt{\frac{77}{3}} \text{을 갖고, } x=6 \text{일 때 최솟값 } f\left(\frac{13}{3}\right) = \sqrt{\frac{35}{3}} \\
 \text{를 갖는다.} \quad \dots \text{배점 50\%} \\
 \text{따라서 } M = \sqrt{\frac{77}{3}}, m = \sqrt{\frac{35}{3}} \text{이므로} \\
 M^2 - m^2 = \frac{77}{3} - \frac{35}{3} = 14 \quad \dots \text{배점 10\%}
 \end{aligned}$$

17 [답] ④

모든 실수 a 에 대하여 집합 $X_a = \{x | f(x) = a\}$ 가 $n(X_a) = 1$ 을 만족시키려면 모든 실수 a 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 한 점에서만 만나야 하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이어야 한다.

$x < 3$ 일 때, $y = \sqrt{-3x+k}+2 = \sqrt{-3\left(x-\frac{k}{3}\right)}+2$

$x \geq 3$ 일 때, $y = -\sqrt{3x-k}+2 = -\sqrt{3\left(x-\frac{k}{3}\right)}+2$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같아야 하므로

$\frac{k}{3} = 3 \quad \therefore k = 9$

$\therefore f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+9}+2 & (x < 3) \\ -\sqrt{3x-9}+2 & (x \geq 3) \end{cases}$

$f^{-1}(1) = p$ 라 하면 $f(p) = 1 < 2$

$x \geq 3$ 일 때, $f(x) = -\sqrt{3x-9}+2 \leq 2$ 이므로 $-\sqrt{3p-9}+2 = 1, \sqrt{3p-9} = 1$

$3p-9 = 1, 3p = 10$

$\therefore p = \frac{10}{3}$

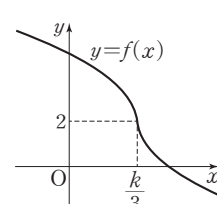
$f^{-1}(17) = q$ 라 하면 $f(q) = 17 > 2$

$x < 3$ 일 때, $f(x) = \sqrt{-3x+9}+2 > 2$ 이므로 $\sqrt{-3q+9}+2 = 17, \sqrt{-3q+9} = 15$

$-3q+9 = 225, -3q = 216$

$\therefore q = -72$

$\therefore f^{-1}(1) \times f^{-1}(17) = \frac{10}{3} \times (-72) = -240$



18 [답] ⑤

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 C, 점 B와 점 D도 각각 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

ㄱ. D(5, 1)이면 B(1, 5)

즉, $f(1) = 5$ 이므로 $k = 5$

ㄴ. 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만날 때, 그 교점은 직선 $y = x$ 위의 점이다.

원 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $2(x-3)^2 = 8, (x-3)^2 = 4$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 5$

즉, 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 (1, 1)에서 만나면 점 A와 점 C가 같고, 점 (5, 5)에서 만나면 점 B와 점 D가 같다.

따라서 점 A와 점 C가 같으면 $f(1) = 1$ 이므로 $k = 1$

ㄷ. A($\alpha, k\sqrt{\alpha}$), B($\beta, k\sqrt{\beta}$)라 하면 C($k\sqrt{\alpha}, \alpha$), D($k\sqrt{\beta}, \beta$)

따라서 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기의 곱은 $\frac{k\sqrt{\beta} - k\sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta - \alpha}{k\sqrt{\beta} - k\sqrt{\alpha}} = 1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 [답] ③

함수 $f(x) = k\sqrt{x} (k > 0)$ 의 그래프와 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $f(x) = k\sqrt{x} (k > 0)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 $k\sqrt{x} = x$

양변을 제곱하면 $k^2x = x^2, x(x - k^2) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = k^2$

이때 점 P는 원점 O가 아니므로 P(k^2, k^2)

점 Q는 선분 OP를 3 : 1로 내분하는 점이고, 점 R는 선분 OP를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

Q($\frac{3k^2}{4}, \frac{3k^2}{4}$), R($\frac{k^2}{4}, \frac{k^2}{4}$)

점 A의 y 좌표는 점 Q의 y 좌표와 같으므로 $\frac{3k^2}{4}$

$\frac{3k^2}{4} = k\sqrt{x}$ 에서 $\sqrt{x} = \frac{3k}{4}$

$\therefore x = \frac{9k^2}{16} \quad \therefore A\left(\frac{9k^2}{16}, \frac{3k^2}{4}\right)$

삼각형 ABQ는 $\overline{AQ} = \overline{QB}$ 인 직각이등변삼각형이고 $\overline{AQ} = \frac{3k^2}{4} - \frac{9k^2}{16} = \frac{3k^2}{16}$ 이므로 삼각형 ABQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{QB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3k^2}{16}\right)^2 = \frac{9k^4}{512}$

점 D의 x 좌표는 점 R의 x 좌표와 같으므로 $\frac{k^2}{4}$

$\therefore f\left(\frac{k^2}{4}\right) = k\sqrt{\frac{k^2}{4}} = \frac{k^2}{2} \quad \therefore D\left(\frac{k^2}{4}, \frac{k^2}{2}\right)$

삼각형 CDR는 $\overline{DR} = \overline{CR}$ 인 직각이등변삼각형이고 $\overline{DR} = \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{4}$ 이므로 삼각형 CDR의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{DR} \times \overline{CR} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{k^2}{4}\right)^2 = \frac{k^4}{32}$

삼각형 ABQ와 삼각형 CDR의 넓이의 합이 $\frac{25}{2}$ 이므로

$$\frac{9k^4}{512} + \frac{k^4}{32} = \frac{25}{2} \cdot \frac{25k^4}{512} = \frac{25}{2}$$

$$k^4 = 256, (k^2 - 16)(k^2 + 16) = 0$$

$$(k+4)(k-4)(k^2+16)=0 \quad \therefore k=4 (\because k>0)$$

개념 NOTE

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m:n (m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

20 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 가 삼각형 ABC와 점 B(7, 1)에서 만날 때, 실수 k의 값은

$$1=\sqrt{7-k}, 1=7-k$$

$$\therefore k=6$$

즉, $k>6$ 일 때 곡선 $y=f(x)$ 는 삼각형 ABC와 만나지 않으므로 곡선 $y=f(x)$ 가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 6이다.

$y=\sqrt{x-k}$ 라 하고 양변을 제곱하면

$$y^2=x-k, x=y^2+k$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2+k$

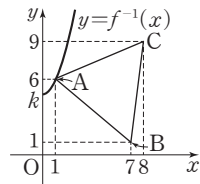
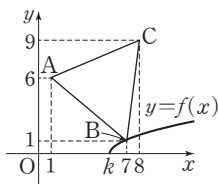
$$\therefore f^{-1}(x)=x^2+k (x \geq 0)$$

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 삼각형 ABC와 점 A(1, 6)에서 만날 때, 실수 k의 값은

$$6=1+k \quad \therefore k=5$$

즉, $k>5$ 일 때 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 삼각형 ABC와 만나지 않으므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다.



21 답 $\frac{121}{16}$

정사각형 ACBD의 넓이가 최소일 때 대각선 AB의 길이도 최소이다.

즉, 점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 최소일 때이므로 기울기가 1인 직선과 함수 $f(x)=-\sqrt{-x-3}$ 의 그래프의 접점이 A일 때이다.

기울기가 1인 접선의 방정식을 $y=x+a$ (a는 상수)라 하면

$$-\sqrt{-x-3}=x+a$$

양변을 제곱하면

$$-x-3=x^2+2ax+a^2$$

$$\therefore x^2+(2a+1)x+a^2+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2a+1)^2-4(a^2+3)=0$$

$$4a-11=0 \quad \therefore a=\frac{11}{4}$$

따라서 기울기가 1이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 접하는 접선의 방정식은 $y=x+\frac{11}{4}$ 배점 30%

점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 최솟값은 점 (0, 0)과 직선

$$y=x+\frac{11}{4}, \text{ 즉 } 4x-4y+11=0 \text{ 사이의 거리와 같으므로}$$

$$\frac{11}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{11}{4\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{8}$$

정사각형 ACBD의 대각선 AB의 길이의 최솟값은

$$2 \times \frac{11\sqrt{2}}{8} = \frac{11\sqrt{2}}{4}$$

따라서 정사각형 ACBD의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{11\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{121}{16} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

22 답 ④

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 함수 $y=f(x),$

$y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점 A는 함수 $g(x)=\frac{1}{2}(x^2-3) (x \geq 0)$ 의

그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같다.

$$\frac{1}{2}(x^2-3)=x \text{에서 } x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=3 (\because x \geq 0) \quad \therefore A(3, 3)$$

점 C는 점 $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로

$$C\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore BC = \sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

점 $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 를 지나고 기울기가 -1인 직선 l의 방정식은

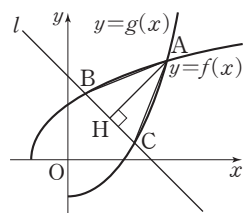
$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+2, x+y-\frac{5}{2}=0 \quad \therefore 2x+2y-5=0$$

점 A(3, 3)에서 직선 $2x+2y-5=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|6+6-5|}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{4} = \frac{21}{8}$$



23 답 1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

$$\sqrt{-x+5}-1=x, \sqrt{-x+5}=x+1$$

$$\text{양변을 제곱하면 } -x+5=x^2+2x+1$$

$$x^2+3x-4=0, (x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 두 함수 $f(x), f^{-1}(x)$ 의 정의역의 공통 범위는 $-1 \leq x \leq 5$ 이므로

$f(x)=\sqrt{-x+5}-1$ 의 치역은 $\{y|y \geq -1\}$ 이므로
 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq -1\}$

$$x=1 \quad \therefore A(1, 1)$$

(7), (4)에서 $g(x)=-x+a$ (a는 실수)로 놓으면 $\rightarrow g(x)=g^{-1}(x)=-x+a$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 A를 지나

므로

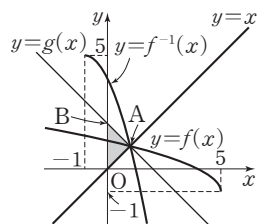
$$1=-1+a \quad \therefore a=2$$

$$\text{즉, } g(x)=-x+2 \text{이므로 } g(0)=2$$

$$\therefore B(0, 2)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$



01 ⑤ 02 18 03 65 04 ① 05 ① 06 ②
07 5 08 4 09 ② 10 12

idea

01 답 ⑤

1단계 직선 OP의 기울기가 나타내는 의미 파악하기

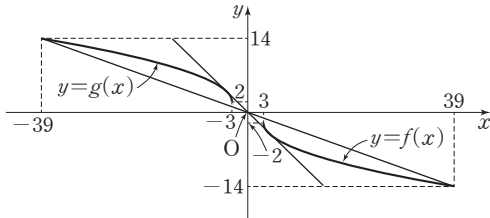
선분 AB의 중점 P의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$

즉, 직선 OP의 기울기는 두 점 (x_1, y_1) , $(-x_2, -y_2)$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

2단계 직선 OP의 기울기가 최대, 최소가 되는 경우 파악하기

$B'(-x_2, -y_2)$ 라 하고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭 이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$ 라 하면 점 B'은 함수 $g(x)=2\sqrt{-x-3}+2$ ($-39 \leq x \leq -3$)의 그래프 위의 점이다.



직선 OP의 기울기는 직선 AB'의 기울기와 같고 직선 AB'의 기울기는 직선 AB'이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에 접할 때 최소이고, 두 점 $(39, -14)$, $(-39, 14)$ 를 지날 때 최대이다.

3단계 m의 값 구하기

직선 AB'이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에 접하면 두 곡선이 원점에 대하여 대칭이므로 직선 AB'은 원점을 지나는 직선이다.

또 직선 AB'의 기울기를 a라 하면 $a \geq 0$ 일 때 직선 $y=ax$ 는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프와 만나지 않으므로

$a < 0$

직선 $y=ax$ 와 곡선 $f(x)=-2\sqrt{x-3}-2$ 가 접할 때

$ax=-2\sqrt{x-3}-2$ 에서

$ax+2=-2\sqrt{x-3}$

양변을 제곱하면

$a^2x^2+4ax+4=4x-12$

$\therefore a^2x^2+4(a-1)x+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(a-1)^2-16a^2=0$

$3a^2+2a-1=0$, $(3a-1)(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a < 0$)

$\therefore m=-1$

4단계 M의 값 구하기

직선 AB'이 두 점 $(39, -14)$, $(-39, 14)$ 를 지날 때,

$a=\frac{14+14}{-39-39}=-\frac{28}{78}=-\frac{14}{39}$

$\therefore M=-\frac{14}{39}$

5단계 Mm의 값 구하기

$\therefore Mm=-1 \times \left(-\frac{14}{39}\right)=\frac{14}{39}$

02 답 18

1단계 $y=2\sqrt{x}$ 가 정수가 되는 x의 값 찾기

두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+6$ 의 교점의 x좌표는 4

$x \geq 4$ 일 때, $y=2\sqrt{x}$ 가 정수가 되도록 하는 x의 값은

$4, \frac{25}{4}, 9, \frac{49}{4}, 16, \frac{81}{4}, 25, \dots \rightarrow \frac{y^2}{4}=x$ 에 $y=4, 5, 6, \dots$ 을 대입한다.

2단계 x의 값의 범위에 따라 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 구하기

$f(x)=2\sqrt{x}$, $g(x)=-\sqrt{x}+6$ 이라 하자.

(i) $4 \leq x < \frac{25}{4}$ 일 때,

$4 \leq f(x) < 5$, $\frac{7}{2} < g(x) \leq 4$

이때 정수 x의 값은 4, 5, 6, 정수 y의 값은 4이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $3 \times 1 = 3$

(ii) $\frac{25}{4} \leq x < 9$ 일 때,

$5 \leq f(x) < 6$, $3 < g(x) \leq \frac{7}{2}$

이때 정수 x의 값은 7, 8, 정수 y의 값은 4, 5이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $2 \times 2 = 4$

(iii) $9 \leq x < \frac{49}{4}$ 일 때,

$6 \leq f(x) < 7$, $\frac{5}{2} < g(x) \leq 3$

이때 정수 x의 값은 9, 10, 11, 12, 정수 y의 값은 3, 4, 5, 6이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $4 \times 4 = 16$

(iv) $\frac{49}{4} \leq x < 16$ 일 때,

$7 \leq f(x) < 8$, $2 < g(x) \leq \frac{5}{2}$

이때 정수 x의 값은 13, 14, 15, 정수 y의 값은 3, 4, 5, 6, 7이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $3 \times 5 = 15$

(v) $16 \leq x < \frac{81}{4}$ 일 때,

$8 \leq f(x) < 9$, $\frac{3}{2} < g(x) \leq 2$

이때 정수 x의 값은 16, 17, 18, 19, 20, 정수 y의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $5 \times 7 = 35$

3단계 점의 개수가 59가 되도록 하는 자연수 k의 값 구하기

(i)~(iv)에서 점의 개수의 합은 $3+4+16+15=38$ 이고 (v)에서 정수 x의 값이 16, 17, 18일 때 점의 개수의 합은 $3 \times 7 = 21$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 점의 개수가 59가 되도록 하는 자연수 k의 값은 18이다.

03 답 65

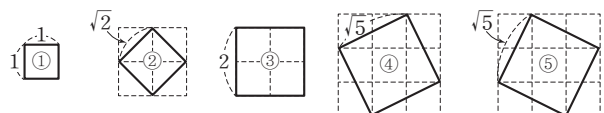
1단계 $y=\frac{\sqrt{x+3}}{2}$ 이 자연수가 되는 자연수 x의 값 찾기

$y=\frac{\sqrt{x+3}}{2}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값은

1, 13, 33, 61, 97, $\dots \rightarrow 4y^2-3=x$ 에 $y=1, 2, 3, \dots$ 을 대입한다.

2단계 x의 값의 범위에 따라 f(n) 구하기

한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하인 정사각형은 다음과 같이 5가지이다.

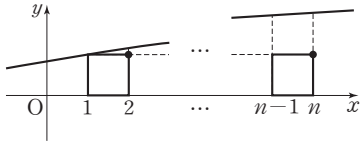


(i) $n=1$ 일 때,

주어진 조건을 만족시키는 정사각형은 존재하지 않는다.

$$\therefore f(1)=0$$

(ii) $2 \leq n \leq 13$ 일 때,



①과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(2, 1), (3, 1), (4, 1), \dots, (n, 1)$$

이므로 정사각형은 $(n-1)$ 개

따라서 $f(n)=n-1$ 이므로

$$f(13)=12$$

(iii) $14 \leq n \leq 33$ 일 때, 새로 생기는 정사각형은

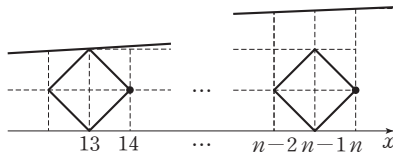
① ①과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(14, 1), (15, 1), (16, 1), \dots, (n, 1),$$

$$(14, 2), (15, 2), (16, 2), \dots, (n, 2)$$

이므로 정사각형은 $2(n-13)$ 개

②

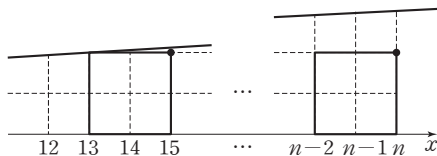


②와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(14, 1), (15, 1), (16, 1), \dots, (n, 1)$$

이므로 정사각형은 $(n-13)$ 개

③



③과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(15, 2), (16, 2), (17, 2), \dots, (n, 2)$$

이므로 정사각형은 $\{(n-13)-1\}$ 개

①, ②, ③에서 정사각형의 개수는

$$4(n-13)-1=4n-53$$

따라서 $f(n)=4n-53+f(13)$ 이므로

$$f(33)=79+12=91$$

(iv) $34 \leq n \leq 61$ 일 때, 새로 생기는 정사각형은

① ①과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(34, 1), (35, 1), (36, 1), \dots, (n, 1),$$

$$(34, 2), (35, 2), (36, 2), \dots, (n, 2),$$

$$(34, 3), (35, 3), (36, 3), \dots, (n, 3)$$

이므로 정사각형은 $3(n-33)$ 개

② ②와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(34, 1), (35, 1), (36, 1), \dots, (n, 1),$$

$$(34, 2), (35, 2), (36, 2), \dots, (n, 2)$$

이므로 정사각형은 $2(n-33)$ 개

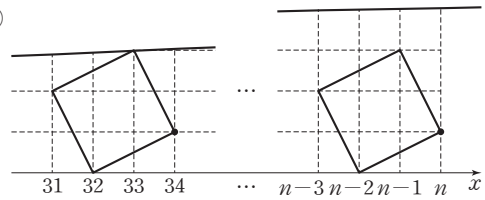
③ ③과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(34, 2), (35, 2), (36, 2), \dots, (n, 2),$$

$$(35, 3), (36, 3), (37, 3), \dots, (n, 3)$$

이므로 정사각형은 $\{2(n-33)-1\}$ 개

④

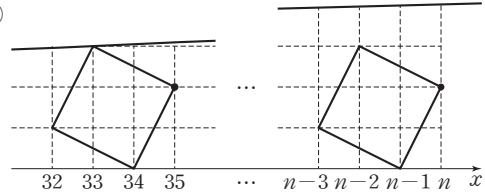


④와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(34, 1), (35, 1), (36, 1), \dots, (n, 1)$$

이므로 정사각형은 $(n-33)$ 개

⑤



⑤와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(35, 2), (36, 2), (37, 2), \dots, (n, 2)$$

이므로 정사각형은 $\{(n-33)-1\}$ 개

①~⑤에서 정사각형의 개수는

$$9(n-33)-2=9n-299$$

따라서 $f(n)=9n-299+f(33)$ 이므로

$$f(61)=250+91=341$$

(v) $62 \leq n \leq 97$ 일 때, 새로 생기는 정사각형은

① ①과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(62, 1), (63, 1), (64, 1), \dots, (n, 1),$$

$$(62, 2), (63, 2), (64, 2), \dots, (n, 2),$$

$$(62, 3), (63, 3), (64, 3), \dots, (n, 3),$$

$$(62, 4), (63, 4), (64, 4), \dots, (n, 4)$$

이므로 정사각형은 $4(n-61)$ 개

② ②와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(62, 1), (63, 1), (64, 1), \dots, (n, 1),$$

$$(62, 2), (63, 2), (64, 2), \dots, (n, 2),$$

$$(62, 3), (63, 3), (64, 3), \dots, (n, 3)$$

이므로 정사각형은 $3(n-61)$ 개

③ ③과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$$(62, 2), (63, 2), (64, 2), \dots, (n, 2),$$

$$(62, 3), (63, 3), (64, 3), \dots, (n, 3),$$

$$(63, 4), (64, 4), (65, 4), \dots, (n, 4)$$

이므로 정사각형은 $\{3(n-61)-1\}$ 개

④ ④와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(62, 1), (63, 1), (64, 1), \dots, (n, 1),$$

$$(62, 2), (63, 2), (64, 2), \dots, (n, 2)$$

이므로 정사각형은 $2(n-61)$ 개

⑤ ⑤와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$$(62, 2), (63, 2), (64, 2), \dots, (n, 2),$$

$$(63, 3), (64, 3), (65, 3), \dots, (n, 3)$$

이므로 정사각형은 $\{2(n-61)-1\}$ 개

①~⑤에서 정사각형의 개수는 $14(n-61)-2=14n-856$

$$\therefore f(n)=14n-856+f(61)=14n-856+341=14n-515$$

3단계 자연수 n 의 최댓값 구하기

$$14n-515 \leq 400 \text{에서 } n < 66$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 65이다.

04 답 ①

1단계 조건이 나타내는 의미 파악하기

방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 두 실근 a, β 에 대하여 $f(a) \neq 0$, $g(\beta) \neq 0$ 이 되려면 두 함수 $f(x)=\frac{ax+6}{x+2}$, $g(x)=\sqrt{bx+8}$ 의 그래프는 x 축 위의 점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

2단계 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프 파악하기

$$f(x)=\frac{ax+6}{x+2}=\frac{a(x+2)-2a+6}{x+2}=\frac{-2a+6}{x+2}+a \text{ 이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$ 이고, 두 점 $(0, 3)$, $(-\frac{6}{a}, 0)$ 을 지난다.

이때 $-2a+6 > 0$, 즉 $a < 3$ 인 경우와 $-2a+6 < 0$, 즉 $a > 3$ 인 경우로 나누어 그래프를 그려야 한다.

또 $g(x)=\sqrt{bx+8}=\sqrt{b(x+\frac{8}{b})}$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-\frac{8}{b}, 0)$, $(0, 2\sqrt{b})$ 를 지난다.

3단계 $a < 3$ 인 자연수일 때, 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i) $a < 3$ 인 자연수일 때,

$$0 < -2a+6 \leq 4 \text{ 이고,}$$

$$-6 \leq -\frac{6}{a} < -2 \text{ 이므로 그림과 같이}$$

$$-\frac{8}{b} < -\frac{6}{a} \text{ 일 때 두 함수 } y=f(x),$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 x 축 위의 점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만난다.

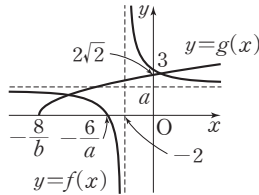
$$-\frac{8}{b} < -\frac{6}{a} \text{ 에서 } 4a > 3b$$

$$a=1 \text{ 일 때, } b=1$$

$$a=2 \text{ 일 때, } b=1, 2$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1+2=3$$



4단계 $3 < a < 10$ 인 자연수일 때, 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(ii) $3 < a < 10$ 인 자연수일 때,

$$-14 < -2a+6 < 0 \text{ 이고,}$$

$$-2 < -\frac{6}{a} < -\frac{3}{5} \text{ 이므로 그림과 같이}$$

$$-\frac{8}{b} < -\frac{6}{a} \text{ 일 때 두 함수 } y=f(x),$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 x 축 위의 점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$-\frac{8}{b} < -\frac{6}{a} \text{ 에서 } 4a > 3b$$

$$a=4 \text{ 일 때, } b=1, 2, 3, 4, 5$$

$$a=5 \text{ 일 때, } b=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a=6 \text{ 일 때, } b=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$a=7 \text{ 일 때, } b=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$a=8 \text{ 일 때, } b=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$a=9 \text{ 일 때, } b=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \quad \rightarrow b \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수이다.}$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$5+6+7+9+9+9=45$$

5단계 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3+45=48$$

05 답 ①

1단계 점 M과 점 A 사이의 거리의 최솟값과 같은 것 찾기

그림과 같이 함수 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 임의의 점 P와 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 점 P에서 직선 $y=x+2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있으므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은 직선 $y=x+2$ 와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 점 A와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 합과 같다.

2단계 직선 $y=x+2$ 와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값 구하기

직선 $y=x+2$ 와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값의 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

점 $P(a, 2\sqrt{a})$ 라 하면 점 P와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-2\sqrt{a}+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|(\sqrt{a}-1)^2+1|}{\sqrt{2}}$$

즉, 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값은 $a=1$ 일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 직선 $y=x+2$ 와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3단계 점 A와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리 구하기

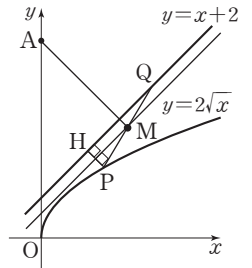
점 $A(0, 8)$ 과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-8+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

4단계 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값 구하기

따라서 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + 3\sqrt{2} = \frac{13\sqrt{2}}{4}$$



06 답 ②

1단계 원의 중심 C의 좌표 구하기

점 $Q(3, 5)$ 는 원 $(x-c)^2+(y-2)^2=13$ 위의 점이므로

$$(3-c)^2+(5-2)^2=13, \quad c^2-6c+5=0$$

$$(c-1)(c-5)=0$$

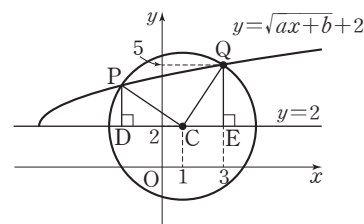
$$\therefore c=1 \text{ 또는 } c=5$$

그런데 $c=5$ 이면 함수 $y=\sqrt{ax+b}+6$ 에서 $y \geq 6 > 2+\sqrt{13}$ 이므로 원과 만나지 않는다.

$$\therefore c=1 \quad \therefore C(1, 2)$$

2단계 점 P의 좌표 구하기

$y=\sqrt{ax+b}+2$ 이므로 그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 $y=2$ 에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.



원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 이므로

$$\overline{PC} = \overline{QC} = \sqrt{13}$$

삼각형 PCQ에서 $\overline{PQ} = \sqrt{26}$ 이므로

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{QC}^2$$

즉, 삼각형 PCQ는 $\angle PCQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

두 삼각형 PDC, CEQ에서

$$\angle QCE = \angle CPD, \angle CQE = \angle PCD$$

$$\therefore \triangle PDC \cong \triangle CEQ \text{ (AA 닮음)}$$

이때 $\overline{CE} = 2, \overline{QE} = 3$ 이므로

$$\overline{PD} = 2, \overline{CD} = 3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1-3, 2+2)$

$$\therefore P(-2, 4)$$

3단계 $a+b+c$ 의 값 구하기

함수 $y = \sqrt{ax+b}+2$ 의 그래프가 두 점 $P(-2, 4), Q(3, 5)$ 를 지나므로

$$4 = \sqrt{-2a+b}+2, 5 = \sqrt{3a+b}+2$$

$$\sqrt{-2a+b}=2, \sqrt{3a+b}=3$$

$$-2a+b=4, 3a+b=9$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=6$$

$$\therefore a+b+c=8$$

idea

07 답 5

1단계 집합 B를 (x, y) 로 나타내기

$(x, y) \in A, (y, x) \in B$ 이므로 집합 B는 함수 $y = \sqrt{x+n^4}-n^2 (x \geq 0)$ 의 역함수의 그래프 위의 점들을 원소로 갖는다.

$$y = \sqrt{x+n^4}-n^2 \text{에서 } y+n^2 = \sqrt{x+n^4}$$

양변을 제곱하면

$$y^2+2n^2y+n^4 = x+n^4, x = y^2+2n^2y$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = x^2+2n^2x (x \geq 0)$$

$$\therefore B = \{(x, y) | y = x^2+2n^2x, x \geq 0\}$$

2단계 점 Q_n 의 좌표 구하기

$A \cap B = \{(0, 0)\}$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 두

함수 $y = \sqrt{x+n^4}-n^2, y = x^2+2n^2x$ 의

그래프는 점 $(0, 0)$ 에서만 만난다.

$Q_n \in B \cap C$ 이므로

$$x^2+2n^2x = -x+2n^2+2 \text{에서}$$

$$x^2+(2n^2+1)x-(2n^2+2)=0$$

$$(x-1)(x+2n^2+2)=0$$

$$\therefore x=1 (\because x \geq 0)$$

$$\therefore Q_n(1, 2n^2+1)$$

3단계 점 P_n 의 좌표 구하기

점 P_n 은 점 Q_n 과 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$P_n(2n^2+1, 1)$$

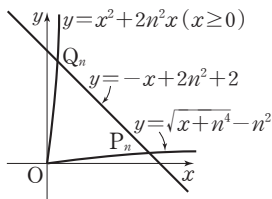
4단계 n 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \overline{P_nQ_n} &= \sqrt{(2n^2+1-1)^2 + (1-2n^2-1)^2} \\ &= 2\sqrt{2}n^2 \end{aligned}$$

$$\overline{P_nQ_n} = 50\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$2\sqrt{2}n^2 = 50\sqrt{2}, n^2 = 25$$

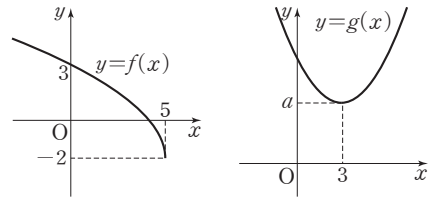
$$\therefore n=5 (\because n \text{은 자연수})$$



08 답 4

1단계 $(g \circ f)(x)$ 의 값이 최소가 되는 점 파악하기

두 함수 $f(x) = \sqrt{-5(x-5)}-2, g(x) = (x-3)^2+a$ 의 그래프는 그림과 같으므로 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 값이 3에 가까워질수록 $g(f(x))$ 의 값은 작아진다.

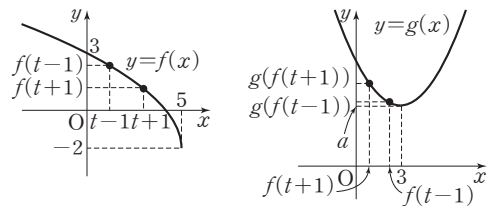


즉, $x=0$ 일 때 $f(x)=3$ 이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 정의역에 0이 포함되어 있으면 최솟값은 a 이다.

2단계 t 의 값의 범위에 따른 $h(t)$ 구하기

$$|x-t| \leq 1 \text{에서 } t-1 \leq x \leq t+1$$

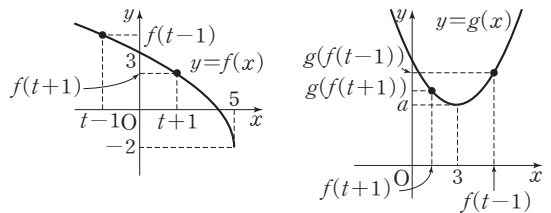
(i) $t-1 > 0$, 즉 $1 < t \leq 4$ 일 때,



$g(f(x))$ 의 최솟값은 $x=t-1$ 일 때이므로

$$h(t) = g(f(t-1))$$

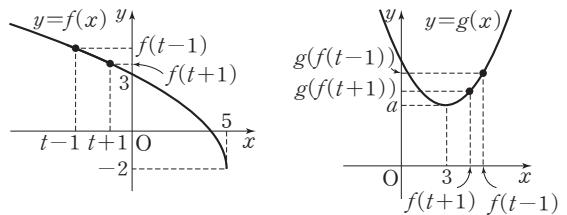
(ii) $t-1 \leq 0 \leq t+1$, 즉 $-1 \leq t \leq 1$ 일 때,



$g(f(x))$ 의 최솟값은 $x=0$ 일 때이므로

$$h(t) = g(f(0)) = g(3) = a$$

(iii) $t+1 < 0$, 즉 $t < -1$ 일 때,



$g(f(x))$ 의 최솟값은 $x=t+1$ 일 때이므로 $h(t) = g(f(t+1))$

(i), (ii), (iii)에서

$$h(t) = \begin{cases} g(f(t+1)) & (t < -1) \\ a & (-1 \leq t \leq 1) \\ g(f(t-1)) & (1 < t \leq 4) \end{cases}$$

3단계 abc 의 값 구하기

$$\therefore b = -1, c = 1$$

$$h(-16) = 21 \text{이므로}$$

$$g(f(-15)) = 21, g(8) = 21$$

$$25 + a = 21 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore abc = 4$$

09 답 ②

1단계 역함수가 존재하기 위한 조건 파악하기

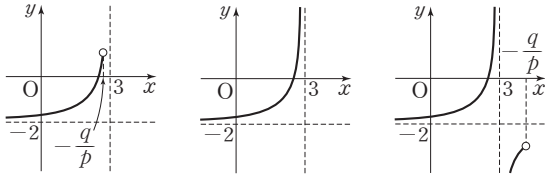
함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하기 위해서는 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 한다.

2단계 $px+q < 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형 그리기

(i) $px+q < 0$ 일 때, $f(x) = \frac{-2x+5}{x-3} = -\frac{1}{x-3} - 2$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

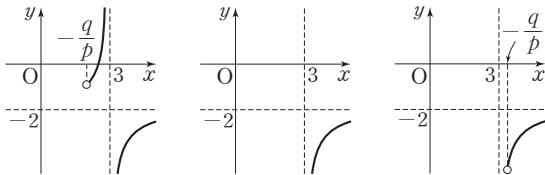
① $p > 0$ 일 때, $px+q < 0$ 에서 $x < -\frac{q}{p}$

① $-\frac{q}{p} < 3$ 일 때 ② $-\frac{q}{p} = 3$ 일 때 ③ $-\frac{q}{p} > 3$ 일 때



② $p < 0$ 일 때, $px+q < 0$ 에서 $x > -\frac{q}{p}$

① $-\frac{q}{p} < 3$ 일 때 ② $-\frac{q}{p} = 3$ 일 때 ③ $-\frac{q}{p} > 3$ 일 때



3단계 $px+q \geq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형 그리기

(ii) $px+q \geq 0$ 일 때, $f(x) = \sqrt{px+q} + r = \sqrt{p\left(x + \frac{q}{p}\right)} + r$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

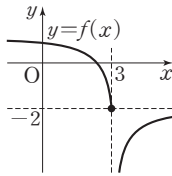
① $p > 0$ 인 경우 ② $p < 0$ 인 경우



4단계 $\frac{qr}{p}$ 의 값 구하기

그림과 같이 (i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $px+q < 0$ 일 때 $p < 0$, $-\frac{q}{p} = 3$ 이고, $px+q \geq 0$ 일 때 $p < 0$, $r = -2$ 이면 일대일대응이다.

따라서 $\frac{q}{p} = -3$, $r = -2$ 이므로 $\frac{qr}{p} = \frac{q}{p} \times r = 6$



10 답 12

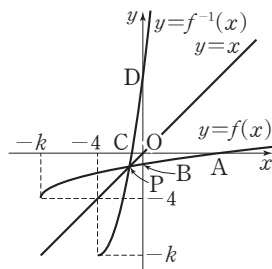
1단계 사각형 ABCD의 넓이를 k 를 이용하여 나타내기

점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.

$B(0, \sqrt{k}-4)$ 이므로 $C(\sqrt{k}-4, 0)$

두 점 B, C의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\sqrt{k}-4}{2}, \frac{\sqrt{k}-4}{2}\right)$$



$A(16-k, 0)$ 이므로

$D(0, 16-k)$

두 점 A, D의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{16-k}{2}, \frac{16-k}{2}\right)$$

선분 BC와 선분 AD 사이의 거리는

$$\sqrt{2\left(\frac{16-k}{2} - \frac{\sqrt{k}-4}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{20-k-\sqrt{k}}{2}\right) \quad (\because 7 < k < 16)$$

$$BC = \sqrt{2(\sqrt{k}-4)^2} = \sqrt{2}(4-\sqrt{k}) \quad (\because 7 < k < 16)$$

$$AD = \sqrt{2(16-k)^2} = \sqrt{2}(16-k) \quad (\because 7 < k < 16)$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \{\sqrt{2}(4-\sqrt{k}) + \sqrt{2}(16-k)\} \times \sqrt{2}\left(\frac{20-k-\sqrt{k}}{2}\right) \\ = \frac{(20-k-\sqrt{k})^2}{2} \end{aligned}$$

2단계 k, n 의 값 구하기

사각형 ABCD의 넓이가 $2n^2$ 이므로

$$\frac{(20-k-\sqrt{k})^2}{2} = 2n^2$$

$$(20-k-\sqrt{k})^2 = 4n^2 = (2n)^2$$

$$20-k-\sqrt{k} = \pm 2n$$

$$\therefore k+\sqrt{k} = 20 \pm 2n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 우변이 정수이므로 좌변도 정수이어야 한다.

즉, $k+\sqrt{k}$ 의 값이 정수이어야 하므로

$$k=9 \quad (\because 7 < k < 16)$$

이를 ①에 대입하면

$$9+3=20 \pm 2n$$

$$\therefore n=4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

3단계 점 P의 좌표 구하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

$$\sqrt{x+9}-4=x \text{에서 } \sqrt{x+9}=x+4$$

양변을 제곱하면

$$x+9=x^2+8x+16$$

$$x^2+7x+7=0$$

$$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

그런데 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$ 의 정의역의 공통 범위는 $x \geq -4$ 이므로

$$x = \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x+9}-4 \text{의 치역은 } \{y | y \geq -4\} \text{이므로} \\ f^{-1}(x) \text{의 정의역은 } \{x | x \geq -4\} \end{array} \right.$$

$$\therefore P\left(\frac{-7+\sqrt{21}}{2}, \frac{-7+\sqrt{21}}{2}\right)$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

점 P와 x축 사이의 거리는

$$\frac{7-\sqrt{21}}{2}$$

$A(7, 0)$, $C(-1, 0)$ 이므로

$$AC=8$$

따라서 삼각형 ACP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{7-\sqrt{21}}{2} = 2(7-\sqrt{21}) = 14-2\sqrt{21}$$

따라서 $a=14$, $b=-2$ 이므로

$$a+b=12$$

01 4	02 ③	03 8	04 55	05 1	06 24
07 $3\sqrt{2}$	08 2	09 ①	10 2	11 2	12 ④
13 70	14 12	15 41	16 ⑤		

01 답 4

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -2f(x) + 2 & (0 \leq f(x) < 1) \\ \frac{3}{2}f(x) - \frac{3}{2} & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

(i) $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$1 \leq f(x) \leq 2 \text{이므로 } (f \circ f)(x) = \frac{3}{2}(-2x+2) - \frac{3}{2} = -3x + \frac{3}{2}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x < 1$ 일 때,

$$0 < f(x) < 1 \text{이므로 } (f \circ f)(x) = -2(-2x+2) + 2 = 4x - 2$$

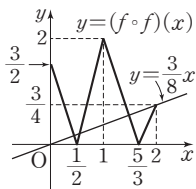
(iii) $1 \leq x < \frac{5}{3}$ 일 때,

$$0 \leq f(x) < 1 \text{이므로 } (f \circ f)(x) = -2\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) + 2 = -3x + 5$$

(iv) $\frac{5}{3} \leq x \leq 2$ 일 때,

$$1 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \text{이므로 } (f \circ f)(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{9}{4}x - \frac{15}{4}$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } (f \circ f)(x) = \begin{cases} -3x + \frac{3}{2} & \left(0 \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ 4x - 2 & \left(\frac{1}{2} \leq x < 1\right) \\ -3x + 5 & \left(1 \leq x < \frac{5}{3}\right) \\ \frac{9}{4}x - \frac{15}{4} & \left(\frac{5}{3} \leq x \leq 2\right) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{3}{8}x$ 의 교점이 4개이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{3}{8}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

02 답 ③

 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 (가)에서 $f(0) = f(2)$ 이므로 $f(x) = x(x-2) + k$ (k 는 상수)로 놓자.(나)에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 4x - 10$ 이 오직 한 점에서 만나므로 $x(x-2) + k = 4x - 10$ 에서

$$x^2 - 6x + k + 10 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - (k+10) = 0 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore f(x) = x(x-2) - 1 = x^2 - 2x - 1$$

 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 7$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면 $f(t) = 7$ 이므로

$$t^2 - 2t - 1 = 7 \text{에서 } t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t+2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\therefore f(x) = -2 \text{ 또는 } f(x) = 4$$

(i) $f(x) = -2$ 일 때,

$$x^2 - 2x - 1 = -2, \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

(ii) $f(x) = 4$ 일 때,

$$x^2 - 2x - 1 = 4, \quad x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\therefore x = 1 - \sqrt{6} \text{ 또는 } x = 1 + \sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 방정식 $(f \circ f)(x) = 7$ 의 근은

$$x = 1 - \sqrt{6} \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 1 + \sqrt{6}$$

따라서 $a = 3, b = -5$ 이므로

$$a - b = 8$$

03 답 8

(나)에서 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.(다)에서 $f(x) + f^{-1}(x)$ 의 최솟값이 4이고 (나)에서 $f(x) \neq f^{-1}(x)$ 이므로

$$f(a) + f^{-1}(a) = 4 \text{라 하면}$$

$$f(a) = 1, f^{-1}(a) = 3 \text{ 또는 } f(a) = 3, f^{-1}(a) = 1$$

$$\therefore f(a) = 1, f(3) = a \text{ 또는 } f(a) = 3, f(1) = a$$

(i) $a = 1$ 인 경우

$$f(1) = 1, f(3) = 1 \text{ 또는 } f(1) = 3, f(1) = 1 \text{이므로 (나)를 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $a = 2$ 인 경우① $f(2) = 1, f(3) = 2$ 일 때,

$$f(x) + f^{-1}(x) \text{의 최댓값이 10이려면}$$

$$f(4) = 5, f(5) = 4$$

$$\text{이때 함수 } f(x) \text{는 일대일대응이므로 } f(1) = 3$$

$$\text{그런데 } f(3) < f(4) \text{이므로 (가)를 만족시키지 않는다.}$$

② $f(2) = 3, f(1) = 2$ 일 때,

$$f(x) + f^{-1}(x) \text{의 최댓값이 10이려면}$$

$$f(4) = 5, f(5) = 4$$

$$\text{이때 함수 } f(x) \text{는 일대일대응이므로 } f(3) = 1$$

$$\text{그런데 } f(3) < f(4) \text{이므로 (가)를 만족시키지 않는다.}$$

(iii) $a = 3$ 인 경우

$$f(3) = 1, f(3) = 3 \text{ 또는 } f(3) = 3, f(1) = 3 \text{이므로 (나)를 만족시키지 않는다.}$$

(iv) $a = 4$ 인 경우① $f(4) = 1, f(3) = 4$ 일 때,

$$f(x) + f^{-1}(x) \text{의 최댓값이 10이려면}$$

$$f(2) = 5, f(5) = 2$$

$$\text{이때 함수 } f(x) \text{는 일대일대응이므로 } f(1) = 3 \rightarrow f(3) > f(4)$$

② $f(4) = 3, f(1) = 4$ 일 때,

$$f(x) + f^{-1}(x) \text{의 최댓값이 10이려면}$$

$$f(2) = 5, f(5) = 2$$

$$\text{이때 함수 } f(x) \text{는 일대일대응이므로 } f(3) = 1$$

$$\text{그런데 } f(3) < f(4) \text{이므로 (가)를 만족시키지 않는다.}$$

(v) $a = 5$ 인 경우

$$f(5) = 1, f(3) = 5 \text{ 또는 } f(5) = 3, f(1) = 5 \text{이므로 (다)를 만족시키지 않는다.}$$

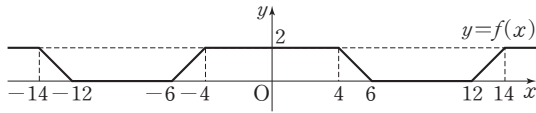
(i)~(v)에서

$$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = 1, f(5) = 2$$

$$\therefore f(3) \times f(5) = 8$$

04 답 55

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$x > 0$ 에서 $\frac{2|x|}{x}=2$, $x < 0$ 에서 $\frac{2|x|}{x}=-2$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} 2n+2 & (x > 0) \\ 2n & (x = 0) \\ 2n-2 & (x < 0) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(x)$ 의 치역은 $\{2n-2, 2n, 2n+2\}$

실수 전체의 집합에서 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 상수함수이려면

$$f(2n-2)=f(2n)=f(2n+2)$$

즉, 연속인 세 짝수에 대하여 $f(x)$ 의 값이 같아야 한다.

연속인 세 짝수에 대하여 $f(x)$ 의 값이 같은 경우는

$$n=1\text{일 때, } f(0)=f(2)=f(4)=2$$

$$n=4\text{일 때, } f(6)=f(8)=f(10)=0$$

$$n=5\text{일 때, } f(8)=f(10)=f(12)=0$$

$$n=8\text{일 때, } f(14)=f(16)=f(18)=2$$

$$n=9\text{일 때, } f(16)=f(18)=f(20)=2$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $-9 \leq x \leq 9$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 반복되므로 100 이하의 자연수 n 의 값은

$$n=1+9 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$n=4+9 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$n=5+9 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$n=8+9 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$n=9+9 \times k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

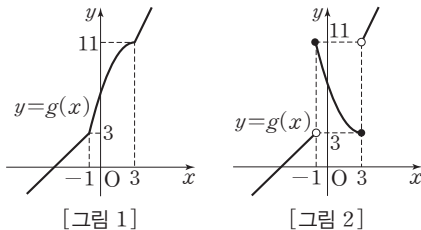
따라서 구하는 100 이하의 자연수 n 의 개수는

$$11 \times 5 = 55$$

05 답 1

(가)에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, (나)에서 함수 $g(x)$ 의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$ 는 일대일대응이다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[그림 1]과 같이 $g(-1)=f(-1)=3$, $g(3)=f(3)=11$ 인 경우는 $(g \circ g)(3)=g(g(3))=g(11)=27$ 이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

[그림 2]와 같이 $g(-1)=f(-1)=11$, $g(3)=f(3)=3$ 인 경우는 $(g \circ g)(3)=g(g(3))=g(3)=3$ 이므로 (나)를 만족시킨다.

$f(x)=a(x-3)^2+b$ ($a > 0$)라 하면 $f(-1)=11$, $f(3)=3$ 에서

$$16a+b=11, \quad b=3 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2+3$$

$-1 \leq x \leq 3$ 일 때, $3 \leq g(x)=f(x) \leq 11$ 이므로

$$g^{-1}(5)=k \quad (-1 \leq k \leq 3) \text{라 하면}$$

$$g(k)=f(k)=5$$

$$\frac{1}{2}(k-3)^2+3=5, \quad (k-3)^2=4$$

$$k-3=\pm 2 \quad \therefore k=1 \quad (\because -1 \leq k \leq 3)$$

06 답 24

$g(x)=\frac{3}{4(x+\frac{1}{4})-2}+3=\frac{3}{4x-1}+3$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프

는 점 $(0, 0)$ 을 지나고 두 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$, $y=3$ 이다.

사각형 OPAQ가 정사각형이므로 점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$A(a, a)$ ($a > 0$)라 하면 점 A는 함수

$y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$a=\frac{3}{4a-1}+3, \quad a-3=\frac{3}{4a-1}$$

$$3=4a^2-13a+3, \quad 4a^2-13a=0$$

$$a(4a-13)=0 \quad \therefore a=\frac{13}{4} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore A\left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

또 사각형 OSBR도 정사각형이므로 점 B는 직선 $y=-x$ 위의 점이다.

$B(-b, b)$ ($b > 0$)라 하면 점 B는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b=-\frac{3}{4b-1}+3, \quad b-3=-\frac{3}{4b-1}$$

$$3=-4b^2+11b+3, \quad 4b^2-11b=0$$

$$b(4b-11)=0 \quad \therefore b=\frac{11}{4} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore B\left(-\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

따라서 $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OP} : \overline{OR} = 13 : 11$ 이므로

$$m=13, \quad n=11$$

$$\therefore m+n=24$$

07 답 $3\sqrt{2}$

두 점 $A(-3, -1)$, $B\left(a, \frac{3}{a}\right)$ ($a > 3$)을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{\frac{3}{a}+1}{a+3}(x+3)$$

$$\therefore y=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}-1$$

따라서 $P(a-3, 0)$, $Q\left(0, \frac{3-a}{a}\right)$ 이므로

$$\overline{OP}=a-3, \quad \overline{OQ}=\frac{a-3}{a} \quad (\because a > 3)$$

$B'(a, 0)$ 이므로

$$\overline{PB'}=3, \quad \overline{BB'}=\frac{3}{a}$$

두 삼각형 POQ, PB'B의 넓이 S_1 , S_2 는

$$S_1=\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OQ}=\frac{1}{2} \times (a-3) \times \frac{a-3}{a}=\frac{a^2-6a+9}{2a}$$

$$S_2=\frac{1}{2} \times \overline{PB'} \times \overline{BB'}=\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{a}=\frac{9}{2a}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{a}{2} + \frac{9}{a} - 3$$

이때 $\frac{a}{2} > 0$, $\frac{9}{a} > 0$ 이므로

$$\frac{a}{2} + \frac{9}{a} - 3 \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{9}{a}} - 3 = 3\sqrt{2} - 3 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a}{2} = \frac{9}{a} \text{일 때 성립})$$

이때 $S_1 + S_2$ 의 값이 최소인 경우는 $\frac{a}{2} = \frac{9}{a}$ 일 때이므로

$$a^2 = 18 \quad \therefore a = 3\sqrt{2} \quad (\because a > 3)$$

08 답 2

점 B(α , β)가 곡선 $y = \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 위의 점이므로

$$\beta = \frac{4}{\alpha} \quad \therefore \alpha = \frac{4}{\beta} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 B와 점 C가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

C(β , α)

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}|\beta - \alpha| = \sqrt{2}(\beta - \alpha) \quad (\because 0 < \alpha < \beta)$$

직선 BC와 직선 $y = x$ 가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1 이고, 이 직선은 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은

$$y - \beta = -(x - \alpha) \quad \therefore x + y - (\alpha + \beta) = 0$$

점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h 라 하면 이는 원점과 직선 BC 사이의 거리와 같으므로

$$h = \frac{|-(\alpha + \beta)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \quad (\because \alpha > 0, \beta > 0)$$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}(\beta - \alpha) \times \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

삼각형 ACB의 넓이가 $\frac{15}{2}$ 이므로

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore \beta^2 - \alpha^2 = 15 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \beta^2 - \frac{16}{\beta^2} = 15$$

$$\beta^4 - 15\beta^2 - 16 = 0, (\beta^2 + 1)(\beta^2 - 16) = 0$$

$$\therefore \beta^2 = 16$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta = 4$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\alpha = 1$

$$\therefore \alpha + \frac{4}{\beta} = 1 + \frac{4}{4} = 2$$

09 답 ①

함수 $f(x) = -\frac{1}{x+1} + k$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

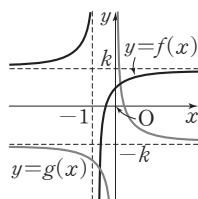
$$x = -1, y = k$$

함수 $g(x) = \frac{1}{2x} - k$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = 0, y = -k$$

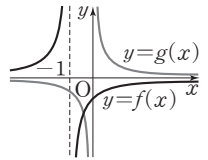
(i) $k > 0$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점 중 x 좌표가 음수인 점의 개수는 1이다.



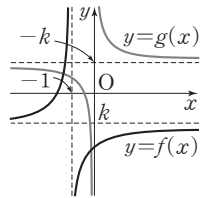
(ii) $k = 0$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점 중 x 좌표가 음수인 점의 개수는 1이다.



(iii) $k < 0$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점 중 x 좌표가 음수인 점의 개수는 2이다.



$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } h(k) = \begin{cases} 2 & (k < 0) \\ 1 & (k \geq 0) \end{cases}$$

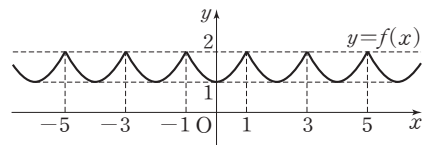
연속하는 세 정수 $k, k+1, k+2$ 에 대하여 등식

$$h(k) + h(k+1) + h(k+2) = 5 \text{가 성립하려면 } h(k) = 2, h(k+1) = 2, h(k+2) = 1 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $h(-2) = 2, h(-1) = 2, h(0) = 1$ 이므로 구하는 정수 k 의 값은 -2 이다.

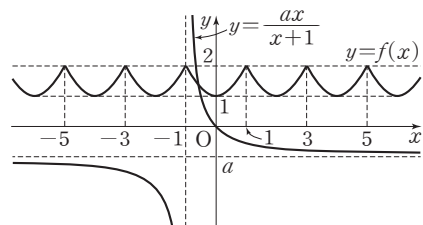
10 답 2

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$y = \frac{ax}{x+1} = \frac{a(x+1)-a}{x+1} = -\frac{a}{x+1} + a \text{이므로 함수 } y = \frac{ax}{x+1} \text{의 그래프의 두 점근선의 방정식은 } x = -1, y = a \text{이고 점 } (0, 0) \text{을 지난다.}$$

(i) $a < 0$ 일 때,

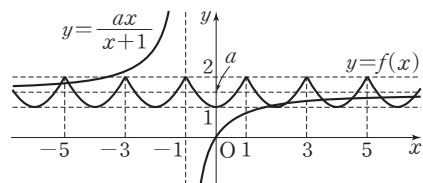


두 함수 $y = f(x)$, $y = \frac{ax}{x+1}$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

(ii) $a = 0$ 일 때,

$y = \frac{ax}{x+1}$ 에서 $y = 0$ 이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = \frac{ax}{x+1}$ 의 그래프는 만나지 않는다.

(iii) $a > 0$ 일 때,

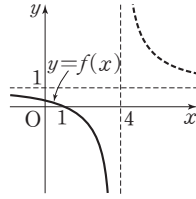


두 함수 $y = f(x)$, $y = \frac{ax}{x+1}$ 의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많도록 하는 a 의 값의 범위는 $1 \leq a \leq 2$

(i), (ii), (iii)에서 $1 \leq a \leq 2$ 이므로 구하는 정수 a 는 1, 2의 2개이다.

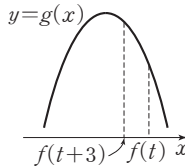
11 답 2

함수 $f(x) = \frac{3}{x-4} + 1$ ($x < 4$)의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x < 4$ 에서 x 의 값이 커지면 $f(x)$ 의 값은 작아진다.
 $\therefore f(t) > f(t+3)$



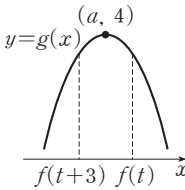
(i) $t < 0$ 일 때, $h(t) = g(f(t+3))$

함수 $g(x)$ 는 $x = f(t+3)$ 에서 최댓값을 가지므로 그림과 같이 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표는 $f(t+3)$ 보다 작다.



(ii) $0 \leq t \leq 1$ 일 때, $h(t) = 4$

함수 $g(x)$ 는 최댓값 4를 가지므로 그림과 같이 $f(t+3) \leq x \leq f(t)$ 에 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가 포함되어야 하고, 이때 꼭짓점의 y 좌표는 4이어야 한다.



(i), (ii)에서 $h(t)$ 는 $t=0$ 일 때 $g(f(t+3)) = 4$ 이어야 한다.

$$g(f(0+3)) = 4 \text{에서 } g(f(3)) = 4$$

$$\text{이때 } f(3) = \frac{3}{3-4} + 1 = -2 \text{이므로}$$

$$g(-2) = 4$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $g(x) = a(x+2)^2 + 4$ ($a < 0$)로 놓을 수 있다.

(ii)에서 $h(-2) = 2$ 이므로

$$g(f(-2+3)) = 2 \quad \therefore g(f(1)) = 2$$

$$\text{이때 } f(1) = \frac{3}{1-4} + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$g(0) = 2, \quad 4a + 4 = 2$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}, \quad b = -2, \quad c = 2 \text{이므로}$$

$$abc = 2$$

12 답 ④

함수 $f(x) = \sqrt{x-k}$ 의 그래프가 사각형 ABCD와 점 B(8, 2)에서 만날 때, 상수 k 의 값은

$$2 = \sqrt{8-k}, \quad 4 = 8-k$$

$$\therefore k = 4$$

즉, $k > 4$ 일 때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

사각형 ABCD와 만나지 않으므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 사각형 ABCD와 만나도록 하는 상수 k 의 최댓값은 4이다.

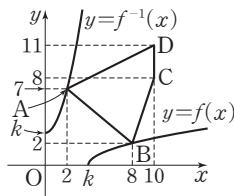
$y = \sqrt{x-k}$ 라 하고 양변을 제곱하면

$$y^2 = x - k, \quad x = y^2 + k$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = x^2 + k$$

$$\therefore f^{-1}(x) = x^2 + k \quad (x \geq 0)$$



함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 사각형 ABCD와 점 A(2, 7)에서 만날 때, 상수 k 의 값은

$$7 = 4 + k \quad \therefore k = 3$$

즉, $k > 3$ 일 때 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 사각형 ABCD와 만나지 않으므로 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 사각형 ABCD와 만나도록 하는 상수 k 의 최댓값은 3이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 사각형 ABCD와 만나도록 하는 상수 k 의 최댓값은 3이다.

13 답 70

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점 A는 함수 $g(x) = -x^2 + 6$ ($x \geq 0$)의 그래프와 직선 $y = x$ 가 만나는 점과 같다.

$$-x^2 + 6 = x \text{에서 } x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x \geq 0)$$

$$\therefore A(2, 2)$$

점 C는 점 B(-10, 4)를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 C(4, -10)

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{(4+10)^2 + (-10-4)^2} = 14\sqrt{2}$$

점 B(-10, 4)를 지나고 기울기가 -1인 직선 l 의 방정식은

$$y - 4 = -(x + 10)$$

$$\therefore x + y + 6 = 0$$

점 A(2, 2)에서 직선 $x + y + 6 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|2+2+6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 5\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 14\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 70$$

14 답 12

두 곡선 $y = 3\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x} + 8$ 의 교점의 x 좌표는 4

$x \geq 4$ 일 때, $y = 3\sqrt{x}$ 가 정수가 되도록 하는 x 의 값은

$$4, \frac{49}{9}, \frac{64}{9}, 9, \frac{100}{9}, \frac{121}{9}, \dots \rightarrow \frac{y^2}{9} = x \text{에 } y = 6, 7, 8, \dots \text{을 대입한다.}$$

$f(x) = 3\sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x} + 8$ 이라 하자.

$$(i) 4 \leq x < \frac{49}{9} \text{일 때, } 6 \leq f(x) < 7, \quad \frac{17}{3} < g(x) \leq 6$$

이때 정수 x 의 값은 4, 5, 정수 y 의 값은 6이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $2 \times 1 = 2$

$$(ii) \frac{49}{9} \leq x < \frac{64}{9} \text{일 때, } 7 \leq f(x) < 8, \quad \frac{16}{3} < g(x) \leq \frac{17}{3}$$

이때 정수 x 의 값은 6, 7, 정수 y 의 값은 6, 7이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $2 \times 2 = 4$

$$(iii) \frac{64}{9} \leq x < 9 \text{일 때, } 8 \leq f(x) < 9, \quad 5 < g(x) \leq \frac{16}{3}$$

이때 정수 x 의 값은 8, 정수 y 의 값은 6, 7, 8이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $1 \times 3 = 3$

$$(iv) 9 \leq x < \frac{100}{9} \text{일 때, } 9 \leq f(x) < 10, \quad \frac{14}{3} < g(x) \leq 5$$

이때 정수 x 의 값은 9, 10, 11, 정수 y 의 값은 5, 6, 7, 8, 9이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는 $3 \times 5 = 15$

(v) $\frac{100}{9} \leq x < \frac{121}{9}$ 일 때, $10 \leq f(x) < 11$, $\frac{13}{3} < g(x) \leq \frac{14}{3}$

이때 정수 x 의 값은 12, 13, 정수 y 의 값은 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 정수인 점 (x, y) 의 개수는

$$2 \times 6 = 12$$

(i)~(iv)에서 점의 개수의 합은 $2+4+3+15=24$ 이고, (v)에서 $x=12$ 일 때 점의 개수는 6이다.

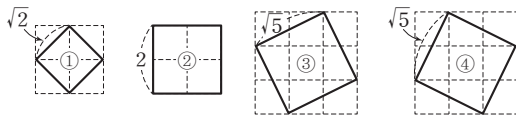
따라서 조건을 만족시키는 점의 개수가 30이 되도록 하는 자연수 k 의 값은 12이다.

15 답 41

$y = \frac{\sqrt{x+5}}{2}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값은

11, 31, 59, 95, ... $\rightarrow 4y^2 - 5 = x$ 에 $y=2, 3, 4, \dots$ 를 대입한다.

한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상 $\sqrt{5}$ 이하인 정사각형은 다음과 같이 4가지이다.



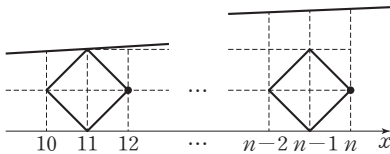
(i) $1 \leq n \leq 11$ 일 때,

주어진 조건을 만족시키는 정사각형은 존재하지 않는다.

$$\therefore f(n) = 0$$

(ii) $12 \leq n \leq 31$ 일 때,

①

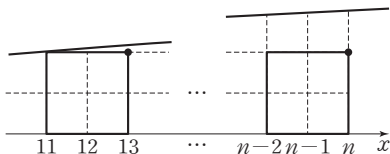


①과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$(12, 1), (13, 1), (14, 1), \dots, (n, 1)$

이므로 정사각형은 $(n-11)$ 개

②



②와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$(13, 2), (14, 2), (15, 2), \dots, (n, 2)$

이므로 정사각형은 $\{(n-11)-1\}$ 개

①, ②에서 정사각형의 개수는

$$2(n-11)-1 = 2n-23$$

따라서 $f(n) = 2n-23$ 이므로

$$f(31) = 39$$

(iii) $32 \leq n \leq 59$ 일 때, 새로 생기는 정사각형은

① ①과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$(32, 1), (33, 1), (34, 1), \dots, (n, 1),$

$(32, 2), (33, 2), (34, 2), \dots, (n, 2)$

이므로 정사각형은 $2(n-31)$ 개

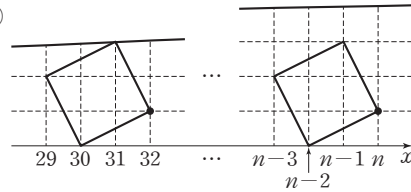
② ②와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점 중 윗쪽의 점의 좌표는

$(32, 2), (33, 2), (34, 2), \dots, (n, 2),$

$(33, 3), (34, 3), (35, 3), \dots, (n, 3)$

이므로 정사각형은 $\{2(n-31)-1\}$ 개

③

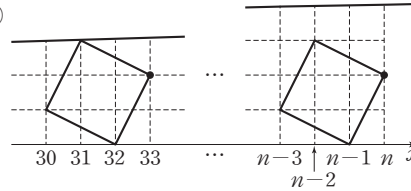


③과 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$(32, 1), (33, 1), (34, 1), \dots, (n, 1)$

이므로 정사각형은 $(n-31)$ 개

④



④와 같은 정사각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표는

$(33, 2), (34, 2), (35, 2), \dots, (n, 2)$

이므로 정사각형은 $\{(n-31)-1\}$ 개

①~④에서 정사각형의 개수는

$$6(n-31)-2 = 6n-188$$

$$\therefore f(n) = 6n-188 + f(31) = 6n-188+39 = 6n-149$$

$$6n-149 \leq 100 \text{에서 } n < 42$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 41이다.

16 답 ⑤

그림과 같이 함수 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프 위의

임의의 점 P와 직선 $y = -x+5$ 위를 움직

이는 점 Q에 대하여 점 P에서 직선

$y = -x+5$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등

분선 위에 있으므로 두 점 M, A 사이의 거

리의 최솟값은 직선 $y = -x+5$ 와 선분 PH

의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 점 A와 직선 $y = -x+5$ 사이

의 거리의 합과 같다.

이때 직선 $y = -x+5$ 와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟

값은 점 P와 직선 $y = -x+5$ 사이의 거리의 최솟값의 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

점 $P(a, 2\sqrt{-a})$ 라 하면 점 P와 직선 $y = -x+5$, 즉 $x+y-5=0$ 사

이의 거리는

$$\frac{|a+2\sqrt{-a}-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-(\sqrt{-a}-1)^2-4|}{\sqrt{2}}$$

즉, 점 P와 직선 $y = -x+5$ 사이의 거리의 최솟값은 $a=-1$ 일 때 $2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 직선 $y = -x+5$ 와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은

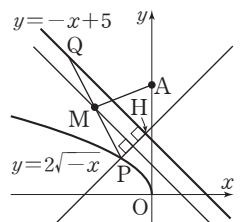
$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

점 A(0, 10)과 직선 $y = -x+5$, 즉 $x+y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|10-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은

$$\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$



06 경우의 수

step 1 핵심 문제

| 76~77쪽

01 ③ 02 ④ 03 720 04 88 05 ② 06 216
07 288 08 ③ 09 ⑤ 10 480 11 155 12 ④

01 답 ③

구하는 자연수의 개수는 1부터 100까지의 자연수의 개수에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 빼면 된다.

$100 = 3 \times 33 + 1$, $100 = 5 \times 20$, $100 = 15 \times 6 + 10$ 이므로 1부터 100까지의 자연수 중 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$$33 + 20 - 6 = 47$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$100 - 47 = 53$$

개념 NOTE

여사건을 이용하는 경우의 수는 사건 A에 대하여

$$(A인 경우의 수) = (모든 경우의 수) - (A가 아닌 경우의 수)$$

02 답 ④

$432 = 2^2 \times (2^2 \times 3^3)$ 이므로 432의 양의 약수 중 4의 배수의 개수는 $2^2 \times 3^3$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 4의 배수의 개수는

$$(2+1) \times (3+1) = 12$$

$432 = 3 \times (2^4 \times 3^2)$ 이므로 432의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는

$2^4 \times 3^2$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 3의 배수의 개수는

$$(4+1) \times (2+1) = 15$$

$$\therefore a = 12, b = 15$$

$$\therefore a + b = 27$$

비법 NOTE

자연수 N 이

$$N = p^a q^b r^c \quad (p, q, r \text{는 서로 다른 소수}, a, b, c \text{는 자연수})$$

의 꼴로 소인수분해되면 N 의 양의 약수의 개수는

$$(a+1)(b+1)(c+1)$$

03 답 720

$x + f(x) \geq 7$ 에서

$$f(x) \geq 7 - x$$

$$f(1) \geq 6 \text{이므로 } f(1) = 6$$

$$f(2) \geq 5 \text{이므로 } f(2) = 5, 6$$

$$f(3) \geq 4 \text{이므로 } f(3) = 4, 5, 6$$

$$f(4) \geq 3 \text{이므로 } f(4) = 3, 4, 5, 6$$

$$f(5) \geq 2 \text{이므로 } f(5) = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$f(6) \geq 1 \text{이므로 } f(6) = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

04 답 88

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 4가지

500원 짜리 동전을 지불하는 방법은 5가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 2가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $4 \times 5 \times 2 - 1 = 39$

$$\therefore a = 39 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

100원짜리 동전 4개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액은 0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액은 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 같으므로 500원짜리 동전 5개와 1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 500원짜리 동전 9개를 사용하여 지불할 수 있는 금액과 같다.

500원짜리 동전 9개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액은 0원, 500원, 1000원, ..., 4500원의 10가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $5 \times 10 - 1 = 49$

$$\therefore b = 49 \quad \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

(i), (ii)에서

$$a + b = 39 + 49 = 88 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

비법 NOTE

(1) 지불 방법의 수

각 종류의 돈을 지불하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

(2) 지불 금액의 수

지불 방법 중 중복되는 금액이 있는 경우에는 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꾸어 생각한다.

05 답 ②

세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수여야 하므로 숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 3개를 택할 때, 3의 배수가 되는 경우는

$$(0, 2, 4), (0, 4, 8), (2, 4, 6), (4, 6, 8)$$

(i) (0, 2, 4), (0, 4, 8)인 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 가능한 세 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times (2 \times 2!) = 8$$

(ii) (2, 4, 6), (4, 6, 8)인 경우

가능한 세 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times 3! = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$8 + 12 = 20$$

비법 NOTE

배수판정법

(1) 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수

(2) 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

(3) 4의 배수: 끝의 두 자리가 00이거나 4의 배수

(4) 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

(5) 6의 배수: 2의 배수와 3의 배수 조건을 모두 만족시키는 경우

(6) 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수

06 답 216

5장의 카드를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 모두 홀수인 경우는

‘짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수’ 또는 ‘홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수’

(i) ‘짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수’인 경우

짝수 12, 14, 16이 적혀 있는 카드들 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_3=3!=6$

이 각각의 경우에 대하여 홀수 11, 13, 15, 17이 적혀 있는 카드 중 2장을 두 번째, 네 번째에 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=4 \times 3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 12=72$$

(ii) ‘홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수’인 경우

홀수 11, 13, 15, 17이 적혀 있는 카드 중 3장을 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=4 \times 3 \times 2=24$

이 각각의 경우에 대하여 짝수 12, 14, 16이 적혀 있는 카드 중 2장을 두 번째, 네 번째에 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=3 \times 2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6=144$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$72+144=216$$

07 답 288

구하는 방법의 수는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수에서 두 문자 T, V 사이에 1개 이하의 문자가 있도록 나열하는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

TRAVEL에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수는

$$6!=720$$

(i) 두 문자 T, V 사이에 다른 문자가 없도록 나열하는 경우

두 문자 T, V를 하나의 문자로 생각하고 나머지 4개의 문자와 함께 나열하는 방법의 수는 5개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$5!=120$$

이때 두 문자 T, V가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $120 \times 2=240$

(ii) 두 문자 T, V 사이에 1개의 문자가 있도록 나열하는 경우

두 문자 T, V 사이에 들어갈 문자를 택하는 방법의 수는 4

T, V와 그 사이에 있는 문자를 포함하여 3개의 문자를 하나의 문자로 생각하고 나머지 3개의 문자와 함께 나열하는 방법의 수는 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $4!=24$

이때 두 문자 T, V가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 24 \times 2=192$

(i), (ii)에서 두 문자 T, V 사이에 1개 이하의 문자가 있도록 나열하는 방법의 수는 $240+192=432$

따라서 구하는 방법의 수는

$$720-432=288$$

비법 NOTE

(1) 이웃하는 것이 있는 순열의 수

① 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

② ①의 결과와 이웃하는 것끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱한다.

(2) ‘적어도’ 조건을 포함한 순열의 수

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)

$= (\text{모든 경우의 수}) - (\text{사건 A가 일어나지 않는 경우의 수})$

08 답 ③

6개의 문자 S, Q, U, A, R, E를 사전식으로 나열하면 A, E, Q, R, S, U의 순서로 나열된다.

A로 시작하는 단어의 개수는 $5!=120$

E로 시작하는 단어의 개수는 $5!=120$

Q로 시작하는 단어의 개수는 $5!=120$

RA로 시작하는 단어의 개수는 $4!=24$

RE로 시작하는 단어의 개수는 $4!=24$

RQA로 시작하는 단어의 개수는 $3!=6$

이때 $120+120+120+24+24+6=414$ 이므로 415번째 나열되는 문자는 RQEASU이다.

09 답 ⑤

$1\square1\square1\square1\square1\square1\square$ 의 빈자리에 0을 넣으면 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않는 아홉 자리의 자연수를 만들 수 있다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 6개의 빈자리 중 0이 들어가는 3개의 자리를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3=\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=20$$

비법 NOTE

이웃하지 않는 경우의 순열의 수

(1) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

(2) (1)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝의 자리에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 구하여 곱한다.

10 답 480

같은 알파벳의 대문자와 소문자가 적혀 있는 카드를 택하는 경우의 수는 6

같은 알파벳이 적혀 있는 2장의 카드를 제외하고 서로 다른 알파벳 4종류를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$

이때 각 카드에 적혀 있는 알파벳은 각각 대문자, 소문자의 2가지가 있으므로 그 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 5 \times 16=480$$

11 답 155

(i) 사각형의 4개의 꼭짓점 중 2개가 지름 위의 점인 경우

지름 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5 \times 4}{2 \times 1}=10$$

지름의 양 끝 점을 제외한 호 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=\frac{5 \times 4}{2 \times 1}=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $10 \times 10=100$ 배점 30%

(ii) 사각형의 4개의 꼭짓점 중 1개가 지름 위의 점인 경우

지름 위의 5개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 5

지름의 양 끝 점을 제외한 호 위의 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5 \times 4}{2 \times 1}=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $5 \times 10=50$ 배점 30%

- (iii) 사각형의 4개의 꼭짓점 모두 지름의 양 끝 점을 제외한 호 위의 점인 경우
 사각형의 개수는 지름의 양 끝 점을 제외한 호 위의 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 배점 30%
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 사각형의 개수는
 $100 + 50 + 5 = 155$ 배점 10%

12 답 ④

어느 동아리의 부원 7명을 2명, 2명, 3명의 3개 조로 나누는 방법의 수는
 ${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2}$
 $= 21 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 105$

3개의 조를 서로 다른 3곳의 체험 학습 장소에 배정하는 방법의 수는
 $3! = 6$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $105 \times 6 = 630$

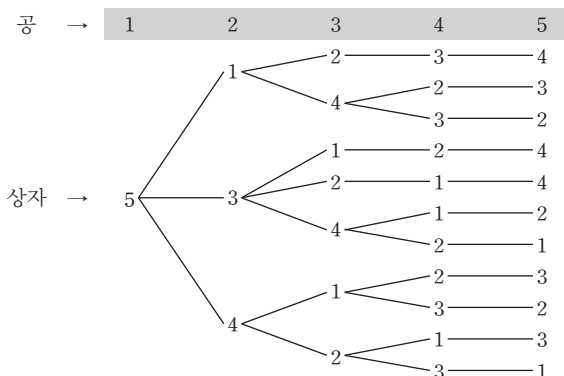
step 2 고난도 문제

| 78~82쪽

01 11	02 ③	03 24	04 ⑤	05 6	06 ③
07 ④	08 ①	09 576	10 240	11 264	12 ④
13 336	14 200	15 450	16 ④	17 15	18 246
19 210	20 ④	21 64	22 720	23 ④	24 ②
25 ②					

01 답 11

각 상자에 공이 1개씩 들어가고 1이 적혀 있는 공은 5가 적혀 있는 상자에 넣으므로 (나)에서 2가 적혀 있는 공은 1 또는 3 또는 4가 적혀 있는 상자에 넣어야 한다.
 따라서 조건을 만족시키도록 공을 상자에 넣는 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 11이다.

02 답 ③

넓이가 6인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a , b 라 하자.
 가능한 자연수 a , b 의 순서쌍 (a, b) 는
 $(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

- (i) $(1, 6)$ 인 경우는 존재하지 않는다.
 (ii) $(2, 3)$ 인 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$
 (iii) $(3, 2)$ 인 경우의 수는 $5 \times 4 = 20$
 (iv) $(6, 1)$ 인 경우의 수는 $2 \times 5 = 10$
 (i)~(iv)에서 구하는 직사각형의 개수는
 $18 + 20 + 10 = 48$

03 답 24

a , b 는 주사위를 던져서 나오는 눈의 수이므로 6 이하의 자연수이다.
 이차방정식 $x^2 + 4\sqrt{ab+1}x + (a+b)^2 = 0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{ab+1})^2 - (a+b)^2 \geq 0$$

$$4(ab+1) - a^2 - 2ab - b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \leq 4 \quad \therefore |a-b| \leq 2$$

(i) $|a-b|=0$, 즉 $a=b$ 인 경우 $(a-b)^2 \leq 4$ 에서 $(a-b+2)(a-b-2) \leq 0$
 $-2 \leq a-b \leq 2 \quad \therefore |a-b| \leq 2$

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$ 의 6가지

(ii) $|a-b|=1$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 3), \dots, (5, 6), (6, 5), \dots, (3, 2), (2, 1)$ 의 10가지

(iii) $|a-b|=2$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$ 의 8가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $6 + 10 + 8 = 24$

04 답 ⑤

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A와 C에 칠하는 방법의 수는 5

B에 칠하는 방법의 수는 A에 칠한 색을 제외한 4

D에 칠하는 방법의 수는 A에 칠한 색을 제외한 4

E에 칠하는 방법의 수는 A, D에 칠한 색을 제외한 3

따라서 칠하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 4 \times 3 = 240$$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠하는 방법의 수는 5

B에 칠하는 방법의 수는 A에 칠한 색을 제외한 4

C에 칠하는 방법의 수는 A, B에 칠한 색을 제외한 3

D에 칠하는 방법의 수는 A, C에 칠한 색을 제외한 3

E에 칠하는 방법의 수는 A, C, D에 칠한 색을 제외한 2

따라서 칠하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 360$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$240 + 360 = 600$$

비법 NOTE

나누어진 영역에 색을 칠할 때 인접한 영역에 같은 색을 칠하지 않는 경우

(1) 가운데 또는 가장 많은 영역과 인접한 부분에 색을 칠하는 경우의 수를 먼저 구한 후 인접한 영역에 같은 색을 칠하지 않도록 하는 경우의 수를 구한다.

(2) 문제의 조건에 따라 같은 색을 중복하여 사용할 수 있는 경우와 사용할 수 없는 경우를 구분하여 경우의 수를 구한다.

05 답 6

B 지점과 C 지점 사이에 추가해야 하는 도로의 개수를 a 라 하자.

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$
 (ii) $A \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 $3 \times 2 = 6$
 (iii) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 $4 \times a \times 2 = 8a$
 (iv) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 $3 \times a \times 3 = 9a$
 (i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 방법의 수는

$$12 + 6 + 8a + 9a = 17a + 18$$

따라서 $17a + 18 = 120$ 이므로
 $17a = 102 \quad \therefore a = 6$

비법 NOTE

도로망을 따라 이동하는 방법의 수를 구할 때

- (1) 같은 경로에 여러 가지 길이 있는 경우는 곱의 법칙을 이용한다.
 (2) 경로가 다른 경우는 합의 법칙을 이용한다.

06 답 ③

- (i) $A \rightarrow C \rightarrow A$ 로 이동한 경우

모든 방법의 수는 $2 \times 2 = 4$
 이동한 거리의 합이 200 km보다 큰 경우를 거리의 합으로 나타내면
 $110 + 110 = 220$ 의 1가지이다.
 따라서 구하는 방법의 수는 $4 - 1 = 3$

- (ii) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 로 이동한 경우

모든 방법의 수는 $3 \times 2 \times 2 \times 3 = 36$
 이동한 거리의 합이 200 km보다 큰 경우를 거리의 합으로 나타내면
 $25 + 70 + 70 + 40 = 205$, $35 + 70 + 70 + 35 = 210$,
 $35 + 70 + 70 + 40 = 215$, $40 + 70 + 70 + 25 = 205$,
 $40 + 70 + 70 + 35 = 215$, $40 + 70 + 70 + 40 = 220$ 의 6가지이다.
 따라서 구하는 방법의 수는 $36 - 6 = 30$

- (iii) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 또는 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 로 이동한 경우

모든 방법의 수는 $3 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 3 = 24$
 이동한 거리의 합이 200 km보다 큰 경우를 거리의 합으로 나타내면
 $25 + 70 + 110 = 205$, $35 + 70 + 110 = 215$, $40 + 70 + 110 = 220$,
 $110 + 70 + 25 = 205$, $110 + 70 + 35 = 215$, $110 + 70 + 40 = 220$ 의 6
 가지이다.
 따라서 구하는 방법의 수는 $24 - 6 = 18$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$$3 + 30 + 18 = 51$$

07 답 ④

$k=1, 2, 3, \dots, 9$ 일 때, k 번째의 수를 a_k 라 하자.

- (i) $a_9=9$ 일 때,

$a_k=k$ ($1 \leq k \leq 8$)이므로 경우의 수는 1

- (ii) $a_9=8$ 일 때,

$a_8 \geq 8$ 이어야 하는데 $a_9=9$ 이므로 $a_8=8$ 이다.
 $k=1, 2, \dots, 7$ 일 때도 마찬가지로 생각할 수 있다.

$a_8=9$, $a_k=k$ ($1 \leq k \leq 7$)이므로 경우의 수는 1

- (iii) $a_9=7$ 일 때,

가능한 a_8, a_7 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_8	a_7
9	8
8	9

이때 $a_k=k$ ($1 \leq k \leq 6$)이므로 경우의 수는 2

- (iv) $a_9=6$ 일 때,

가능한 a_8, a_7, a_6 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_8	a_7	a_6
9	8	7
	7	8
8	9	7
	7	9

이때 $a_k=k$ ($1 \leq k \leq 5$)이므로 경우의 수는 $2^2=4$

- (v) $a_9=5$ 일 때,

가능한 a_8, a_7, a_6, a_5 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_8	a_7	a_6	a_5
9	8	7	6
		6	7
	7	8	6
		6	8
8	9	7	6
		6	7
	7	9	6
		6	9

이때 $a_k=k$ ($1 \leq k \leq 4$)이므로 경우의 수는 $2^3=8$

- (i)~(v)와 같은 방법으로 $a_9=k$ ($1 \leq k \leq 4$)일 때의 경우의 수를 구하면
 2^{8-k}

따라서 구하는 경우의 수는

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7 = 256$$

08 답 ①

(가)에서 네 자리의 자연수에 0을 사용한 횟수는 한 번 또는 두 번 또는 세 번이다.

- (i) 0을 한 번만 사용한 경우

$\square 0 \square \square, \square \square 0 \square, \square \square \square 0$ 에서 $\square$ 에 들어갈 숫자를 정하는 경우
 의 수는 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 이므로 구하는 경우의 수는 $60 \times 3 = 180$

- (ii) 0을 두 번 사용한 경우

$\square 00 \square, \square 0 \square 0, \square \square 00$ 에서 $\square$ 에 들어갈 숫자를 정하는 경우의 수
 는 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ 이므로 구하는 경우의 수는 $20 \times 3 = 60$

- (iii) 0을 세 번 사용한 경우

$\square 000$ 에서 $\square$ 에 들어갈 숫자를 정하는 경우의 수는 5

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$$180 + 60 + 5 = 245$$

09 답 576

(가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉아 있는
 2인용 의자를 제외한 3개이고, 두 사람은 서로 자리를 바꿀 수 있으므로
 A와 B가 앉는 경우의 수는 $3 \times 2! = 6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

이때 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하면 두
 사람이 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉은 2인용 의자
 와 마부가 앉은 2인용 의자를 제외한 2개이고, 두 사람은 서로 자리를
 바꿀 수 있으므로 $2 \times 2! = 4$

따라서 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는
 $20 - 4 = 16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는
 $3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 16 \times 6 = 576$

10 답 240

- (i) 한 사람에게 사탕 2개를 모두 주는 경우
 사탕 2개를 받을 한 사람을 정하는 방법의 수는 4
 이 각각에 대하여 서로 다른 과자 4개 중 3개를 사탕을 받지 못한 세 사람에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는
 ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $4 \times 24 = 96$ 배점 40%
- (ii) 두 사람에게 사탕을 1개씩 나누어 주는 경우
 서로 다른 사탕 2개를 네 사람 중 두 사람에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는
 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$
 이 각각에 대하여 서로 다른 과자 4개 중 2개를 사탕을 받지 못한 두 사람에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는
 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $12 \times 12 = 144$ 배점 40%
- (i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
 $96 + 144 = 240$ 배점 20%

11 답 264

세 명의 학생이 1교시에 서로 다른 진로특강을 택하여 듣는 방법의 수는
 ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$
 세 명의 학생을 A, B, C라 하고, 서로 다른 4가지 종류의 진로특강을 a, b, c, d 라 하자.
 이때 세 명의 학생 A, B, C가 1교시에 택한 진로특강을 각각 a, b, c 라 하면 2교시에 각자 1교시에 택한 것과 다른 진로특강을 택하는 경우는 표와 같이 11가지이다.

학생	A	B	C
1교시	a	b	c
2교시	b	a	d
		c	a
		d	a
	c	a	b
		d	d
		d	a
	d	a	b
		c	a
			b

→ 2교시에도 세 학생 모두 서로 다른 진로특강을 택해야 한다.

따라서 구하는 방법의 수는
 $24 \times 11 = 264$

12 답 ④

$M=20$ 이라면 4와 5가 이웃해야 하고, 이때 6은 4, 5와 모두 이웃하지 않아야 한다.

(i) 4와 5가 이웃하는 경우

4와 5를 한 숫자로 생각하여 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

이 각각에 대하여 4와 5의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 2 = 240$$

(ii) 4와 5가 이웃하고 6이 4 또는 5에 이웃하는 경우

6, 4, 5 또는 6, 5, 4 또는 4, 5, 6 또는 5, 4, 6의 순서대로 나열하는 경우이므로 그 경우의 수는 4

이 각각에 대하여 3개의 숫자를 한 숫자로 생각하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 24 = 96$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$240 - 96 = 144$$

13 답 336

9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
 ${}_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

1부터 9까지의 자연수 중에서 두 수의 합이 9가 되는 경우는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)이므로 이 중 한 경우를 택하고 나머지 7개의 숫자 중 하나를 택하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4 \times 7 \times 3! = 4 \times 7 \times 6 = 168$$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$504 - 168 = 336$$

다른 풀이

조건을 만족시키는 세 자리 자연수에 대하여

(i) 9가 포함된 경우

백의 자리의 숫자가 9이면 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1부터 8까지의 8가지

이때 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자인 9, 십의 자리의 숫자, 9-(십의 자리의 숫자)를 제외한 6가지이다.

십의 자리의 숫자 또는 일의 자리의 숫자가 9인 경우의 수도 같으므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$8 \times 6 \times 3 = 144$$

(ii) 9가 포함되지 않는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1부터 8까지의 8가지

이때 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 9, 백의 자리의 숫자,

9-(백의 자리의 숫자)를 제외한 6가지이다.

또 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 9, 백의 자리의 숫자,

9-(백의 자리의 숫자), 십의 자리의 숫자, 9-(십의 자리의 숫자)를 제외한 4가지이다.

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$8 \times 6 \times 4 = 192$$

(i), (ii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$144 + 192 = 336$$

14 답 200

12개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

이때 3개의 점이 한 직선 위에 있으면 삼각형이 될 수 없으므로 모든 경우에서 다음의 경우는 제외한다.

(i) 가로로 놓인 4개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우

$${}_4C_3 \times 3 = {}_4C_1 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

(ii) 세로로 놓인 3개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우

$${}_3C_3 \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

(iii) 대각선 방향으로 놓인 3개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우

$${}_3C_3 \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - (12 + 4 + 4) = 200$$

비밀 NOTE

직선 또는 삼각형의 개수

(i) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n 개의 점 중에서 두 점을 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

$${}_nC_2$$

(ii) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n 개의 점 중에서 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_nC_3$$

15 답 450

(i) 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수

(A)에서 빨간색 공을 한 바구니에 2개 이상 넣을 수 없으므로 서로 다른 3개의 바구니에 빨간색 공이 하나씩 들어가야 한다.

따라서 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(ii) 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수

(B)에서 모든 바구니에 공이 1개 이상 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 2개의 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣고, 남은 4개의 파란색 공을 전체 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣으면 된다.

① 2개의 바구니에 파란색 공을 2개씩 넣는 경우

5개의 바구니에서 파란색 공을 넣을 2개의 바구니를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

② 3개의 바구니에 파란색 공을 2개, 1개, 1개 넣는 경우

5개의 바구니에서 파란색 공 2개를 넣을 바구니 1개를 택하고, 남은 4개의 바구니에서 파란색 공 1개씩을 넣을 바구니 2개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 5 \times 6 = 30$$

③ 4개의 바구니에 파란색 공을 1개씩 넣는 경우의 수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5 \rightarrow 5\text{개의 바구니에서 파란색 공을 넣을 } 4\text{개의 바구니를 택하는 경우의 수와 같다.}$$

①, ②, ③에서 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

$$10 + 30 + 5 = 45$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 45 = 450$$

16 답 ④

3개의 가로줄 중에서 2개의 가로줄을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

택한 2개의 가로줄 중 한 가로줄에서 1개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

나머지 한 가로줄에서 이미 택한 숫자와 다른 세로줄에 있는 1개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

17 답 15

주머니에서 꺼낸 5개의 공의 색이 3종류인 경우는 색깔별 공의 개수가 3, 1, 1 또는 2, 2, 1인 경우이다.

(i) 색깔별 공의 개수가 3, 1, 1인 경우

3개를 꺼낼 수 있는 공은 흰 공뿐이므로 흰 공을 3개 꺼내고, 남은 검은 공, 파란 공, 빨간 공, 노란 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 2종류를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(ii) 색깔별 공의 개수가 2, 2, 1인 경우

2개를 꺼낼 수 있는 공은 흰 공, 검은 공, 파란 공이므로 이 중에서 2종류를 택하고, 이 각각에 대하여 남은 3종류의 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 1종류를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_3C_1 = {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 9 = 15$$

18 답 246

(i) $a < b < c = d$ 를 만족시키는 경우

$a \neq 0$ 이므로 네 자리의 자연수는 9 이하의 자연수에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 $a, b, c = d$ 의 값에 대응시키면 된다. 따라서 그 경우의 수는

$$m = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $a \geq b > c > d$ 를 만족시키는 경우

① $a > b > c > d$ 일 때,

네 자리의 자연수는 9 이하의 음이 아닌 정수에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 d, c, b, a 의 값에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

② $a = b > c > d$ 일 때

네 자리의 자연수는 9 이하의 음이 아닌 정수에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 $d, c, b = a$ 의 값에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$\therefore n = 210 + 120 = 330 \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

(i), (ii)에서

$$n - m = 330 - 84 = 246 \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

19 답 210

- (i) 인원이 2명인 조에 A가 속하고, 인원이 3명인 조에 B가 속하는 경우 A와 같은 조가 될 한 명을 정하는 경우의 수는 6

나머지 5명을 B와 같은 조가 될 2명과 나머지 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 10 = 60$

- (ii) 인원이 3명인 조에 A가 속하고, 인원이 2명인 조에 B가 속하는 경우

(i)의 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 60이다.

- (iii) A와 B가 각각 인원이 3명인 서로 다른 조에 속하는 경우

A, B를 제외한 나머지 6명을 A와 같은 조가 될 2명, B와 같은 조가 될 2명, 나머지 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 60 + 90 = 210$$

다른 풀이

8명의 학생을 2명, 3명, 3명의 3개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 280$$

A와 B가 같은 조에 속하는 경우는 A와 B가 인원이 2명인 조 또는 3명인 조에 속하는 경우이다.

- (i) A와 B가 인원이 2명인 조에 속하는 경우

A, B를 제외한 6명을 3명, 3명의 2개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

- (ii) A와 B가 인원이 3명인 조에 속하는 경우

A, B에 속한 조의 나머지 한 명을 정하고, 나머지 5명을 2명, 3명의 2개 조로 나누는 경우의 수는

$$6 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 60$$

- (i), (ii)에서 A와 B가 같은 조에 속하는 경우의 수는

$$10 + 60 = 70$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$280 - 70 = 210$$

20 답 ④

구하는 방법의 수는 6개의 팀을 3개, 3개의 두 조로 나눈 후 각각을 2개, 1개의 두 조로 다시 나누는 방법의 수와 같다.

- (i) 6개의 팀을 3개, 3개의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

- (ii) 3개의 팀을 2개, 1개의 두 조로 나누는 방법의 수는

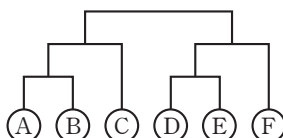
$${}_3C_2 \times {}_1C_1 = {}_3C_1 \times 1 = 3$$

- (i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$10 \times 3 \times 3 = 90$$

다른 풀이

그림과 같이 주어진 대진표에서 배정 받을 수 있는 6개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 A, B, C, D, E, F라 하자. 6개의 팀을 대진표의 6개의 자리에 배정하는 방법의 수는 6!



이때 두 순서쌍 (A, B), (D, E)에서 순서쌍 내에 속한 두 팀의 자리를 바꾸거나 두 순서쌍 (A, B, C), (D, E, F)에서 순서쌍 전체를 서로 바꾸어도 대진표는 같다.

→ 중복되는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

따라서 각 경우에 대하여 중복되는 경우가 8가지 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{8} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8} = 90$$

21 답 64

- (i) $|f(1) - f(2)| = 1$ 을 만족시키는 경우

가능한 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)의 8가지

이 각각에 대하여 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 일대일대응인 함수 f 의 개수는

$$8 \times 6 = 48$$

- (ii) $|f(2) - f(3)| = 2$ 를 만족시키는 경우

가능한 순서쌍 $(f(2), f(3))$ 은 (1, 3), (2, 4), (3, 5), (3, 1), (4, 2), (5, 3)의 6가지

이 각각에 대하여 $f(1), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 일대일대응인 함수 f 의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

- (iii) $|f(1) - f(2)| = 1$ 과 $|f(2) - f(3)| = 2$ 를 모두 만족시키는 경우

가능한 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 (1, 2, 4), (2, 3, 1), (2, 3, 5), (3, 4, 2), (4, 5, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 4), (4, 3, 1), (4, 3, 5), (5, 4, 2)의 10가지

이 각각에 대하여 $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 일대일대응인 함수 f 의 개수는

$$10 \times 2 = 20$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$48 + 36 + 20 = 64$$

22 답 720

함수 f 가 일대일함수이므로 $n(A) \leq n(B)$ 이어야 하고, $n(A \cap B) = 2$ 이므로 $n(A) \geq 2$ 이다.

$$\therefore n(A) = 2, n(B) = 5 \text{ 또는 } n(A) = 3, n(B) = 4$$

그런데 $B \neq U$ 이므로

$$n(A) = 3, n(B) = 4$$

1, 2, 3, 4, 5 중에서 집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 제외한 남은 원소 3개 중에서 집합 A 의 원소 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 일대일함수 f 의 개수는

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$10 \times 3 \times 24 = 720$$

idea
23 답 ④

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 4이므로 정의역의 원소 5개 중 2개의 원소는 함숫값이 서로 같다.

서로 같은 함숫값을 갖는 정의역의 두 원소는 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)의 8가지이다.

↳ $f(3) \neq f(4)$, $f(3) \neq f(5)$ 이므로 (3, 4), (3, 5)는 제외한다.

이 각각에 대하여 함숫값을 정하는 경우의 수는 집합 X 의 5개의 원소 중 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$8 \times {}_5P_4 = 8 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 960$$

다른 풀이

(나)에서 $f(3) \neq f(4)$ 이고 $f(3) \neq f(5)$ 이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $f(4) \neq f(5)$ 인 경우

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값이 서로 다르므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

이 각각에 대하여 (나)에서 치역의 원소의 개수가 4이므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 가 아닌 나머지 치역의 원소를 a 라 하면 a 의 값을 정하는 경우의 수는 2이다.

이때 $f(1)$, $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, a 중에서 하나를 택하는 경우의 수에서 a 를 택하지 않는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

따라서 함수 f 의 개수는

$$60 \times 2 \times (4^2 - 3^2) = 840$$

(ii) $f(4) = f(5)$ 인 경우

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

이 각각에 대하여 (나)에서 치역의 원소의 개수가 4이므로 $f(3)$, $f(4) = f(5)$ 가 아닌 나머지 치역의 원소를 a , b 라 하면 a , b 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 $f(1) = a$, $f(2) = b$ 또는 $f(1) = b$, $f(2) = a$ 이어야 한다.

따라서 함수 f 의 개수는

$$20 \times 3 \times 2 = 120$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$840 + 120 = 960$$

24 답 ②

함성함수 $g \circ f : A \rightarrow A$ 가 일대일대응이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값은 서로 달라야 한다.

따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 공역인 집합 B 의 5개의 원소 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = a, (g \circ f)(2) = g(f(2)) = b,$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = c \text{ 일 때 } a, b, c \text{의 값을 정하는 경우의 수는}$$

1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! = 6$$

이때 함수 g 의 정의역인 집합 B 에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 제외한 나머지 2개의 원소가 공역인 집합 A 의 원소에 대응하는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

따라서 구하는 순서쌍 (f, g) 의 개수는

$$60 \times 6 \times 9 = 3240$$

25 답 ②

(나)에서 $f(3)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이다.

이때 (나)에서 $a < b$ 이면 $f(a) + 1 \leq f(b)$, 즉 $f(a) < f(b)$ 이므로 $f(3)$ 의 값은 3, 4, 5 중 하나이어야 한다.

(i) $f(3) = 3$ 일 때, $f(1) < f(3)$, $f(2) < f(3)$ 이므로 $f(3) \neq 1$, $f(3) \neq 2$
 $f(4) > f(3)$, $f(5) > f(3)$ 이므로 $f(3) \neq 6$, $f(3) \neq 7$

(나)에서 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ 이고, $f(4)$, $f(5)$ 의 값은 집합 Y 의 원소 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 대

$$\text{응시키면 되므로 그 경우의 수는 } {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 함수 f 의 개수는 $1 \times 6 = 6$

(ii) $f(3) = 4$ 일 때,

(나)에서 $f(1)$, $f(2)$ 의 값은 집합 Y 의 원소 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

$f(4)$, $f(5)$ 의 값은 집합 Y 의 원소 5, 6, 7 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 함수 f 의 개수는 $3 \times 3 = 9$

(iii) $f(3) = 5$ 일 때,

(나)에서 $f(4) = 6$, $f(5) = 7$ 이고, $f(1)$, $f(2)$ 의 값은 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 대

$$\text{응시키면 되므로 그 경우의 수는 } {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 함수 f 의 개수는 $1 \times 6 = 6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $6 + 9 + 6 = 21$

step 3 최고난도 문제

| 83~85쪽

01 285	02 960	03 2016	04 729	05 ②	06 45
07 64	08 ①	09 504	10 396		

01 답 285

1단계 2가 포함되지 않는 다섯 자리의 자연수의 개수 구하기

(i) 5장의 카드 중 2가 적혀 있는 카드가 없는 경우

0, 1, 3, 4, 5를 나열하여 5의 배수인 다섯 자리의 자연수를 만들 때

① $\square\square\square\square 0$ 인 경우의 수는 $\rightarrow$ 5의 배수하려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

$$4! = 24$$

② $\square\square\square\square 5$ 인 경우의 수는

$$3 \times 3! = 18$$

①, ②에서 5의 배수인 자연수의 개수는 $24 + 18 = 42$

2단계 포함된 2의 개수에 따라 다섯 자리의 자연수의 개수 구하기

(ii) 5장의 카드 중 2가 적혀 있는 카드가 1장인 경우

0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2를 포함한 5장의 카드를 택하여 5의 배수인 다섯 자리의 자연수를 만들 때

① 2를 포함하고, $\square\square\square\square 0$ 인 경우의 수는

$${}_4C_3 \times 4! = {}_4C_1 \times 24 = 96$$

② 0, 2를 포함하고, $\square\square\square\square 5$ 인 경우의 수는

$${}_3C_2 \times 3 \times 3! = {}_3C_1 \times 18 = 54$$

③ 0은 포함하지 않고 2를 포함하면서 $\square\square\square\square 5$ 인 경우의 수는

$$4! = 24$$

①, ②, ③에서 5의 배수인 자연수의 개수는 $96 + 54 + 24 = 174$

- (iii) 5장의 카드 중 2가 적혀 있는 카드가 2장인 경우
0, 1, 2, 2, 3, 4, 5 중에서 2를 2개 포함한 5장의 카드를 택하여 5의 배수인 다섯 자리의 자연수를 만들 때

① $2\square2\square0, 2\square\square20, \square2\square20$ 인 경우의 수는
 $3 \times {}_4P_2 = 36$

② $2\square2\square5, 2\square\square25, \square2\square25$ 인 경우의 수는
 $2 \times {}_4P_2 + 3 \times 3 = 24 + 9 = 33$

①, ②에서 5의 배수인 자연수의 개수는 $36 + 33 = 69$

- (iv) 5장의 카드 중 2가 적혀 있는 카드가 3장인 경우
5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이므로 다섯 자리의 자연수 중에서 2가 3개 있으면 2끼리 서로 이웃하게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

3단계 조건을 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$42 + 174 + 69 = 285$

02 답 960

1단계 5명에게 꽃 4송이와 초콜릿 2개를 나누어 주는 경우 파악하기

꽃 4송이와 초콜릿 2개를 5명의 학생에게 남김없이 나누어 주면 5명의 학생 중 1명은 초콜릿과 꽃을 합쳐서 2개를 받고, 나머지 4명은 초콜릿과 꽃 중 1개만 받는다.

2단계 초콜릿과 꽃을 합쳐서 2개를 받는 각각에 대하여 경우의 수 구하기

- (i) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우

초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5

나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $5 \times 24 = 120$

- (ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

4송이의 꽃 중에서 2송이를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

고른 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5

남은 두 송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 12$

꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 5 \times 12 \times 1 = 360$

- (iii) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우

4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4P_4 = 120$

꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택하여 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는 $120 \times 4 = 480$

3단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120 + 360 + 480 = 960$

03 답 2016

1단계 두 쌍의 부부가 좌석에 앉는 방법의 수 구하기

- (i) 두 쌍의 부부가 좌석에 앉는 방법의 수

두 쌍의 부부가 앉은 열을 택하는 방법의 수는 2

택한 열에 대하여 두 쌍의 부부가 앉을 수 있는 두 쌍의 좌석을 순서쌍으로 나타내면 (1, 2), (3, 4) 또는 (1, 2), (4, 5) 또는 (2, 3), (4, 5)의 3가지

부부끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2 \times 2 = 4$

두 부부가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 2

따라서 두 쌍의 부부가 좌석에 앉는 방법의 수는

$2 \times 3 \times 4 \times 2 = 48$

2단계 두 쌍의 부부를 제외한 여자 3명이 좌석에 앉는 방법의 수 구하기

- (ii) 부부를 제외한 여자 3명이 좌석에 앉는 방법의 수

① 부부가 앉은 열의 남은 한 좌석과 다른 열의 2개의 좌석에 이웃하지 않도록 앉는 경우

부부가 앉지 않은 열에 여자 2명이 이웃하지 않게 앉을 수 있는

좌석을 순서쌍으로 나타내면 (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5)의 6가지

부부가 앉은 열의 한 좌석과 다른 열의 택한 2개의 좌석에 3명이 앉는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \times 6 = 36$

② 3명 모두 부부가 앉지 않은 열에 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우
이웃하지 않도록 3명이 앉으려면 1, 3, 5 좌석에 각각 1명씩 앉아야 하므로 구하는 방법의 수는

$3! = 6$

①, ②에서 부부를 제외한 여자 3명이 좌석에 앉는 방법의 수는

$36 + 6 = 42$

3단계 조건을 만족시키는 방법의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$48 \times 42 = 2016$

04 답 729

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기

직사각형에서 윗줄에 흰색 정사각형이 있으면 그 아래는 흰색 또는 검은색 정사각형이 올 수 있지만 윗줄에 검은색 정사각형이 있으면 그 아래는 반드시 흰색 정사각형이 와야 한다.

2단계 윗줄의 흰색 정사각형의 개수에 따라 아랫줄에 올 수 있는 정사각형의 경우의 수 구하기

- (i) 윗줄에 흰색 정사각형이 0개 있는 경우

아랫 줄은 모두 흰색 정사각형이 와야 하므로 1가지

- (ii) 윗줄에 흰색 정사각형이 1개 있는 경우

흰색 정사각형이 올 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

윗줄의 1개의 흰색 정사각형 아래에 오는 정사각형의 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

- (iii) 윗줄에 흰색 정사각형이 2개 있는 경우

흰색 정사각형이 올 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

윗줄의 2개의 흰색 정사각형 아래에 오는 정사각형의 경우의 수는

$2 \times 2 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는 $15 \times 4 = 60$

- (iv) 윗줄에 흰색 정사각형이 k ($k=3, 4, 5, 6$)개 있는 경우

위와 같은 방법으로 경우의 수를 구하면

$({}_6C_3 \times 2^3) + ({}_6C_4 \times 2^4) + ({}_6C_5 \times 2^5) + ({}_6C_6 \times 2^6)$

$= (20 \times 8) + (15 \times 16) + (6 \times 32) + (1 \times 64)$

$= 160 + 240 + 192 + 64 = 656$

3단계 조건을 만족시키는 직사각형의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 직사각형의 개수는

$1 + 12 + 60 + 656 = 729$

05 답 ②

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기

(가)에서 A는 24번 또는 25번 의자에 앉을 수 있고, B는 11번 또는 12번 또는 13번 또는 14번 의자에 앉을 수 있으며 (나), (다)에서 어느 두 학생도 양 옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉을 수 없다.

2단계 A가 24번 의자에 앉는 경우의 수 구하기

(i) A가 24번 의자에 앉는 경우

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A를 제외한 4명의 학생은 11번, 13번, 15번, 17번 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 11번 또는 13번 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 택하여 앉는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

3단계 A가 25번 의자에 앉는 경우의 수 구하기

(ii) A가 25번 의자에 앉는 경우

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A를 제외한 4명의 학생은 11번 또는 12번 의자 중 1개, 14번 의자, 16번 또는 17번 의자 중 1개, 23번 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

11번 또는 12번 의자 중 1개를 택하고, 16번 또는 17번 의자 중 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 2 = 4$

이때 B는 11번 또는 12번 의자 중 택한 의자 또는 14번 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 택하여 앉는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 2 \times 6 = 48$

4단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 48 = 60$$

idea 06 답 45

1단계 6개의 숫자를 세 조로 나누는 경우의 수 구하기

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자를 2개, 2개, 2개의 세 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$$

2단계 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수 구하기

이때 나누는 세 조를 각각

$(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3)$ (단, $c_1 < c_2 < c_3, c_i < d_i, i=1, 2, 3$)

이라 하면 (가)를 만족시키는 경우는 (a_1, a_3) 이 (c_1, c_2) 또는 (c_1, c_3)

또는 (c_2, c_3) 일 때이므로 3가지이다.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} c_1=a_1, c_2=a_5 \text{이면 } d_1=a_3, d_2=a_4, c_3=a_6, d_3=a_6 \\ c_1=a_1, c_3=a_5 \text{이면 } d_1=a_2, d_3=a_4, c_2=a_6, d_2=a_6 \\ c_2=a_1, c_3=a_5 \text{이면 } d_2=a_2, d_3=a_4, c_1=a_6, d_1=a_6 \end{cases} \end{aligned}$$

3단계 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수 구하기

따라서 구하는 자연수 N의 개수는 $15 \times 3 = 45$

07 답 64

1단계 조건 (가)의 의미와 $f(1)$ 의 값 파악하기

(가)에서 $f(x)+f(-x)=-1$ 또는 $f(x)+f(-x)=1$ 이므로 $f(1)$ 과 $f(-1), f(2)$ 와 $f(-2), f(3)$ 과 $f(-3)$ 의 값은 각각 짝을 지어 그 값이 정해진다.

(나)에서 $f(1)>0$ 이므로 $f(1)=1$ 또는 $f(1)=2$ 또는 $f(1)=3$

2단계 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 의 값을 정하는 경우의 수 구하기

(i) $f(1)=1$ 일 때,

$$f(1)+f(-1)=-1 \text{에서 } f(-1)=-2$$

$$f(1)+f(-1)=1 \text{에서 } f(-1)=0 \notin X \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $f(1)=2$ 일 때,

$$f(1)+f(-1)=-1 \text{에서 } f(-1)=-3$$

$$f(1)+f(-1)=1 \text{에서 } f(-1)=-1$$

(iii) $f(1)=3$ 일 때,

$$f(1)+f(-1)=-1 \text{에서 } f(-1)=-4 \notin X \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

$$f(1)+f(-1)=1 \text{에서 } f(-1)=-2$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$1+2+1=4$$

3단계 $f(2)$ 와 $f(-2), f(3)$ 과 $f(-3)$ 의 값을 정하는 경우의 수 구하기

같은 방법으로 $f(2)$ 와 $f(-2), f(3)$ 과 $f(-3)$ 의 값을 정하는 경우의 수도 각각 4이다.

4단계 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 개수 구하기

따라서 구하는 함수 $f(x)$ 의 개수는

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

08 답 ①

1단계 함수 $f \circ f$ 가 항등함수임을 알기

함수 f 의 역함수가 존재해야 하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

또 집합 A의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$, 즉 $(f \circ f)(x)=x$ 이므로 함수 $f \circ f$ 는 항등함수이다.

2단계 함수 $f \circ f$ 가 항등함수가 되는 각 경우의 수 구하기

(i) 집합 A의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=x$ 인 경우

$$f(f(x))=f(x)=x \text{이므로 조건을 만족시킨다.}$$

따라서 함수 f 의 개수는 1이다.

(ii) 집합 A의 서로 다른 두 원소 a, b 에 대하여 $f(a)=b, f(b)=a$ 이고, 나머지 3개의 원소는 모두 $f(x)=x$ 인 경우

$$f(f(a))=f(b)=a, f(f(b))=f(a)=b \text{이므로 조건을 만족시킨다.}$$

이때 집합 A의 5개의 원소 중 서로 다른 두 원소 a, b 를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

따라서 함수 f 의 개수는 10이다.

(iii) 집합 A의 서로 다른 네 원소 a, b, c, d 에 대하여 $f(a)=b, f(b)=a, f(c)=d, f(d)=c$ 이고, 나머지 1개의 원소는 $f(x)=x$ 인 경우

(ii)와 마찬가지로 조건을 만족시킨다.

이때 집합 A의 5개의 원소를 2개, 2개, 1개의 세 조로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

따라서 함수 f 의 개수는 15이다.

3단계 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1+10+15=26$

1단계 함수 h 가 상수함수일 때, 순서쌍 (f, g, h) 의 개수 구하기

조건을 만족시키려면 $h \circ g \circ f$ 가 상수함수이어야 한다.

- (i) 함수 h 가 상수함수인 경우 $\hookrightarrow$ 두 함수 f, g 는 각각 상수함수 또는 상수함수가 아닌 함수이다.

모든 함수 f, g 에 대하여 $h \circ g \circ f$ 는 상수함수이다.

함수 h 가 상수함수인 경우는 $h(x)=1, h(x)=2, h(x)=3$ 의 3가지

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 = 9$

함수 g 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

따라서 순서쌍 (f, g, h) 의 개수는 $3 \times 9 \times 8 = 216$

2단계 함수 h 가 상수함수가 아닐 때, 순서쌍 (f, g, h) 의 개수 구하기

- (ii) 함수 h 가 상수함수가 아닌 경우

함수 h 의 개수는 $3 \times 3 - 3 = 6$

함수 h 의 개수 $\hookrightarrow$ 함수 h 가 상수함수인 경우

- ① 함수 g 가 상수함수인 경우

모든 함수 f 에 대하여 $g \circ f$ 가 상수함수이므로 $h \circ g \circ f$ 도 상수함수이다.

함수 g 가 상수함수인 경우는 $g(x)=1, g(x)=2$ 의 2가지

함수 f 의 개수는 $3 \times 3 = 9$

따라서 순서쌍 (f, g, h) 의 개수는 $6 \times 2 \times 9 = 108$

- ② 함수 g 가 상수함수가 아닌 경우

함수 g 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 - 2 = 6$

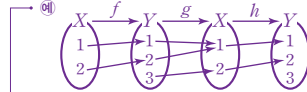
함수 g 의 개수 $\hookrightarrow$ 함수 g 가 상수함수인 경우

- ① 함수 f 가 상수함수인 경우

함수 f 가 상수함수이면 $g \circ f$ 가 상수함수이므로 $h \circ g \circ f$ 도 상수함수이다.

함수 f 가 상수함수인 경우는 $f(x)=1, f(x)=2, f(x)=3$ 의 3가지

따라서 순서쌍 (f, g, h) 의 개수는 $6 \times 6 \times 3 = 108$



- ② 함수 f 가 상수함수가 아닌 경우

집합 Y 의 원소 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 에 대하여 $g(x_1) = g(x_2)$ 일 때, 집합 $\{x_1, x_2\}$ 가 함수 f 의 치역이 되면 $h \circ g \circ f$ 는 상수함수이다.

함수 f 가 상수함수가 아닌 경우는 $f(1)=x_1, f(2)=x_2$ 또는 $f(1)=x_2, f(2)=x_1$ 의 2가지

따라서 순서쌍 (f, g, h) 의 개수는 $6 \times 6 \times 2 = 72$

- ①, ②에서 순서쌍 (f, g, h) 의 개수는

$$108 + 108 + 72 = 288$$

3단계 조건을 만족시키는 순서쌍 (f, g, h) 의 개수 구하기

- (i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (f, g, h) 의 개수는

$$216 + 288 = 504$$

1단계 조건 ㉠을 이용하여 A 학급 학생을 1분단에 배정하는 경우 생각하기

㉠에서 각 분단에는 같은 학급 학생이 3명 을 수 없으므로 1분단에는 A 학급 학생 2명 또는 1명을 배정한다.

2단계 1분단에 A 학급 학생 2명을 배정하는 방법의 수 구하기

1분단에 A 학급 학생 2명을 배정하는 경우는 (첫째 줄, 셋째 줄),

(첫째 줄, 넷째 줄), (둘째 줄, 넷째 줄)의 3가지이고, 이때 C 학급의 학생은 각 분단에 1명씩 배정하거나 2분단에 2명을 모두 배정할 수 있다.

$\hookrightarrow$ C 학급의 학생을 1분단에 모두 배정하면 B 학급 학생 3명은 2분단에 모두 앉게 된다.

- (i) C 학급 학생이 1분단과 2분단에 각각 1명씩 앉는 경우

- ① 1분단의 첫째 줄과 셋째 줄에 A 학급 학생이 앉는 방법의 수는 3

A	
C	A
A	
	C

$\hookrightarrow$ B 학급의 학생은 남은 자리에 배정하면 된다.

A 학급 학생을 배정하는 방법의 수는 1분단에 앉을 학생 2명을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3 \rightarrow \text{분단이 결정되면 자리는 학급 번호에 따라 결정된다.}$$

B 학급 학생을 배정하는 방법의 수는 1분단에 앉을 학생 1명을 택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_3C_1 = 3$

C 학급 학생을 배정하는 방법의 수는 학생 2명이 각각 다른 분단에 앉으므로 2가지

따라서 각각의 경우에 대하여 학생을 배정하는 방법의 수는

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$3 \times 18 = 54$$

- ② 1분단의 첫째 줄과 넷째 줄에 A 학급 학생이 앉는 방법의 수는 4

A	
C	A
	C
A	

①과 같은 방법으로 각각의 경우에 대하여 학생을 배정하는 방법의 수를 구하면 $3 \times 3 \times 2 = 18$

따라서 구하는 방법의 수는

$$4 \times 18 = 72$$

- ③ 1분단의 둘째 줄과 넷째 줄에 A 학급 학생이 앉는 방법의 수는 3

C	A
A	
	C
A	

①과 같은 방법으로 각각의 경우에 대하여 학생을 배정하는 방법의 수를 구하면 $3 \times 3 \times 2 = 18$

따라서 구하는 방법의 수는

$$3 \times 18 = 54$$

- ①, ②, ③에서 구하는 방법의 수는 $54 + 72 + 54 = 180$

- (ii) C 학급 학생이 모두 2분단에 앉는 경우

A	C
	A
A	
	C

각각의 경우에 대하여 학생을 배정하는 방법의 수는

$$3 \times 3 \times 1 = 9$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$2 \times 9 = 18$$

- (i), (ii)에서 1분단에 A 학급 학생 2명을 배정하는 방법의 수는

$$180 + 18 = 198$$

3단계 조건을 만족시키는 방법의 수 구하기

이때 각각의 경우에 대하여 1분단과 2분단이 바뀌는 경우가 2가지이므로 구하는 방법의 수는 $198 \times 2 = 396$

01 768 02 1080 03 30 04 ③ 05 ① 06 36
07 ④ 08 96

01 답 768

(가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 4개이고, 두 사람은 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 A와 B가 앉는 방법의 수는

$$4 \times 2! = 8$$

(나)에서 C와 D가 앉을 2인용 의자 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

C와 D가 택한 2인용 의자의 2개의 자리 중 한 자리를 택하는 방법의 수는 $2 \times 2 = 4$

따라서 C와 D가 서로 다른 2인용 의자에 앉는 방법의 수는

$$6 \times 4 = 24$$

(다)에서 아무도 앉지 않은 2인용 의자에 G가 혼자 앉는 방법의 수는 2

C, D가 앉은 2인용 의자의 남은 2개의 자리에 E와 F가 앉는 방법의 수는 2

따라서 구하는 방법의 수는

$$8 \times 24 \times 2 \times 2 = 768$$

02 답 1080

1부터 9까지의 자연수 중 합이 12의 약수가 되는 서로 다른 세 수는

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12

(1, 2, 3), (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (3, 4, 5)의 8가지이다.

이 각각에 대하여 나머지 6개의 숫자 중 하나를 택하는 경우의 수는 6

이때 (1, 2, 3)과 7 또는 8 또는 9를 택한 경우는 중복되므로 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$$8 \times 6 - 3 = 45$$

이 각각에 대하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$$45 \times 24 = 1080$$

03 답 30

그림과 같이 두 수 a, b 가 같은 가로줄에 있으면 $n(X) = 8$ 이고, 같은 세로줄에 있으면 $n(X) = 9$ 이다.

	a	b	

		a	
		b	

(i) 두 수 a, b 가 같은 가로줄에 있는 경우

3개의 가로줄 중 하나를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

이 각각에 대하여 가로줄에 있는 4개의 숫자 중에서 2개를 택하는

$$\text{경우의 수는 } {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 6 = 18$$

(ii) 두 수 a, b 가 같은 세로줄에 있는 경우

4개의 세로줄 중 하나를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

이 각각에 대하여 세로줄에 있는 3개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 3 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$18 + 12 = 30$$

04 답 ③

주머니에서 꺼낸 6개의 공의 색이 3종류인 경우는 색깔별 공의 개수가 3, 2, 1 또는 2, 2, 2인 경우이다.

(i) 색깔별 공의 개수가 3, 2, 1인 경우

3개를 꺼낼 수 있는 공은 검은 공, 파란 공, 빨간 공이므로 이 중에서 1종류를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

2개를 꺼낼 수 있는 공은 노란 공과 3개의 공을 꺼내고 남은 2종류의 공이므로 이 중에서 1종류를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

공을 꺼내지 않은 3종류의 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 1종류를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

(ii) 색깔별 공의 개수가 2, 2, 2인 경우

노란 공을 제외한 4종류의 공 중에서 각각 2개씩 공을 꺼낼 3종류를 택하는 경우의 수는 노란 공은 1개뿐이므로 2개를 꺼낼 수 없다.

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$27 + 4 = 31$$

05 답 ①

서로 다른 종류의 블루투스 스피커 4개와 같은 종류의 이어폰 3개를 6명의 학생에게 남김없이 나누어 주면 6명의 학생 중 1명은 블루투스 스피커와 이어폰을 합쳐서 2개를 받고, 나머지 5명의 학생은 블루투스 스피커와 이어폰 중 1개만 받는다.

(i) 1명의 학생이 블루투스 스피커 2개를 받는 경우

4개의 블루투스 스피커 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

택한 2개의 블루투스 스피커를 받을 학생을 정하는 방법의 수는 6

남은 2개의 블루투스 스피커를 나머지 5명의 학생 중 2명의 학생에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

블루투스 스피커를 받지 못한 3명의 학생에게 이어폰을 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 6 \times 20 \times 1 = 720$$

(ii) 1명의 학생이 이어폰 2개를 받는 경우

이어폰 2개를 받을 학생을 정하는 방법의 수는 6

나머지 5명의 학생 중 4명의 학생에게 블루투스 스피커를 1개씩 나누어 주는 방법의 수는

$${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

아무것도 받지 못한 1명의 학생에게 이어폰 1개를 나누어 주는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 120 \times 1 = 720$$

(iii) 1명의 학생이 블루투스 스피커 1개와 이어폰 1개를 받는 경우

4개의 블루투스 스피커를 6명의 학생 중 4명의 학생에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

블루투스 스피커를 받은 4명의 학생 중 1명에게 이어폰 1개를 나누어 주는 방법의 수는 ${}_4C_1 = 4$

아무것도 받지 못한 2명의 학생에게 이어폰을 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$360 \times 4 \times 1 = 1440$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$$720 + 720 + 1440 = 2880$$

06 답 36

(가)에서 A는 13번 또는 14번 사물함을 택할 수 있고, B는 1번 또는 2번 또는 3번 또는 4번 사물함을 택할 수 있으며 (나), (다)에서 어느 두 학생도 양 옆 또는 위 아래로 이웃한 사물함을 택할 수 없다.

(i) A가 13번 사물함을 택한 경우

11	12	A	14		
1	2	3	4	5	6

A를 제외한 4명의 학생은 2번, 4번, 6번, 11번 사물함을 각각 한 명씩 택해야 한다.

이때 B는 2번 또는 4번 사물함 중 1개를 택할 수 있으므로 B가 사물함을 택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 사물함을 택하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는 $2 \times 6 = 12$

(ii) A가 14번 사물함을 택한 경우

11	12	13	A		
1	2	3	4	5	6

A를 제외한 4명의 학생은 5번 또는 6번 사물함 중 1개와 1번, 3번, 12번 사물함을 택해야 한다.

5번 또는 6번 사물함 중 1개를 택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이때 B는 1번 또는 3번 사물함 중 1개를 택해야 하므로 B가 사물함을 택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 사물함을 택하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는 $2 \times 2 \times 6 = 24$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$12 + 24 = 36$$

07 답 ④

집합 $X = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 이므로 (가)에서 $\{f(x)\}^2 - \{f(2-x)\}^2 = 3$ 을 만족시키는 순서쌍

$(f(x), f(2-x))$ 는 $(-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)$

(i) $f(x) = -2, f(2-x) = -1$ 인 경우

$$x \leq 0 \text{ 이면 } 2-x \geq 2$$

그런데 $f(2-x) = -1$ 이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

$x > 0$ 일 때 $f(x) = -2$ 이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 가능한 순서쌍 $(f(x), f(2-x))$ 는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x) = -2, f(2-x) = 1$ 인 경우

$$x = -2 \text{ 이면 } f(-2) = -2, f(4) = 1$$

$$x = -1 \text{ 이면 } f(-1) = -2, f(3) = 1$$

$x \geq 1$ 일 때 $f(x) = -2$ 가 되어 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 가능한 순서쌍 $(f(x), f(2-x))$ 의 개수는 2이다.

(iii) $f(x) = 2, f(2-x) = -1$ 인 경우

$$x < 2 \text{ 이면 } 2-x > 0$$

그런데 $f(2-x) = -1$ 이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

$x = 2$ 이면 $f(2) = 2, f(0) = -1$ 이지만 $f(0)$ 의 값은 정의되지 않는다.

$$x = 3 \text{ 이면 } f(3) = 2, f(-1) = -1$$

$$x = 4 \text{ 이면 } f(4) = 2, f(-2) = -1$$

따라서 가능한 순서쌍 $(f(x), f(2-x))$ 의 개수는 2이다.

(iv) $f(x) = 2, f(2-x) = 1$ 인 경우

$$x = -2 \text{ 이면 } f(-2) = 2, f(4) = 1$$

$$x = -1 \text{ 이면 } f(-1) = 2, f(3) = 1$$

$x = 1$ 이면 $f(1) = 2, f(1) = 1$ 이 되어 함수값이 정의되지 않는다.

$x = 2$ 이면 $f(2) = 2, f(0) = 1$ 이지만 $f(0)$ 의 값은 정의되지 않는다.

$$x = 3 \text{ 이면 } f(3) = 2, f(-1) = 1$$

$$x = 4 \text{ 이면 } f(4) = 2, f(-2) = 1$$

따라서 가능한 순서쌍 $(f(x), f(2-x))$ 의 개수는 4이다.

(i)~(iv)에서 가능한 순서쌍 $(f(x), f(2-x))$ 의 개수는 8이다.

이 각각에 대하여 $x < 0$ 이면 가능한 $f(x)$ 의 값은 6가지이고, $x > 0$ 이면 가능한 $f(x)$ 의 값은 4가지이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $f(-2), f(3)$ 의 값은 각각 4가지이다.

$$8 \times 6 \times 4^3 = 24 \times 2^7 \quad \therefore a = 24$$

08 답 96

(i) 흰 공을 1이 적혀 있는 칸에 넣는 경우

8이 적혀 있는 칸에 흰 공을 넣으면 (나)를 만족시키지 않으므로 흰 공 3개는 다음과 같이 (1, 3, 6) 또는 (1, 4, 6) 또는 (1, 4, 7)이 적혀 있는 칸에 넣어야 한다.

1	2	3	4
5	6	7	8

1	2	3	4
5	6	7	8

1	2	3	4
5	6	7	8

① 흰 공을 (1, 3, 6)이 적혀 있는 칸에 넣는 경우

흰 공을 넣는 방법의 수는 $3! = 6$

이 각각에 대하여 검은 공은 (2, 4, 7), (2, 5, 7), (2, 5, 8), (4, 5, 7)이 적혀 있는 칸에 넣을 수 있다.

이때 검은 공을 넣는 방법은 (4, 5, 7)이 적혀 있는 칸에 넣는 방법 2가지이고 나머지는 각각 1가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times (1 \times 2 + 3 \times 1) = 30$$

② 흰 공을 (1, 4, 6)이 적혀 있는 칸에 넣는 경우

흰 공을 넣는 방법의 수는 $3! = 6$

이 각각에 대하여 검은 공은 (2, 5, 7), (2, 5, 8), (3, 5, 8)이 적혀 있는 칸에 넣을 수 있다.

이때 검은 공을 넣는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 3 \times 1 = 18$$

③ 흰 공을 (1, 4, 7)이 적혀 있는 칸에 넣는 경우

흰 공을 넣는 방법의 수는 $3! = 6$

이 각각에 대하여 검은 공은 (2, 5, 8), (3, 5, 8), (3, 6, 8)이 적혀 있는 칸에 넣을 수 있다.

이때 검은 공을 넣는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 3 \times 1 = 18$$

①, ②, ③에서 구하는 방법의 수는

$$30 + 18 + 18 = 66$$

(ii) 흰 공을 2가 적혀 있는 칸에 넣는 경우

1이 적혀 있는 칸에는 흰 공을 넣을 수 없고 1이 적혀 있는 칸에 검은 공을 넣거나 8이 적혀 있는 칸에 흰 공을 넣으면 (ㄹ)을 만족시키지 않으므로 흰 공 3개는 다음과 같이 (2, 4, 5) 또는 (2, 4, 7) 또는 (2, 5, 7)이 적혀 있는 칸에 넣어야 한다.

X	2	3	4
5	6	7	8

X	2	3	4
5	6	7	8

X	2	3	4
5	6	7	8

① 흰 공을 (2, 4, 5)가 적혀 있는 칸에 넣는 경우

흰 공을 넣는 방법의 수는 $3! = 6$

이 각각에 대하여 검은 공은 (3, 6, 8)이 적혀 있는 칸에 넣을 수 있다.

이때 검은 공을 넣는 방법의 수는 2

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 1 \times 2 = 12$$

② 흰 공을 (2, 4, 7)이 적혀 있는 칸에 넣는 경우

흰 공을 넣는 방법의 수는 $3! = 6$

이 각각에 대하여 검은 공은 (3, 5, 8) 또는 (3, 6, 8)이 적혀 있는 칸에 넣을 수 있다.

이때 검은 공을 넣는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 2 \times 1 = 12$$

③ 흰 공을 (2, 5, 7)이 적혀 있는 칸에 넣는 경우

흰 공을 넣는 방법의 수는 $3! = 6$

이 각각에 대하여 검은 공은 (3, 6, 8)이 적혀 있는 칸에 넣을 수 있다.

이때 검은 공을 넣는 방법의 수는 1

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 1 \times 1 = 6$$

①, ②, ③에서 구하는 방법의 수는

$$12 + 12 + 6 = 30$$

(iii) 흰 공을 1, 2가 적혀 있는 칸에 넣지 않는 경우

1, 2가 적혀 있는 칸에 검은 공을 넣거나 8이 적혀 있는 칸에 흰 공을 넣으면 (ㄹ)을 만족시키지 않으므로 흰 공 3개는 다음과 같이 (4, 5, 7)이 적혀 있는 칸에 넣어야 한다.

X	X	X	4
5	6	7	8

이때 1, 2, 3이 적혀 있는 칸에는 검은 공을 넣을 수 없으므로 검은 공 3개를 넣는 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$$66 + 30 = 96$$

memo*

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.

memo*

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.