

수학의 신

고등수학(상)

정답과 해설



01 다항식의 연산

step 1 핵심 문제 20~21쪽

- 01 $11x^2-8x+5$ 02 ① 03 4 04 $\frac{11}{2}$ 05 104
 06 ② 07 $\frac{88\sqrt{2}}{3}\pi$ 08 ④ 09 ④ 10 -2
 11 ④

step 2 고난도 문제 22~25쪽

- 01 $-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$ 02 ⑤ 03 4 04 ①
 05 ③ 06 $218\sqrt{2}$ 07 $5\sqrt{5}$ 08 $\frac{49}{4}$ 09 ②
 10 6 11 ④ 12 6 13 9 14 52π 15 ②
 16 ② 17 x^2+1 18 26 19 $\perp$
 20 몫: $8x^2+14x+8$, 나머지: 1

step 3 최고난도 문제 26~27쪽

- 01 ⑤ 02 183 03 $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 04 37, 52, 157
 05 $2m^3$ 06 30 07 14 08 -2

02 나머지정리와 인수분해

step 1 핵심 문제 28~29쪽

- 01 ③ 02 $\frac{19}{16}$ 03 -9 04 $-x^2+x+2$ 05 $\frac{5}{2}$
 06 ② 07 $4x$ 08 ① 09 9 10 ④ 11 ④
 12 171

step 2 고난도 문제 30~34쪽

- 01 ② 02 $a=-2, b=-3$ 03 40 04 22
 05 14 06 34 07 74 08 12 09 -8
 10 x^2+3x-2 11 5 12 ③ 13 24 14 ②
 15 54 16 $11x+4$ 17 ① 18 ⑤ 19 ④
 20 6 21 ③ 22 -6 23 20 24 17 25 ⑤
 26 34 27 5 28 $ab+bc+ca$

step 3 최고난도 문제 35~37쪽

- 01 16 02 ④ 03 ③ 04 ④ 05 0 06 ④
 07 6 08 18 09 $8\sqrt{5}$ 10 6000 11 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
 12 146

기출 변형 문제로 단원 마스터

38~39쪽

- 01 862 02 $\frac{37}{8}$ 03 60 04 302 05 27 06 -58
 07 ⑤ 08 139

03 복소수

step 1 핵심 문제 42~43쪽

- 01 7 02 ④ 03 ② 04 $7-2i$ 05 15
 06 ⑤ 07 $\neg, \cup$ 08 ⑤ 09 25 10 ②
 11 ③ 12 8

step 2 고난도 문제 44~47쪽

- 01 ① 02 9 03 ④ 04 24 05 ⑤ 06 ③
 07 ① 08 0 09 ④ 10 17 11 $\perp$ 12 $\perp, \cap$
 13 $\frac{1}{2}$ 14 $\perp$ 15 ③ 16 85 17 44 18 ④
 19 24 20 27 21 ⑤ 22 ④ 23 10 24 ③

step ③ 최고난도 문제						48~49쪽
01 18	02 ②	03 144	04 ④	05 150	06 $\neg, \sqsubset$	
07 ④	08 $-i, i$					

04 이차방정식

step ① 핵심 문제						50~51쪽
01 ①	02 ①	03 ③	04 15	05 ②	06 63	
07 -2	08 ②	09 ②	10 33	11 2	12 ②	

step ② 고난도 문제						52~56쪽
01 -1	02 ③	03 ④	04 1	05 ③	06 $\neg, \sqsubset$	
07 ⑤	08 ⑤	09 ②	10 -6	11 ①	12 ⑤	
13 $\sqsubset, \sqsupset$	14 11	15 83	16 ②	17 ④		
18 ④	19 4	20 27	21 ③	22 -1	23 ①	
24 ②	25 ⑤	26 ③	27 $8\sqrt{3}$			

step ③ 최고난도 문제						57~59쪽
01 $-\frac{5}{3}$	02 ②	03 10	04 ③	05 ①	06 ②	
07 $\neg, \sqsubset$	08 ①	09 $-6\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$	10 $\frac{5}{8}$			
11 50						

05 이차방정식과 이차함수

step ① 핵심 문제						60~61쪽
01 $1, \frac{7}{4}$	02 ④	03 ③	04 4	05 ②		
06 $-2 < k < 2$	07 6	08 60	09 ④	10 ③		
11 8	12 ②					

step ② 고난도 문제						62~66쪽
01 $3\sqrt{2}$	02 2	03 ④	04 ④	05 ③	06 39	
07 $\frac{7}{4}$	08 ③	09 $3-\sqrt{7}$	10 9	11 ④		
12 ①	13 $\frac{400}{9}m$	14 28	15 ⑤	16 ③		
17 33	18 0	19 11	20 ⑤	21 98	22 ③	
23 $12\sqrt{3}-7$						

step ③ 최고난도 문제						67~69쪽
01 ⑤	02 2	03 ⑤	04 $10-6\sqrt{2}$	05 ②		
06 ⑤	07 $\frac{17}{8}$	08 360	09 ④			

06 여러 가지 방정식

step ① 핵심 문제						70~71쪽
01 ①	02 ②	03 84	04 ④	05 -4	06 ②	
07 ①	08 $\neg, \sqsubset$	09 ②	10 4	11 7		
12 ②						

step ② 고난도 문제						72~76쪽
01 ③	02 ⑤	03 ⑤	04 21	05 ④	06 ①	
07 4	08 $\frac{1}{2}$	09 $-\frac{3}{2}$	10 ④	11 31	12 ③	
13 ⑤	14 16	15 $\frac{3}{4}cm$	16 3	17 ①		
18 5	19 $\frac{31}{8}$	20 6	21 ②	22 ②	23 39	
24 3	25 12	26 ②	27 10	28 8		

step ③ 최고난도 문제						77~79쪽
01 34	02 64	03 46	04 20	05 ⑤	06 4	
07 ②	08 ⑤	09 ③	10 12	11 ③	12 8	

07 여러 가지 부등식

step ① 핵심 문제

80~81쪽

- 01 $x > -2$ 02 9 03 16 04 ⑤ 05 ⑤
 06 $0 \leq a \leq 3$ 07 2 08 ③ 09 7 10 5
 11 ③ 12 ② 13 ① 14 18

step ② 고난도 문제

82~85쪽

- 01 $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{11}{5}$ 02 28 03 ② 04 -3
 05 49 06 ⑤ 07 ④ 08 ① 09 ② 10 27
 11 $a < -1$ 12 30 13 ③ 14 $1 \leq a \leq 2$
 15 ② 16 ④ 17 $2 \leq a < 3$ 18 43 19 ②
 20 15 21 ① 22 $0 < a \leq 4$

step ③ 최고난도 문제

86~87쪽

- 01 ② 02 ④ 03 6 04 2 05 ① 06 -15
 07 $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$ 08 $\sqrt{5} - \sqrt{10}$

기출 변형 문제로 단원 마스터

88~91쪽

- 01 21 02 165 03 12 04 ② 05 15 06 ⑤
 07 23 08 ② 09 6 10 42 11 $\neg, \cup, \cap$
 12 1 13 2 14 ④

08 평면좌표와 직선의 방정식

step ① 핵심 문제

94~95쪽

- 01 $\frac{5}{4}$ 02 25π 03 ⑤ 04 $\frac{3}{5} < t < 1$
 05 (6, 3), (18, 27) 06 ② 07 14 08 ④
 09 $(15\sqrt{3}, 0)$ 10 ⑤ 11 $-\frac{1}{12}$
 12 $3x - 4y + 17 = 0, x = -3$

step ② 고난도 문제

96~100쪽

- 01 10 02 25 03 ④ 04 $\frac{2}{3}$ 05 ⑤ 06 $\frac{8}{3}$
 07 $\frac{1}{2}$ 08 ④ 09 $\frac{21}{2}$ 10 ② 11 330 12 ①
 13 2 14 ② 15 $\frac{11}{6}$ 16 ① 17 ④
 18 $(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$ 19 $\sqrt{2} < a < 2$ 20 15 21 ①
 22 ③ 23 4 24 8

step ③ 최고난도 문제

101~103쪽

- 01 ① 02 55 03 $-9\sqrt{2}$ 04 ⑤ 05 $\frac{1}{3}$
 06 ④ 07 $(\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$ 08 ④ 09 43

09 원의 방정식

step 1 핵심 문제

104~105쪽

- 01 ③ 02 10 03 ② 04 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 05 ② 06 $2\sqrt{5}$
 07 ③ 08 $a < -\frac{3}{4}$ 09 50 10 ④
 11 (25, -25) 12 ③

step 2 고난도 문제

106~110쪽

- 01 ② 02 ⑤ 03 16 04 ③ 05 $\frac{15}{4}$ 06 $\sqrt{5}\pi$
 07 108 08 256 09 ⑤ 10 $\frac{3}{4}$ 11 ② 12 ④
 13 2 14 9 15 $\sqrt{15} < k < 7$ 16 31 17 ②
 18 80 19 2 20 87 21 -20 22 π 23 $-\frac{4}{3}$
 24 ①

step 3 최고난도 문제

111~113쪽

- 01 $\frac{3}{5}$ 02 ② 03 $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$ 04 13π 05 ③
 06 ⑤ 07 $\sqrt{6}$ 08 ④ 09 ③ 10 $7\sqrt{21}$

10 도형의 이동

step 1 핵심 문제

114~115쪽

- 01 ⑤ 02 $-\frac{3}{4}$ 03 6 04 (2, 5) 05 ②
 06 36 07 4 08 ③ 09 3 10 ① 11 12

step 2 고난도 문제

116~119쪽

- 01 11 02 $\perp, \sqsubset$ 03 64 04 $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$
 05 ③ 06 $\perp, \sqsubset$ 07 ② 08 (1, 2)
 09 $\frac{2}{3}$ 10 4 11 $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$ 12 $\sqrt{34}$ 13 ①
 14 3 15 -66 16 $4\sqrt{2}$ 17 ④ 18 ⑤

step 3 최고난도 문제

120~121쪽

- 01 ① 02 $a=1, b=\frac{10}{3}$ 03 ① 04 5
 05 (15, 9) 06 $\frac{21}{32}$ 07 4

기출 변형 문제로 단원 마스터

122~125쪽

- 01 $-\frac{16}{3}$ 02 $\frac{1}{2}$ 03 ② 04 ③ 05 $\frac{120}{119}$ 06 60
 07 34 08 ③ 09 36 10 23 11 64 12 ③
 13 ②

step 1 핵심 문제

| 20~21쪽

01 $11x^2 - 8x + 5$ 02 ① 03 4 04 $\frac{11}{2}$ 05 104

06 ② 07 $\frac{88\sqrt{2}}{3}\pi$ 08 ④ 09 ④ 10 -2

11 ④

01 답 $11x^2 - 8x + 5$

$2A - B = 2x^2 - x \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$A - 2B = -5x^2 + 4x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

① - 2 × ②을 하면

$3B = 12x^2 - 9x + 6 \quad \therefore B = 4x^2 - 3x + 2$

②에서

$$\begin{aligned}
 A &= 2B + (-5x^2 + 4x - 3) \\
 &= 2(4x^2 - 3x + 2) + (-5x^2 + 4x - 3) \\
 &= 3x^2 - 2x + 1
 \end{aligned}$$

이때 $3(X - B) = X + 2A + B$ 에서

$2X = 2A + 4B$

$$\begin{aligned}
 \therefore X &= A + 2B = (3x^2 - 2x + 1) + 2(4x^2 - 3x + 2) \\
 &= 11x^2 - 8x + 5
 \end{aligned}$$

02 답 ①

 $(x^4 - 2x^3 + ax^2 + 5)(-2x^4 + (2a - 1)x^3 + (2 - a)x^2 - 3)$ 의 전개식에서 x^6 항은

$x^4 \times (-2a)x^2 + (-2x^3) \times (2a - 1)x^3 + ax^2 \times (-2x^4)$

$= 2x^6 - ax^6 - 4ax^6 + 2x^6 - 2ax^6$

$= (-7a + 4)x^6$

이때 x^6 의 계수가 -17이므로

$-7a + 4 = -17 \quad \therefore a = 3$

이를 주어진 다항식에 대입하면

 $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5)(-2x^4 + 5x^3 - x^2 - 3)$ 이므로 이 식의 전개식에서 x^4 항은

$x^4 \times (-3) + 3x^2 \times (-x^2) + 5 \times (-2x^4) = -16x^4$

따라서 x^4 의 계수는 -16이다.

03 답 4

 $(2x^3 + ax + 3)(2x^3 + ax - 1) + 5$ 에서 $2x^3 + ax = X$ 로 놓으면

$(2x^3 + ax + 3)(2x^3 + ax - 1) + 5$

$= (X + 3)(X - 1) + 5 = X^2 + 2X + 2$

$= (2x^3 + ax)^2 + 2(2x^3 + ax) + 2$

$= (4x^6 + 4ax^4 + a^2x^2) + (4x^3 + 2ax) + 2$

$= 4x^6 + 4ax^4 + 4x^3 + a^2x^2 + 2ax + 2$

이때 x^4 의 계수가 -12이므로 $4a = -12 \quad \therefore a = -3$

$\therefore (2x^3 - 3x + 3)(2x^3 - 3x - 1) + 5$

$= 4x^6 - 12x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 6x + 2$

따라서 $b = 4, c = 9, d = -6$ 이므로

$a + b + c + d = -3 + 4 + 9 + (-6) = 4$

04 답 $\frac{11}{2}$

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ 이므로

$1 = \frac{5}{2} - 2xy \quad \therefore xy = \frac{3}{4}$

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{5}{2} + 2 \times \frac{3}{4} = 4$ 이므로

$x + y = 2 \quad (\because x > 0, y > 0)$

$\therefore x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

$= 2^3 - 3 \times \frac{3}{4} \times 2 = \frac{7}{2}$

$\therefore x^3 + x + y^3 + y = (x^3 + y^3) + (x + y)$

$= \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$

05 답 104

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (-3)^2 - 2 = 7$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= (-3)^3 - 3 \times (-3) = -18$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$

$\therefore x^4 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

$= x^4 + \frac{1}{x^4} - 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

$= 47 - 2 \times (-18) + 3 \times 7 = 104$

06 답 ②

 $100 = a$ 로 놓으면

$96^3 + 104^3 = (a - 4)^3 + (a + 4)^3$

$= (a^3 - 12a^2 + 48a - 64) + (a^3 + 12a^2 + 48a + 64)$

$= 2a^3 + 96a = a(2a^2 + 96)$

$= 100(20000 + 96)$

$= 2009600$

따라서 구하는 각 자리 숫자의 합은

$2 + 9 + 6 = 17$

07 답 $\frac{88\sqrt{2}}{3}\pi$

서로 외접하는 두 구 S_1, S_2 의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)라 하면 두 구의 중심 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$r_1 + r_2 = 2\sqrt{3}$

두 구의 겹침이의 합이 40π 이므로

$4\pi r_1^2 + 4\pi r_2^2 = 40\pi \quad \therefore r_1^2 + r_2^2 = 10 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2$ 이므로

$10 = (2\sqrt{3})^2 - 2r_1r_2 \quad \therefore r_1r_2 = 1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

이때 $(r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 = 8$ 이므로

$r_1 - r_2 = 2\sqrt{2} \quad (\because r_1 > r_2) \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

$\therefore r_1^3 - r_2^3 = (r_1 - r_2)^3 + 3r_1r_2(r_1 - r_2)$

$= (2\sqrt{2})^3 + 3 \times 1 \times 2\sqrt{2} = 22\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

따라서 두 구 S_1, S_2 의 부피의 차는

$\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3) = \frac{88\sqrt{2}}{3}\pi \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

08 답 ④

세 모서리 AB, BC, BF의 길이를 각각 a, b, c 라 하면 직육면체의 겉 넓이가 148이므로

$$2(ab+bc+ca)=148$$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$$4(a+b+c)=60$$

$$\therefore a+b+c=15$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{DB}^2 &= (b^2+c^2) + (a^2+c^2) + (a^2+b^2) \\ &= 2(a^2+b^2+c^2) \\ &= 2\{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)\} \\ &= 2(15^2 - 148) \\ &= 154\end{aligned}$$

09 답 ④

$$\begin{array}{r} 4x + (a+4) \\ x^2 - x + 1 \overline{) 4x^3 + \quad ax^2 + \quad bx + a} \\ \underline{4x^3 - \quad 4x^2 + \quad 4x} \\ (a+4)x^2 + (b-4)x + a \\ \underline{(a+4)x^2 - (a+4)x + a+4} \\ (a+b)x - 4 \end{array}$$

이때 나머지가 ab 이므로

$$a+b=0, ab=-4$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8$$

10 답 -2

$f(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때의 몫이 $Q_1(x)$, 나머지가 $3x+2$ 이므로

$$f(x) = (x^2+x+1)Q_1(x) + 3x+2 \quad \text{..... ㉠}$$

$Q_1(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 몫이 $(x-1)Q_2(x)$, 나머지가 $2x-3$ 이므로

$$Q_1(x) = (x^2-x+1)(x-1)Q_2(x) + 2x-3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2+x+1)\{(x^2-x+1)(x-1)Q_2(x) + 2x-3\} + 3x+2 \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q_2(x) \\ &\quad + (2x-3)(x^2+x+1) + 3x+2 \\ &= (x^3-1)(x^2-x+1)Q_2(x) + (2x-2-1)(x^2+x+1) + 3x+2 \\ &= (x^3-1)(x^2-x+1)Q_2(x) \\ &\quad + 2(x-1)(x^2+x+1) - (x^2+x+1) + 3x+2 \\ &= (x^3-1)\{(x^2-x+1)Q_2(x) + 2\} - x^2+2x+1\end{aligned}$$

따라서 $R(x) = -x^2+2x+1$ 이므로

$$R(-1) = -1-2+1 = -2$$

11 답 ④

조립제법을 이용하여 $3x^3-7x^2+5x+1$ 을 $x-\frac{1}{3}$ 로 나누면

$$\frac{1}{3} \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 5 & 1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 2 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}\therefore 3x^3-7x^2+5x+1 &= \left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+3)+2 \\ &= (3x-1)(x^2-2x+1)+2\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+3, g(x)=x^2-2x+1$ 이므로

$$f(2)+g(2)=(12-12+3)+(4-4+1)=4$$

step 2 고난도 문제

| 22~25쪽

01 $-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$

02 ⑤

03 4

04 ①

05 ③

06 $218\sqrt{2}$

07 $5\sqrt{5}$

08 $\frac{49}{4}$

09 ②

10 6

11 ④

12 6

13 9

14 52π

15 ②

16 ②

17 x^2+1

18 26

19 $\perp$

20 몫: $8x^2+14x+8$, 나머지: 1

01 답 $-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$

$$(A+2B)+(2B+3C)+(3C+A)$$

$$= (3x^2-xy+y^2) + (-4x^2+2xy-y^2) + (x^2+3xy+4y^2)$$

$$= 4xy+4y^2$$

따라서 $A+2B+3C=2xy+2y^2$ 이므로

$$3C=2xy+2y^2-(A+2B)$$

$$= 2xy+2y^2-(3x^2-xy+y^2)$$

$$= -3x^2+3xy+y^2$$

$$\therefore C = -x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$$

다른 풀이

$$A+2B=3x^2-xy+y^2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$2B+3C=-4x^2+2xy-y^2 \quad \text{..... ㉡}$$

$$3C+A=x^2+3xy+4y^2 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠-㉡을 하면

$$A-3C=7x^2-3xy+2y^2 \quad \text{..... ㉣}$$

㉢-㉣을 하면

$$6C=-6x^2+6xy+2y^2$$

$$\therefore C = -x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$$

02 답 ⑤

$\overline{OC}=a, \overline{CD}=b$ 라 하면

$$\overline{DA}=2a, \overline{AB}=b, \overline{BO}=a$$

㉠에서 $\overline{OC}+\overline{CD}=x+y+3$ 이므로

$$a+b=x+y+3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡에서 $\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BO}=3x+y+5$ 이므로

$$2a+b+a=3x+y+5$$

$$\therefore 3a+b=3x+y+5 \quad \text{..... ㉢}$$

㉡-㉢을 하면

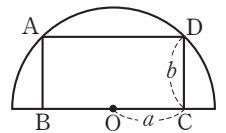
$$2a=2x+2 \quad \therefore a=x+1$$

이를 ㉡에 대입하면

$$x+1+b=x+y+3 \quad \therefore b=y+2$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AD} \times \overline{AB} = 2ab = 2(x+1)(y+2)$$



idea
03 답 4

(ㄱ)에서 $(x-4)(2y-4)(3z-4)=0$ 이므로

$$(2xy-4x-8y+16)(3z-4)=0$$

$$6xyz-8xy-12xz+16x-24yz+32y+48z-64=0$$

$$\therefore 6xyz-4(2xy+6yz+3zx)+16(x+2y+3z)-64=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(나)에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{4}$

양변에 $6xyz$ 를 곱하면

$$2xy+6yz+3zx=\frac{3}{2}xyz$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$6xyz-4 \times \frac{3}{2}xyz+16(x+2y+3z)-64=0$$

$$16(x+2y+3z)-64=0$$

$$16(x+2y+3z)=64$$

$$\therefore x+2y+3z=4$$

비법 NOTE

x, y, z 중 적어도 하나가 a 이다.

→ $(x-a)(y-a)(z-a)=0$ 이 성립함을 이용하여 식을 세운다.

04 답 ①

정오각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ \rightarrow (\text{정}n\text{각형의 한 내각의 크기}) = \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

삼각형 ABE는 이등변삼각형이고 $\angle BAE=108^\circ$ 이므로

$$\angle ABE=36^\circ$$

삼각형 BCA는 이등변삼각형이고 $\angle ABC=108^\circ$ 이므로

$$\angle BAC=36^\circ$$

$$\therefore \angle EAP=108^\circ - \angle BAC=72^\circ$$

$$\text{또 } \angle APE = \angle BAP + \angle ABP = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$$

즉, 삼각형 APE는 이등변삼각형이므로 $\overline{PE} = \overline{AE} = 1$

$\overline{BE} : \overline{PE} = \overline{PE} : \overline{BP}$ 에서

$$x : 1 = 1 : (x-1)$$

$$x(x-1)=1$$

$$x^2-x-1=0$$

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

$$x^2 = x+1$$

$$x^3 = x(x+1) = x^2 + x = (x+1) + x = 2x+1$$

$$x^4 = x(2x+1) = 2x^2 + x = 2(x+1) + x = 3x+2$$

$$x^5 = x(3x+2) = 3x^2 + 2x = 3(x+1) + 2x = 5x+3$$

$$x^6 = x(5x+3) = 5x^2 + 3x = 5(x+1) + 3x = 8x+5$$

$$x^7 = x(8x+5) = 8x^2 + 5x = 8(x+1) + 5x = 13x+8$$

$$x^8 = x(13x+8) = 13x^2 + 8x = 13(x+1) + 8x = 21x+13$$

$$\therefore 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$$

$$= 1-x+(x+1)-(2x+1)+(3x+2)-(5x+3) \\ + (8x+5)-(13x+8)+(21x+13)$$

$$= 12x+10$$

$$= 12 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 10$$

$$= 16+6\sqrt{5}$$

따라서 $p=16, q=6$ 이므로 $p+q=22$

05 답 ③

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \text{이므로}$$

$$1=4+3ab \quad \therefore ab=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$a+b=1$ 에서

$$b=1-a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$a=1-b \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a(1-a)=-1 \quad \therefore a^2=a+1$$

$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b(1-b)=-1 \quad \therefore b^2=b+1$$

$$\begin{aligned} \therefore 5a^6+8b^5 &= 5(a^2)^3+8b(b^2)^2 \\ &= 5(a+1)^3+8b(b+1)^2 \\ &= 5(a^3+3a^2+3a+1)+8b(b^2+2b+1) \\ &= 5\{a(a+1)+3(a+1)+3a+1\}+8b\{(b+1)+2b+1\} \\ &= 5(a^2+7a+4)+8b(3b+2) \\ &= 5\{(a+1)+7a+4\}+24b^2+16b \\ &= 5(8a+5)+24(b+1)+16b \\ &= 40(a+b)+49 \\ &= 40 \times 1 + 49 = 89 \end{aligned}$$

06 답 $218\sqrt{2}$

$$x^2+(\sqrt{2}y)^2=(x+\sqrt{2}y)^2-2\sqrt{2}xy \text{이므로}$$

$$10=(2\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}xy \quad \therefore xy=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x^3+(\sqrt{2}y)^3=(x+\sqrt{2}y)^3-3\sqrt{2}xy(x+\sqrt{2}y)$$

$$\begin{aligned} &= (2\sqrt{2})^3-3\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\sqrt{2} \\ &= 22\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^5+4\sqrt{2}y^5 &= x^5+(\sqrt{2}y)^5 \\ &= \{x^2+(\sqrt{2}y)^2\}\{x^3+(\sqrt{2}y)^3\}-x^2(\sqrt{2}y)^3-(\sqrt{2}y)^2x^3 \\ &= \{x^2+(\sqrt{2}y)^2\}\{x^3+(\sqrt{2}y)^3\}-(\sqrt{2}xy)^2(x+\sqrt{2}y) \\ &= 10 \times 22\sqrt{2} - \left\{\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}^2 \times 2\sqrt{2} \\ &= 218\sqrt{2} \end{aligned}$$

07 답 $5\sqrt{5}$

$x^4+\sqrt{5}x^2-1=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+\sqrt{5}-\frac{1}{x^2}=0, \quad x^2-\frac{1}{x^2}=-\sqrt{5}$$

$$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(-\sqrt{5})^2+4=9$$

$$\text{이때 } x^2 > 0 \text{이므로 } x^2+\frac{1}{x^2}=3 \quad \cdots \cdots \text{배점 40\%}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \text{이므로 } 3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{5} \quad (\because x > 0) \quad \cdots \cdots \text{배점 40\%}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x^6+x^4+x^2+2}{x^3} &= 2x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3} \\ &= 2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-5\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 2(\sqrt{5})^3-5 \times \sqrt{5}=5\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%} \end{aligned}$$

08 답 49/4

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 2 \text{에서 } \frac{ab+bc+ca}{abc} = 2 \\ \therefore ab+bc+ca &= 2abc \\ \text{이때 } abc &= \frac{9}{2} \text{이므로 } ab+bc+ca = 9 \\ (a+b)(b+c)(c+a) &= (a+b)(bc+ab+c^2+ac) \\ &= (a+b)(ab+bc+ca) + c^2(a+b) \\ &= (a+b)(ab+bc+ca) + c(ac+bc+ab) - abc \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ \text{이므로 } 45 &= (a+b+c) \times 9 - \frac{9}{2} \quad \therefore a+b+c = \frac{11}{2} \\ \therefore a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 2 \times 9 = \frac{49}{4} \end{aligned}$$

09 답 ②

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ (a+b+c)^2 &= 10+2 \times (-5) = 0 \\ \therefore a+b+c &= 0 \quad \dots\dots ㉠ \\ a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \text{이므로} \\ 6 &= 3abc \quad \therefore abc = 2 \\ ㉠ \text{에서 } a+b &= -c, b+c = -a, c+a = -b \text{이므로} \\ \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{a^2b^2c^2}{(-c) \times (-a) \times (-b)} \\ &= \frac{a^2b^2c^2}{-abc} = -abc = -2 \end{aligned}$$

10 답 6

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \text{이고} \\ \textcircled{7} \text{에서 } x^2+y^2+z^2 &= -2(xy+yz+zx) \text{이므로} \\ (x+y+z)^2 &= 0 \quad \therefore x+y+z=0 \quad \dots\dots ㉠ \\ x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \text{이므로} \\ \textcircled{4} \text{에서 } x^3+y^3+z^3 &= -18 \text{이므로} \\ -18 &= 3xyz \quad \therefore xyz = -6 \quad \dots\dots ㉡ \\ \text{따라서 세 정수 } x, y, z &\text{는 ㉠, ㉡을 만족시킨다.} \\ \text{이때 } |x|, |y|, |z| &\text{는 모두 6의 약수이고, } x+y+z=0, xyz < 0 \text{이므로} \\ \text{세 정수 } x, y, z &\text{ 중 두 개는 양수이고 한 개는 음수이다.} \\ \text{따라서 } (-3) \times 1 \times 2 &= -6, (-3)+1+2=0 \text{이므로 세 정수 } x, y, z \\ \text{의 순서쌍 } (x, y, z) &\text{는 } (-3, 1, 2), (-3, 2, 1), (1, -3, 2), \\ (1, 2, -3), (2, -3, 1), (2, 1, -3) &\text{의 6개이다.} \end{aligned}$$

idea 11 답 ④

$$\begin{aligned} a-b=x, b-c=y, c-a=z &\text{로 놓으면} \\ (a-b)+(b-c)+(c-a) &= 0 \text{이므로 } x+y+z=0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &= 12 \text{에서 } x^2+y^2+z^2=12 \\ x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{이므로} \\ 12 &= -2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx = -6 \\ \therefore (a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2 &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) \\ &= (-6)^2 = 36 \end{aligned}$$

12 답 6

$$\begin{aligned} x+y+z-(xy+yz+zx) &= 3 \quad \dots\dots ㉠ \\ xy+yz+zx+xyz &= -2 \quad \dots\dots ㉡ \\ x+y+z-xyz &= 1 \quad \dots\dots ㉢ \\ ㉠+㉡+㉢ \text{을 하면} \\ 2(x+y+z) &= 2 \quad \therefore x+y+z=1 \\ \text{이를 ㉢에 대입하면 } 1-xyz &= 1 \quad \therefore xyz=0 \\ \text{(i) } x=y=z=0 &\text{일 때,} \\ ㉠ \text{에서 좌변은 0이므로 성립하지 않는다.} \\ \text{(ii) } x, y, z \text{의 값 중 2개가 0일 때,} \\ x=y=0 \text{이라 하면 ㉡에서 좌변은 0이므로 성립하지 않는다.} \\ \text{(iii) } x, y, z \text{의 값 중 1개가 0일 때,} \\ z=0 \text{이라 하면 ㉢에서 } x+y=1, \text{ ㉡에서 } xy=-2 \text{이므로} \\ (x-y)^2 &= (x+y)^2 - 4xy = 1^2 - 4 \times (-2) = 9 \\ \therefore x-y &= -3 \text{ 또는 } x-y=3 \\ \therefore |(x-y)(y-z)(z-x)| &= |(x-y) \times y \times (-x)| \\ &= |xy| |x-y| \\ &= 2 \times 3 = 6 \\ \text{(i), (ii), (iii)에서 } |(x-y)(y-z)(z-x)| &= 6 \end{aligned}$$

idea 13 답 9

$$\begin{aligned} 100 &= x \text{로 놓으면} \\ 100.03 &= 100 + 0.03 = 10^2 + \frac{3}{10^2} = x + \frac{3}{x}, \\ 99.97 &= 100 - 0.03 = 10^2 - \frac{3}{10^2} = x - \frac{3}{x} \\ \therefore (100.03)^3 - (99.97)^3 &= \left(x + \frac{3}{x}\right)^3 - \left(x - \frac{3}{x}\right)^3 \\ &= \left(x^3 + 9x + \frac{27}{x} + \frac{27}{x^3}\right) - \left(x^3 - 9x + \frac{27}{x} - \frac{27}{x^3}\right) \\ &= 2\left(9x + \frac{27}{x^3}\right) \\ &= 18x + \frac{54}{x^3} \\ &= 18 \times 10^2 + \frac{54}{10^6} \\ &= 1800.000054 \\ \text{따라서 } a=5, b=4 &\text{이므로 } a+b=9 \\ \text{다른 풀이} \\ 100.03=x, 99.97=y &\text{로 놓으면} \\ x=100+\frac{3}{100}=10^2+\frac{3}{10^2}, y=100-\frac{3}{100}=10^2-\frac{3}{10^2} \\ \therefore (100.03)^3 - (99.97)^3 &= x^3 - y^3 \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2-xy\} \\ &= \frac{6}{10^2} \left\{ 4 \times 10^4 - \left(10^4 - \frac{9}{10^4}\right) \right\} \\ &= \frac{6}{10^2} \left(3 \times 10^4 + \frac{9}{10^4} \right) \\ &= 18 \times 10^2 + \frac{54}{10^6} \\ &= 1800.000054 \\ \text{따라서 } a=5, b=4 &\text{이므로 } a+b=9 \end{aligned}$$

14 답 52π

세 원 C_1, C_2, C_3 의 반지름의 길이를 각각 a, b, c 라 하자.

삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$2a^2 + 2ab + 2ac = 2bc$$

$$\therefore a^2 + ab + ac = bc \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = 24$$

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+c) = 24, (a+b)(a+c) = 48$$

$$\therefore a^2 + ac + ba + bc = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

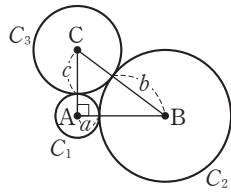
$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 2bc = 48 \quad \therefore bc = 24 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

두 원 C_2, C_3 의 둘레의 길이의 합이 20π 이므로

$$2\pi b + 2\pi c = 20\pi \quad \therefore b + c = 10 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

따라서 두 원 C_2, C_3 의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} \pi b^2 + \pi c^2 &= (b^2 + c^2)\pi = \{(b+c)^2 - 2bc\}\pi \\ &= (10^2 - 2 \times 24)\pi = 52\pi \quad \dots\dots \text{배점 20\%} \end{aligned}$$



15 답 ②

직사각형 IOHP에서 두 대각선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{HI} = \overline{OP} = 4$

$\overline{PH} = x, \overline{PI} = y$ 라 하면 삼각형 PIH는 $\angle IPH = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{PH}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{IH}^2 \quad \therefore x^2 + y^2 = 16$$

삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 내접원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{4}, r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

삼각형 PIH의 넓이는 $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}r(x+y+4)$ 이므로

$$xy = \frac{1}{2}(x+y+4), x+y+4 = 2xy \quad \text{삼각형 PIH의 각 변의 길이의 합이다.}$$

$$\therefore x+y = 2(xy-2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 이므로

$$16 = \{2(xy-2)\}^2 - 2xy$$

$$16 = 4(xy)^2 - 18xy + 16$$

$$2(xy)^2 - 9xy = 0, xy(2xy-9) = 0$$

이때 $xy \neq 0$ 이므로 $2xy-9=0$

$$\therefore xy = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

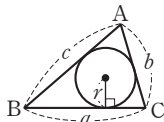
$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } x+y = 2\left(\frac{9}{2}-2\right) = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PH}^3 + \overline{PI}^3 &= x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 5^3 - 3 \times \frac{9}{2} \times 5 = \frac{115}{2} \end{aligned}$$

개념 NOTE

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$



16 답 ②

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \text{이므로 } 6 = 2a + 2b \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 반원 O_1, O_2 의 교점을 P_3 이라 하고 두 선분 P_3P_1, P_3P_2 를

그으면 삼각형 $P_1P_2P_3$ 은

$\angle P_1P_3P_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형

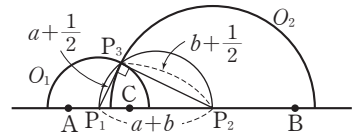
이므로 $\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2$

$$(a+b)^2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} + b^2 + b + \frac{1}{4}$$

$$2ab = a + b + \frac{1}{2}, 2ab = 3 + \frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore ab = \frac{7}{4}$$



17 답 $x^2 + 1$

평행사변형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC}$$

두 삼각형 PAB, PCD의 넓이의 합은 $\frac{1}{2}S$ 이므로

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{8} \{(2x+1)(2x^3+4x-1)+5\}$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \{(2x+1)(2x^3+4x-1)+5\}$$

$$= \frac{1}{2} (4x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 4)$$

$$= 2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$$

이때 $\overline{BC} = 2x^2 + x + 2$ 이므로

$$\overline{AB} = (2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2) \div (2x^2 + x + 2)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ 2x^2 + x + 2 \overline{) 2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2} \\ \underline{2x^4 + x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 + x + 2 \\ \underline{2x^2 + x + 2} \\ 0 \end{array}$$

따라서 변 AB의 길이는 $x^2 + 1$ 이다.

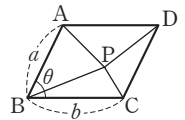
개념 NOTE

(1) 평행사변형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$S = ab \sin \theta$$

(2) 평행사변형 ABCD에서 내부의 임의의 한 점 P에 대하여

$$\triangle PAB + \triangle PCD = \triangle PBC + \triangle PDA = \frac{1}{2} \square ABCD$$



18 답 26

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(x) = (x-1)^2(ax+b) + ax+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(1) = 2 \text{이므로 } a+b=2 \quad \therefore b=2-a$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(ax+2-a) + ax+2-a \\ &= (x-1)^2\{a(x-1)+2\} + a(x-1)+2 \\ &= a(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + a(x-1)+2 \end{aligned}$$

즉, $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$ 는
 $R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$
 이때 $R(0)=R(3)$ 이므로
 $2-a+2=8+2a+2 \quad \therefore a=-2$
 따라서 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$ 이므로
 $R(5)=32-8+2=26$

19 답 ㄴ

다항식 $P(x)$ 를 $3x+2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로
 $P(x)=(3x+2)Q(x)+R$

$$\begin{aligned} \neg. P(x+1) &= (3x+5) \times Q(x+1) + R \\ &= \left(x + \frac{5}{3}\right) \times 3Q(x+1) + R \end{aligned}$$

따라서 $P(x+1)$ 을 $x + \frac{5}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x+1)$ 이다.

$$\begin{aligned} \neg. xP(x) &= x(3x+2)Q(x) + Rx \\ &= \left(x + \frac{2}{3}\right) \times 3xQ(x) + R\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}R \\ &= \left(x + \frac{2}{3}\right) \{3xQ(x) + R\} - \frac{2}{3}R \end{aligned}$$

따라서 $xP(x)$ 를 $x + \frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x) + R$ 이다.

$$\begin{aligned} \neg. x^2P(x) &= x^2(3x+2)Q(x) + Rx^2 \\ &= \left(x + \frac{2}{3}\right) \times 3x^2Q(x) + Rx\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}R\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{9}R \\ &= \left(x + \frac{2}{3}\right) \left\{3x^2Q(x) + Rx - \frac{2}{3}R\right\} + \frac{4}{9}R \end{aligned}$$

따라서 $x^2P(x)$ 를 $x + \frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{4}{9}R$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

★ idea

20 답 몫: $8x^2+14x+8$, 나머지: 1

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지가 $g(x)-2x$ 이므로 $g(x)-2x$ 의 차수는 $g(x)$ 의 차수보다 작아야 한다. 따라서 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 일차식이다.

$g(x)=2x+a$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\{g(x)-2x\} + g(x) - 2x \\ &= (2x+a)\{(2x+a)-2x\} + (2x+a) - 2x \\ &= 2ax + a^2 + a \end{aligned}$$

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이므로

$$2a=2 \quad \therefore a=1$$

이를 $f(x)$, $g(x)$ 에 대입하면 $f(x)=2x+2$, $g(x)=2x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3 &= (2x+2)^3 + (2x+1)^3 \\ &= (8x^3+24x^2+24x+8) + (8x^3+12x^2+6x+1) \\ &= 16x^3+36x^2+30x+9 \end{aligned}$$

조립제법을 이용하여 $16x^3+36x^2+30x+9$ 를 $2x+1$ 로 나누면

$$-\frac{1}{2} \begin{array}{rrrr} 16 & 36 & 30 & 9 \\ & -8 & -14 & -8 \\ \hline 16 & 28 & 16 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 16x^3+36x^2+30x+9 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(16x^2+28x+16) + 1 \\ &= (2x+1)(8x^2+14x+8) + 1 \end{aligned}$$

따라서 $16x^3+36x^2+30x+9$ 를 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $8x^2+14x+8$ 이고, 나머지는 1이다.

step 3 최고난도 문제

| 26~27쪽

01 ⑤ 02 183 03 $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 04 37, 52, 157

05 $2m^3$ 06 30 07 14 08 -2

01 답 ⑤

1단계 $f(n)$ 구하기

$$\begin{aligned} &(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})^2 \\ &= (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}) \\ &\text{이므로 } x^n \text{항은} \\ &2x \times nx^{n-1} + 3x^2 \times (n-1)x^{n-2} + 4x^3 \times (n-2)x^{n-3} \\ &\quad + \cdots + (n-1)x^{n-2} \times 3x^2 + nx^{n-1} \times 2x \\ &= \{2n+3(n-1)+4(n-2)+\cdots+(n-1) \times 3+n \times 2\}x^n \\ &\therefore f(n)=2n+3(n-1)+4(n-2)+\cdots+(n-1) \times 3+n \times 2 \end{aligned}$$

2단계 $f(10)-f(9)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} f(10) &= 2 \times 10 + 3 \times 9 + 4 \times 8 + \cdots + 9 \times 3 + 10 \times 2, \\ f(9) &= 2 \times 9 + 3 \times 8 + 4 \times 7 + \cdots + 9 \times 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\begin{array}{r} f(10)=2 \times 10+3 \times 9+4 \times 8+\cdots+9 \times 3+10 \times 2 \\ -) f(9)=2 \times 9+3 \times 8+4 \times 7+\cdots+9 \times 2 \\ \hline f(10)-f(9)=2 \times 1+3 \times 1+4 \times 1+\cdots+9 \times 1+20 \end{array} \\ &\therefore f(10)-f(9)=2+3+4+\cdots+9+20 \\ &= 64 \end{aligned}$$

★ idea

02 답 183

1단계 $B\left(x+\frac{1}{3}\right)=A(x)$ 임을 알기

$$B(x)=9x^2-3x+1=(3x)^2-3x+1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} B\left(x+\frac{1}{3}\right) &= \left\{3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}^2 - 3\left(x+\frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= (3x+1)^2 - (3x+1) + 1 \\ &= (9x^2+6x+1) - 3x - 1 + 1 \\ &= 9x^2+3x+1 \\ &= A(x) \end{aligned}$$

2단계 식의 값 구하기

$$\text{따라서 } B\left(\frac{1}{3}\right)=A(0), B\left(\frac{2}{3}\right)=A\left(\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{3}{3}\right)=A\left(\frac{2}{3}\right), \dots,$$

$$B\left(\frac{13}{3}\right)=A\left(\frac{12}{3}\right) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\frac{A\left(\frac{1}{3}\right) \times A\left(\frac{2}{3}\right) \times A\left(\frac{3}{3}\right) \times \cdots \times A\left(\frac{13}{3}\right)}{B\left(\frac{1}{3}\right) \times B\left(\frac{2}{3}\right) \times B\left(\frac{3}{3}\right) \times \cdots \times B\left(\frac{13}{3}\right)} \\ &= \frac{A\left(\frac{1}{3}\right) \times A\left(\frac{2}{3}\right) \times A\left(\frac{3}{3}\right) \times \cdots \times A\left(\frac{13}{3}\right)}{A(0) \times A\left(\frac{1}{3}\right) \times A\left(\frac{2}{3}\right) \times \cdots \times A\left(\frac{12}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A\left(\frac{13}{3}\right)}{A(0)} \\ &= \frac{9 \times \left(\frac{13}{3}\right)^2 + 3 \times \frac{13}{3} + 1}{1} \\ &= 183 \end{aligned}$$

03 답 $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

1단계 $x+\frac{1}{x}, x-\frac{1}{x}$ 의 값 구하기

$x>1$ 이므로 $x+\frac{1}{x}>0, x-\frac{1}{x}>0$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=6-2=4 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=2$$

2단계 $y+\frac{1}{y}, y-\frac{1}{y}$ 의 값 구하기

$y>1$ 이므로 $y+\frac{1}{y}>0, y-\frac{1}{y}>0$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=y^2+\frac{1}{y^2}+2=10+2=12 \quad \therefore y+\frac{1}{y}=2\sqrt{3}$$

$$\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=y^2+\frac{1}{y^2}-2=10-2=8 \quad \therefore y-\frac{1}{y}=2\sqrt{2}$$

3단계 $xy+\frac{1}{xy}$ 의 값 구하기

이때 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}$ 에서

$$xy+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=4\sqrt{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=2\times 2\sqrt{2}$ 에서

$$xy-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=4\sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=4\sqrt{6}+4\sqrt{2}$$

$$\therefore xy+\frac{1}{xy}=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

04 답 37, 52, 157

1단계 $a-b, b-c$ 의 순서쌍 구하기

$a-b=x, b-c=y$ 로 놓으면 주어진 조건에서 x, y 는 $xy=12$ 를 만족시키는 두 자연수이고 $x<y$ 이다.

따라서 이를 만족시키는 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 12), (2, 6), (3, 4)$ 이다.

2단계 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 의 값 구하기

(i) $x=1, y=12$ 일 때,

$$a-b=1, b-c=12 \text{이므로 } a-c=13$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{1^2+12^2+(-13)^2\}=157 \end{aligned}$$

(ii) $x=2, y=6$ 일 때,

$$a-b=2, b-c=6 \text{이므로 } a-c=8$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{2^2+6^2+(-8)^2\}=52 \end{aligned}$$

(iii) $x=3, y=4$ 일 때,

$$a-b=3, b-c=4 \text{이므로 } a-c=7$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{3^2+4^2+(-7)^2\}=37 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 식의 값은 37, 52, 157이다.

05 답 2 m^3

1단계 $a^2+b^2+c^2$ 의 값 구하기

옷장의 겉넓이가 12 m^2 이므로

$$2(ab+bc+ca)=12 \quad \therefore ab+bc+ca=6$$

옷장의 모든 모서리의 길이의 합이 20 m 이므로

$$4(a+b+c)=20 \quad \therefore a+b+c=5$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= 5^2-2\times 6=13 \end{aligned}$$

2단계 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2, a^4+b^4+c^4$ 을 abc 를 이용하여 나타내기

이때 $abc=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c) \\ &= 6^2-2x\times 5=36-10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^4+b^4+c^4 &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ &= 13^2-2(36-10x)=97+20x \end{aligned}$$

3단계 abc 의 값 구하기

$$\frac{a^4+b^4+c^4+7}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=9 \text{에서}$$

$$\frac{97+20x+7}{36-10x}=9, 104+20x=324-90x$$

$$110x=220 \quad \therefore x=2$$

$$\therefore abc=2$$

4단계 옷장의 부피 구하기

따라서 옷장의 부피는 $abc=2(\text{m}^3)$ 이다.

06 답 30

1단계 삼각형 ABC의 외심과 무게중심을 이용하여 변의 길이 구하기

그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 O라 하면

외심 O는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=\overline{MB}, \overline{AN}=\overline{NC}$ 이므로

$$\overline{BC}=2\overline{MN}=2x$$

선분 BC의 중점을 D라 하면

$$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{OP}=\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

선분 MN의 중점을 H라 하면 $\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$\therefore \overline{OH}=\overline{OA}-\overline{AH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$$

2단계 직각삼각형 OPH에서 x 에 대한 방정식 세우기

직각삼각형 OPH에서 $\overline{PH}^2+\overline{OH}^2=\overline{OP}^2$ 이므로

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

$$\frac{x^2}{4}+x+1+\frac{1}{12}x^2=\frac{4}{3}x^2$$

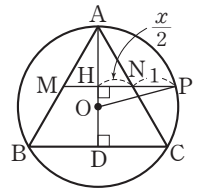
$$x^2-x-1=0$$

3단계 $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ 의 값 구하기

양변을 x 로 나누면

$$x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore 10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) &= 10\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\} \\ &= 10(1+2)=30 \end{aligned}$$



다른 풀이

삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{AN}=\overline{NC}$ 이므로

$$\overline{BC}=2\overline{MN}=2x$$

이때 $\overline{AC}=\overline{BC}=2x$ 이므로

$$\overline{AN}=\overline{NC}=x$$

반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q, 원의 중심 O에서 현 QP에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{QH}=\overline{HP}$ 이므로

$$\overline{QM}=\overline{QH}-\overline{MH}=\overline{HP}-\overline{HN}=\overline{NP}=1$$

$$\therefore \overline{QN}=1+x$$

삼각형 AQN과 삼각형 PCN에서

$\angle AQN=\angle PCN$, $\angle ANQ=\angle PNC$ 이므로 $\triangle AQN \sim \triangle PCN$ (AA 닮음)
 $\angle AQP=\angle ACP$ 이므로 $\angle AQN=\angle PCN$

따라서 $\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$ 이므로

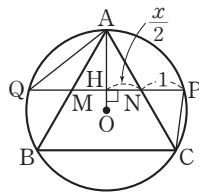
$$(1+x):x=x:1$$

$$1+x=x^2, x^2-x-1=0$$

양변을 x 로 나누면

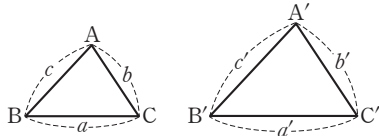
$$x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=1$$

$$\therefore 10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=10\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}=10(1+2)=30$$



개념 NOTE

• 다음의 각 경우에 두 삼각형 ABC, A'B'C'은 서로 닮음이다.



(1) 대응하는 세 변의 길이의 비가 같을 때 (SSS 닮음)

$$\Rightarrow a:d=b:b:c:c'$$

(2) 대응하는 두 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 닮음)

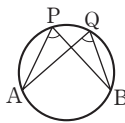
$$\Rightarrow a:d=c:c', \angle B=\angle B'$$

(3) 대응하는 두 각의 크기가 각각 같을 때 (AA 닮음)

$$\Rightarrow \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'$$

• 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\angle APB=\angle AQB$$



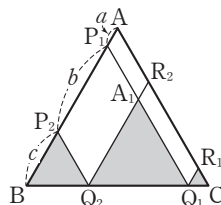
07 답 14

1단계 선분 P_1P_2 의 길이에 대한 식 세우기

$\overline{AP_1}=a$, $\overline{P_1P_2}=b$, $\overline{P_2B}=c$ 라 하면

$$a+b+c=12$$

$$\therefore b=12-(a+c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



2단계 삼각형 ABC와 색칠한 세 삼각형이 닮음을 이용하여 색칠한 부분의 넓이에 대한 식 세우기

두 선분 P_1Q_1 , Q_2R_2 의 교점을 A_1 이라 하면

$\triangle ABC \sim \triangle P_2BQ_2 \sim \triangle A_1Q_2Q_1 \sim \triangle R_1Q_1C$ 이므로 닮음비는

$$12:c:b:a$$

따라서 넓이의 비는 $12^2:c^2:b^2:a^2$

네 삼각형 ABC, P_2BQ_2 , $A_1Q_2Q_1$, R_1Q_1C 의 넓이를 각각 12^2k , c^2k , b^2k , a^2k ($k>0$)라 하면 색칠한 부분의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

므로

$$\frac{1}{2} \times 12^2k = c^2k + b^2k + a^2k \quad \therefore a^2 + b^2 + c^2 = 72$$

3단계 $2P_1P_2$ 의 값 구하기

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{이므로}$$

$$12^2 = 72 + 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = 36$$

$\overline{AP_1} \times \overline{P_2B} = 1$ 에서 $ac=1$ 이므로

$$ab+bc=35 \quad \therefore b(a+c)=35 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $\{12-(a+c)\}(a+c)=35$

$$a+c=t \text{로 놓으면 } (12-t)t=35$$

$$t^2-12t+35=0, (t-5)(t-7)=0 \quad \therefore t=5 (\because a+c \leq 6)$$

즉, $a+c=5$ 이므로 $b=12-(a+c)=12-5=7$

$$\therefore 2P_1P_2=2b=2 \times 7=14$$

08 답 -2

1단계 $g(x)$ 의 차수 알기

(㉞)에서 $4x^3+2x^2+2x-1$ 을 $f(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $g(x)$ 이므로

$$4x^3+2x^2+2x-1=f(x)Q_1(x)+g(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f(x)$ 가 이차식이므로 나머지 $g(x)$ 는 1차 이하의 다항식이다.

2단계 $-2x^2+x+1+f(x)$ 가 상수임을 알기

(㉞)에서 $4x^3+2x^2+2x-1$ 을 $g(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x^2+x+1+f(x)$ 이므로

$$4x^3+2x^2+2x-1=g(x)Q_2(x)-2x^2+x+1+f(x)$$

이때 $g(x)$ 가 1차 이하의 다항식이므로 나머지 $-2x^2+x+1+f(x)$ 는 상수이다.

3단계 $f(x)$, $g(x)$ 구하기

따라서 $-2x^2+x+1+f(x)=a$ (a 는 상수)라 하고, $a-1=k$ 로 놓으면

$$f(x)=2x^2-x+k$$

$4x^3+2x^2+2x-1$ 을 $f(x)=2x^2-x+k$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x+2 \\ 2x^2-x+k \overline{) 4x^3+2x^2+2x-1} \\ \underline{4x^3-2x^2+2kx} \\ 4x^2+(2-2k)x-1-2k \\ \underline{4x^2-(2+2k)x-1-2k} \\ (4-2k)x-1-2k \end{array}$$

이때 나머지가 $(4-2k)x-1-2k$ 이므로 ①에서

$$g(x)=(4-2k)x-1-2k$$

4단계 $f(x)+g(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지 구하기

$$\therefore f(x)+g(x)=2x^2-x+k+(4-2k)x-1-2k=2x^2+(3-2k)x-1-k$$

조립제법을 이용하여 $2x^2+(3-2k)x-1-k$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누면

$$-\frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3-2k & -1-k \\ & -1 & -1+k \\ 2 & 2-2k & -2 \end{array} \right|$$

따라서 구하는 나머지는 -2 이다.

step ① 핵심 문제

| 28~29쪽

01 ③	02 $\frac{19}{16}$	03 -9	04 $-x^2+x+2$	05 $\frac{5}{2}$
06 ②	07 $4x$	08 ①	09 9	10 ④
11 ④				
12 171				

01 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$4^{50} = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + \cdots + 2^{99}a_{99} + 2^{100}a_{100} \quad \cdots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$0 = a_0 - 2a_1 + 2^2a_2 - 2^3a_3 + \cdots - 2^{99}a_{99} + 2^{100}a_{100} \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$4^{50} = 2(2a_1 + 2^3a_3 + 2^5a_5 + \cdots + 2^{99}a_{99})$$

$$= 4(a_1 + 4a_3 + 4^2a_5 + \cdots + 4^{49}a_{99})$$

$$\therefore a_1 + 4a_3 + 4^2a_5 + \cdots + 4^{49}a_{99} = 4^{49} = 2^{98}$$

02 답 $\frac{19}{16}$ $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(4x^2 + x) = a(4x^2 + x) + b = 4ax^2 + ax + b,$$

$$\{f(2x-1)\}^2 + k = \{a(2x-1) + b\}^2 + k$$

$$= \{2ax + (b-a)\}^2 + k$$

$$= 4a^2x^2 + 4a(b-a)x + (b-a)^2 + k$$

$$f(4x^2 + x) = \{f(2x-1)\}^2 + k \text{에서}$$

$$4ax^2 + ax + b = 4a^2x^2 + 4a(b-a)x + (b-a)^2 + k$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$4a = 4a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a = 4a(b-a) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$b = (b-a)^2 + k \quad \cdots \textcircled{3}$$

 $\textcircled{1}$ 에서 $a \neq 0$ 이므로 $a=1$ 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$1 = 4(b-1), 4b=5 \quad \therefore b = \frac{5}{4}$$

$$a=1, b=\frac{5}{4} \text{를 } \textcircled{3} \text{에 대입하면}$$

$$k = b - (b-a)^2 = \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 = \frac{19}{16}$$

03 답 -9

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=3$ 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $a+3b=-21$

$$3+3b=-21 (\because a=3) \quad \therefore b=-8$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $a+b-2c-2d=3$

$$3-8-2c-2d=3 (\because a=3, b=-8) \quad \therefore c+d=-4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

한편 최고차항의 계수를 비교하면 $d=2$ 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $c=-6$

$$\therefore a+b+c+d=3+(-8)+(-6)+2=-9$$

04 답 $-x^2+x+2$ $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \text{배점 30\%}$$

 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지 $x+3$ 은 ax^2+bx+c 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2 + bx + c = a(x^2+1) + x + 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + a(x^2+1) + x + 3 \quad \cdots \text{배점 30\%}$$

한편 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 $f(1)=2$ 에서

$$2a+4=2 \quad \therefore a=-1 \quad \cdots \text{배점 30\%}$$

따라서 구하는 나머지는

$$-(x^2+1) + x + 3 = -x^2 + x + 2 \quad \cdots \text{배점 10\%}$$

05 답 $\frac{5}{2}$ $f(x)$ 를 x^2-3x 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $(a-2)x+a$ 이므로

$$f(x) = (x^2-3x)Q_1(x) + (a-2)x + a$$

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(3) = 3(a-2) + a = 4a-6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

 $f(x+4)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $2a-1$ 이므로

$$f(x+4) = (x+1)Q_2(x) + 2a-1$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(3) = 2a-1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 4a-6=2a-1$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

다른 풀이

 $f(x)$ 를 x^2-3x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $(a-2)x+a$ 이므로

$$f(x) = (x^2-3x)Q(x) + (a-2)x + a$$

$$= x(x-3)Q(x) + (a-2)x + a$$

$$\therefore f(x+4)$$

$$= (x+4)(x+1)Q(x+4) + (a-2)(x+4) + a$$

$$= (x+4)(x+1)Q(x+4) + (a-2)(x+1) + 3(a-2) + a$$

$$= (x+1)\{(x+4)Q(x+4) + a-2\} + 4a-6$$

이때 $f(x+4)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 $2a-1$ 이므로

$$4a-6=2a-1$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

06 답 ②

 $x^{10}-1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{10}-1 = (x-1)^2Q(x) + ax + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = a + b \quad \therefore b = -a$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^{10}-1 = (x-1)^2Q(x) + a(x-1)$$

$$= (x-1)\{(x-1)Q(x) + a\} \quad \cdots \textcircled{2}$$

조립제법을 이용하여 $x^{10}-1$ 을 $x-1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{a}$$

$\textcircled{a}$, $\textcircled{b}$ 에서

$$(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1)$$

양변을 $x-1$ 로 나누면

$$(x-1)Q(x)+a=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$$

$$\text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } a=10 \quad \therefore b=-10$$

$$\text{따라서 } R(x)=10x-10 \text{이므로}$$

$$R(3)=30-10=20$$

07 답 4x

$f(x)$ 가 x^2+x , 즉 $x(x+1)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1)=0, f(0)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -1+b=0 \quad \therefore b=1$$

$$f(0)=0 \text{에서 } 2+a+b=0$$

$$a+b=-2 \quad \therefore a=-3 (\because b=1)$$

$$\therefore f(x)=x^3+2(x+1)^2-3(x+1)+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{a}$$

$f(x)$ 를 x^2+2x-3 , 즉 $(x+3)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $cx+d$ (c, d 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+cx+d$$

양변에 $x=-3, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(-3)=-3c+d, f(1)=c+d$$

$$\text{이때 } \textcircled{a} \text{에서 } f(-3)=-27+8+6+1=-12, f(1)=1+8-6+1=4 \text{이므로}$$

$$-3c+d=-12, c+d=4$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } c=4, d=0$$

따라서 구하는 나머지는 $4x$ 이다.

08 답 ①

$$a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-2abc$$

$$=(b-c)a^2+(b^2-2bc+c^2)a-bc(b-c)$$

$$=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)$$

$$=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$$

$$=(b-c)(a+b)(a-c)$$

따라서 $a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-2abc$ 의 인수인 것은 ①이다.

09 답 9

$$x^2+2y^2-3xy+ax-6y-8$$

$$=x^2+(a-3y)x+2(y^2-3y-4)$$

$$=x^2+(a-3y)x+2(y-4)(y+1)$$

$$(i) 2(y-4)(y+1)=\{-2(y-4)\} \times \{-(y+1)\} \text{일 때,}$$

$$-2(y-4)+\{-(y+1)\}=a-3y \text{에서}$$

$$7-3y=a-3y \quad \therefore a=7$$

$$(ii) 2(y-4)(y+1)=\{-(y-4)\} \times \{-2(y+1)\} \text{일 때,}$$

$$-(y-4)+\{-2(y+1)\}=a-3y \text{에서}$$

$$2-3y=a-3y \quad \therefore a=2$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$7+2=9$$

10 답 ④

$\textcircled{a}$ 에서 $\{f(x+1)\}^2=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$ 이므로 이 식에 x 대신 $x-1$ 을 대입하면

$$\{f(x)\}^2=x(x-2)(x^2-2x+6)+9=(x^2-2x)(x^2-2x+6)+9$$

$x^2-2x=X$ 로 놓으면

$$(x^2-2x)(x^2-2x+6)+9=X(X+6)+9$$

$$=X^2+6X+9$$

$$=(X+3)^2$$

$$=(x^2-2x+3)^2$$

$\textcircled{b}$ 에서 $f(x)<0$ 이므로

$$f(x)=-x^2+2x-3$$

$$\therefore f(x+a)=-x^2+2(x+a)-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{a}$$

한편 $f(x+a)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 -6 이므로

$$f(x+a)=(x-2)Q(x)-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{b}$$

$\textcircled{a}$, $\textcircled{b}$ 에서

$$-x^2+2(x+a)-3=(x-2)Q(x)-6$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$-(2+a)^2+2(2+a)-3=-6$$

$$a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$-3 \times 1 = -3$$

11 답 ④

$$n^4-35n^2+25=(n^4-10n^2+25)-25n^2$$

$$=(n^2-5)^2-(5n)^2$$

$$=(n^2-5n-5)(n^2+5n-5)$$

이때 n 이 자연수이고 $n^2-5n-5 < n^2+5n-5$ 이므로 n^4-35n^2+25 의 값이 소수가 되려면 $n^2-5n-5=1, n^2+5n-5$ 는 소수이어야 한다.

즉, $n^2-5n-6=0$ 이므로

$$(n+1)(n-6)=0$$

$$\therefore n=6 (\because n \text{은 자연수})$$

$n=6$ 일 때,

$$n^4-35n^2+25=(n^2-5n-5)(n^2+5n-5)$$

$$=1 \times (6^2+5 \times 6-5)$$

$$=61$$

따라서 $a=6, p=61$ 이므로

$$a+p=67$$

12 답 171

$60=x$ 로 놓으면

$$60 \times 57 \times 54 - 7 \times 60 + 21 = x(x-3)(x-6) - 7x + 21$$

$$=x(x-3)(x-6) - 7(x-3)$$

$$=(x-3)\{x(x-6)-7\}$$

$$=(x-3)(x^2-6x-7)$$

$$=(x-3)(x-7)(x+1)$$

$$=57 \times 53 \times 61$$

$$\therefore a+b+c=57+53+61=171$$

01 ②	02 $a=-2, b=-3$	03 40	04 22
05 14	06 34	07 74	08 12
09 -8			
10 x^2+3x-2	11 5	12 ③	13 24
14 ②			
15 54	16 $11x+4$	17 ①	18 ⑤
19 ④			
20 6	21 ③	22 -6	23 20
24 17	25 ⑤		
26 34	27 5	28 $ab+bc+ca$	

01 답 ②

$(x^2-x)(x^2-x+3)+k(x^2-x)+8=(x^2-x+a)(x^2-x+b)$ 에서 $x^2-x=X$ 로 놓으면

$$X(X+3)+kX+8=(X+a)(X+b)$$

$$X^2+(k+3)X+8=X^2+(a+b)X+ab$$

$$\therefore k+3=a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$ab=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $a, b (a < b)$ 가 자연수이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$a=1, b=8 \text{ 또는 } a=2, b=4$$

$\textcircled{1}$ 에서 $k=a+b-3$ 이므로

$$k=6 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$6+3=9$$

02 답 $a=-2, b=-3$

$$2x^2+y=1 \text{에서 } y=1-2x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{ax+by+1}{2x+3y-1}=k(k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$ax+by+1=k(2x+3y-1)$$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$ax+b(1-2x^2)+1=k\{2x+3(1-2x^2)-1\}$$

$$-2bx^2+ax+b+1=-6kx^2+2kx+2k$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2b=-6k, a=2k, b+1=2k$$

$$\therefore a=2k, b=3k, b=2k-1$$

$$\text{이때 } 3k=2k-1 \text{에서 } k=-1$$

$$\therefore a=-2, b=-3$$

다른 풀이

$$2x^2+y=1 \text{에서 } y=1-2x^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{ax+by+1}{2x+3y-1} &= \frac{ax+b(1-2x^2)+1}{2x+3(1-2x^2)-1} \\ &= \frac{-2bx^2+ax+b+1}{-6x^2+2x+2} \end{aligned}$$

실수 x 의 값에 관계없이 $\frac{ax+by+1}{2x+3y-1}$ 의 값이 항상 일정하므로

$$\frac{-2b}{-6} = \frac{a}{2} = \frac{b+1}{2}, \frac{b}{3} = \frac{a}{2} = \frac{b+1}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{3} = \frac{b+1}{2} \text{에서}$$

$$2b=3b+3 \quad \therefore b=-3$$

$$\frac{b}{3} = \frac{a}{2} \text{에서 } a=-2$$

03 답 40

다항식 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 의 모든 계수와 상수항의 합은

$$f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$$

$$f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}-7$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-9$$

$$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-9$$

이때 $x-2+\frac{1}{x}=1$ 에서 $x+\frac{1}{x}=3$ 이므로

$$f(1)=(3^2-2)^2-9$$

$$=40$$

따라서 다항식 $f(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합은 40이다.

다른 풀이

$$f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}-7$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-9$$

$$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-9$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5$$

$x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면

$$f(t-2)=t^4-4t^2-5$$

이때 $t-2=X$ 로 놓으면 $t=X+2$ 이므로

$$f(X)=(X+2)^4-4(X+2)^2-5$$

$$=(X^2+4X+4)^2-4(X^2+4X+4)-5$$

$$=X^4+8X^3+24X^2+32X+16-4X^2-16X-16-5$$

$$=X^4+8X^3+20X^2+16X-5$$

따라서 다항식 $f(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합은

$$1+8+20+16+(-5)=40$$

비법 NOTE

다항식 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 에 대하여 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

따라서 다항식 $f(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합은 $f(1)$ 의 값과 같다.

04 답 22

$$x^{2n}+8=a_{2n}(x-2)^{2n}+a_{2n-1}(x-2)^{2n-1}+\cdots+a_1(x-2)+a_0$$

$$\cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$2^{4n}+8=a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{2n-1}a_{2n-1}+2^{2n}a_{2n}$$

$$\cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$8=a_0-2a_1+2^2a_2-\cdots-2^{2n-1}a_{2n-1}+2^{2n}a_{2n}$$

$$\cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}-\textcircled{3}$ 을 하면

$$2^{4n}=2(2a_1+2^3a_3+2^5a_5+\cdots+2^{2n-1}a_{2n-1})$$

양변을 2^2 으로 나누면

$$2^{4n-2}=a_1+2^2a_3+2^4a_5+\cdots+2^{2n-2}a_{2n-1}$$

이때 $a_1+2^2a_3+2^4a_5+\cdots+2^{2n-2}a_{2n-1}=2^{86}$ 이므로

$$2^{4n-2}=2^{86}$$

따라서 $4n-2=86$ 이므로

$$n=22$$

05 답 14

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $a_0=-6$ 이므로

$$(x^2+2x)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$$

$$\therefore x^4(x+2)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$$

이 식의 좌변에서 삼차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$$a_1=0, a_2=0, a_3=0$$

$$\text{즉, } x^4(x+2)^4=a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8 \text{ 이므로}$$

$$(x+2)^4=a_4+a_5x+a_6x^2+a_7x^3+a_8x^4$$

$$\text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } 16=a_4$$

$$\text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$81=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$$

$$\therefore a_5+a_6+a_7+a_8=65$$

$$\therefore \frac{1}{2}a_0+\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)+\frac{1}{4}a_4+\frac{1}{5}(a_5+a_6+a_7+a_8)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-6)+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{5}\times 65$$

$$=14$$

06 답 34

조립제법을 이용하여 $16x^4-8x^3+8x^2+kx-4$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{2} & 16 & -8 & 8 & k & -4 & \\ & & 8 & 0 & 4 & \frac{1}{2}k+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{2} & 16 & 0 & 8 & k+4 & \frac{1}{2}k-2 & \\ & & 8 & 4 & 6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 16 & 8 & 12 & k+10 \\ & & 8 & 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} \frac{1}{2} & 16 & 16 & 20 \\ & & 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 24 \end{array}$$

$$\therefore 16x^4-8x^3+8x^2+kx-4$$

$$=16\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+24\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+20\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(k+10)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}k-2$$

$$=(2x-1)^4+3(2x-1)^3+5(2x-1)^2+\frac{k+10}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}k-2$$

$$\text{따라서 } a=1, b=3, c=5, 14=\frac{k+10}{2}, d=\frac{1}{2}k-2 \text{ 이므로}$$

$$k=18, d=7$$

$$\therefore k+a+b+c+d=18+1+3+5+7=34$$

비법 NOTE

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미정계수를 쉽게 구할 수 있다.

$$\text{예) } x^3+3x-14=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 3 & -14 \\ & & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & -10 \quad -d \\ & & 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 & 6 & -c \\ & & 1 & & \\ & 1 & 3 & -b \\ & & a & & \end{array}$$

$$\therefore a=1, b=3, c=6, d=-10$$

07 답 74

(㉞)에서 나머지 $g(x)-2x^2$ 의 차수는 $g(x)$ 의 차수보다 작아야 하므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다.

$$g(x)=2x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x)=g(x)\{g(x)-2x^2\}+g(x)-2x^2$$

$$=\{g(x)+1\}\{g(x)-2x^2\}$$

$$=(2x^2+ax+b+1)(ax+b)$$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x+b+1\right)\left(\frac{1}{2}x+b\right)$$

$$\text{(㉝)에서 } f(1)=-\frac{9}{4} \text{이므로}$$

$$f(1)=\left(2+\frac{1}{2}+b+1\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)$$

$$=\left(b+\frac{7}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)$$

$$=b^2+4b+\frac{7}{4}$$

$$\text{즉, } b^2+4b+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4} \text{이므로}$$

$$b^2+4b+4=0$$

$$(b+2)^2=0$$

$$\therefore b=-2$$

$$\text{따라서 } f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right) \text{이므로}$$

$$f(6)=(72+3-1)(3-2)=74$$

08 답 12

$f(x)$ 를 $x-2$, $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 이므로 나머지를 각각 R_1 , R_2 라 하면

$$f(x)=(x-2)Q_1(x)+R_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉞}$$

$$f(x)=(x-3)Q_2(x)+R_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

㉟의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(3)=R_2$$

이때 $Q_2(2)=f(3)$ 이므로

$$R_2=Q_2(2)$$

즉, $f(x)=(x-3)Q_2(x)+Q_2(2)$ 이고 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=-Q_2(2)+Q_2(2) \quad \therefore f(2)=0$$

따라서 ㉞의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=R_1=0$$

$$\therefore f(x)=(x-2)Q_1(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $Q_1(x)=x+a$ (a 는 상수)라 하면

$$Q_1(2)=2+a, Q_1(3)=3+a$$

$$\textcircled{㉟} \text{의 양변에 } x=3 \text{을 대입하면 } f(3)=Q_1(3)$$

$$\text{이때 } Q_2(2)=f(3)=Q_1(3)=3+a \text{이므로}$$

$$Q_1(2)+Q_2(2)=3 \text{에서}$$

$$(2+a)+(3+a)=3$$

$$2a+5=3$$

$$\therefore a=-1$$

$$\text{따라서 } f(x)=(x-2)(x-1) \text{이므로}$$

$$f(5)=3 \times 4=12$$

09 답 -8

$(x+2)f(x)$ 를 $x(x-2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 이므로 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$(x+2)f(x)=x(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \dots\dots ㉠$$

.....배점 20%

(나)에서 $f(0)=4, f(2)=4+6+4=14, f(3)=9+9+4=22$ 이므로

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2f(0)=c \quad \therefore c=8$$

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$4f(2)=4a+2b+c$$

$$4a+2b+8=56$$

$$\therefore 2a+b=24 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$5f(3)=9a+3b+c$$

$$9a+3b+8=110$$

$$\therefore 3a+b=34 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=10, b=4$

$$\therefore (x+2)f(x)=x(x-2)(x-3)Q(x)+10x^2+4x+8 \quad \dots\dots ㉣$$

.....배점 40%

이때 (가)에서 $f(4)=20$ 이므로 ㉣의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$6f(4)=8Q(4)+184$$

$$120=8Q(4)+184$$

$$8Q(4)=-64$$

$$\therefore Q(4)=-8 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

10 답 x^2+3x-2

$f(x)$ 를 $(x+1)^2(x+3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이때 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $3x+1$ 이므로

$$f(x)=(x+1)^2(x+3)Q(x)+a(x+1)^2+3x+1 \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 -4 이므로 $f(-3)=-4$ 에서

$$4a-8=-4 \quad \therefore a=1$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x+1)^2(x+3)Q(x)+(x+1)^2+3x+1$$

$$=(x+1)^2(x+3)Q(x)+x^2+5x+2$$

$$\therefore f(x-1)=x^2(x+2)Q(x-1)+(x-1)^2+5(x-1)+2$$

$$=x^2(x+2)Q(x-1)+x^2+3x-2$$

따라서 구하는 나머지는 x^2+3x-2 이다.

11 답 5

$P(x)$ 가 삼차다항식이므로 $P(x)-x^2$ 은 삼차다항식이고, $P(x)-x^2$ 은 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$P(x)-x^2=(x+1)^2(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$P(x)=(x+1)^2(ax+b)+x^2 \quad \dots\dots ㉠$$

.....배점 20%

$4x-P(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x+2$ 이므로

$$4x-P(x)=(x-1)^2Q(x)+x+2$$

$$\therefore P(x)=-(x-1)^2Q(x)+3x-2 \quad \dots\dots ㉡$$

.....배점 20%

㉠, ㉡에서

$$(x+1)^2(ax+b)+x^2=-(x-1)^2Q(x)+3x-2 \quad \dots\dots ㉢$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$4(a+b)+1=1$$

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots ㉣$$

.....배점 20%

이를 ㉢에 대입하면

$$(x+1)^2(ax-a)+x^2=-(x-1)^2Q(x)+3x-2$$

$$a(x+1)^2(x-1)=-(x-1)^2Q(x)-(x^2-3x+2)$$

$$a(x+1)^2(x-1)=-(x-1)^2Q(x)-(x-1)(x-2)$$

양변을 $x-1$ 로 나누면

$$a(x+1)^2=-(x-1)Q(x)-(x-2)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4} \quad \therefore b=-\frac{1}{4} (\because ㉣) \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 $P(x)=(x+1)^2\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)+x^2=\frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)+x^2$ 으로 구하는 나머지는

$$P(-3)=\frac{1}{4} \times 4 \times (-4)+9=5 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

idea
12 답 ③

$7^2=x$ 로 놓으면

$$7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}$$

$$=7 \times (7^2)^{1010} + (7^2)^{1011} + 7 \times (7^2)^{1011} + (7^2)^{1012}$$

$$=7x^{1010} + x^{1011} + 7x^{1011} + x^{1012}$$

$$=7x^{1010} + 8x^{1011} + x^{1012}$$

$$\text{이고, } 96=2(7^2-1)=2(x-1)$$

$f(x)=7x^{1010}+8x^{1011}+x^{1012}$ 이라 하면 $7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}$ 을 96으로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)$ 를 $2(x-1)$ 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$f(1)=7+8+1=16$$

따라서 구하는 나머지는 16이다.

다른 풀이

$7=x$ 로 놓으면

$$7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}=x^{2021}+x^{2022}+x^{2023}+x^{2024}$$

$$\text{이고, } 96=2(7^2-1)=2(x^2-1)$$

$$f(x)=x^{2021}+x^{2022}+x^{2023}+x^{2024} \quad \dots\dots ㉠$$

이라 하고 $f(x)$ 를 $2(x^2-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=2(x^2-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(-1)=-a+b, f(1)=a+b$$

이때 ㉠에서 $f(-1)=-1+1-1+1=0,$

$$f(1)=1+1+1+1=4$$
이므로

$$-a+b=0, a+b=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=2$

$$\therefore R(x)=2x+2$$

이때 $7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}$ 을 96으로 나누었을 때의 나머지는

$$R(7)$$
과 같으므로

$$R(7)=14+2=16$$

따라서 구하는 나머지는 16이다.

13 답 24

(가)에서 $2P(x)+Q(x)=0$ 이므로 $Q(x)=-2P(x)$

즉, 두 이차다항식 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 의 x 에 대한 인수는 같다.

(나)에서 $P(x)Q(x)$ 는 x^2-3x+2 , 즉 $(x-1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로 $P(x), Q(x)$ 는 각각 $(x-1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

이때 $P(x)=a(x-1)(x-2)$, $Q(x)=-2a(x-1)(x-2)$ ($a \neq 0$)라 하면 $P(0)=-4$ 에서 $2a=-4 \quad \therefore a=-2$

따라서 $Q(x)=4(x-1)(x-2)$ 이므로

$$Q(4)=4 \times 3 \times 2=24$$

14 답 ②

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수), $Q(x)=x+c$ (c 는 상수)라 하면

(가)에서 $P(x+1)-Q(x+1)$ 이 $x+1$ 로 나누어떨어지므로

$$P(0)-Q(0)=0, b-c=0 \quad \therefore b=c$$

(나)에서 $P(x)-Q(x)=0$ 이 중근을 가지므로 이차방정식

$$x^2+ax+b-(x+c)=0, \text{ 즉 } x^2+(a-1)x=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D=(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$$

한편 $P(x)+Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 12이므로

$$P(2)+Q(2)=12 \text{에서 } 4+2a+b+(2+b)=12$$

$$2b=4 (\because a=1) \quad \therefore b=2$$

따라서 $P(x)=x^2+x+2$ 이므로

$$P(2)=4+2+2=8$$

15 답 54

$$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=(x^2-x)P(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0, x=1$ 을 각각 대입하면

$$\{Q(1)\}^2+\{Q(0)\}^2=0, \{Q(2)\}^2+\{Q(1)\}^2=0$$

$$\therefore Q(0)=Q(1)=Q(2)=0$$

다항식 $Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이고, $x, x-1, x-2$ 를 인수로 가지므로

$$Q(x)=x(x-1)(x-2)$$

이를 ①에 대입하면

$$\{(x+1)x(x-1)\}^2+\{x(x-1)(x-2)\}^2=x(x-1)P(x)$$

$$\therefore P(x)=x(x-1)\{(x+1)^2+(x-2)^2\}$$

$$=x(x-1)(2x^2-2x+5)$$

$$=x(x-1)\{2(x-2)(x+1)+9\}$$

$$=2x(x-1)(x-2)(x+1)+9x(x-1)$$

$$=2(x+1)Q(x)+9x(x-1)$$

따라서 $R(x)=9x(x-1)$ 이므로

$$R(3)=9 \times 3 \times 2=54$$

16 답 $11x+4$

$f(x)-16$ 을 $x-1, x-2, x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 각각 $-1, -4, -9$ 이므로

$$f(1)-16=-1^2, f(2)-16=-2^2, f(3)-16=-3^2$$

$$\therefore f(1)-16+1^2=0, f(2)-16+2^2=0, f(3)-16+3^2=0$$

이때 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차다항식이므로

$g(x)=f(x)-16+x^2$ 이라 하면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차다항식이고, $g(1)=g(2)=g(3)=0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore g(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$$

즉, $f(x)-16+x^2=2(x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

$$f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+16-x^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $x(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=x(x-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=0, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(0)=b, f(1)=a+b$$

이때 ①에서 $f(0)=-12+16=4, f(1)=16-1=15$ 이므로

$$b=4, a+b=15 \quad \therefore a=11$$

따라서 구하는 나머지는 $11x+4$ 이다.

17 답 ①

$$f(x^2)+x^4f(x)=2x^4(2x^4-x^2-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 $f(x)$ 를 n 차식이라 하면 $f(x^2)$ 의 최고차항은 x^{2n} , $x^4f(x)$ 의 최고차항은 x^{n+4} 이다.

즉, ①에서 좌변의 최고차항은 x^{2n} 또는 x^{n+4} 이고 우변의 최고차항은 x^8 이므로

$$2n=8 \text{ 또는 } n+4=8$$

$$\therefore n=4$$

따라서 $f(x)$ 는 사차식이다.

한편 ①의 양변에

$$x=0 \text{을 대입하면 } f(0)=0$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(1)+f(1)=0 \quad \therefore f(1)=0$$

$$x=-1 \text{을 대입하면 } f(1)+f(-1)=0 \quad \therefore f(-1)=0$$

따라서 다항식 $f(x)$ 는 $x, x-1, x+1$ 을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)=x(x^2-1)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 ①에서 $x^2(x^4-1)(ax^2+b)+x^5(x^2-1)(ax+b)=2x^4(2x^4-x^2-1)$

즉, 좌변의 최고차항의 계수는 $2a$ 이고, 우변의 최고차항의 계수는 4이므로

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore x^2(x^4-1)(2x^2+b)+x^5(x^2-1)(2x+b)=2x^4(2x^2+1)(x^2-1)$$

양변을 $x^2(x^2-1)$ 로 나누면

$$(x^2+1)(2x^2+b)+x^3(2x+b)=2x^2(2x^2+1)$$

상수항을 비교하면 $b=0$

$$\therefore f(x)=2x^2(x^2-1)$$

$$\text{따라서 구하는 나머지는 } f(2)=2 \times 4 \times 3=24$$

18 답 ⑤

(가)에서 $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$ 이므로

$$\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$$

$$=12x^4+24x^3+12x^2+16$$

(나)에서 $P(x)+Q(x)=4$ 이므로

$$64-3P(x)Q(x) \times 4=12x^4+24x^3+12x^2+16$$

$$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$$

$$\therefore P(x)Q(x)=-x^4-2x^3-x^2+4$$

$$=-(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$$

$$=-(x^2+x-2)(x^2+x+2)$$

이때 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 (가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 는

$$P(x)=-x^2-x+2, Q(x)=x^2+x+2 \quad \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} P(x)=-x^2-x-2, \\ Q(x)=x^2+x-2 \text{이면} \\ P(x)+Q(x)=-4 \end{matrix}$$

$$\therefore P(2)+Q(3)=(-4-2+2)+(9+3+2)=10$$

19 답 ④

$$P(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (a^2-a)x - a^2 \text{에서}$$

$$P(1) = 1 + a - 1 + a^2 - a - a^2 = 0$$

즉, $P(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^3 + (a-1)x^2 + (a^2-a)x - a^2$ 을 $x-1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a-1 & a^2-a & -a^2 \\ & & 1 & a & a^2 \\ \hline & 1 & a & a^2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-1)(x^2 + ax + a^2)$$

$$Q(x) = x^3 + bx^2 - bx + 2a^2 \text{에서 } Q(1) = 1 + b - b + 2a^2 = 1 + 2a^2 \neq 0 \text{이}$$

므로 $Q(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖지 않는다.

이때 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 이차식인 공통 인수를 가지므로 $Q(x)$ 는

$x^2 + ax + a^2$ 을 인수로 갖고, $Q(x)$ 의 삼차항의 계수가 1이므로

$$Q(x) = (x+k)(x^2 + ax + a^2) \quad (k \text{는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} x^3 + bx^2 - bx + 2a^2 &= (x+k)(x^2 + ax + a^2) \\ &= x^3 + (a+k)x^2 + (a^2+ak)x + a^2k \end{aligned}$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$b = a+k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-b = a^2+ak \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$2a^2 = a^2k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③에서 $a \neq 0$ 이므로 양변을 a^2 으로 나누면 $k=2$

이를 ①, ②에 각각 대입하면

$$b = a+2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$-b = a^2+2a \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④을 ⑤에 대입하면 $-a-2=a^2+2a$

$$a^2+3a+2=0, (a+2)(a+1)=0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = -1$$

$$(i) a = -2 \text{일 때, } Q(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(ii) a = -1 \text{일 때, } Q(x) = (x+2)(x^2 - x + 1)$$

(i), (ii)에서 $Q(x)$ 의 인수는 $x+2, x^2-2x+4, x^2-x+1$ 이다.

따라서 $Q(x)$ 의 인수인 것은 ④이다.

20 답 6

$x^3 + (pq-4)x + n$ 이 $(x-2)(x+p)(x+q)$ 로 인수분해되므로

$$x^3 + (pq-4)x + n = (x-2)(x+p)(x+q)$$

$$= x^3 + (p+q-2)x^2 + (pq-2p-2q)x - 2pq$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$p+q-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}, n=-2pq \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $q=2-p$ 이므로 이를 ②에 대입하면

$$n = -2p(2-p) = 2p(p-2)$$

이때 n 은 100 이하의 자연수이고 p, q 는 정수이므로 $2 < n < 100$

(i) $n > 2$ 일 때,

$$p=2 \text{이면 } n=2p(p-2)=2 \times 2 \times 0=0 < 2$$

$$p=3 \text{이면 } n=2p(p-2)=2 \times 3 \times 1=6 > 2$$

$$\therefore p \geq 3$$

(ii) $n < 100$ 일 때,

$$p=8 \text{이면 } n=2p(p-2)=2 \times 8 \times 6=96 < 100$$

$$p=9 \text{이면 } n=2p(p-2)=2 \times 9 \times 7=126 > 100$$

$$\therefore p \leq 8$$

(i), (ii)에서 $3 \leq p \leq 8$ 이므로 정수 p 는 3, 4, 5, 6, 7, 8이고, 정수 p 의 개수만큼 다항식이 만들어지므로 구하는 모든 다항식의 개수는 6이다.

21 답 ③

$$x^3 - 5yz = y^3 - 5zx \text{에서}$$

$$x^3 - y^3 - 5yz + 5zx = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 5z(x-y) = 0$$

$$\therefore (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 5z) = 0$$

$$\text{이때 } x \neq y \text{이므로 } x^2 + xy + y^2 + 5z = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

같은 방법으로 하면 $y^3 - 5zx = z^3 - 5xy$ 에서

$$(y-z)(y^2 + yz + z^2 + 5x) = 0$$

$$\text{이때 } y \neq z \text{이므로 } y^2 + yz + z^2 + 5x = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$x^2 + xy + 5z - yz - z^2 - 5x = 0$$

$$(x^2 - z^2) + (xy - yz) + (5z - 5x) = 0$$

$$(x-z)(x+z) + y(x-z) - 5(x-z) = 0$$

$$\therefore (x-z)(x+z+y-5) = 0$$

$$\text{이때 } x \neq z \text{이므로 } x+y+z-5=0$$

$$\therefore x+y+z=5$$

22 답 -6

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

$$\therefore a+b+c=0 \text{ 또는 } a=b=c \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(i) $a+b+c=0$ 일 때,

$$a = -b-c \text{이므로 양변을 제곱하면 } a^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$$

같은 방법으로 하면

$$b^2 - c^2 - a^2 = 2ca, c^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{4a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{4b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{4c^2}{c^2 - a^2 - b^2} \\ = \frac{4a^2}{2bc} + \frac{4b^2}{2ca} + \frac{4c^2}{2ab} = \frac{2a^3}{abc} + \frac{2b^3}{abc} + \frac{2c^3}{abc} \\ = \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \times 3abc}{abc} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 6 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(ii) $a=b=c$ 일 때,

$$b=a, c=a \text{를 대입하면}$$

$$\frac{4a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{4b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{4c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$$

$$= \frac{4a^2}{-a^2} + \frac{4a^2}{-a^2} + \frac{4a^2}{-a^2}$$

$$= -4 - 4 - 4 = -12 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 값의 합은

$$6 + (-12) = -6 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

23 답 20

$$n^4 + n^2 - 2 = (n^2 - 1)(n^2 + 2)$$

$$= (n-1)(n+1)(n^2 + 2)$$

$$= (n-1)(n^3 + n^2 + 2n + 2)$$

$$= (n-1)\{(n-2)(n^2 + 3n + 8) + 18\}$$

$$= (n-1)(n-2)(n^2 + 3n + 8) + 18(n-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$ 은 $(n-1)(n-2)$ 의 배수이므로 ㉠이
 $(n-1)(n-2)$ 의 배수가 되려면 $18(n-1)$ 이 $(n-1)(n-2)$ 의 배수
이어야 한다.

따라서 $18(n-1)=k(n-1)(n-2)$ (k 는 자연수)라 하면

$$18=k(n-2)$$

이때 k 가 최소일 때, n 이 최댓값을 갖고 자연수 k 의 최솟값은 1이므로
그때의 n 의 값은

$$18=n-2$$

$$\therefore n=20$$

다른 풀이

조립제법을 이용하여 n^4+n^2-2 를 $(n-1)(n-2)$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ & & 2 & 6 & 16 & \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 18 & \end{array}$$

$$\therefore n^4+n^2-2=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$ 은 $(n-1)(n-2)$ 의 배수이므로 ㉠이
 $(n-1)(n-2)$ 의 배수가 되려면 $18(n-1)$ 이 $(n-1)(n-2)$ 의 배수
이어야 한다.

따라서 $18(n-1)=k(n-1)(n-2)$ (k 는 자연수)라 하면

$$18=k(n-2)$$

이때 k 가 최소일 때, n 이 최댓값을 갖고 자연수 k 의 최솟값은 1이므로
그때의 n 의 값은

$$18=n-2$$

$$\therefore n=20$$

24 답 17

(㉠)에서 $(x+y-z)^3-x^3-y^3+z^3=462$ 이므로 $x+y=A$ 로 놓으면

$$(x+y-z)^3-x^3-y^3+z^3$$

$$=(A-z)^3-x^3-y^3+z^3$$

$$=A^3-3A^2z+3Az^2-z^3-x^3-y^3+z^3$$

$$=(x+y)^3-3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-x^3-y^3$$

$$=x^3+3xy(x+y)+y^3-3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-x^3-y^3$$

$$=3xy(x+y)-3(x+y)^2z+3(x+y)z^2$$

$$=3(x+y)\{z^2-(x+y)z+xy\}$$

$$=3(x+y)(z-x)(z-y)$$

$$=3(x+y)(x-z)(y-z)=462$$

$$\therefore (x+y)(x-z)(y-z)=154$$

(㉡)에서 x, y, z 는 $x>y>z$ 인 한 자리의 자연수이므로

$$18>x+y>x-z>y-z>1$$

이때 $154=2 \times 7 \times 11$ 이므로

$$x+y=11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x-z=7 \quad \therefore x=z+7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$y-z=2 \quad \therefore y=z+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$z+7+z+2=11, 2z=2$$

$$\therefore z=1$$

이를 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$$x=8, y=3$$

$$\therefore x+2y+3z=8+6+3=17$$

25 답 ⑤

$$a^3+b^3+c^3+(a+b)(ab-c^2)-(a^2+b^2)c$$

$$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+b^3+a^2b+ab^2$$

$$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)c+a^2(a+b)+b^2(a+b)$$

$$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$$

$$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)(c-a-b)$$

$$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>c \rightarrow$ 삼각형에서 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

$$\therefore c-a-b<0$$

따라서 $c^2-a^2-b^2=0$, 즉 $c^2=a^2+b^2$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는
삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

26 답 34

$16=x, 32=y, 72=z$ 로 놓으면

$$xyz=16 \times 32 \times 72=2^4 \times 2^5 \times (2^3 \times 3^2)=3^2 \times 2^{12}$$

$$\therefore 16^3+32^3+72^3-3^3 \times 2^{12}$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$$=\frac{1}{2} \times (16+32+72) \times \{(-16)^2+(-40)^2+56^2\}$$

$$=\frac{1}{2} \times (16+32+72) \times (8^2 \times 2^2+8^2 \times 5^2+8^2 \times 7^2)$$

$$=\frac{1}{2} \times 120 \times 8^2 \times (4+25+49)$$

$$=60 \times 8^2 \times 78$$

$$=2^9 \times 3^2 \times 5 \times 13$$

따라서 $p=2, q=3, r=5, s=13, m=9, n=2$ 이므로

$$p+q+r+s+m+n=34$$

27 답 5

(㉠)에서

$$a^2-16b^2+3c^2+6ab+2bc+4ca$$

$$=a^2+(6b+4c)a-16b^2+2bc+3c^2$$

$$=a^2+(6b+4c)a-(8b+3c)(2b-c)$$

$$=\{a+(8b+3c)\}\{a-(2b-c)\}$$

$$=(a+8b+3c)(a-2b+c)=0 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+8b+3c>0$

$$\text{따라서 } a-2b+c=0 \text{이므로 } a+c=2b \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

이때 ㉠에서 $a=b$ 이면 $c=b$, 즉 $a=b=c$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼
각형이다.

$$\therefore a \neq b$$

또 ㉠에서 $a>b$ 이면 $c<b$ 이어야 하므로 $c<b<a$

즉, 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이는 a 이다.

$$(㉡)에서 a=\frac{2}{3}(b+c) \text{이므로 } 3a-2c=2b \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a+c=3a-2c \quad \therefore a=\frac{3}{2}c$$

따라서 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이는 가장 짧은 변의 길이의 $\frac{3}{2}$ 이
므로

$$p=2, q=3 \quad \therefore p+q=5 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

idea

28 답 $ab+bc+ca$

직육면체 A, B의 부피는 각각 abc , $(a+b)(b+c)(c+a)$

이때 $a+b+c=t$ 로 놓으면

$$a+b=t-c, b+c=t-a, c+a=t-b$$

직육면체 C의 부피는

$$abc+(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$=abc+(t-c)(t-a)(t-b)$$

$$=abc+t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc$$

$$=t\{t^2-(a+b+c)t+ab+bc+ca\}$$

$$=t(t^2-t \times t+ab+bc+ca)$$

$$=t(ab+bc+ca)$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

따라서 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이는 $ab+bc+ca$ 이다.

다른 풀이

직육면체 A, B의 부피는 각각 abc , $(a+b)(b+c)(c+a)$ 이므로 직육면체 C의 부피는

$$abc+(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$=abc+(a+b)(bc+ab+c^2+ac)$$

$$=abc+abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc$$

$$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$$

$$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$$

$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(a+b+c)$$

$$=a(b+c)(a+b+c)+bc(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

따라서 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이는 $ab+bc+ca$ 이다.

step 3 최고난도 문제

| 35~37쪽

01 16	02 ④	03 ③	04 ④	05 0	06 ④
07 6	08 18	09 $8\sqrt{5}$	10 6000	11 르, 나	
12 146					

01 답 16

1단계 항등식을 이용하여 a 의 값 구하기

$$\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

$$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$$

$$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$$

이때 $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 이차다항식이므로 $P(x)+x$ 는 이차항의 계수가 -1 인 이차다항식이다.

$P(x)+x=-x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$(-x^2+px+q)^2=x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2$$

$$\text{즉, } x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9 \text{에}$$

서 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2p=0 \quad \therefore p=0$$

$$p^2-2q=5-a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$q^2=-5a^2+9 \quad \dots\dots ㉡$$

$$p=0 \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } -2q=5-a^2$$

$$\therefore a^2=2q+5 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{이를 } ㉡ \text{에 대입하면 } q^2=-5(2q+5)+9$$

$$q^2+10q+16=0, (q+8)(q+2)=0$$

$$\therefore q=-8 \text{ 또는 } q=-2$$

$$\text{이때 } q=-8 \text{이면 } ㉢ \text{에서 } a^2=-11<0 \text{이므로 } q=-2$$

$$\text{이를 } ㉢ \text{에 대입하면 } a^2=1 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$$

2단계 $\{P(a)\}^2$ 의 값 구하기

$$\text{이때 } P(x)+x=-x^2-2, \text{ 즉 } P(x)=-x^2-x-2 \text{이므로}$$

$$\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-1-1-2)^2=16$$

다른 풀이

$P(x)+x$ 가 이차다항식이므로 $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$ 도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

$$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$$

$$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$$

$$=x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$$

$$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$$

$$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{2}\right)^2-\frac{a^4+10a^2-11}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{a^4+10a^2-11}{4}=0 \text{이어야 하므로}$$

$$a^4+10a^2-11=0, (a^2+11)(a^2-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

$$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2 \text{에서}$$

$$|P(x)+x|=|x^2+2|$$

$$\therefore P(x)=x^2-x+2 \text{ 또는 } P(x)=-x^2-x-2$$

이때 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)=-x^2-x-2$$

$$\therefore \{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-1-1-2)^2=16$$

02 답 ④

1단계 $x^n(2x^3+8x^2+px+q)$ 를 $(x+2)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 정하고 식 세우기

$x^n(2x^3+8x^2+px+q)$ 를 $(x+2)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $r \times 2^{n+2}(x+2)^2$ 이므로

$$x^n(2x^3+8x^2+px+q)$$

$$=(x+2)^3Q(x)+r \times 2^{n+2}(x+2)^2$$

$$=(x+2)^2\{(x+2)Q(x)+r \times 2^{n+2}\} \quad \dots\dots ㉠$$

2단계 p, q 의 값 구하기

㉠에서 $2x^3+8x^2+px+q$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 8 & p & q \\ & & -4 & -8 & -2p+16 \\ \hline -2 & 2 & 4 & p-8 & q-2p+16 \\ & & -4 & 0 & \\ \hline & 2 & 0 & p-8 & \end{array}$$

$$\therefore 2x^3+8x^2+px+q=2x(x+2)^2$$

$$\text{이때 } p-8=0, q-2p+16=0 \text{이므로}$$

$$p=8, q=0$$

3단계 r 의 값 구하기

$$x^n(2x^3+8x^2+8x)=x^n \times 2x(x+2)^2=2x^{n+1}(x+2)^2 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$2x^{n+1}(x+2)^2=(x+2)^2\{(x+2)Q(x)+r \times 2^{n+2}\}$$

양변을 $(x+2)^2$ 으로 나누면

$$2x^{n+1}=(x+2)Q(x)+r \times 2^{n+2}$$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$2 \times (-2)^{n+1}=r \times 2^{n+2}$$

n 이 짝수이므로 $(-2)^{n+1}=-2^{n+1}$ 에서

$$2=r \times (-2) \quad \therefore r=-1$$

4단계 $p-q+r$ 의 값 구하기

$$\therefore p-q+r=8-0-1=7$$

03 답 ③

1단계 다항식 $f(x)$ 의 식 세우기

$f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2(x-1)^2$ 이므로

$$f(x)=(x-1)^3Q(x)+2(x-1)^2$$

$$=(x-1)^2\{(x-1)Q(x)+2\}$$

$$\therefore x^2(x^3+ax^2+bx+c)=(x-1)^2\{(x-1)Q(x)+2\}$$

이때 $x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^2(x+d)$ 인 실수 d 가 존재하므로

$$x^2(x-1)^2(x+d)=(x-1)^2\{(x-1)Q(x)+2\}$$

양변을 $(x-1)^2$ 으로 나누면

$$x^2(x+d)=(x-1)Q(x)+2$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+d=2 \quad \therefore d=1$$

$$\therefore f(x)=x^2(x-1)^2(x+1)$$

2단계 p, q 의 값 구하기

$f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면 나머지가 $px+q$ 이므로

$$f(x)=(x+1)^2Q'(x)+px+q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore x^2(x-1)^2(x+1)=(x+1)^2Q'(x)+px+q$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=-p+q \quad \therefore p=q$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x)=(x+1)^2Q'(x)+px+p$$

$$=(x+1)^2Q'(x)+p(x+1)$$

$$=(x+1)\{(x+1)Q'(x)+p\}$$

$$\therefore x^2(x-1)^2(x+1)=(x+1)\{(x+1)Q'(x)+p\}$$

양변을 $x+1$ 로 나누면

$$x^2(x-1)^2=(x+1)Q'(x)+p$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $4=p$

$$\therefore q=4$$

3단계 pq 의 값 구하기

$$\therefore pq=16$$

04 답 ④

1단계 (a) 를 만족시키는 다항식 $f(x)$ 의 식 세우기

(a) 에서 $f(x)$ 를 $x+2, x^2+4$ 로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $3p^2$ 으로 같으므로

$$f(x)=(x+2)Q_1(x)+3p^2, f(x)=(x^2+4)Q_2(x)+3p^2$$

$$\therefore f(x)-3p^2=(x+2)Q_1(x) \quad \dots\dots \textcircled{1},$$

$$f(x)-3p^2=(x^2+4)Q_2(x) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $f(x)$ 의 사차항의 계수가 1이므로 $f(x)-3p^2$ 은 사차항의 계수가 1인 다항식이고 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x+2, x^2+4$ 를 인수로 갖는다.

즉, $f(x)-3p^2=(x+2)(x^2+4)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+a)+3p^2$$

2단계 (a) 를 이용하여 다항식 $f(x)$ 구하기

(a) 에서 $f(1)=f(-1)$ 이므로

$$15(1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$$

$$10a=-20 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore f(x)=(x+2)(x^2+4)(x-2)+3p^2$$

$$=(x^2-4)(x^2+4)+3p^2$$

$$=x^4+3p^2-16$$

3단계 (a) 를 이용하여 양수 p 의 값 구하기

(a) 에서 $f(\sqrt{p})=0$ 이므로

$$p^2+3p^2-16=0, p^2=4$$

$$\therefore p=2 (\because p>0)$$

비법 NOTE

다항식 $f(x)$ 를 $x+p, x^2+q$ 로 나누었을 때의 나머지가 R 로 같으면 $f(x)-R$ 는 두 다항식 $x+p, x^2+q$ 로 나누어떨어지므로 $x+p, x^2+q$ 를 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x)-R=(x+p)(x^2+q)Q(x)$$

idea 05 답 0

1단계 주어진 식을 $f(x)+x^3f\left(\frac{1}{x}\right)$ 꼴로 나타내기

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{f(2)}{8} \text{에서}$$

$$f(2)+2^3f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{f(3)}{27} \text{에서}$$

$$f(3)+3^3f\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

2단계 다항식 $f(x)$ 의 식 세우기

$$\text{이때 } g(x)=f(x)+x^3f\left(\frac{1}{x}\right) \text{이라 하면 } g(2)=g(3)=0$$

한편 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$x^3f\left(\frac{1}{x}\right)=dx^3+cx^2+bx+a \text{이므로}$$

$$g(x)=(a+d)x^3+(b+c)x^2+(b+c)x+(a+d)$$

이때 $a+d=p, b+c=q$ 로 놓으면

$$g(x)=px^3+qx^2+qx+p$$

$$g(2)=0 \text{에서}$$

$$9p+6q=0 \quad \therefore 3p+2q=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(3)=0 \text{에서}$$

$$28p+12q=0 \quad \therefore 7p+3q=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$p=0, q=0$$

따라서 $d=-a, c=-b$ 이므로

$$f(x)=ax^3+bx^2-bx-a$$

3단계 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지 구하기

$$\therefore f(1)=a+b-b-a=0$$

즉, $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

06 답 ④

1단계 조건을 만족시키는 다항식 $A(x)$ 구하기

(나)에서 $A(x)\{A(x)-4\}$ 는 x^2-4x , 즉 $x(x-4)$ 로 나누어떨어지므로 $A(x)\{A(x)-4\}$ 를 $x(x-4)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$A(x)\{A(x)-4\}=x(x-4)Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$A(0)\{A(0)-4\}=0$$

$$\therefore A(0)=0 \text{ 또는 } A(0)=4$$

①의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$A(4)\{A(4)-4\}=0$$

$$\therefore A(4)=0 \text{ 또는 } A(4)=4$$

(가)에서 $A(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가지므로 이차다항식 $A(x)$ 는 다음과 같다. $\rightarrow A(0)=0, A(4)=0$ 이면 $x-1$ 을 인수로 가질 수 없다.

(i) $A(0)=0, A(4)=4$ 일 때,

$$A(x)=ax(x-1) \quad (a \neq 0 \text{인 상수}) \text{이라 하면}$$

$$A(4)=4 \text{에서 } 12a=4 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore A(x)=\frac{1}{3}x(x-1)$$

(ii) $A(0)=4, A(4)=0$ 일 때,

$$A(x)=b(x-1)(x-4) \quad (b \neq 0 \text{인 상수}) \text{라 하면}$$

$$A(0)=4 \text{에서 } 4b=4 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore A(x)=(x-1)(x-4)$$

(iii) $A(0)=4, A(4)=4$ 일 때,

$$A(x)=(x-1)(cx+d) \quad (c, d \text{는 상수, } c \neq 0) \text{라 하면}$$

$$A(0)=4 \text{에서 } -d=4 \quad \therefore d=-4$$

$$A(4)=4 \text{에서 } 12c+3d=4$$

$$12c-12=4 \quad (\because d=-4) \quad \therefore c=\frac{4}{3}$$

$$\therefore A(x)=(x-1)\left(\frac{4}{3}x-4\right)$$

2단계 다항식 $B(x)$ 구하기

(i), (ii), (iii)에서

$$B(x)=\frac{1}{3}x(x-1)+(x-1)(x-4)+(x-1)\left(\frac{4}{3}x-4\right)$$

3단계 $B(x)$ 를 $x-6$ 으로 나누었을 때의 나머지 구하기

따라서 $B(x)$ 를 $x-6$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$B(6)=10+10+20=40$$

07 답 6

1단계 다항식 $f(x)$ 의 차수 구하기

$f(x)$ 의 최고차항을 $a_n x^n$ ($a_n \neq 0$)이라 하면

$$f(x^2-x-2) \text{의 최고차항은 } a_n (x^2)^n = a_n x^{2n}$$

$$(x^2-x+1)f(x)+6 \text{의 최고차항은 } x^2 \times a_n x^n = a_n x^{n+2}$$

$$\text{즉, } a_n x^{2n} = a_n x^{n+2} \text{이므로}$$

$$2n=n+2 \quad \therefore n=2$$

따라서 $f(x)$ 는 이차다항식이다.

2단계 다항식 $f(x)$ 구하기

$$f(x^2-x-2)=f((x+1)(x-2)) \text{이므로}$$

$$f((x+1)(x-2))=(x^2-x+1)f(x)+6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(0)=3f(-1)+6$$

$$\therefore f(-1)=\frac{f(0)-6}{3}$$

①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(0)=3f(2)+6$$

$$\therefore f(2)=\frac{f(0)-6}{3}$$

이때 $g(x)=f(x)-\frac{f(0)-6}{3}$ 이라 하면 $g(x)$ 는 이차다항식이고

$$g(-1)=g(2)=0 \text{이므로 } x+1, x-2 \text{를 인수로 갖는다.}$$

$$\therefore g(x)=a(x+1)(x-2) \quad (a \neq 0 \text{인 상수})$$

$$\text{즉, } a(x+1)(x-2)=f(x)-\frac{f(0)-6}{3} \text{이므로}$$

$$f(x)=a(x+1)(x-2)+\frac{f(0)-6}{3}$$

3단계 m 의 값 구하기

$$\begin{aligned} f(6)-f(4) &= 28a + \frac{f(0)-6}{3} - \left(10a + \frac{f(0)-6}{3} \right) \\ &= 18a \end{aligned}$$

$$f(m+2)-f(m-1)$$

$$= a(m+3) \times m + \frac{f(0)-6}{3} - \left\{ a(m-3) + \frac{f(0)-6}{3} \right\}$$

$$= am^2 + 3am - (am^2 - 3am)$$

$$= 6am$$

$$\therefore \frac{f(m+2)-f(m-1)}{f(6)-f(4)} = \frac{6am}{18a} = \frac{m}{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{m}{3} = 2 \text{이므로 } m=6$$

08 답 18

1단계 다항식 $x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3$ 을 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지 구하기

$x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3$ 을 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫이

$Q(x)$ 이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1+1-4+3=-a+b$$

$$\therefore a-b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+1+4+3=a+b$$

$$\therefore a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$a=4, b=5$$

$$\therefore x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3=(x+1)(x-1)Q(x)+4x+5$$

2단계 $Q(1)$ 을 n 에 대한 식으로 나타내기

따라서 $(x+1)(x-1)Q(x)=x^{2n+2}+x^{2n}-2$ 이고,

$$x^{2n+2}+x^{2n}-2$$

$$=(x^{2n+2}-1)+(x^{2n}-1)$$

$$=(x-1)(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+x+1)+(x-1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+1)$$

이므로

$$(x+1)(x-1)Q(x)$$

$$=(x-1)(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+x+1)+(x-1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+1)$$

양변을 $x-1$ 로 나누면

$$(x+1)Q(x)=(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+x+1)+(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+1)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2Q(1)=(2n+2)+2n=4n+2$$

$$\therefore Q(1)=2n+1$$

3단계 n 의 값 구하기

이때 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 37이므로 $Q(1)=37$ 에서 $2n+1=37 \quad \therefore n=18$

09 답 $8\sqrt{5}$

1단계 (타)의 식을 인수분해하기

(타)에서

$$\begin{aligned} & a^3+2ca^2+(c^2-bc-b^2)a-bc(b+c) \\ &= a^3+2ca^2+ac^2-abc-ab^2-b^2c-bc^2 \\ &= (a-b)c^2+(2a^2-ab-b^2)c+a^3-ab^2 \\ &= (a-b)c^2+(a-b)(2a+b)c+a(a+b)(a-b) \\ &= (a-b)\{c^2+(2a+b)c+a(a+b)\} \\ &= (a-b)(c+a)(c+a+b)=0 \end{aligned}$$

2단계 a, b, c 의 값 구하기

이때 a, b, c 는 삼각형 ABC의 세 변의 길이이므로

$$c+a>0, c+a+b>0$$

$$\text{따라서 } a-b=0 \text{이므로 } b=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 (가)의 $a+3b=3c$ 에 대입하면

$$4a=3c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(나)에서 $a+b+c=20$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$2a+c=20 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$a=6, c=8$$

$$\therefore b=6$$

3단계 삼각형 ABC의 넓이 구하기

즉, 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이므로 삼각형의 높이를 h 라 하면

$$h=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$



10 답 6000

1단계 수를 문자로 치환하여 나타내기

$335=a, 333=b, 332=c$ 로 놓으면

$$N(335, 333, 332)=N(a, b, c)=a^3(b-c),$$

$$N(333, 332, 335)=N(b, c, a)=b^3(c-a),$$

$$N(332, 335, 333)=N(c, a, b)=c^3(a-b)$$

2단계 문자로 치환한 식을 인수분해하여 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore N(335, 333, 332)+N(333, 332, 335)+N(332, 335, 333) \\ &= a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) \\ &= (b-c)a^3-(b^3-c^3)a+b^3c-bc^3 \\ &= (b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c) \\ &= (b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\} \\ &= (b-c)(a^3-ab^2-ac^2+bc^2-abc+b^2c) \\ &= (b-c)\{a(a+b)(a-b)-c^2(a-b)-bc(a-b)\} \\ &= (b-c)(a-b)(a^2+ab-c^2-bc) \\ &= (b-c)(a-b)\{(a+c)(a-c)+b(a-c)\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c) \\ &= (333-332)(335-333)(335-332)(335+333+332) \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 1000 \\ &= 6000 \end{aligned}$$

idea

11 답 르, 바

1단계 주어진 식의 인수를 찾아 인수분해하기

$f(x)=x^5+4x^4+nx^3+nx^2+4x+1$ 이라 하면

$$f(-1)=-1+4-n+n-4+1=0$$

즉, $f(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^5+4x^4+nx^3+nx^2+4x+1$ 을 $x+1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 4 & n & n & 4 & 1 \\ & & -1 & -3 & -n+3 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & n-3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x+1)\{x^4+3x^3+(n-3)x^2+3x+1\} \\ &= x^2(x+1)\left\{x^2+3x+(n-3)+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right\} \\ &= x^2(x+1)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5\right\} \end{aligned}$$

2단계 주어진 식의 인수가 될 수 있는 것 구하기

이때 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5$ 를

$\left(x+\frac{1}{x}+a\right)\left(x+\frac{1}{x}+\beta\right)$ (a, β 는 정수)로 놓으면

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5 &= \left(x+\frac{1}{x}+a\right)\left(x+\frac{1}{x}+\beta\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(a+\beta)\left(x+\frac{1}{x}\right)+a\beta \end{aligned}$$

이므로

$$a+\beta=3, a\beta=n-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= x^2(x+1)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5\right\} \\ &= x^2(x+1)\left(x+\frac{1}{x}+a\right)\left(x+\frac{1}{x}+\beta\right) \\ &= (x+1)(x^2+ax+1)(x^2+\beta x+1) \end{aligned}$$

(i) $a=-3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } \beta=6, n=-13$$

이때 n 은 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } \beta=4, n=1 \text{이므로}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+4x+1)$$

(iii) $a=4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } \beta=-1, n=1 \text{이므로}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2+4x+1)(x^2-x+1) \rightarrow \text{(ii)와 } f(x) \text{가 같다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)$ 의 인수가 될 수 있는 것은 x^2-x+1, x^2+4x+1 이다.

따라서 보기에서 $x^5+4x^4+nx^3+nx^2+4x+1$ 의 인수가 될 수 있는 것은 르, 바이다.

12 답 146

1단계 a 의 값이 될 수 있는 자연수 구하기

$P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 를 인수로 가지므로 $P(a)=0$ 에서

$$a^4-290a^2+b=0$$

$$\therefore b=a^2(290-a^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 b 가 자연수이므로

$$290-a^2>0 \quad (\because a^2>0)$$

따라서 $290-a^2>0$ 을 만족시키는 a 의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, ..., 17이다.

2단계 다항식 $P(x)$ 를 인수분해하기

조립제법을 이용하여 $x^4 - 290x^2 + b$ 를 $x - a$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} a & 1 & 0 & -290 & 0 & b \\ & & a & a^2 & a^3 - 290a & a^4 - 290a^2 \\ \hline & 1 & a & a^2 - 290 & a^3 - 290a & b + a^4 - 290a^2 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-a)\{x^3 + ax^2 + (a^2 - 290)x + a^3 - 290a\}$$

$P(x)$ 를 $x - a$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$Q(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 - 290)x + a^3 - 290a$$

이때 $Q(-a) = -a^3 + a^3 - a^3 + 290a + a^3 - 290a = 0$ 이므로 $Q(x)$ 는 $x + a$ 를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^3 + ax^2 + (a^2 - 290)x + a^3 - 290a$ 를 $x + a$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & a & a^2 - 290 & a^3 - 290a \\ & & -a & 0 & -a^3 + 290a \\ \hline & 1 & 0 & a^2 - 290 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-a)(x+a)(x^2 + a^2 - 290) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

3단계 p 의 값 구하기

주어진 조건을 만족시키려면 $\textcircled{1}$ 에서 이차식 $x^2 + a^2 - 290$ 은 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

이때 $x^2 + a^2 - 290 = x^2 - (290 - a^2)$ 이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290 - a^2$ 이 제곱수인 경우이다.

즉, $290 = 1^2 + 17^2 = 11^2 + 13^2$ 이므로 $290 - a^2$ 이 제곱수가 되는 자연수 a 의 값은 1, 11, 13, 17이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 개수는 $17 - 4 = 13$ 이고, 자연수 a 의 개수만큼 $P(x)$ 가 만들어지므로 모든 $P(x)$ 의 개수는 13이다.

$$\therefore p = 13$$

4단계 q 의 값 구하기

한편 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} b &= a^2(290 - a^2) \\ &= -(a^2 - 145)^2 + 145^2 \end{aligned}$$

이때 a 가 자연수이므로 b 는 $a = 12$ 일 때, 최댓값 $12^2 \times (290 - 12^2)$ 을 갖는다.

$$\therefore q = 12^2 \times (290 - 12^2)$$

5단계 $\frac{q}{(p-1)^2}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{q}{(p-1)^2} = \frac{12^2 \times (290 - 12^2)}{(13-1)^2} = 146$$

01 862	02 $\frac{37}{8}$	03 60	04 302	05 27	06 -58
07 ⑤	08 139				

01 답 862

직사각형 IOHP에서 두 대각선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{HI} = \overline{OP} = 4\sqrt{2}$
 $\overline{PH} = x$, $\overline{PI} = y$ 라 하면 삼각형 PIH는 $\angle IPH = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{PH}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{IH}^2 \quad \therefore x^2 + y^2 = 32$

삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 내접원의 넓이가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{2}, r^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because r > 0)$$

삼각형 PIH의 넓이는 $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}r(x+y+4\sqrt{2})$ 이므로

$$xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+4\sqrt{2})$$

$$x+y+4\sqrt{2} = \sqrt{2}xy$$

$$\therefore x+y = \sqrt{2}(xy-4)$$

한편 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 이므로

$$32 = \{\sqrt{2}(xy-4)\}^2 - 2xy$$

$$32 = 2(xy)^2 - 18xy + 32$$

$$2(xy)^2 - 18xy = 0$$

$$xy(xy-9) = 0$$

이때 $xy \neq 0$ 이므로 $xy - 9 = 0$

$$\therefore xy = 9$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PH}^4 + \overline{PI}^4 &= x^4 + y^4 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= 32^2 - 2 \times 9^2 \\ &= 862 \end{aligned}$$

02 답 $\frac{37}{8}$

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ 이므로

$$4 = 2a + 2b \quad \therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 반원 O_1 과 O_2 의 교점을 P_3 이라 하고 두 선분 P_3P_1 , P_3P_2 를

그으면 삼각형 $P_1P_2P_3$ 은

$\angle P_1P_2P_3 = 90^\circ$ 인 직각삼각형이

므로 $\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2$

$$(a+b)^2 = \left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{16} + b^2 + \frac{b}{2} + \frac{1}{16}$$

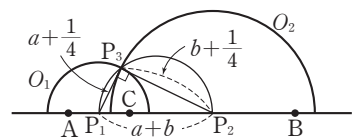
$$2ab = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{8}$$

$$2ab = 1 + \frac{1}{8} (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore ab = \frac{9}{16}$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= 2^3 - 3 \times \frac{9}{16} \times 2 = \frac{37}{8}$$



03 답 60

그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 O라 하면
외심 O는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{AN}=\overline{NC}$ 이므로
 $\overline{BC}=2\overline{MN}=2x$

선분 BC의 중점을 D라 하면

$$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{OP}=\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

선분 MN의 중점을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{OH}&=\overline{OA}-\overline{AH} \\ &=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x\end{aligned}$$

직각삼각형 OPH에서 $\overline{PH}^2+\overline{OH}^2=\overline{OP}^2$ 이므로

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

$$\frac{x^2}{4}+2x+4+\frac{1}{12}x^2=\frac{4}{3}x^2$$

$$x^2-2x-4=0$$

양변을 x 로 나누면

$$x-2-\frac{4}{x}=0$$

$$\therefore x-\frac{4}{x}=2$$

$$\begin{aligned}\therefore 5\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)&=5\left\{\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+8\right\} \\ &=5(4+8)=60\end{aligned}$$

다른 풀이

삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{AN}=\overline{NC}$ 이므로

$$\overline{BC}=2\overline{MN}=2x$$

이때 $\overline{AC}=\overline{BC}=2x$ 이므로

$$\overline{AN}=\overline{NC}=x$$

반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는

점을 Q, 원의 중심 O에서 현 QP에 내린 수선의

발을 H라 하면 $\overline{QH}=\overline{HP}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{QM}&=\overline{QH}-\overline{MH}=\overline{HP}-\overline{HN} \\ &=\overline{NP}=2\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{QN}=2+x$$

삼각형 AQN과 삼각형 PCN에서

$$\angle AQN=\angle PCN, \angle ANQ=\angle PNC \text{이므로}$$

$$\triangle AQN \sim \triangle PCN \text{ (AA 닮음)}$$

따라서 $\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$ 이므로

$$(2+x):x=x:2$$

$$4+2x=x^2$$

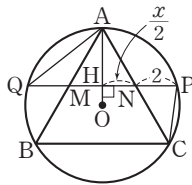
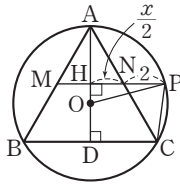
$$x^2-2x-4=0$$

양변을 x 로 나누면

$$x-2-\frac{4}{x}=0$$

$$\therefore x-\frac{4}{x}=2$$

$$\begin{aligned}\therefore 5\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)&=5\left\{\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+8\right\} \\ &=5(4+8)=60\end{aligned}$$



04 답 302

(㉞)에서 나머지 $g(x)-3x^2$ 의 차수는 $g(x)$ 의 차수보다 작아야 하므로

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차식이다.

$g(x)=3x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)\{g(x)-3x^2\}+g(x)-3x^2 \\ &=\{g(x)+1\}\{g(x)-3x^2\} \\ &=(3x^2+ax+b+1)(ax+b)\end{aligned}$$

$$f(x) \text{의 최고차항의 계수가 } 1 \text{이므로 } 3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x)=\left(3x^2+\frac{1}{3}x+b+1\right)\left(\frac{1}{3}x+b\right)$$

(㉞)에서 $f(1)=-4$ 이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=\left(3+\frac{1}{3}+b+1\right)\left(\frac{1}{3}+b\right) \\ &=\left(b+\frac{13}{3}\right)\left(b+\frac{1}{3}\right)=b^2+\frac{14}{3}b+\frac{13}{9}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } b^2+\frac{14}{3}b+\frac{13}{9}=-4 \text{이므로}$$

$$b^2+\frac{14}{3}b+\frac{49}{9}=0, \left(b+\frac{7}{3}\right)^2=0 \quad \therefore b=-\frac{7}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\left(3x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}\right) \text{이므로}$$

$$f(10)=\left(300+\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{10}{3}-\frac{7}{3}\right)=302$$

05 답 27

$$n^4+2n^2-3=(n^2-1)(n^2+3)=(n+1)(n-1)(n^2+3)$$

$$=(n+1)(n^3-n^2+3n-3)$$

$$=(n+1)\{(n-3)(n^2+2n+9)+24\}$$

$$=(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)+24(n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)$ 는 $(n+1)(n-3)$ 의 배수이므로 $\textcircled{1}$ 이

$(n+1)(n-3)$ 의 배수가 되려면 $24(n+1)$ 이 $(n+1)(n-3)$ 의 배수
이어야 한다.

따라서 $24(n+1)=k(n+1)(n-3)$ (k 는 자연수)이라 하면

$$24=k(n-3)$$

이때 k 가 최소일 때, n 이 최댓값을 갖고 자연수 k 의 최솟값은 1이므로

그때의 n 의 값은

$$24=n-3 \quad \therefore n=27$$

다른 풀이

조립제법을 이용하여 n^4+2n^2-3 을 $(n+1)(n-3)$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ & & -1 & 1 & -3 & 3 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ & & 3 & 6 & 27 & \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 24 & \end{array}$$

$$\therefore n^4+2n^2-3=(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)+24(n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)$ 는 $(n+1)(n-3)$ 의 배수이므로 $\textcircled{1}$ 이

$(n+1)(n-3)$ 의 배수가 되려면 $24(n+1)$ 이 $(n+1)(n-3)$ 의 배수
이어야 한다.

따라서 $24(n+1)=k(n+1)(n-3)$ (k 는 자연수)이라 하면

$$24=k(n-3)$$

이때 k 가 최소일 때, n 이 최댓값을 갖고 자연수 k 의 최솟값은 1이므로

그때의 n 의 값은

$$24=n-3 \quad \therefore n=27$$

06 답 -58

$$\begin{aligned} \{P(x)+2x\}^2 &= (x-a)(x+a)(x^2-3)+4 \\ &= (x^2-a^2)(x^2-3)+4 \\ &= x^4-(3+a^2)x^2+3a^2+4 \end{aligned}$$

이때 $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 이차다항식이므로 $P(x)+2x$ 는 이차항의 계수가 -1인 이차다항식이다.

$P(x)+2x = -x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$(-x^2+px+q)^2 = x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2$$

즉, $x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2 = x^4-(3+a^2)x^2+3a^2+4$ 에서 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2p=0 \quad \therefore p=0$$

$$p^2-2q=-3-a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$q^2=3a^2+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$p=0$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$-2q=-3-a^2$$

$$\therefore a^2=2q-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$q^2=3(2q-3)+4$$

$$q^2-6q+5=0, (q-1)(q-5)=0$$

$$\therefore q=1 \text{ 또는 } q=5$$

이때 $q=1$ 이면 $\textcircled{㉢}$ 에서 $a^2=-1<0$ 이므로 $q=5$

이를 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면 $a^2=7$

따라서 $P(x)+2x = -x^2+5$, 즉 $P(x) = -x^2-2x+5$ 이므로

$$P(a^2)=P(7)=-49-14+5=-58$$

다른 풀이

$P(x)+2x$ 가 이차다항식이므로 $(x-a)(x+a)(x^2-3)+4$ 도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$$(x-a)(x+a)(x^2-3)+4$$

$$= (x^2-a^2)(x^2-3)+4$$

$$= x^4-(3+a^2)x^2+3a^2+4$$

$$= x^4-(3+a^2)x^2+\frac{(3+a^2)^2}{4}-\frac{(3+a^2)^2}{4}+3a^2+4$$

$$= \left\{ x^4-(3+a^2)x^2+\frac{(3+a^2)^2}{4} \right\} - \frac{(3+a^2)^2-4(3a^2+4)}{4}$$

$$= \left(x^2-\frac{3+a^2}{2} \right)^2 - \frac{a^4-6a^2-7}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{a^4-6a^2-7}{4}=0 \text{이어야 하므로}$$

$$a^4-6a^2-7=0, (a^2+1)(a^2-7)=0$$

$$\therefore a^2=7 (\because a^2 \geq 0)$$

$$\{P(x)+2x\}^2 = (x^2-5)^2 \text{에서 } |P(x)+2x| = |x^2-5|$$

$$P(x) = x^2-2x-5 \text{ 또는 } P(x) = -x^2-2x+5$$

이때 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x) = -x^2-2x+5$$

$$\therefore P(a^2)=P(7)=-49-14+5=-58$$

07 답 ⑤

(가)에서 $f(x)$ 를 $x+3, x^2+9$ 로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $5p^2$ 로 같으므로

$$f(x) = (x+3)Q_1(x) + 5p^2, f(x) = (x^2+9)Q_2(x) + 5p^2$$

$$\therefore f(x) - 5p^2 = (x+3)Q_1(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠},$$

$$f(x) - 5p^2 = (x^2+9)Q_2(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 $f(x)$ 의 사차항의 계수가 1이므로 $f(x)-5p^2$ 은 사차항의 계수가 1인 다항식이고 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $x+3, x^2+9$ 를 인수로 갖는다.

즉, $f(x)-5p^2 = (x+3)(x^2+9)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x+3)(x^2+9)(x+a) + 5p^2$$

(나)에서 $f(2)=f(-2)$ 이므로

$$65(2+a)+5p^2=13(-2+a)+5p^2$$

$$52a=-156 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore f(x) = (x+3)(x^2+9)(x-3) + 5p^2$$

$$= (x^2-9)(x^2+9) + 5p^2 = x^4+5p^2-81$$

(다)에서 $f(\sqrt{2p})=0$ 이므로

$$4p^2+5p^2-81=0, p^2=9 \quad \therefore p=3 (\because p>0)$$

08 답 139

$P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 를 인수로 가지므로 $P(a)=0$

$$a^4-260a^2+b=0 \quad \therefore b=a^2(260-a^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 b 가 자연수이므로 $260-a^2>0$ ($\because a^2>0$)

따라서 $260-a^2>0$ 을 만족시키는 a 의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, ..., 16이다.

조립제법을 이용하여 x^4-260x^2+b 를 $x-a$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrrr} a & 1 & 0 & -260 & 0 & b \\ & & a & a^2 & a^3-260a & a^4-260a^2 \\ \hline & 1 & a & a^2-260 & a^3-260a & b+a^4-260a^2 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-a)\{x^3+ax^2+(a^2-260)x+a^3-260a\}$$

$P(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$Q(x) = x^3+ax^2+(a^2-260)x+a^3-260a$$

이때 $Q(-a) = -a^3+a^3-a^3+260a+a^3-260a=0$ 이므로 $Q(x)$ 는 $x+a$ 를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^3+ax^2+(a^2-260)x+a^3-260a$ 를 $x+a$ 로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & a & a^2-260 & a^3-260a \\ & & -a & 0 & -a^3+260a \\ \hline & 1 & 0 & a^2-260 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-a)(x+a)(x^2+a^2-260) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

주어진 조건을 만족시키려면 $\textcircled{㉡}$ 에서 이차식 x^2+a^2-260 은 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

이때 $x^2+a^2-260 = x^2-(260-a^2)$ 이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $260-a^2$ 이 제곱수인 경우이다.

즉, $260=2^2+16^2=8^2+14^2$ 이므로 $260-a^2$ 이 제곱수가 되는 자연수 a 의 값은 2, 8, 14, 16이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 개수는 $16-4=12$ 이고, 자연수 a 의 개수만큼 $P(x)$ 가 만들어지므로 모든 $P(x)$ 의 개수는 12이다.

$$\therefore p=12$$

$$\text{한편 } \textcircled{㉠} \text{에서 } b=a^2(260-a^2) = -(a^2-130)^2+130^2$$

이때 a 가 자연수이므로 b 는 $a=11$ 일 때, 최댓값 $11^2 \times (260-11^2)$ 을 갖는다.

$$\therefore q=11^2 \times (260-11^2)$$

$$\therefore \frac{q}{(p-1)^2} = \frac{11^2 \times (260-11^2)}{(12-1)^2} = 139$$

03 복소수

step 1 핵심 문제

| 42-43쪽

01 7	02 ④	03 ②	04 7-2i	05 15
06 ⑤	07 ㄱ, ㄷ	08 ⑤	09 25	10 ②
11 ③	12 8			

01 답 7

$$\begin{aligned} a &= (2-n-5i)^2 \\ &= 2^2 + (-n)^2 + (-5i)^2 + 2(-2n+5ni-10i) \\ &= 4+n^2-25-4n+10ni-20i \\ &= (n^2-4n-21) + (10n-20)i \end{aligned}$$

a^2 이 음의 실수가 되려면 a 는 순허수이어야 한다.

즉, a 의 실수부분은 0이어야 하고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$$n^2-4n-21=0, 10n-20 \neq 0$$

$$(n+3)(n-7)=0, n \neq 2$$

$$\therefore n=7 (\because n \text{은 자연수})$$

02 답 ④

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 실수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(0)=1 \text{에서 } c=1$$

$$\therefore f(x)=ax^2+bx+1$$

$$f(1+i)=4-i \text{에서}$$

$$a(1+i)^2+b(1+i)+1=4-i$$

$$2ai+b+bi+1=4-i$$

$$(b+1)+(2a+b)i=4-i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$b+1=4, 2a+b=-1$$

$$\therefore a=-2, b=3$$

따라서 $f(x)=-2x^2+3x+1$ 이므로

$$f(1+2i)=-2(1+2i)^2+3(1+2i)+1$$

$$=-2(-3+4i)+3+6i+1$$

$$=6-8i+3+6i+1$$

$$=10-2i$$

03 답 ②

$$a=\frac{1+i}{2i}, \beta=\frac{1-i}{2i} \text{에서}$$

$$a+\beta=\frac{1+i}{2i}+\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$$

$$a\beta=\frac{1+i}{2i} \times \frac{1-i}{2i}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2a^2+3)(2\beta^2+3) &= 4a^2\beta^2+6(a^2+\beta^2)+9 \\ &= 4(a\beta)^2+6\{(a+\beta)^2-2a\beta\}+9 \\ &= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\left\{(-i)^2-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+9 \\ &= 1+6(-1+1)+9 \\ &= 10 \end{aligned}$$

04 답 7-2i

$$\begin{aligned} x &= \frac{4-i}{1+i} + \frac{2+i}{1-i} = \frac{(4-i)(1-i)+(2+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(3-5i)+(1+3i)}{2} = 2-i \end{aligned}$$

배점 30%

따라서 $x-2=-i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$x^2-4x+4=-1 \quad \therefore x^2-4x+5=0 \quad \text{배점 30\%}$$

$$\therefore x^5-4x^4+6x^3-4x^2+7x+3$$

$$=x^3(x^2-4x+5)+x(x^2-4x+5)+2x+3$$

$$=2x+3=2(2-i)+3$$

$$=7-2i \quad \text{배점 40\%}$$

05 답 15

$$(\text{㉞}) \text{에서 } \overline{z_1}=\frac{z_1^2}{4i} \text{이므로 } 4i\overline{z_1}=z_1^2$$

$$4i(a-2i)=(a+2i)^2$$

$$8+4ai=(a^2-4)+4ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$8=a^2-4 \quad \therefore a^2=12$$

(㉞)에서 $z_1\overline{z_2}=(a+2i)(3-bi)=(3a+2b)+(6-ab)i$ 가 실수이므로

$$6-ab=0 \quad \therefore ab=6$$

이 식의 양변을 제곱하면 $a^2b^2=36$

$$a^2=12 \text{를 대입하면 } 12b^2=36 \quad \therefore b^2=3$$

$$\therefore a^2+b^2=12+3=15$$

06 답 ⑤

$$iz=\overline{z} \text{에서 } i(a+bi)=a-bi, -b+ai=a-bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-b \quad \therefore z=-b+bi$

$$\neg. z+\overline{z}=(-b+bi)+(-b-bi)=-2b$$

$$\neg. i\overline{z}=i(-b-bi)=b-bi=-(-b+bi)=-z$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{\overline{z}}{z}+\frac{z}{\overline{z}} &= \frac{-b-bi}{-b+bi}+\frac{-b+bi}{-b-bi}=\frac{(-b-bi)^2+(-b+bi)^2}{(-b+bi)(-b-bi)} \\ &= \frac{2b^2i-2b^2i}{2b^2}=0 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

$$\neg. iz=\overline{z} \text{의 양변에 } i \text{를 곱하면 } -z=\overline{z}i$$

$$\neg. iz=\overline{z} \text{이므로 } \frac{\overline{z}}{z}=i, \frac{z}{\overline{z}}=\frac{1}{i}=-i \quad \therefore \frac{\overline{z}}{z}+\frac{z}{\overline{z}}=i+(-i)=0$$

07 답 ㄱ, ㄷ

$$\neg. \overline{z_1}=z_2 \text{이면 } z_1z_2=z_1\overline{z_1}$$

이때 $z_1\overline{z_1}$ 는 항상 실수이므로 z_1z_2 는 실수이다.

$$\neg. z_1=1, z_2=i \text{이면 } z_1^2+z_2^2=1+(-1)=0 \text{이지만 } z_1 \neq 0, z_2 \neq 0 \text{이다.}$$

$$\neg. \overline{z_1z_2}=1 \text{에서 } \frac{1}{z_1}=z_2 \text{이므로 } z_1+\frac{1}{z_1}=z_1+z_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \overline{z_1z_2}=1 \text{에서 } \frac{1}{z_2}=\overline{z_1} \text{이므로 } \frac{1}{z_2}=z_1$$

$$\therefore z_2+\frac{1}{z_2}=z_2+z_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 답 ⑤

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (3 + \sqrt{2}i) + (1 + 2\sqrt{2}i) = 4 + 3\sqrt{2}i \text{ 이므로} \\ \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} &= \bar{\alpha}(\alpha + \beta) + \bar{\beta}(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\ &= (4 + 3\sqrt{2}i)(4 - 3\sqrt{2}i) \\ &= 16 + 18 = 34 \\ \alpha - \beta &= (3 + \sqrt{2}i) - (1 + 2\sqrt{2}i) = 2 - \sqrt{2}i \text{ 이므로} \\ \alpha\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} &= \bar{\alpha}(\alpha - \beta) - \bar{\beta}(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \\ &= (2 - \sqrt{2}i)(2 + \sqrt{2}i) \\ &= 4 + 2 = 6 \\ \therefore \frac{\alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta}} &= \frac{34}{6} = \frac{17}{3} \end{aligned}$$

09 답 25

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} &= -i, \frac{1}{i^2} = -1, \frac{1}{i^3} = i, \frac{1}{i^4} = 1 \text{ 이므로} \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} &= -i + 1 + i - 1 = 0 \\ \text{음이 아닌 정수 } k \text{ 에 대하여} \\ \text{(i) } n &= 4k + 1 \text{ 일 때,} \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} \\ &= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) + \dots + \frac{1}{i^{4k}} \times \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i} = -i \\ \text{(ii) } n &= 4k + 2 \text{ 일 때,} \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} \\ &= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{i^{4k}} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} \right) \\ &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} = -i + 1 \\ \text{(iii) } n &= 4k + 3 \text{ 일 때,} \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} \\ &= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{i^{4k}} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} \right) \\ &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} = -i + 1 + i = 1 \\ \text{(iv) } n &= 4k + 4 \text{ 일 때,} \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} \\ &= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{i^{4k}} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} \right) \\ &= 0 \\ \text{(i)~(iv)에서 } n &= 4k + 2 \text{ (} k \text{ 는 음이 아닌 정수) 꼴일 때} \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n} &= 1 - i \text{ 가 성립하므로 } 100 \text{ 이하의 자} \\ \text{연수 } n &\text{은 } 2, 6, 10, \dots, 98 \text{ 의 } 25 \text{ 개이다.} \end{aligned}$$

비법 NOTE

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + i^4 &= 0, i - i^2 + i^3 - i^4 = 0, \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = 0, \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} = 0 \\ \text{이고, } i^4 &= 1 \text{ 이므로 } i \text{ 의 거듭제곱이 포함된 식을 계산할 때는 네 항씩 묶어서 간단히} \\ \text{할 수 있다.} \\ \text{예를 들어 } i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100} &\text{에서 네 항씩 묶으면} \\ i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100} \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \dots + (i^{97} + i^{98} + i^{99} + i^{100}) \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + \dots + i^{96}(i + i^2 + i^3 + i^4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

10 답 ②

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+i}{\sqrt{2}i} \text{ 라 하면} \\ x^2 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i} \right)^2 = \frac{2i}{-2} = -i \\ x^4 &= (x^2)^2 = (-i)^2 = -1 \\ x^8 &= (x^4)^2 = (-1)^2 = 1 \\ y &= \frac{1-i}{\sqrt{2}i} \text{ 라 하면} \\ y^2 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i} \right)^2 = \frac{-2i}{-2} = i \\ y^4 &= (y^2)^2 = i^2 = -1 \\ y^8 &= (y^4)^2 = (-1)^2 = 1 \\ \therefore \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i} \right)^{2022} - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i} \right)^{2024} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i} \right)^{2026} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i} \right)^{2028} \\ &= x^{2022} - x^{2024} y^{2026} + y^{2028} \\ &= (x^8)^{252} x^6 - (x^8)^{253} (y^8)^{253} y^2 + (y^8)^{253} y^4 \\ &= x^6 - y^2 + y^4 \\ &= x^4 x^2 - y^2 + y^4 \\ &= -1 \times (-i) - i + (-1) = -1 \end{aligned}$$

11 답 ③

$$\begin{aligned} a > 0, b < 0 \text{ 이고, } b &= -B \text{ 로 놓으면 } B > 0 \text{ 이므로} \\ \sqrt{-a^2} \sqrt{-\frac{1}{b^2}} + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ &= \sqrt{-a^2} \sqrt{-\frac{1}{B^2}} + \left(\sqrt{-\frac{a}{B}} \right)^2 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-B}} \sqrt{-\frac{a}{B}} \\ &= \sqrt{a^2} i \times \sqrt{\frac{1}{B^2}} i + \left(\sqrt{\frac{a}{B}} i \right)^2 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{B} i} \times \sqrt{\frac{a}{B}} i \\ &= -\frac{a}{B} - \frac{a}{B} + \frac{a}{B} = -\frac{a}{B} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

12 답 8

$$\begin{aligned} \sqrt{-(m+1)} \sqrt{m-3} &= -\sqrt{-(m+1)(m-3)} \text{ 에서} \\ -(m+1) &\leq 0, m-3 \leq 0 \text{ 이므로} \\ -1 &\leq m \leq 3 \\ \text{즉, } -3 &\leq m-2 \leq 1 \text{ 이므로 정수 } m \text{ 에 대하여 } |m-2| \text{ 의 최댓값은 } 3 \text{ 이다.} \\ \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n-2}} &= -\sqrt{\frac{n+3}{n-2}} \text{ 에서 } n+3 \geq 0, n-2 < 0 \text{ 이므로} \\ -3 &\leq n < 2 \\ \text{즉, } 1 &\leq n+4 < 6 \text{ 이므로 정수 } n \text{ 에 대하여 } |n+4| \text{ 의 최댓값은 } 5 \text{ 이다.} \\ \text{따라서 } |m-2| + |n+4| &\text{의 최댓값은} \\ 3 + 5 &= 8 \end{aligned}$$

01 ①	02 9	03 ④	04 24	05 ⑤	06 ③
07 ①	08 0	09 ④	10 17	11 ㄴ	12 ㄴ, ㄷ
13 $\frac{1}{2}$	14 ㄴ	15 ③	16 85	17 44	18 ④
19 24	20 27	21 ⑤	22 ④	23 10	24 ③

01 답 ①

ㄱ. $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = 2i \times (-2i) = 4$ 이므로
 $\alpha\beta = 2$ 또는 $\alpha\beta = -2$ ㉠
 ㄴ. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2i + 2\alpha\beta - 2i = 2\alpha\beta$ 이므로
 $(\alpha + \beta)^4 = \{(\alpha + \beta)^2\}^2 = (2\alpha\beta)^2 = 4\alpha^2\beta^2$
 $= 4 \times 2i \times (-2i) = 16$
 ㄷ. $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$
 $= \frac{2i - 2\alpha\beta - 2i}{2i - (-2i)} = -\frac{\alpha\beta}{2i} = \frac{\alpha\beta}{2}i$
 ㉠에서 $\alpha\beta$ 는 실수이므로 $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ 는 순허수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

다른 풀이

ㄷ. $\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} = \frac{2i - 2\alpha\beta - 2i}{2i + 2\alpha\beta - 2i} = \frac{-2\alpha\beta}{2\alpha\beta} = -1$
 즉, $\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2$ 이 음의 실수이므로 $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ 는 순허수이다.

02 답 9

$z_1^2 + z_2^2 = 8i$ 에서
 $(z_1 - z_2)^2 + 2z_1z_2 = 8i$, $(-1 + i)^2 + 2z_1z_2 = 8i$
 $-2i + 2z_1z_2 = 8i$ $\therefore z_1z_2 = 5i$ 배점 20%
 $\therefore (z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 8i + 2 \times 5i = 18i$
 $z_1^3 + z_2^3 = -9 + 9i$ 에서
 $(z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1 + z_2) = -9 + 9i$
 $(z_1 + z_2)^2(z_1 + z_2) - 3z_1z_2(z_1 + z_2) = -9 + 9i$
 $18i(z_1 + z_2) - 3 \times 5i(z_1 + z_2) = -9 + 9i$
 $3i(z_1 + z_2) = -9 + 9i$
 $\therefore z_1 + z_2 = \frac{-9 + 9i}{3i} = 3 - \frac{3}{i} = 3 + 3i$ 배점 30%
 따라서 $z_1 - z_2 = -1 + i$, $z_1 + z_2 = 3 + 3i$ 를 연립하여 풀면
 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$ 배점 10%
 $z_1^2 = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ 이므로
 $z_1^4 = (z_1^2)^2 = (-3 + 4i)^2 = -7 - 24i$ ㉠
 $z_2^2 = (2 + i)^2 = 3 + 4i$ 이므로
 $z_2^4 = (z_2^2)^2 = (3 + 4i)^2 = -7 + 24i$ ㉡
 ㉠, ㉡을 $az_1^4 + bz_2^4 = 42$ 에 대입하면
 $a(-7 - 24i) + b(-7 + 24i) = 42$
 $-7(a + b) - 24(a - b)i = 42$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a + b = -6$, $a - b = 0$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -3$, $b = -3$ $\therefore ab = 9$ 배점 40%

03 답 ④

$x \neq 0$ 이므로 $(ax^2 + bx + b)x^4 + 2x^3 + bx^2 + bx + a = 0$ 의 양변을 x^3 으로 나누면
 $ax^3 + bx^2 + bx + 2 + \frac{b}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x^3} = 0$
 $a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ ㉠
 $x + \frac{1}{x} = i$ 에서
 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = i^2 - 2 = -3$
 $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = i^3 - 3i = -4i$
 이를 ㉠에 대입하면
 $a \times (-4i) + b \times (-3) + b \times i + 2 = 0$
 $(2 - 3b) + (b - 4a)i = 0$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $2 - 3b = 0$, $b - 4a = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{2}{3}$ $\therefore a + b = \frac{5}{6}$

idea

04 답 24

$z^3 = 2 - 3i$ 에서 $z^3 - 2 = -3i$ 이므로 양변을 제곱하면
 $z^6 - 4z^3 + 4 = -9$ $\therefore z^6 - 4z^3 + 13 = 0$
 $z \neq 0$ 이므로 이 식의 양변을 각각 z , z^2 , z^3 으로 나누면
 $z^5 - 4z^2 + \frac{13}{z} = 0$, $z^4 - 4z + \frac{13}{z^2} = 0$, $z^3 - 4 + \frac{13}{z^3} = 0$
 $\therefore 2z^5 - 2z^4 + 5z^3 - 8z^2 + 8z + \frac{26}{z} - \frac{26}{z^2} + \frac{13}{z^3} = 0$
 $= 2\left(z^5 - 4z^2 + \frac{13}{z}\right) - 2\left(z^4 - 4z + \frac{13}{z^2}\right) + \left(z^3 - 4 + \frac{13}{z^3}\right) + 4z^3 + 4$
 $= 4z^3 + 4 = 4(2 - 3i) + 4$
 $= 12 - 12i$
 따라서 $a = 12$, $b = -12$ 이므로 $a - b = 24$

05 답 ⑤

$z = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면
 $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
 $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$
 $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
 ① $\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{2a}{a^2 + b^2} \Rightarrow$ 실수
 ② $z^2 + z + \bar{z}^2 + \bar{z} + 1 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1$
 $= (2a)^2 - 2(a^2 + b^2) + 2a + 1$
 $= 2a^2 - 2b^2 + 2a + 1 \Rightarrow$ 실수
 ③ $(2z + 1)(2\bar{z} + 1) = 4z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + 1$
 $= 4(a^2 + b^2) + 4a + 1 \Rightarrow$ 실수
 ④ $(z + \bar{z})(z^2 - z\bar{z} + \bar{z}^2) = z^3 + \bar{z}^3 = (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z})$
 $= (2a)^3 - 3(a^2 + b^2) \times 2a$
 $= 2a^3 - 6ab^2 \Rightarrow$ 실수
 ⑤ $\frac{z}{1 - z} - \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} = \frac{z(1 - \bar{z}) - \bar{z}(1 - z)}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{z - \bar{z}}{1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z}}$
 $= \frac{2bi}{1 - 2a + a^2 + b^2} \Rightarrow$ 순허수
 따라서 실수가 아닌 것은 ⑤이다.

06 답 ③

$$\begin{aligned} z_1 &= (1-i)\bar{a} \text{에서 } \bar{z}_1 = \overline{(1-i)\bar{a}} = (1+i)a \text{이므로} \\ z_2 &= (1-i)\bar{z}_1 = (1-i)(1+i)a = 2a \\ z_3 &= (1-i)\bar{z}_2 = (1-i) \times 2\bar{a} = 2(1-i)\bar{a} \\ z_4 &= (1-i)\bar{z}_3 = (1-i) \times 2(1+i)a = 2^2a \\ z_5 &= (1-i)\bar{z}_4 = (1-i) \times 2^2\bar{a} = 2^2(1-i)\bar{a} \\ z_6 &= (1-i)\bar{z}_5 = (1-i) \times 2^2(1+i)a = 2^3a \\ &\vdots \\ \therefore z_{50} &= 2^{25}a = 2^{25}(16-16i) = 2^{29}-2^{29}i \\ \text{따라서 } a &= 2^{29}, b = -2^{29} \text{이므로} \\ a-b &= 2^{29}+2^{29} = 2 \times 2^{29} = 2^{30} \end{aligned}$$

07 답 ①

(가)에서 $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 > 0$ 이므로 $\frac{\bar{z}}{z}$ 는 실수이다.

$$z = a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수, } b \neq 0 \text{)} \text{라 하면}$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}$$

$\frac{\bar{z}}{z}$ 가 실수이므로 $ab=0$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $a=0$ $\therefore z=bi$

(나)에서 $\bar{z}+\bar{z}^2+\bar{z}^3 = -4+6i$ 이므로

$$\begin{aligned} -bi + (-bi)^2 + (-bi)^3 &= -4+6i \\ -bi - b^2 + b^3i &= -4+6i \\ -b^2 + (b^3-b)i &= -4+6i \end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$b^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad b^3-b=6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $b(b^2-1)=6$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면 $3b=6$ $\therefore b=2$

따라서 $z=2i, \bar{z}=-2i$ 이므로

$$z^3-\bar{z}^3 = (2i)^3 - (-2i)^3 = -8i-8i = -16i$$

08 답 0

$$a+\beta=2\sqrt{3}i \text{에서 } \bar{a}+\bar{\beta}=-2\sqrt{3}i$$

이때 $a\bar{a}=4, \beta\bar{\beta}=4$ 에서 $\bar{a}=\frac{4}{a}, \bar{\beta}=\frac{4}{\beta}$ 이므로

$$\frac{4}{a} + \frac{4}{\beta} = -2\sqrt{3}i, \quad \frac{4(a+\beta)}{a\beta} = -2\sqrt{3}i$$

$$\therefore a\beta = \frac{4(a+\beta)}{-2\sqrt{3}i} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}i}{-2\sqrt{3}i} = -4$$

$$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{a^3+\beta^3}{a^3\beta^3} = \frac{(a+\beta)^3-3a\beta(a+\beta)}{(a\beta)^3}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}i)^3-3 \times (-4) \times 2\sqrt{3}i}{(-4)^3} = 0$$

09 답 ④

$$a^2-\beta=i \text{에서 } \bar{a}^2-\bar{\beta}=-i \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\bar{\beta}^2-\bar{a}=-i \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$(\bar{a}^2-\bar{\beta}^2)+\bar{a}-\bar{\beta}=0, \quad (\bar{a}+\bar{\beta})(\bar{a}-\bar{\beta})+\bar{a}-\bar{\beta}=0$$

$$(\bar{a}-\bar{\beta})(\bar{a}+\bar{\beta}+1)=0$$

이때 $\bar{a} \neq \bar{\beta}$ 이므로 $\bar{a}+\bar{\beta}+1=0$ $\therefore \bar{a}+\bar{\beta}=-1$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} (\bar{a}^2+\bar{\beta}^2)-(\bar{a}+\bar{\beta}) &= -2i \\ (\bar{a}+\bar{\beta})^2-2\bar{a}\bar{\beta}-(\bar{a}+\bar{\beta}) &= -2i \\ (-1)^2-2\bar{a}\bar{\beta}-(-1) &= -2i \quad \therefore \bar{a}\bar{\beta}=1+i \\ \therefore \bar{a}^3+\bar{\beta}^3 &= (\bar{a}+\bar{\beta})^3-3\bar{a}\bar{\beta}(\bar{a}+\bar{\beta}) \\ &= (-1)^3-3(1+i) \times (-1) = 2+3i \end{aligned}$$

따라서 $x=2, y=3$ 이므로 $xy=6$

10 답 17

$z=a+bi, w=c+di$ (a, b, c, d 는 자연수)라 하면

$$w\bar{w}=(c+di)(c-di)=c^2+d^2$$

$$z\bar{z}=10 \text{에서 } (a+bi)(a-bi)=10$$

$$\therefore a^2+b^2=10$$

이때 a, b 는 자연수이므로

$$a=1, b=3 \text{ 또는 } a=3, b=1$$

$$z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w=41 \text{에서}$$

$$z(\bar{z}+\bar{w})+w(\bar{z}+\bar{w})=41, \quad (z+w)(\bar{z}+\bar{w})=41$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=41$$

이때 $z+w=(a+c)+(b+d)i$ 이므로

$$\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}=41$$

$$(a+c)^2+(b+d)^2=41$$

이때 $a+c, b+d$ 는 자연수이므로

$$a+c=4, b+d=5 \text{ 또는 } a+c=5, b+d=4$$

(i) $a=1, b=3$ 일 때,

$$c=3, d=2 \text{ 또는 } c=4, d=1$$

$$\therefore c^2+d^2=13 \text{ 또는 } c^2+d^2=17$$

(ii) $a=3, b=1$ 일 때,

$$c=1, d=4 \text{ 또는 } c=2, d=3$$

$$\therefore c^2+d^2=17 \text{ 또는 } c^2+d^2=13$$

(i), (ii)에서 $w\bar{w}$, 즉 c^2+d^2 의 최댓값은 17이다.

11 답 ㄴ

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하자.

$$\neg. f(\bar{z})=f(a-bi)=(a-bi)+(a+bi)-(a-bi)(a+bi)-1$$

$$=2a-a^2-b^2-1=-(a-1)^2-b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $(a-1)^2 \geq 0, b^2 \geq 0$ 이므로 $f(\bar{z}) \leq 0$

ㄴ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ 이므로

$$f(z+\bar{z})=f(2a)=2a+2a-(2a)^2-1=-4a^2+4a-1$$

$$f(\bar{z})=f(z) \text{이므로}$$

$$f(z)+f(\bar{z})+2=2f(\bar{z})+2=-2(a-1)^2-2b^2+2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$=-2a^2+4a-2b^2$$

$$f(z+\bar{z})=f(z)+f(\bar{z})+2 \text{에서}$$

$$-4a^2+4a-1=-2a^2+4a-2b^2$$

$$2b^2=2a^2+1$$

이때 $2b^2 > 0$ 이므로 $b \neq 0$

따라서 $z=a+bi$ 는 허수이다.

ㄷ. $z=1$ 이면 $\bar{z}=1$ 이므로

$$f(z\bar{z})=f(1)=1+1-1-1=0$$

$$f(z)=f(1)=0, f(\bar{z})=f(1)=0$$

즉, $f(z\bar{z})=-f(z)f(\bar{z})$ 이지만 z 는 실수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

12 답 ㄴ, ㄷ

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{라 하면}$$

$$z + \bar{z} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \sqrt{3}$$

$$z\bar{z} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \times \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \alpha_3 = z^3, \bar{\alpha}_3 = \bar{z}^3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \bar{\alpha}_3 &= z^3 + \bar{z}^3 = (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z}) \\ &= (\sqrt{3})^3 - 3 \times 1 \times \sqrt{3} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{1} \text{에서 } z^3 + \bar{z}^3 = 0 \text{이므로}$$

$$z^3 = -\bar{z}^3$$

$$\text{이때 } z\bar{z}=1 \text{에서 } \bar{z} = \frac{1}{z} \text{이므로}$$

$$z^3 = -\frac{1}{z^3}, z^6 = -1 \quad \therefore \bar{z}^6 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_8 + \bar{\alpha}_{10} &= 1 + \bar{z}^2 + \bar{z}^4 + \bar{z}^6 + \bar{z}^8 + \bar{z}^{10} \\ &= 1 + \bar{z}^2 + \bar{z}^4 + \bar{z}^6 (1 + \bar{z}^2 + \bar{z}^4) \\ &= 1 + \bar{z}^2 + \bar{z}^4 - (1 + \bar{z}^2 + \bar{z}^4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\alpha_2 - 2} - \frac{1}{\bar{\alpha}_8 + 2} &= \frac{1}{z^2 - 2} - \frac{1}{\bar{z}^8 + 2} \\ &= \frac{1}{z^2 - 2} - \frac{1}{-\bar{z}^2 + 2} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \frac{1}{z^2 - 2} + \frac{1}{\bar{z}^2 - 2} = \frac{(\bar{z}^2 - 2) + (z^2 - 2)}{(z^2 - 2)(\bar{z}^2 - 2)} \\ &= \frac{z^2 + \bar{z}^2 - 4}{(z\bar{z})^2 - 2(z^2 + \bar{z}^2) + 4} \\ &= \frac{(z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} - 4}{(z\bar{z})^2 - 2\{(z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z}\} + 4} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 - 4}{1^2 - 2\{(\sqrt{3})^2 - 2 \times 1\} + 4} = \frac{-3}{3} = -1 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 $\frac{1}{2}$

$$z_1 z_2 = \frac{i}{1+i} \times \frac{i^2}{1+i} = \frac{i^3}{(1+i)^2} = \frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

$$z_2 z_3 = \frac{i^2}{1+i} \times \frac{i^3}{1+i} = \frac{i^5}{(1+i)^2} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

$$z_3 z_4 = \frac{i^3}{1+i} \times \frac{i^4}{1+i} = \frac{i^7}{(1+i)^2} = \frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

$$z_4 z_5 = \frac{i^4}{1+i} \times \frac{i^5}{1+i} = \frac{i^9}{(1+i)^2} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$z_{49} z_{50} = \frac{i^{49}}{1+i} \times \frac{i^{50}}{1+i} = \frac{i^{99}}{(1+i)^2} = \frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore z_1 z_2 i^2 + z_2 z_3 i^3 + z_3 z_4 i^4 + \dots + z_{49} z_{50} i^{50}$$

$$= -\frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2} i^3 - \frac{1}{2} i^4 + \frac{1}{2} i^5 - \dots - \frac{1}{2} i^{50}$$

$$= -\frac{1}{2} (i^2 - i^3 + i^4 - i^5 + \dots + i^{50})$$

$$= -\frac{1}{2} \{ (i^2 - i^3 + i^4 - i^5) + i^4 (i^2 - i^3 + i^4 - i^5) + \dots + i^{44} (i^2 - i^3 + i^4 - i^5) + i^{48} \times i^2 \}$$

$$= -\frac{1}{2} \{ (-1 + i + 1 - i) + (-1 + i + 1 - i) + \dots + (-1 + i + 1 - i) + i^2 \}$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}$$

14 답 ㄴ

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i, \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

이므로

$$z_n = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^n = i^n + (-i)^n$$

음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$z_{4k+1} = i^{4k+1} + (-i)^{4k+1} = i + (-i) = 0$$

$$z_{4k+2} = i^{4k+2} + (-i)^{4k+2} = i^2 + (-i)^2 = -2$$

$$z_{4k+3} = i^{4k+3} + (-i)^{4k+3} = i^3 + (-i)^3 = 0$$

$$z_{4k+4} = i^{4k+4} + (-i)^{4k+4} = i^4 + (-i)^4 = 2$$

$$\therefore n=1 \text{일 때, } z_1=0, z_4=2 \text{이므로}$$

$$z_4 \neq z_1$$

$$\therefore z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0 + 2 + 0 - 2 = 0 \text{이므로}$$

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + z_5 - z_6 + \dots + z_{99} - z_{100}$$

$$= (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) + (z_5 - z_6 + z_7 - z_8) + \dots + (z_{97} - z_{98} + z_{99} - z_{100})$$

$$= (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) + (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) + \dots + (z_1 - z_2 + z_3 - z_4)$$

$$= 0$$

$$\therefore z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \dots + 14z_{14}$$

$$= (z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4) + (5z_5 + 6z_6 + 7z_7 + 8z_8)$$

$$+ (9z_9 + 10z_{10} + 11z_{11} + 12z_{12}) + 13z_{13} + 14z_{14}$$

$$= (z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4) + (5z_1 + 6z_2 + 7z_3 + 8z_4)$$

$$+ (9z_1 + 10z_2 + 11z_3 + 12z_4) + 13z_1 + 14z_2$$

$$= (0 - 4 + 0 + 8) + (0 - 12 + 0 + 16) + (0 - 20 + 0 + 24) + 0 - 28$$

$$= 4 \times 3 - 28 = -16$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

다른 풀이

$$\therefore z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \dots + 14z_{14}$$

$$= 2z_2 + 4z_4 + 6z_6 + 8z_8 + 10z_{10} + 12z_{12} + 14z_{14}$$

$$= 2z_2 + 4z_4 + 6z_2 + 8z_4 + 10z_2 + 12z_4 + 14z_2$$

$$= \{2(z_2 + z_4) + 2z_4\} + \{6(z_2 + z_4) + 2z_4\} + \{10(z_2 + z_4) + 2z_4\} + 14z_2$$

$$= 6z_4 + 14z_2$$

$$= 6 \times 2 + 14 \times (-2)$$

$$= -16$$

15 답 ③

$\alpha = 1 - i$ 에서

$$\alpha^2 = (1-i)^2 = -2i, \alpha^3 = \alpha^2 \alpha = -2i(1-i) = -2 - 2i$$

$$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = (-2i)^2 = -4, \alpha^8 = (\alpha^4)^2 = (-4)^2 = 16$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10)$$

$$= -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \dots + \alpha^{10}$$

$$= (-\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4) + \alpha^4(-\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4) + \alpha^8(-\alpha + \alpha^2)$$

이때 $-\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 = -(1-i) - 2i - (-2-2i) - 4 = -3+i$ 이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10)$$

$$= (-3+i) - 4(-3+i) + 16(-1+i-2i)$$

$$= -3+i + 12-4i - 16-16i$$

$$= -7-19i$$

$$= 19(1-i) - 26$$

$$= 19\alpha - 26$$

따라서 $a=19, b=-26$ 이므로

$$a-b=45$$

다른 풀이

$$\alpha = 1 - i \text{에서 } \alpha - 1 = -i$$

$$\text{양변을 제곱하면 } \alpha^2 - 2\alpha + 1 = -1$$

$$\text{즉, } \alpha^2 = 2\alpha - 2 \text{이므로}$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \alpha = 2\alpha^2 - 2\alpha = 2(2\alpha - 2) - 2\alpha = 2\alpha - 4$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 \alpha = 2\alpha^2 - 4\alpha = 2(2\alpha - 2) - 4\alpha = -4$$

$$\alpha^8 = (\alpha^4)^2 = (-4)^2 = 16$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$$

$$= -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \cdots + \alpha^{10}$$

$$= -(\alpha + \alpha^5 + \alpha^9) + (\alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^{10}) - (\alpha^3 + \alpha^7) + (\alpha^4 + \alpha^8)$$

$$= -(\alpha - 4\alpha + 16\alpha) + (\alpha^2 - 4\alpha^2 + 16\alpha^2) - (\alpha^3 - 4\alpha^3) + (-4 + 16)$$

$$= -13\alpha + 13\alpha^2 + 3\alpha^3 + 12$$

$$= -13\alpha + 13(2\alpha - 2) + 3(2\alpha - 4) + 12$$

$$= 19\alpha - 26$$

$$\text{따라서 } a = 19, b = -26 \text{이므로 } a - b = 45$$

16 답 85

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a + \sqrt{2}i}{a - \sqrt{2}i} = \frac{(a + \sqrt{2}i)^2}{(a - \sqrt{2}i)(a + \sqrt{2}i)} = \frac{a^2 - 2 + 2\sqrt{2}ai}{a^2 + 2}$$

$$\frac{\bar{z}}{z} \text{가 실수이므로 } 2\sqrt{2}a = 0 \quad \therefore a = 0 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$\text{따라서 } z = -\sqrt{2}i \text{이므로}$$

$$z^2 = (-\sqrt{2}i)^2 = -2, \quad z^3 = z^2 z = -2 \times (-\sqrt{2}i) = 2\sqrt{2}i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-2)^2 = 4 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{이때 } z + z^2 + z^3 + z^4 = -\sqrt{2}i - 2 + 2\sqrt{2}i + 4 = 2 + \sqrt{2}i \text{이므로}$$

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots + z^{16}$$

$$= (z + z^2 + z^3 + z^4) + z^4(z + z^2 + z^3 + z^4) + z^8(z + z^2 + z^3 + z^4) + z^{12}(z + z^2 + z^3 + z^4)$$

$$= (2 + \sqrt{2}i) + 4(2 + \sqrt{2}i) + 4^2(2 + \sqrt{2}i) + 4^3(2 + \sqrt{2}i)$$

$$= (1 + 4 + 16 + 64)(2 + \sqrt{2}i)$$

$$= 170 + 85\sqrt{2}i \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\text{따라서 } p = 170, q = 85 \text{이므로 } p - q = 85 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

17 답 44

$$i - i^2 + i^3 - i^4 = i + 1 - i - 1 = 0$$

$$\text{음이 아닌 정수 } k \text{에 대하여}$$

$$(i) \quad n = 4k + 1 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4k + 1) = i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \cdots + i^{4k+1} \\ &= (i - i^2 + i^3 - i^4) + i^4(i - i^2 + i^3 - i^4) + \cdots + i^{4k} \times i \\ &= i \end{aligned}$$

$$(ii) \quad n = 4k + 2 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4k + 2) = i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \cdots - i^{4k+2} \\ &= (i - i^2 + i^3 - i^4) + i^4(i - i^2 + i^3 - i^4) + \cdots + i^{4k}(i - i^2) \\ &= i + 1 \end{aligned}$$

$$(iii) \quad n = 4k + 3 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4k + 3) = i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \cdots + i^{4k+3} \\ &= (i - i^2 + i^3 - i^4) + i^4(i - i^2 + i^3 - i^4) + \cdots + i^{4k}(i - i^2 + i^3) \\ &= i + 1 - i = 1 \end{aligned}$$

$$(iv) \quad n = 4k + 4 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4k + 4) = i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \cdots - i^{4k+4} \\ &= (i - i^2 + i^3 - i^4) + i^4(i - i^2 + i^3 - i^4) + \cdots + i^{4k}(i - i^2 + i^3 - i^4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 각 경우에 $f(n)$ 의 값이 각각 다르므로 $f(n^2) = f(n)$ 을 만족시키려면 n^2 을 4로 나누었을 때의 나머지와 n 을 4로 나누었을 때의 나머지가 같아야 한다.

$$n = 4k + 1 \text{이면 } n^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1 \text{이므로 } f(n^2) = f(n) \text{을 만족시킨다.}$$

$$n = 4k + 2 \text{이면 } n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) \text{이므로 } f(n^2) \neq f(n)$$

$$n = 4k + 3 \text{이면 } n^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1 \text{이므로 } f(n^2) \neq f(n)$$

$$n = 4k + 4 \text{이면 } n^2 = (4k + 4)^2 = 16(k + 1)^2 \text{이므로 } f(n^2) = f(n) \text{을 만족시킨다.}$$

따라서 $n = 4k + 1$ 꼴인 두 자리의 자연수 n 은 13, 17, 21, ..., 97의 22개이고, $n = 4k + 4$ 꼴인 두 자리의 자연수 n 은 12, 16, 20, ..., 96의 22개이므로 구하는 자연수 n 의 개수는

$$22 + 22 = 44$$

18 답 ④

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0, \quad \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = -i - 1 + i + 1 = 0$$

음이 아닌 정수 m 에 대하여

$$(i) \quad n = 4m + 1 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{4m+1} \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + \cdots + i^{4m} \times i \\ &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{4m+1}} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \cdots + \frac{1}{i^{4m}} \times \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i} = -i \end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = f(4m + 1) = (4m + 1) \times i \times (-i) = 4m + 1$$

$$(ii) \quad n = 4m + 2 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{4m+2} \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + \cdots + i^{4m}(i + i^2) \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{4m+2}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \cdots + \frac{1}{i^{4m}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \right) \\ &= -i - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = f(4m + 2) = (4m + 2)(i - 1)(-i - 1) = 2(4m + 2)$$

$$(iii) \quad n = 4m + 3 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{4m+3} \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + \cdots + i^{4m}(i + i^2 + i^3) \\ &= i - 1 - i = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{4m+3}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \cdots + \frac{1}{i^{4m}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} \right) \\ &= -i - 1 + i = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = f(4m + 3) = (4m + 3) \times (-1) \times (-1) = 4m + 3$$

(iv) $n=4m+4$ 일 때,

$$\begin{aligned} & i+i^2+i^3+\dots+i^{4m+4} \\ &= (i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\dots+i^{4m}(i+i^2+i^3+i^4) \\ &= 0 \\ & \frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\dots+\frac{1}{i^{4m+4}} \\ &= \left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right) \\ & \quad +\dots+\frac{1}{i^{4m}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(n)=f(4m+4)=(4m+4)\times 0\times 0=0$$

이때 $f(k)+f(k+1)=233$ 에서

$k=4m+1$ 이면 (i), (ii)에 의하여

$$(4m+1)+2(4m+2)=233, 12m=228 \quad \therefore m=19$$

$$\therefore k=4m+1=4\times 19+1=77$$

$k=4m+2$ 이면 (ii), (iii)에 의하여

$$2(4m+2)+(4m+3)=233, 12m=226$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 m 은 존재하지 않는다.

$k=4m+3$ 이면 (iii), (iv)에 의하여

$$(4m+3)+0=233, 4m=230$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 m 은 존재하지 않는다.

$k=4m+4$ 이면 (iv), (i)에 의하여

$$0+(4m+5)=233, 4m=228 \quad \therefore m=57$$

$$\therefore k=4m+4=4\times 57+4=232 \quad \begin{aligned} f(k+1)&=f(4m+5)=f(4(m+1)+1) \\ &=4(m+1)+1=4m+5 \end{aligned}$$

따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$77+232=309$$

19 답 24

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \text{이므로}$$

$$z_1^2=\left\{\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right\}^2=\frac{2\times(-2i)}{4}=-i$$

$$z_1^3=z_1^2z_1=-i\times\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}=-\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$$

$$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$$

$$z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{에서}$$

$$z_2^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2^3=z_2^2z_2=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$$

따라서 $z_1^n=z_2^n$ 을 만족시키는 자연수 n 은 8과 3의 공배수이므로 최소값은 24이다.

비법 NOTE

(1) 복소수 $z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 의 거듭제곱

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{에서 } 2z+1=\pm\sqrt{3}i$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4z^2+4z+1=-3 \quad \therefore z^2+z+1=0$$

양변에 $z-1$ 을 곱하면

$$(z-1)(z^2+z+1)=0, z^3-1=0 \quad \therefore z^3=1$$

(2) 복소수 $z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 의 거듭제곱

(1)과 같은 방법으로 하면 $z^3=-1$ 이 성립한다.

20 답 27

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{에서}$$

$$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$$

$$\alpha^3=\alpha^2\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{4i}{4}=i$$

$$\alpha^6=(\alpha^3)^2=i^2=-1, \alpha^{12}=(\alpha^6)^2=(-1)^2=1$$

한편 $\alpha^2=\beta$ 이므로 $\alpha^m\beta^n=\alpha^m(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

$\alpha^{m+2n}=i$ 를 만족시키는 $m+2n$ 의 값은 $12k+3$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴

이므로 3, 15, 27, 39, ...

이때 m, n 이 10 이하의 자연수이므로 $m+2n\leq 30$

따라서 $m+2n$ 의 최댓값은 27이다.

21 답 ⑤

(A)에서 a, b, c 중 한 수는 양수, 두 수는 음수이다.

$$(B) \text{에서 } \frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}}=-\sqrt{\frac{a-2}{b+2}} \text{이므로}$$

$$a-2>0, b+2<0 \quad \therefore a>2, b<-2$$

a 가 양수, b 가 음수이므로 c 는 음수이다.

(C)에서 $a+c<b$, 즉 $b-c>a>0$ 이므로 $b>c$

$$\therefore c<b<a$$

22 답 ④

$x+y<0, xy>0$ 이므로 $x<0, y<0$

$x=-X, y=-Y$ 로 놓으면 $X>0, Y>0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}&=\sqrt{\frac{-X}{-Y}}+\sqrt{\frac{-Y}{-X}}=\sqrt{\frac{X}{Y}}+\sqrt{\frac{Y}{X}} \\ &=\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{Y}}+\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}=\frac{(\sqrt{X})^2+(\sqrt{Y})^2}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}=\frac{X+Y}{\sqrt{XY}} \end{aligned}$$

이때 $x+y=-6, xy=4$ 에서 $X+Y=6, XY=4$ 이므로

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{X+Y}{\sqrt{XY}}=\frac{6}{\sqrt{4}}=3$$

23 답 10

(i) $a>0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{|a|}}{\sqrt{2a}+\sqrt{|a|}}&=\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{a}}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{a}(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \\ &=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(ii) $a<0$ 일 때,

$a=-A$ 로 놓으면 $A>0$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{|a|}}{\sqrt{2a}+\sqrt{|a|}}&=\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{-a}}{\sqrt{2a}+\sqrt{-a}}=\frac{\sqrt{-2A}-\sqrt{A}}{\sqrt{-2A}+\sqrt{A}}=\frac{\sqrt{2A}i-\sqrt{A}}{\sqrt{2A}i+\sqrt{A}} \\ &=\frac{\sqrt{A}(\sqrt{2}i-1)}{\sqrt{A}(\sqrt{2}i+1)}=\frac{\sqrt{2}i-1}{\sqrt{2}i+1}=\frac{(\sqrt{2}i-1)^2}{(\sqrt{2}i+1)(\sqrt{2}i-1)} \\ &=\frac{-1-2\sqrt{2}i}{-3}=\frac{1+2\sqrt{2}i}{3} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{|a|}}{\sqrt{2a}+\sqrt{|a|}}$ 가 될 수 있는 모든 값의 합은

$$(3-2\sqrt{2})+\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}=\left(\frac{10}{3}-2\sqrt{2}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

$$\text{따라서 } p=\frac{10}{3}-2\sqrt{2}, q=\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{이므로}$$

$$3p+9q=(10-6\sqrt{2})+6\sqrt{2}=10$$

24 답 ③

$a < 0, b < 0$ 이고, $a = -A, b = -B$ 로 놓으면 $A > 0, B > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}\sqrt{b}i}{\sqrt{ab}-\sqrt{a}i} = \frac{\sqrt{-A}-\sqrt{-A}\sqrt{-B}i}{\sqrt{AB}-\sqrt{-A}i} \\ &= \frac{\sqrt{Ai}-\sqrt{Ai} \times \sqrt{Bi} \times i}{\sqrt{AB}-\sqrt{Ai} \times i} = \frac{\sqrt{Ai}+\sqrt{AB}i}{\sqrt{AB}+\sqrt{A}} \\ &= \frac{(\sqrt{AB}+\sqrt{A})i}{\sqrt{AB}+\sqrt{A}} = i \end{aligned}$$

따라서 $z=i, \bar{z}=-i$ 이므로

$$\frac{z-\bar{z}z}{\sqrt{2}} = \frac{i-i \times (-i)}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

이때 $w = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ 라 하면

$$w^2 = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$w^4 = (w^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$w^8 = (w^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

따라서 n 이 8의 배수일 때 $\left(\frac{z-\bar{z}z}{\sqrt{2}}\right)^n = 1$ 을 만족시키므로 100 이하의 자연수 n 은 8, 16, 24, ..., 96의 12개이다.

step 3 최고난도 문제

| 48~49쪽

01 18 02 ② 03 144 04 ④ 05 150 06 ㄱ, ㄷ
07 ④ 08 $-i, i$

01 답 18

1단계 주사위에 적힌 수끼리 곱하여 음의 실수가 되는 경우 찾기

$-32 = -2^5$ 이므로 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32 가 될 수 없다.

이때 $2i, 1+i$ 에 대하여

$$(2i)^2 = -4$$

$$(1+i)^2 = 2i, (1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

$$2i(1+i)^2 = 2i \times 2i = -4$$

2단계 주사위에 적힌 수끼리 곱하여 -32 가 되는 경우 구하기

(i) $2i$ 가 2번 나오는 경우

2가 3번 나와야 $(2i)^2 \times 2^3 = -4 \times 8 = -32$ 이므로 주사위를 5번 던져야 한다.

(ii) $1+i$ 가 4번 나오는 경우

2가 3번 나와야 $(1+i)^4 \times 2^3 = -4 \times 8 = -32$ 이므로 주사위를 7번 던져야 한다.

(iii) $2i$ 가 1번, $1+i$ 가 2번 나오는 경우

2가 3번 나와야 $2i(1+i)^2 \times 2^3 = -4 \times 8 = -32$ 이므로 주사위를 6번 던져야 한다.

3단계 n 의 값의 합 구하기

(i), (ii), (iii)에서 n 의 값은 5, 6, 7이므로 그 합은

$$5+6+7=18$$

02 답 ②

1단계 α, β 의 실수부분, 허수부분에 대한 식 세우기

$\alpha = a+bi, \beta = c+di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

$$\alpha\beta=2 \text{에서 } (a-bi)(c+di)=2$$

$$(ac+bd)+(ad-bc)i=2$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$ac+bd=2 \quad \text{..... ㉠}, \quad ad-bc=0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\alpha-\beta=\sqrt{5}i \text{에서 } (a+bi)-(c+di)=\sqrt{5}i$$

$$(a-c)+(b-d)i=\sqrt{5}i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-c=0 \quad \text{..... ㉢}, \quad b-d=\sqrt{5} \quad \text{..... ㉣}$$

2단계 α, β 의 실수부분 구하기

㉢에서 $a=c$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면

$$ad-ab=0, -a(b-d)=0$$

$$\text{㉣을 대입하면 } -\sqrt{5}a=0 \quad \therefore a=0, c=0$$

3단계 $\alpha^3+7\beta$ 의 값 구하기

따라서 $\alpha=bi, \beta=di$ 이므로

$$\alpha^3+7\beta=(bi)^3+7di=(-b^3+7d)i \quad \text{..... ㉤}$$

㉠에서 $bd=2$ 이고, ㉣에서 $d=b-\sqrt{5}$ 이므로 이를 $bd=2$ 에 대입하면

$$b(b-\sqrt{5})=2 \quad \therefore b^2=\sqrt{5}b+2$$

$$\therefore b^3=\sqrt{5}b^2+2b=\sqrt{5}(\sqrt{5}b+2)+2b=7b+2\sqrt{5}$$

이를 ㉤에 대입하면

$$\alpha^3+7\beta=(-7b-2\sqrt{5}+7d)i=\{-7(b-d)-2\sqrt{5}\}i$$

$$=(-7\sqrt{5}-2\sqrt{5})i \quad (\because \text{㉣})$$

$$=-9\sqrt{5}i$$

4단계 p^2+q^2 의 값 구하기

따라서 $p=0, q=-9\sqrt{5}$ 이므로 $p^2+q^2=405$

다른 풀이

$$\bar{\alpha}\beta=2, \alpha-\beta=\sqrt{5}i \text{에서 } \bar{\alpha}\beta=2, \bar{\alpha}-\bar{\beta}=-\sqrt{5}i$$

$$\text{이때 } \bar{\alpha}=\frac{2}{\beta}, \bar{\beta}=\frac{2}{\alpha} \text{이므로 } \frac{2}{\beta}-\frac{2}{\alpha}=-\sqrt{5}i$$

$$\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=-\sqrt{5}i \quad \therefore \alpha\beta=\frac{2(\alpha-\beta)}{-\sqrt{5}i}=\frac{2\sqrt{5}i}{-\sqrt{5}i}=-2$$

$\alpha\beta=-2, \bar{\alpha}\beta=2$ 에서 각 변끼리 더하면

$$\alpha\beta+\bar{\alpha}\beta=0, (\alpha+\bar{\alpha})\beta=0$$

이때 $\beta \neq 0$ 이므로 $\alpha+\bar{\alpha}=0$

$\alpha\beta=-2, \alpha\bar{\beta}=2$ 에서 각 변끼리 더하면

$$\alpha\beta+\alpha\bar{\beta}=0, \alpha(\beta+\bar{\beta})=0$$

이때 $\alpha \neq 0$ 이므로 $\beta+\bar{\beta}=0$

따라서 α, β 는 모두 순허수이므로

$$\alpha=ai, \beta=bi \quad (a, b \text{는 실수}, ab \neq 0) \text{라 하면}$$

$$\alpha^3+7\beta=(ai)^3+7bi=(-a^3+7b)i \quad \text{..... ㉥}$$

$$\bar{\alpha}\beta=2 \text{에서 } -ai \times bi=2 \quad \therefore ab=2 \quad \text{..... ㉦}$$

$$\alpha-\beta=\sqrt{5}i \text{에서 } ai-bi=\sqrt{5}i \quad \therefore a-b=\sqrt{5} \quad \text{..... ㉧}$$

㉦에서 $b=a-\sqrt{5}$ 이므로 이를 ㉥에 대입하면

$$a(a-\sqrt{5})=2 \quad \therefore a^2=\sqrt{5}a+2$$

$$\therefore a^3=\sqrt{5}a^2+2a=\sqrt{5}(\sqrt{5}a+2)+2a=7a+2\sqrt{5}$$

이를 ㉥에 대입하면

$$\alpha^3+7\beta=(-7a-2\sqrt{5}+7b)i=\{-7(a-b)-2\sqrt{5}\}i$$

$$=(-7\sqrt{5}-2\sqrt{5})i \quad (\because \text{㉧})$$

$$=-9\sqrt{5}i$$

따라서 $p=0, q=-9\sqrt{5}$ 이므로 $p^2+q^2=405$

03 답 144

1단계 $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, z, \bar{z}$ 에 대한 식 세우기

임의의 복소수 z 에 대하여 $\alpha z + \beta \bar{z}$ 가 실수이므로

$\alpha z + \beta \bar{z} = \overline{\alpha z + \beta \bar{z}} \rightarrow$ 실수의 켈레복소수는 그 실수와 같다.

$$\alpha z + \beta \bar{z} = \overline{\alpha z + \beta \bar{z}}$$

$$\therefore (\alpha - \bar{\beta})z + (\beta - \bar{\alpha})\bar{z} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 사이의 관계식 구하기

임의의 복소수 z 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하므로

(i) $z=1$ 일 때,

$\bar{z}=1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(\alpha - \bar{\beta}) + (\beta - \bar{\alpha}) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) $z=i$ 일 때,

$\bar{z}=-i$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(\alpha - \bar{\beta})i - (\beta - \bar{\alpha})i = 0$$

$$\therefore (\alpha - \bar{\beta}) - (\beta - \bar{\alpha}) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \text{을 하면 } 2(\alpha - \bar{\beta}) = 0, \alpha - \bar{\beta} = 0 \quad \therefore \bar{\beta} = \alpha$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{을 하면 } 2(\beta - \bar{\alpha}) = 0, \beta - \bar{\alpha} = 0 \quad \therefore \bar{\alpha} = \beta$$

3단계 $(\alpha + \bar{\beta})^2(\bar{\alpha} + \beta)^2 + (\alpha - \bar{\beta})^2(\bar{\alpha} - \beta)^2$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha + \bar{\beta})^2(\bar{\alpha} + \beta)^2 + (\alpha - \bar{\beta})^2(\bar{\alpha} - \beta)^2 &= (2\alpha)^2(2\beta)^2 + 0 \\ &= 16(\alpha\beta)^2 \\ &= 16 \times 3^2 = 144 \end{aligned}$$

04 답 ④

1단계 $z\bar{z}$ 의 값 구하기

$z + \frac{1}{z}$ 이 실수이므로

$z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}} \rightarrow$ 실수의 켈레복소수는 그 실수와 같다.

$$z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

양변에 $z\bar{z}$ 를 곱하면

$$z^2\bar{z} + \bar{z} = z\bar{z}^2 + z, z^2\bar{z} - z\bar{z}^2 - z + \bar{z} = 0$$

$$z\bar{z}(z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0$$

이때 z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z\bar{z} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $z + \bar{z}$ 의 값 구하기

$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ 이 실수이므로

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}$$

양변에 $z^2\bar{z}^2$ 을 곱하면

$$z\bar{z}^2 + \bar{z}^2 = z^2\bar{z} + z^2, z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} + z^2 - \bar{z}^2 = 0$$

$$z\bar{z}(z - \bar{z}) + (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(z\bar{z} + z + \bar{z}) = 0$$

이때 $z \neq \bar{z}$ 이므로 $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$1 + z + \bar{z} = 0 \quad \therefore z + \bar{z} = -1$$

3단계 $(z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore (z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1) &= (z\bar{z})^2 - (z^2 + \bar{z}^2) + 1 \\ &= (z\bar{z})^2 - \{(z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z}\} + 1 \\ &= 1^2 - \{(-1)^2 - 2 \times 1\} + 1 = 3 \end{aligned}$$

05 답 150

1단계 $\left\{i^n + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$ 간단히 하기

$$\begin{aligned} \left\{i^n + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m &= \{i^n + (-i)^{2n}\}^m \\ &= \{i^n + (-1)^n\}^m \end{aligned}$$

2단계 n 의 값의 경우를 나누어 조건을 만족시키는 m, n 의 개수 구하기

$f(n) = i^n + (-1)^n$ 이라 하면 음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n = 4k + 1$ 일 때,

$$f(n) = f(4k + 1) = i^{4k+1} + (-1)^{4k+1} = i - 1 \text{이므로}$$

$$\{f(n)\}^2 = (i - 1)^2 = -2i, \{f(n)\}^4 = (-2i)^2 = -4,$$

$$\{f(n)\}^8 = 4^2, \{f(n)\}^{12} = -4^3,$$

$$\{f(n)\}^{16} = 4^4, \{f(n)\}^{20} = -4^5, \dots$$

즉, $n = 4k + 1$ 일 때 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m 은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이다.

또 $n = 4k + 1$ 꼴인 50 이하의 자연수 n 은 1, 5, 9, ..., 49의 13개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$6 \times 13 = 78$$

(ii) $n = 4k + 2$ 일 때,

$$f(n) = f(4k + 2) = i^{4k+2} + (-1)^{4k+2} = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \text{이므로}$$

$\{f(n)\}^m$ 의 값은 음의 실수가 될 수 없다.

(iii) $n = 4k + 3$ 일 때,

$$f(n) = f(4k + 3) = i^{4k+3} + (-1)^{4k+3} = i^3 - 1 = -i - 1 \text{이므로}$$

$$\{f(n)\}^2 = (-i - 1)^2 = 2i, \{f(n)\}^4 = (2i)^2 = -4,$$

$$\{f(n)\}^8 = 4^2, \{f(n)\}^{12} = -4^3,$$

$$\{f(n)\}^{16} = 4^4, \{f(n)\}^{20} = -4^5, \dots$$

즉, $n = 4k + 3$ 일 때 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m 은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이다.

또 $n = 4k + 3$ 꼴인 50 이하의 자연수 n 은 3, 7, 11, ..., 47의 12개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$6 \times 12 = 72$$

(iv) $n = 4k + 4$ 일 때,

$$f(n) = f(4k + 4) = i^{4k+4} + (-1)^{4k+4} = 1 + 1 = 2 \text{이므로 } \{f(n)\}^m \text{의}$$

값은 음의 실수가 될 수 없다.

3단계 순서쌍 (m, n) 의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$78 + 72 = 150$$

06 답 ㄱ, ㄷ

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 24의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이므로

$$f(24) = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^6 + i^8 + i^{12} + i^{24}$$

$$= i - 1 - i + 1 - 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 2$$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 2^{4m} 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{4m} 의 $(4m+1)$ 개이고, 이때

$2^2, 2^3, \dots, 2^{4m}$ 은 4의 배수이므로

$$f(2^{4m}) = i + i^2 + i^{2^2} + i^{2^3} + \dots + i^{2^{4m}}$$

└─ $(4m-1)$ 개 ─┘

$$= i - 1 + (4m-1) \times 1$$

$$= 4m - 2 + i$$

3단계 $\square$ 이 옳은지 확인하기

$\square$. $10^m = 2^m \times 5^m$ 의 양의 약수는 다음과 같이 $(m+1)(m+1)$ 개이다.

1	2	2^2	2^3	...	2^m
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$	...	$2^m \times 5$
5^2	2×5^2	$2^2 \times 5^2$	$2^3 \times 5^2$	...	$2^m \times 5^2$
5^3	2×5^3	$2^2 \times 5^3$	$2^3 \times 5^3$	...	$2^m \times 5^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
5^m	2×5^m	$2^2 \times 5^m$	$2^3 \times 5^m$	...	$2^m \times 5^m$
4로 나눈 나머지 1	4로 나눈 나머지 2	4의 배수			

$$\begin{aligned} \therefore f(10^m) &= (m+1)i + (m+1)i^2 + (m+1)(m-1) \times 1 \\ &= (m+1)i - (m+1) + (m+1)(m-1) \\ &= (m+1)(m-2) + (m+1)i \end{aligned}$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\square$, $\square$ 이다.

07 답 ④

1단계 $z^2, z^3, \dots, z^8$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \text{에서} \\ z^2 &= \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i \\ z^3 &= z^2 z = -i \times \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ z^4 &= (z^2)^2 = (-i)^2 = -1 \\ z^5 &= z^4 z = -z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ z^6 &= z^4 z^2 = -z^2 = i \\ z^7 &= z^4 z^3 = -z^3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ z^8 &= (z^4)^2 = (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

2단계 $z^n + \bar{z}^n + (z+\sqrt{2})^n + (\bar{z}+\sqrt{2})^n$ 의 값의 규칙 찾기

$$\text{이때 } \bar{z} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, z+\sqrt{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \bar{z}+\sqrt{2} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z^7, z+\sqrt{2} = z^3, \bar{z}+\sqrt{2} = z^5 = -z \\ f(n) &= z^n + \bar{z}^n + (z+\sqrt{2})^n + (\bar{z}+\sqrt{2})^n \text{이라 하면} \\ f(n) &= z^n + (-z^3)^n + (z^3)^n + (-z)^n \\ &= z^n + (-z)^n + z^{3n} + (-z^3)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } n \text{이 홀수, 즉 } n=2k+1 (k \text{는 음이 아닌 정수) \text{ 꼴이면} \\ f(n) &= f(2k+1) \\ &= z^{2k+1} + (-z)^{2k+1} + z^{3(2k+1)} + (-z^3)^{2k+1} \\ &= z^{2k+1} - z^{2k+1} + z^{6k+3} - z^{6k+3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \text{이 짝수일 때, } f(n) \text{의 값을 구하면} \\ f(2) &= z^2 + z^2 + z^6 + z^6 = 2(z^2 + z^6) = 2(-i+i) = 0 \\ f(4) &= z^4 + z^4 + z^{12} + z^{12} = 4z^4 = -4 \\ f(6) &= z^6 + z^6 + z^{18} + z^{18} = 2(z^6 + z^2) = 2(i-i) = 0 \\ f(8) &= z^8 + z^8 + z^{24} + z^{24} = 4z^8 = 4 \\ \text{또 } z^8 &= 1 \text{이므로} \\ f(2) &= f(10) = f(18) = \dots = 0 \\ f(4) &= f(12) = f(20) = \dots = -4 \\ f(6) &= f(14) = f(22) = \dots = 0 \\ f(8) &= f(16) = f(24) = \dots = 4 \end{aligned}$$

3단계 n 의 개수 구하기

따라서 $z^n + \bar{z}^n + (z+\sqrt{2})^n + (\bar{z}+\sqrt{2})^n \neq 0$, 즉 $f(n) \neq 0$ 을 만족시키는 자연수 n 은 4의 배수이므로 50 이하의 자연수 n 은 4, 8, 12, ..., 48의 12개이다.

참고

n	z^n	$\bar{z}^n$	$(z+\sqrt{2})^n$	$(\bar{z}+\sqrt{2})^n$	합계
1	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	0
2	$-i$	i	i	$-i$	0
3	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$	0
4	-1	-1	-1	-1	-4
5	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	0
6	i	$-i$	$-i$	i	0
7	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	0
8	1	1	1	1	4

08 답 $-i, i$

1단계 $\sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}}$ 의 값 구하기

(i) $a_1 a_3 a_5 \cdots a_{199} = -1$ 이므로 홀수 n 에 대하여 값이 -1 인 a_n 의 개수는 홀수이다.

$$\begin{aligned} \text{값이 } -1 \text{인 } a_n \text{이 1개이면} \\ \sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}} &= \sqrt{-1} = i \\ \text{값이 } -1 \text{인 } a_n \text{이 3개이면} \\ \sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}} &= (\sqrt{-1})^3 = i^3 = -i \\ \text{값이 } -1 \text{인 } a_n \text{이 5개이면} \\ \sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}} &= (\sqrt{-1})^5 = i^5 = i \\ \text{값이 } -1 \text{인 } a_n \text{이 7개이면} \\ \sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}} &= (\sqrt{-1})^7 = i^7 = -i \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}}$ 의 값은 i 또는 $-i$ 이다.

2단계 $\sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}}$ 의 값 구하기

(ii) $a_2 a_4 a_6 \cdots a_{200} = 1$ 이므로 짝수 m 에 대하여 값이 -1 인 a_m 의 개수는 0 또는 짝수이다.

$$\begin{aligned} \text{값이 } -1 \text{인 } a_m \text{이 0개이면} \\ \sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}} &= 1 \\ \text{값이 } -1 \text{인 } a_m \text{이 2개이면} \\ \sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}} &= (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1 \\ \text{값이 } -1 \text{인 } a_m \text{이 4개이면} \\ \sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}} &= (\sqrt{-1})^4 = i^4 = 1 \\ \text{값이 } -1 \text{인 } a_m \text{이 6개이면} \\ \sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}} &= (\sqrt{-1})^6 = i^6 = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}}$ 의 값은 1 또는 -1 이다.

3단계 $\frac{\sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}}}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}}}$ 의 값 구하기

(i), (ii)에서 $\frac{\sqrt{a_2} \sqrt{a_4} \sqrt{a_6} \cdots \sqrt{a_{200}}}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_3} \sqrt{a_5} \cdots \sqrt{a_{199}}}$ 의 값은

$$\frac{1}{i}, \frac{1}{-i}, \frac{-1}{i}, \frac{-1}{-i} \rightarrow \frac{1}{i} = -i, -\frac{1}{i} = i$$

따라서 구하는 값은 $-i, i$ 이다.

step 1 핵심 문제

| 50~51쪽

01 ①	02 ①	03 ③	04 15	05 ②	06 63
07 -2	08 ②	09 ②	10 33	11 2	12 ②

01 답 ①

방정식 $x^2 - |2x| = \sqrt{(2x-2)^2} + 2$ 에서 $x^2 - |2x| = 2|x-1| + 2$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$|2x| = -2x, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x = -2(x-1) + 2, x^2 + 4x - 4 = 0 \quad \therefore x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2 - 2\sqrt{2}$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$|2x| = 2x, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x = -2(x-1) + 2, x^2 = 4 \quad \therefore x = \pm 2$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 근이 없다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|2x| = 2x, |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x = 2(x-1) + 2, x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$-2 - 2\sqrt{2} + 4 = 2 - 2\sqrt{2}$$

02 답 ①

이차방정식 $x^2 - 2(m+a)x + m^2 + m + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m+a)^2 - (m^2 + m + b) = 0, (2a-1)m + a^2 - b = 0$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a-1=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$$

$$\therefore 12(a+b) = 12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 9$$

03 답 ③

이차식 $(a+2)x^2 - 4(a-1)x + ka$ 가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(a+2)x^2 - 4(a-1)x + ka = 0$ 의 판별식이 0이어야 한다.

이차방정식 $(a+2)x^2 - 4(a-1)x + ka = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 4(a-1)^2 - ka(a+2) = 0$$

$$(4-k)a^2 - 2(k+4)a + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 실수 a 의 값이 오직 하나뿐이다.

(i) $4-k=0$, 즉 $k=4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } -16a + 4 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

즉, $k=4$ 일 때 a 의 값이 한 개 존재한다.

(ii) $4-k \neq 0$, 즉 $k \neq 4$ 일 때,

이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (k+4)^2 - 4(4-k) = 0, k^2 + 12k = 0$$

$$k(k+12) = 0 \quad \therefore k = -12 \text{ 또는 } k = 0$$

(i), (ii)에서 실수 k 는 $-12, 0, 4$ 의 3개이다.

04 답 15

이차방정식 $3x^2 - 4ax + 4b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 12b < 0 \quad \therefore a^2 < 3b$$

이때 a, b 는 주사위를 던져서 나오는 눈의 수이므로 1부터 6까지의 자연수를 값으로 갖는다.

(i) $a=1$ 일 때,

$$1 < 3b \text{이므로 } b > \frac{1}{3}$$

따라서 b 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 순서쌍 (a, b) 는 6개이다.

(ii) $a=2$ 일 때,

$$4 < 3b \text{이므로 } b > \frac{4}{3}$$

따라서 b 의 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로 순서쌍 (a, b) 는 5개이다.

(iii) $a=3$ 일 때,

$$9 < 3b \text{이므로 } b > 3$$

따라서 b 의 값은 4, 5, 6이므로 순서쌍 (a, b) 는 3개이다.

(iv) $a=4$ 일 때,

$$16 < 3b \text{이므로 } b > \frac{16}{3}$$

따라서 $b=6$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 1개이다.

(v) $a=5$ 일 때,

$$25 < 3b \text{이므로 } b > \frac{25}{3}$$

이를 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않는다.

(vi) $a=6$ 일 때,

$$36 < 3b \text{이므로 } b > 12$$

이를 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $6+5+3+1=15$

05 답 ②

이차방정식 $x^2 - (n^2 + 5n + 6)x + n + 2 = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n^2 + 5n + 6, \alpha_n \beta_n = n + 2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{n^2 + 5n + 6}{n + 2} = \frac{(n+3)(n+2)}{n+2} = n+3$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{10}} \right) &+ \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + \dots + \frac{1}{\beta_{10}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} \right) + \left(\frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\beta_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\alpha_{10}} + \frac{1}{\beta_{10}} \right) \\ &= 4 + 5 + 6 + \dots + 13 = 85 \end{aligned}$$

06 답 63

이차방정식 $x^2 + 5x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 0, \beta^2 + 5\beta + 2 = 0$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{6\beta}{3\alpha^2 + 16\alpha + 6} + \frac{6\alpha}{3\beta^2 + 16\beta + 6} \\ &= \frac{6\beta}{3(\alpha^2 + 5\alpha + 2) + \alpha} + \frac{6\alpha}{3(\beta^2 + 5\beta + 2) + \beta} \\ &= \frac{6\beta}{\alpha} + \frac{6\alpha}{\beta} = \frac{6(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta} = \frac{6\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}}{\alpha\beta} \\ &= \frac{6\{(-5)^2 - 2 \times 2\}}{2} = 63 \end{aligned}$$

07 답 -2

이차방정식 $x^2 - (8k+4)x + 5k^2 + 7 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } \alpha + 3\alpha = 8k + 4 \quad \therefore \alpha = 2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha \times 3\alpha = 5k^2 + 7 \quad \therefore 3\alpha^2 = 5k^2 + 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$3(2k+1)^2 = 5k^2 + 7, \quad 7k^2 + 12k - 4 = 0$$

$$(k+2)(7k-2) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = \frac{2}{7}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = -2$

08 답 ②

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(\alpha) = 0, \quad f(\beta) = 0$$

이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근은

$$2x-1 = \alpha \text{ 또는 } 2x-1 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{2} \times \frac{\beta+1}{2} = \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{4} = \frac{6+1+1}{4} = 2$$

비법 NOTE

(1) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$

따라서 이차방정식 $f(ax+b) = 0$ 의 두 근은

$$ax+b = \alpha \text{ 또는 } ax+b = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha-b}{a} \text{ 또는 } x = \frac{\beta-b}{a}$$

(2) 이차방정식 $f(ax+b) = 0$ 의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우

이차방정식 $f(ax+b) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(a\alpha+b) = 0, \quad f(a\beta+b) = 0$$

따라서 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근은

$$x = a\alpha+b \text{ 또는 } x = a\beta+b$$

다른 풀이

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 α, β 의 합이 1, 곱이 6이므로

$$f(x) = k(x^2 - x + 6) \quad (k \neq 0) \text{이라 하면}$$

$$f(2x-1) = k\{(2x-1)^2 - (2x-1) + 6\} = k(4x^2 - 6x + 8)$$

따라서 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이다.

09 답 ②

이차방정식 $x^2 + (2m-10)x + m^2 + 1 = 0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 양수이므로 $D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 이어야 한다.

$$(i) D \geq 0 \text{에서 } \frac{D}{4} = (m-5)^2 - (m^2+1) \geq 0$$

$$-10m + 24 \geq 0 \quad \therefore m \leq \frac{12}{5} \rightarrow \text{이를 만족시키는 자연수 } m \text{의 값은 } 1, 2 \text{이다.}$$

$$(ii) \alpha + \beta > 0 \text{에서 } -2m + 10 > 0 \quad \therefore m < 5 \rightarrow \text{이를 만족시키는 자연수 } m \text{의 값은 } 1, 2, 3, 4 \text{이다.}$$

$$(iii) \alpha\beta > 0 \text{에서 } m^2 + 1 > 0$$

이는 모든 자연수 m 에 대하여 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 자연수 m 은 1, 2의 2개이다.

10 답 33

이차방정식 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = -5 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 20\%$$

$\alpha + \frac{1}{\alpha}, \beta + \frac{1}{\beta}$ 의 합과 곱을 각각 구하면

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + \frac{3}{-5} = \frac{12}{5}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \alpha\beta + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \alpha\beta + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1}{\alpha\beta}$$

$$= -5 + \frac{3^2 - 2 \times (-5) + 1}{-5} = -9 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

$\alpha + \frac{1}{\alpha}, \beta + \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 5인 이차방정식은

$$5\left(x^2 - \frac{12}{5}x - 9\right) = 0 \quad \therefore 5x^2 - 12x - 45 = 0 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

$$\text{따라서 } a = -12, b = -45 \text{이므로 } a - b = 33 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 20\%$$

11 답 2

원래의 이차방정식을 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수, $a \neq 0$)이라 하자. x 의 계수를 잘못 보고 풀었을 때 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 였고 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}i$ 이다.

이때 a 와 c 는 바르게 보고 풀었으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 3a$$

상수항을 잘못 보고 풀었을 때 한 근이 $\sqrt{2} + i$ 였고 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\sqrt{2} - i$ 이다.

이때 a 와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$(\sqrt{2} + i) + (\sqrt{2} - i) = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -2\sqrt{2}a$$

따라서 원래의 이차방정식 $ax^2 - 2\sqrt{2}ax + 3a = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2\sqrt{2}, \quad \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 = 2$$

12 답 ②

$\overline{AE} = \alpha, \overline{AH} = \beta$ 라 하면

$$\overline{PF} = 10 - \alpha, \overline{PG} = 10 - \beta$$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$$2\{(10 - \alpha) + (10 - \beta)\} = 28$$

$$20 - \alpha - \beta = 14 \quad \therefore \alpha + \beta = 6$$

직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

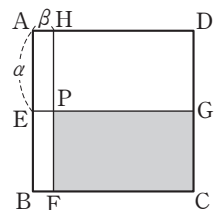
$$(10 - \alpha)(10 - \beta) = 46$$

$$100 - 10(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 46$$

$$100 - 10 \times 6 + \alpha\beta = 46 \quad \therefore \alpha\beta = 6$$

이차항의 계수가 1이고 두 선분 AE와 AH의 길이 α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - 6x + 6 = 0$$



01 -1	02 ③	03 ④	04 1	05 ③	06 ㄱ, ㄷ
07 ⑤	08 ⑤	09 ②	10 -6	11 ①	12 ⑤
13 ㄴ, ㄷ	14 11	15 83	16 ②	17 ④	
18 ④	19 4	20 27	21 ③	22 -1	23 ①
24 ②	25 ⑤	26 ③	27 $8\sqrt{3}$		

01 답 -1

방정식 $(a^2+2a)x=a(4x-3)+3x+9$ 에서

$$(a^2-2a-3)x=-3a+9$$

이 방정식의 해가 무수히 많으려면

$$a^2-2a-3=0 \quad \dots\dots ㉠, \quad -3a+9=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡에서 $a=3$

이를 ㉠에 대입하면 성립하므로 $a=3$ 배점 40%

방정식 $x^2-a|x-1|-7=0$ 에서 $x^2-3|x-1|-7=0$

(i) $x<1$ 일 때,

$$|x-1|=-(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2+3(x-1)-7=0, \quad x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0 \quad \therefore x=-5 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x<1$ 이므로 $x=-5$ 배점 20%

(ii) $x\geq 1$ 일 때,

$$|x-1|=x-1 \text{이므로}$$

$$x^2-3(x-1)-7=0, \quad x^2-3x-4=0$$

$$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x\geq 1$ 이므로 $x=4$ 배점 20%

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $-5+4=-1$ 배점 20%

개념 NOTE

x 에 대한 방정식 $ax=b$ 에서

(1) 해가 존재하지 않으려면 $a=0, b\neq 0$

(2) 해가 무수히 많으려면 $a=0, b=0$

02 답 ③

이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$ 의 한 근이 $a=2+\sqrt{3}$ 이므로

$$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0, \quad a(7+4\sqrt{3})+2\sqrt{3}b+3b+c=0$$

$$(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$$

a, b, c 가 유리수이므로

$$7a+3b+c=0, \quad 4a+2b=0$$

$$\therefore b=-2a, \quad c=-7a-3b=-7a-3\times(-2a)=-a$$

이를 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$ 에 대입하면 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$

$$x^2-2\sqrt{3}x-1=0 \quad (\because a\neq 0) \quad \therefore x=\sqrt{3}\pm 2$$

따라서 $\beta=\sqrt{3}-2$ 이므로

$$a+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=2+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$$

$$=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$$

개념 NOTE

a, b, c, d 는 유리수, $\sqrt{m}$ 은 무리수일 때

(1) $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$ 이면 $a=c, b=d$

(2) $a+b\sqrt{m}=0$ 이면 $a=0, b=0$

다른 풀이

$$t=\sqrt{3}x \text{라 하면 } x=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0 \text{에서}$$

$$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0$$

$$\therefore at^2+3bt+3c=0$$

이 이차방정식의 한 근이 $\sqrt{3}a=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$ 이고 계수가 유리수이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{3}$ 이다.

$$\therefore \beta=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$$

$$\therefore a+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=2+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} \\ =2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$$

03 답 ④

(i) $1<x<2$ 일 때,

$$|4x-8|=-(4x-8) \text{이고 } [x]=1 \text{이므로}$$

$$-x(4x-8)=3, \quad 4x^2-8x+3=0$$

$$(2x-1)(2x-3)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

그런데 $1<x<2$ 이므로 $x=\frac{3}{2}$

(ii) $2\leq x<3$ 일 때,

$$|4x-8|=4x-8 \text{이고 } [x]=2 \text{이므로}$$

$$x(4x-8)=5, \quad 4x^2-8x-5=0$$

$$(2x+1)(2x-5)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

그런데 $2\leq x<3$ 이므로 $x=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은

$$\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$$

04 답 1

(i) $0\leq x<1$ 일 때,

$$[x]=0, \quad [x+1]=1 \text{이므로}$$

$$x^2-4=0, \quad x^2=4$$

$$\therefore x=\pm 2$$

그런데 $0\leq x<1$ 이므로 근이 없다.

(ii) $1\leq x<2$ 일 때,

$$[x]=1, \quad [x+1]=2 \text{이므로}$$

$$2x^2-2x-4=0, \quad (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $1\leq x<2$ 이므로 근이 없다.

(iii) $2\leq x<3$ 일 때,

$$[x]=2, \quad [x+1]=3 \text{이므로}$$

$$3x^2-4x-4=0, \quad (3x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $2\leq x<3$ 이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은 2의 1개이다.

idea
05 답 ③

p 는 소수이므로 이차방정식 $px^2 - (p^2+1)x + 3 = 0$ 의 계수는 모두 정수이다.

이 이차방정식이 유리수인 근을 가지려면 이차식 $px^2 - (p^2+1)x + 3$ 은 정수 a, b 에 대하여 $(px-a)(x-b)$ 로 인수분해되어야 한다.

즉, $px^2 - (p^2+1)x + 3 = (px-a)(x-b)$ 에서

$$px^2 - (p^2+1)x + 3 = px^2 - (a+pb)x + ab$$

$ab=3$ 이고 a, b 는 정수이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(-3, -1), (-1, -3), (1, 3), (3, 1)$

또 이차방정식 $(px-a)(x-b)=0$ 의 한 근이 b 이므로 이차방정식

$$px^2 - (p^2+1)x + 3 = 0$$
의 한 근도 b 이다.

(i) $b=-3$ 일 때,

이차방정식 $px^2 - (p^2+1)x + 3 = 0$ 의 한 근이 -3 이므로

$$9p + 3(p^2+1) + 3 = 0, p^2 + 3p + 2 = 0$$

$$(p+2)(p+1) = 0 \quad \therefore p = -2 \text{ 또는 } p = -1$$

그런데 p 는 소수이므로 값이 존재하지 않는다.

(ii) $b=-1$ 일 때,

이차방정식 $px^2 - (p^2+1)x + 3 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로

$$p + p^2 + 1 + 3 = 0, p^2 + p + 4 = 0$$

$$\therefore p = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

그런데 p 는 소수이므로 값이 존재하지 않는다.

(iii) $b=1$ 일 때,

이차방정식 $px^2 - (p^2+1)x + 3 = 0$ 의 한 근이 1 이므로

$$p - (p^2+1) + 3 = 0, p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p+1)(p-2) = 0 \quad \therefore p = -1 \text{ 또는 } p = 2$$

그런데 p 는 소수이므로 $p=2$

(iv) $b=3$ 일 때,

이차방정식 $px^2 - (p^2+1)x + 3 = 0$ 의 한 근이 3 이므로

$$9p - 3(p^2+1) + 3 = 0, p^2 - 3p = 0$$

$$p(p-3) = 0 \quad \therefore p = 0 \text{ 또는 } p = 3$$

그런데 p 는 소수이므로 $p=3$

(i)~(iv)에서 모든 p 의 값의 합은

$$2+3=5$$

06 답 ㄱ, ㄷ

이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = b^2 - 4ac$$

이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $ax^2+2bx+c=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ac$$

ㄱ. $f(x), g(x)$ 가 이차식이므로 $a \neq 0$ ㉠

두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$ 이 모두 중근을 가지면

$$b^2 - 4ac = b^2 - ac = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{즉, } -4ac = -ac \text{이므로 } ac = 0 \quad \therefore c = 0 \text{ (}\because \text{ ㉠)}$$

이를 ㉡에 대입하면 $b^2=0$

$$\therefore b^2 + c^2 = 0$$

ㄷ. $a=1, b=1, c=\frac{1}{2}$ 이면 $\frac{D_2}{4} = 1 - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ 이므로 이차방정식

$g(x)=0$ 은 실근을 갖는다.

그런데 $D_1 = 1 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$ 이므로 이차방정식 $f(x)=0$ 은

허근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $g(x)=0$ 이 허근을 가지면 $D_2 < 0$ 이므로

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ac < 0 \quad \therefore 4b^2 - 4ac < 0$$

이때 $D_1 = b^2 - 4ac \leq 4b^2 - 4ac < 0$ 이므로 이차방정식 $f(x)=0$ 도 허근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 ⑤

이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+2(a+b)x+a^2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$$

이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $(b-a)x^2+bx-b=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = b^2 + 4(b-a)b = 5b^2 - 4ab$$

ㄱ. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면 $a < 0, b < 0 \rightarrow$ 조건에서 a, b 는 0이 아닌 실수이다.

$$\text{이때 } 2ab > 0, b^2 > 0 \text{이므로 } \frac{D_1}{4} = 2ab + b^2 > 0$$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $a > 0, b < 0$

$$\text{이때 } 5b^2 > 0, -4ab > 0 \text{이므로 } D_2 = 5b^2 - 4ab > 0$$

따라서 이차방정식 $g(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a > b$ 일 때,

(i) $b > 0$ 인 경우

$$a > 0 \text{이므로 } 2ab > 0, b^2 > 0$$

$$\therefore \frac{D_1}{4} = 2ab + b^2 > 0$$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $b < 0$ 인 경우

$$b^2 > 0, 4(b-a)b \geq 0 \text{이므로}$$

$$D_2 = b^2 + 4(b-a)b > 0 \quad \begin{matrix} a > b \text{에서 } b-a < 0 \text{이고 } b < 0 \text{이므로} \\ 4(b-a)b > 0 \end{matrix}$$

따라서 이차방정식 $g(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ⑤

방정식 $|x^2-4x+2k-2|=k+5$ 에서

$$x^2-4x+2k-2=k+5 \text{ 또는 } x^2-4x+2k-2=-(k+5)$$

(i) $x^2-4x+2k-2=k+5$ 에서 $x^2-4x+k-7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 4 - (k-7) \geq 0 \quad \therefore k \leq 11$$

(ii) $x^2-4x+2k-2=-(k+5)$ 에서 $x^2-4x+3k+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 4 - (3k+3) \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 $k \leq 11$ ㉠

(i) 또는 (ii)이므로 두 범위를 합한 부분을 생각한다.

방정식 $|x^2-4x+2k-2|=k+5$ 에서 $k+5 < 0$ 이면 근이 존재하지 않으므로

$$k+5 \geq 0 \quad \therefore k \geq -5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 정수 k 의 값은 $-5, -4, -3, \dots, 11$ 이므로

$$M=11, m=-5 \quad \therefore M-m=16$$

09 답 ②

이차방정식 $x^2 - 2(k+3)x + k^2 - 12 = 0$ 의 실근을 α 라 하면
 $\alpha^2 - 2(k+3)\alpha + k^2 - 12 = 0$
 $\therefore k^2 - 2\alpha k + \alpha^2 - 6\alpha - 12 = 0$
 이때 실수 k 가 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = \alpha^2 - (\alpha^2 - 6\alpha - 12) \geq 0$
 $6\alpha + 12 \geq 0 \quad \therefore \alpha \geq -2$
 따라서 실근 α 의 최솟값은 -2 이다.

10 답 -6

$x = \frac{y^2 - 4y - 2}{y^2 + 4y + 4}$ 에서
 $x(y^2 + 4y + 4) = y^2 - 4y - 2$
 $\therefore (x-1)y^2 + 4(x+1)y + 4x+2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 (i) $x=1$ 일 때,
 $\textcircled{1}$ 에서 $8y+6=0 \quad \therefore y = -\frac{3}{4}$
 (ii) $x \neq 1$ 일 때,
 $\textcircled{1}$ 은 y 에 대한 이차방정식이고 y 가 실수이므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 4(x+1)^2 - (x-1)(4x+2) \geq 0$
 $10x+6 \geq 0 \quad \therefore x \geq -\frac{3}{5}$
 그런데 $x \neq 1$ 이므로
 $-\frac{3}{5} \leq x < 1$ 또는 $x > 1$
 (i), (ii)에서 $x \geq -\frac{3}{5}$
 따라서 $m = -\frac{3}{5}$ 이므로
 $10m = -6$

11 답 ①

이차방정식 $x^2 + (m+1)x + 2m-1 = 0$ 에서
 $x = \frac{-(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4(2m-1)}}{2}$
 $= \frac{-(m+1) \pm \sqrt{m^2 - 6m + 5}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $D = m^2 - 6m + 5$ 라 할 때, 주어진 이차방정식의 두 근이 모두 정수가 되려면 D 가 제곱수이거나 0이어야 한다.
 이때 $D = (m-3)^2 - 4$ 이고 m 이 정수이므로 $D=0$ 이어야 한다.
 즉, $m^2 - 6m + 5 = 0$ 에서 $\hookrightarrow (m-3)^2 - 4 = n^2$ (n 은 0이 아닌 정수)이라 하면
 $(m-1)(m-5) = 0$ $(m-3)^2 - n^2 = 4$
 $\therefore m=1$ 또는 $m=5$ $\hookrightarrow$ 그런데 $1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, 4^2=16, \dots$ 이므로
 차가 4가 되는 두 제곱수는 존재하지 않는다.
 즉, D 가 제곱수인 경우는 존재하지 않는다.
 (i) $m=1$ 일 때,
 $\textcircled{1}$ 에서 $x = -1$
 따라서 근이 정수이다.
 (ii) $m=5$ 일 때,
 $\textcircled{1}$ 에서 $x = -3$
 따라서 근이 정수이다.
 (i), (ii)에서 모든 정수 m 의 값의 합은
 $1+5=6$

12 답 ⑤

이차방정식 $f(x)=0$ 의 이차항의 계수가 1이고 $(\textcircled{7})$ 에서 두 근의 곱이 7이므로 $f(x) = x^2 + kx + 7$ (k 는 실수)이라 하자.
 $(\textcircled{8})$ 에서 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$
 $f(\alpha) + f(\beta) = 3$ 에서
 $(\alpha^2 + k\alpha + 7) + (\beta^2 + k\beta + 7) = 3$
 $(\alpha^2 + \beta^2) + k(\alpha + \beta) + 14 = 3$
 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + k(\alpha + \beta) + 11 = 0$
 $3^2 - 2 \times 1 + 3k + 11 = 0$
 $3k = -18 \quad \therefore k = -6$
 따라서 $f(x) = x^2 - 6x + 7$ 이므로
 $f(7) = 49 - 42 + 7 = 14$

13 답 ㄴ, ㄷ

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 1$
 ㄴ. $\alpha\beta = 1 > 0$ 이므로 α 와 β 는 서로 부호가 같다.
 $\therefore |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
 ㄴ. 이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 서로 다른 두 실근이 존재하므로
 $D = a^2 - 4 > 0$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= (-a)^2 - 2 \times 1$
 $= a^2 - 2$
 $= (a^2 - 4) + 2 > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 ㄷ. $\frac{\beta^3}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta} = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} = \alpha^4 + \beta^4$
 $= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$
 $= (a^2 + \beta^2)^2 - 2 > 2^2 - 2 = 2 \quad (\because \textcircled{1})$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 답 11

이차방정식 $x^2 + (a-1)x + 2a-2 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -(a-1), \alpha\beta = 2a-2$
 이때 $a < 1$ 에서 $a-1 < 0$ 이므로
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta < 0$
 즉, α 와 β 는 서로 부호가 다르므로
 $(|\alpha| + |\beta|)^2 = (\alpha - \beta)^2$
 $(4\sqrt{3})^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
 $48 = (a-1)^2 - 4(2a-2)$
 $a^2 - 10a - 39 = 0$
 $(a+3)(a-13) = 0$
 $\therefore a = -3$ 또는 $a = 13$
 그런데 $a < 1$ 이므로 $a = -3$
 따라서 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -8$ 이므로
 $|\alpha - 1| |\beta - 1| = |(\alpha - 1)(\beta - 1)| = |\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1|$
 $= |-8 - 4 + 1| = 11$

15 답 83

이차방정식 $ax^2 - (5a-4)x - 20 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$\alpha\beta = -\frac{20}{a} < 0 \quad (\because a > 0)$$

따라서 α 와 β 는 서로 부호가 다르다.

이때 두 근의 절댓값의 비가 2:5이므로 $|\alpha| : |\beta| = 2 : 5$ 라 하면

$\alpha = 2k, \beta = -5k (k \neq 0)$ 로 놓을 수 있다.배점 30%

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } -3k = \frac{5a-4}{a}, -3k = 5 - \frac{4}{a}$$

$$\therefore \frac{4}{a} = 3k + 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } -10k^2 = -\frac{20}{a}$$

$$\therefore 2k^2 = \frac{4}{a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2k^2 = 3k + 5, 2k^2 - 3k - 5 = 0$$

$$(k+1)(2k-5) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = \frac{5}{2}$$

이를 ②에 대입하여 풀면

$$a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{8}{25} \quad \dots\dots\text{배점 40\%}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $2 + \frac{8}{25} = \frac{58}{25}$ 이므로

$$p = 25, q = 58$$

$$\therefore p + q = 83 \quad \dots\dots\text{배점 30\%}$$

16 답 ②

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 c, d 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$c + d = a, cd = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 ㉠에서 a, b 는 100 이하의 자연수이므로

$$c + d \leq 100, cd \leq 100$$

㉡에서 c 와 d 는 각각 3개의 양의 약수를 가지므로 c, d 는 소수의 제곱수이다.

㉢에서 c, d 는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로 4, 9, 25, 49 중에서 서로 다른 값을 갖는다.

그런데 $cd \leq 100$ 이어야 하므로

(i) $c = 4, d = 9$ 또는 $c = 9, d = 4$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = c + d = 13, b = cd = 36$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 (13, 36)의 1개이다.

(ii) $c = 4, d = 25$ 또는 $c = 25, d = 4$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = c + d = 29, b = cd = 100$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 (29, 100)의 1개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $1 + 1 = 2$

비법 NOTE

- 어떤 수 p 가 2개의 양의 약수를 가지면 p 는 소수이다.
- 어떤 수 p 가 3개의 양의 약수를 가지면 p 는 소수의 제곱수이다.
- 어떤 수 p 를 10이 아닌 서로 다른 두 자연수 m, n 에 대하여 $p = m \times n$ 꼴로 나타낼 수 있으면 p 의 양의 약수는 4개 이상이다.

17 답 ④

이차방정식 $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ 에서

$$x^2 - (a+b)x + ab + x^2 - (b+c)x + bc + x^2 - (c+a)x + ca = 0$$

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$$

이 이차방정식의 두 근의 합과 곱이 각각 4, -3 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2(a+b+c)}{3} = 4, \frac{ab+bc+ca}{3} = -3$$

$$\therefore a+b+c = 6, ab+bc+ca = -9$$

이차방정식 $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = 0$ 에서

$$x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 2bx + b^2 + x^2 - 2cx + c^2 = 0$$

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

이 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{3} \\ = \frac{6^2 - 2 \times (-9)}{3} = 18$$

18 답 ④

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}, \alpha\beta = b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이차방정식 $3x^2 + ax - 1 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + 2, -\frac{1}{\beta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2 - \frac{1}{\beta} = -\frac{a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}, -\frac{\alpha+2}{\beta} = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①을 ③의 우변에 대입하면

$$\alpha + 2 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{3}(\alpha + \beta) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{에서 } \alpha + 2 = \frac{1}{3}\beta \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}\beta - 2 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

⑥을 ②에 대입하면

$$\frac{1}{3}\beta - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\beta - 2 + \beta\right)$$

양변에 9를 곱하면

$$3\beta^2 - 9 = 4\beta^2 - 6\beta, \beta^2 - 6\beta + 9 = 0$$

$$(\beta - 3)^2 = 0 \quad \therefore \beta = 3$$

$$\text{이를 ⑥에 대입하면 } \alpha = \frac{1}{3} \times 3 - 2 = -1$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -(\alpha + \beta) = -2, b = \alpha\beta = -3 \text{이므로}$$

$$|a| + |b| = 2 + 3 = 5$$

19 답 4

이차방정식 $x^2 - mx + n = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 2mx + 3n = 0$ 의 두 근이 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = 2m, (\alpha^2 + \beta^2)\alpha\beta = 3n$$

이때 ①에서 $\alpha^2 + \beta^2 = (a+b)^2 - 2ab = m^2 - 2n, \alpha\beta = n$ 이므로

$$m^2 - n = 2m \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(m^2 - 2n)n = 3n \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{이때 ③에서 } (m^2 - 2n - 3)n = 0$$

$$\therefore n = 0 \text{ 또는 } m^2 - 2n - 3 = 0$$

(i) $n=0$ 일 때,

㉠에 대입하면

$$m^2=2m, m^2-2m=0, m(m-2)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=2$$

따라서 순서쌍 (m, n) 은 $(0, 0), (2, 0)$ 의 2개이다.

(ii) $m^2-2n-3=0$ 일 때,

$$n=\frac{m^2-3}{2} \text{이므로 이를 ㉠에 대입하면}$$

$$m^2-\frac{m^2-3}{2}=2m, m^2-4m+3=0$$

$$(m-1)(m-3)=0 \quad \therefore m=1 \text{ 또는 } m=3$$

$$\text{이를 } n=\frac{m^2-3}{2} \text{에 대입하면}$$

$$m=1 \text{ 일 때 } n=-1, m=3 \text{ 일 때 } n=3$$

따라서 순서쌍 (m, n) 은 $(1, -1), (3, 3)$ 의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $2+2=4$

20 답 27

$$\alpha=\frac{f(a)}{a-b}, \beta=\frac{f(b)}{b-a} \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a} = \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{a-b} \\ &= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{7(a-b)}{a-b} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \frac{f(a)}{a-b} \times \frac{f(b)}{b-a} = -\frac{f(a)f(b)}{(a-b)^2} \\ &= -\frac{-12(a-b)^2}{(a-b)^2} = 12 \end{aligned}$$

따라서 두 근이 α, β 이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-7x+12=0 \quad \therefore m=-7, n=12$$

이차방정식 $x^2-7x+12=0$ 에서

$$(x-3)(x-4)=0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=4$$

$$\text{이때 } \alpha-\beta=\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}=\frac{f(a)+f(b)}{a-b}>0, \text{ 즉 } \alpha>\beta \text{이므로}$$

$$\alpha=4, \beta=3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{nf(a)-mf(b)}{a-b} &= n \times \frac{f(a)}{a-b} + m \times \frac{f(b)}{b-a} = n\alpha + m\beta \\ &= 12 \times 4 + (-7) \times 3 = 48 - 21 = 27 \end{aligned}$$

21 답 ③

이차방정식 $x^2+2x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=2$$

$$\beta=-\alpha-2 \text{이므로 (가)에서}$$

$$f(\alpha)=2\beta+3=2(-\alpha-2)+3=-2\alpha-1$$

$$\therefore f(\alpha)+2\alpha+1=0$$

$$\alpha=-\beta-2 \text{이므로 (나)에서}$$

$$f(\beta)=2\alpha+3=2(-\beta-2)+3=-2\beta-1$$

$$\therefore f(\beta)+2\beta+1=0$$

따라서 이차방정식 $f(x)+2x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차항의 계수를 $a(a \neq 0)$ 라 하면

$$f(x)+2x+1=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\therefore f(x)+2x+1=a(x^2+2x+2)$$

(다)에서 $f(0)=0$ 이므로 위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$1=2a \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x)+2x+1=\frac{1}{2}(x^2+2x+2) \text{이므로}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$$

$$\therefore f(-2)+f(2)=(2+2)+(2-2)=4$$

idea

22 답 -1

$f(x)=x^2-kx-1$ 이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 γ, δ 이고 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x-\gamma)(x-\delta)$$

$$\text{한편 } (a-\gamma)(\beta-\gamma)(a-\delta)(\beta-\delta)=4k^2 \text{에서}$$

$$\{(a-\gamma)(a-\delta)\}\{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\}=4k^2$$

$$f(a)f(\beta)=4k^2$$

$$\therefore (a^2-ka-1)(\beta^2-k\beta-1)=4k^2 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2-x-k=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2-\alpha-k=0, \beta^2-\beta-k=0$$

$$\therefore \alpha^2=\alpha+k, \beta^2=\beta+k$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} &(\alpha^2-k\alpha-1)(\beta^2-k\beta-1) \\ &= (\alpha+k-k\alpha-1)(\beta+k-k\beta-1) \\ &= \{(1-k)\alpha-(1-k)\}\{(1-k)\beta-(1-k)\} \\ &= (1-k)^2(\alpha-1)(\beta-1) \\ &= (1-k)^2\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\} \\ &= -k(1-k)^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -k(1-k)^2=4k^2 \text{이고 } k \neq 0 \text{이므로}$$

$$-(1-k)^2=4k, k^2+2k+1=0$$

$$(k+1)^2=0 \quad \therefore k=-1$$

23 답 ①

이차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 $\alpha=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 이므로 다른

한 근은 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } \frac{1-i}{\sqrt{2}}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}=-a \quad \therefore a=-\sqrt{2}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \frac{1-i}{\sqrt{2}} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}}=b \quad \therefore b=1$$

$$\therefore f(x)=x^2-\sqrt{2}x+1$$

이차방정식 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1=0 \quad \therefore \alpha^2=\sqrt{2}\alpha-1$$

또 $\alpha^2+1=\sqrt{2}\alpha$ 이므로 양변을 제곱하면 $\alpha^4+2\alpha^2+1=2\alpha^2$

$$\therefore \alpha^4=-1 \quad \therefore \alpha^5=\alpha^4\alpha=-\alpha$$

$$\therefore f(\alpha^5+2\alpha+\sqrt{2})=f(-\alpha+2\alpha+\sqrt{2})=f(\alpha+\sqrt{2})$$

$$= (\alpha+\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(\alpha+\sqrt{2})+1$$

$$= \alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+2-\sqrt{2}\alpha-2+1$$

$$= \alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1$$

$$= (\sqrt{2}\alpha-1)+\sqrt{2}\alpha+1=2\sqrt{2}\alpha$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} = 2-2i$$

24 답 ②

이차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 유리수이고 $f(\sqrt{b}-1)=0$ 에서 $\sqrt{b}-1$ 이 한 근이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{b}-1$ 이다. $\rightarrow b$ 가 소수이므로 $\sqrt{b}$ 는 무리수이다.

이차방정식 $x^2+ax-4=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } (\sqrt{b}-1)+(-\sqrt{b}-1)=-a \quad \therefore a=2$$

$$\text{두 근의 곱은 } (\sqrt{b}-1)(-\sqrt{b}-1)=-4, 1-b=-4 \quad \therefore b=5$$

한편 $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$$R(x)=px+q(p, q \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g(x)=f(x)Q(x)+px+q \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $f(x), g(x)$ 는 계수가 유리수인 다항식이므로 p, q 도 유리수이다.

$$f(-\sqrt{5}-1)=0 \text{이고}, g(-\sqrt{5}-1)=1+\sqrt{5} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{의 양변에}$$

$$x=-\sqrt{5}-1 \text{을 대입하면}$$

$$1+\sqrt{5}=p(-\sqrt{5}-1)+q$$

$$(q-p)-p\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$$

$$\text{즉, } q-p=1, -p=1 \text{이므로 } p=-1, q=0$$

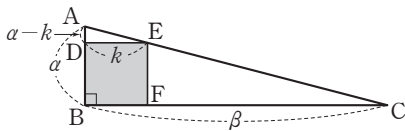
$$\text{따라서 } R(x)=-x \text{이므로}$$

$$R(a)=R(2)=-2$$

25 답 ⑤

이차방정식 $x^2-4x+2=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=2$$



그림과 같이 정사각형의 꼭짓점 중 B가 아닌 점을 각각 D, E, F라 할 때, 두 삼각형 ADE, ABC에서

$$\angle ADE = \angle ABC = 90^\circ, \angle DAE = \angle BAC$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (AA 답음)}$$

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC} \text{이므로 정사각형의 한 변의 길이를 } k \text{라 하면}$$

$$(\alpha - k) : \alpha = k : \beta$$

$$ak = (\alpha - k)\beta, (\alpha + \beta)k = \alpha\beta$$

$$\therefore k = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{내접하는 정사각형의 넓이는 } k^2 = \frac{1}{4}, \text{ 둘레의 길이는 } 4k = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4}, 2 \text{를 두 근으로 하고 이차방정식의 계수가 4인 } x \text{에 대한 이차방정식은}$$

$$4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 2) = 0 \quad \therefore 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\text{따라서 } m = -9, n = 2 \text{이므로 } m + n = -7$$

26 답 ③

$$\overline{PR} = x, \overline{PQ} = y \text{라 하면 직사각형 QPRD의}$$

$$\text{둘레의 길이가 4이므로}$$

$$2(x + y) = 4, x + y = 2$$

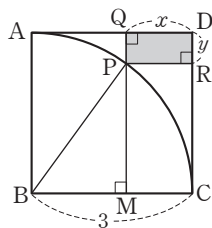
$$\therefore y = 2 - x$$

$$\overline{PR} \geq \overline{PQ} \text{에서}$$

$$x \geq 2 - x \quad \therefore x \geq 1$$

$$\text{점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면}$$

$$\overline{BM} = 3 - x, \overline{PM} = 3 - y = 3 - (2 - x) = x + 1$$



직각삼각형 PBM에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BM}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{BP}^2, (3 - x)^2 + (x + 1)^2 = 9$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{PR} - \overline{PQ} = x - (2 - x) = 2x - 2$$

$$= 2 \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - 2 = \sqrt{2}$$

27 답 $8\sqrt{3}$

삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변

삼각형이므로 꼭짓점 A에서 변 BC

에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 15$$

직각삼각형 ABM에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2, \overline{AM}^2 + 15^2 = 25^2$$

$$\overline{AM}^2 = 400 \quad \therefore \overline{AM} = 20 (\because \overline{AM} > 0) \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

삼각형 ABC의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times 30 \times 20 = 300$$

$$\text{또 } S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 25 \times \overline{BH} \text{이므로}$$

$$\frac{25}{2} \overline{BH} = 300 \quad \therefore \overline{BH} = 24 \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2, \overline{AH}^2 + 24^2 = 25^2$$

$$\overline{AH}^2 = 49 \quad \therefore \overline{AH} = 7 (\because \overline{AH} > 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \overline{AC} - \overline{AH} = 25 - 7 = 18$$

두 삼각형 APS, ABH에서

$$\angle ASP = \angle AHB = 90^\circ, \angle PAS = \angle BAH$$

$$\therefore \triangle APS \sim \triangle ABH \text{ (AA 답음)}$$

$$\overline{PS} : \overline{BH} = \overline{AS} : \overline{AH} \text{이므로 } \overline{PS} = x \text{라 하면}$$

$$x : 24 = \overline{AS} : 7$$

$$24 \overline{AS} = 7x \quad \therefore \overline{AS} = \frac{7}{24}x$$

또 두 삼각형 CRQ, CHB에서

$$\angle CRQ = \angle CHB = 90^\circ, \angle QCR = \angle BCH$$

$$\therefore \triangle CRQ \sim \triangle CHB \text{ (AA 답음)}$$

$$\overline{RQ} : \overline{HB} = \overline{CR} : \overline{CH} \text{이므로}$$

$$x : 24 = \overline{CR} : 18$$

$$24 \overline{CR} = 18x \quad \therefore \overline{CR} = \frac{3}{4}x$$

$$\therefore \overline{SR} = \overline{AC} - \overline{AS} - \overline{CR} = 25 - \frac{7}{24}x - \frac{3}{4}x = 25 - \frac{25}{24}x$$

따라서 직사각형 PQRS의 넓이가 100이면

$$\left(25 - \frac{25}{24}x\right)x = 100, 25x - \frac{25}{24}x^2 = 100$$

$$24x - x^2 = 96 \quad \therefore x^2 - 24x + 96 = 0 \quad \cdots \cdots \text{배점 40\%}$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 24, \alpha\beta = 96$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{24^2 - 4 \times 96} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

01 $-\frac{5}{3}$ 02 ② 03 10 04 ③ 05 ① 06 ②
07 $\neg, \perp$ 08 ① 09 $-6\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$ 10 $\frac{5}{8}$
11 50

01 답 $-\frac{5}{3}$

1단계 $[x]=n$ 으로 놓고 주어진 방정식을 n 에 대한 방정식으로 나타내기

$x=[x]+\frac{1}{3}$ 에서 $[x]=n$ (n 은 정수)이라 하면

$$x=n+\frac{1}{3}, 3x=3n+1$$

$\therefore [3x]=3n+1 \rightarrow n$ 이 정수이므로 $3n+1$ 도 정수이다.

방정식 $[3x][x]+3[x]=\frac{7}{3}+|x|$ 에서

$$(3n+1)n+3n=\frac{7}{3}+\left|n+\frac{1}{3}\right|$$

2단계 근 구하기

(i) $n < -\frac{1}{3}$ 일 때,

$$(3n+1)n+3n=\frac{7}{3}-\left(n+\frac{1}{3}\right)$$

$$3n^2+5n-2=0, (n+2)(3n-1)=0$$

$$\therefore n=-2 \text{ 또는 } n=\frac{1}{3}$$

그런데 n 은 $-\frac{1}{3}$ 보다 작은 정수이므로 $n=-2$

(ii) $n \geq -\frac{1}{3}$ 일 때,

$$(3n+1)n+3n=\frac{7}{3}+\left(n+\frac{1}{3}\right)$$

$$3n^2+3n-\frac{8}{3}=0, 9n^2+9n-8=0$$

$$\therefore n=\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{6}$$

그런데 정수 n 은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=-2$ 이므로

$$x=n+\frac{1}{3}=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$$

02 답 ②

1단계 주어진 방정식의 정수인 근 찾기

방정식 $x^2+a|x|+b=0$ 에서 $|x|^2+a|x|+b=0$

$|x|=t$ 로 놓으면 $t \geq 0$ 이고

$$t^2+at+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 양의 정수인 근이 존재해야 한다.

이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 하나의 양의 정수인 근(중근 포함) $t=p$ 만을 가지면

$|x|=p$ 에서 $x=p$ 또는 $x=-p$ 이므로 두 근의 곱은 $-p^2 < 0$

이는 정수인 근의 곱이 256이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 개의 양의 정수인 근을 가지므로

이를 α, β ($\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$)라 하면

$t=\alpha$ 또는 $t=\beta$ 에서

$|x|=\alpha$ 또는 $|x|=\beta$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=-\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=-\beta$

2단계 a, b 의 값 구하기

정수인 근의 곱이 256이므로

$$\alpha \times (-\alpha) \times \beta \times (-\beta) = 256$$

$$(\alpha\beta)^2 = 256 \quad \therefore \alpha\beta = 16 \quad (\because \alpha > 0, \beta > 0)$$

α, β 는 $\alpha \neq \beta$ 인 양의 정수이므로 순서쌍 (α, β) 는

$(1, 16), (2, 8), (8, 2), (16, 1)$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $-a=17$ 또는 $-a=10 \quad \therefore a=-17$ 또는 $a=-10$

두 근의 곱은 $b=16$

3단계 모든 $a+b$ 의 값의 합 구하기

$$\therefore a+b=-17+16=-1 \text{ 또는 } a+b=-10+16=6$$

따라서 모든 $a+b$ 의 값의 합은 $-1+6=5$

03 답 10

1단계 α, β 사이의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$$\therefore \alpha+1=-\beta, \beta+1=-\alpha$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\alpha^2-\beta=0, \beta^2-\alpha=0 \quad \therefore \alpha^2=\beta, \beta^2=\alpha$$

2단계 $f(x)$ 구하기

$\textcircled{1}$ 에서 $\alpha=-\beta-1$ 이므로

$$f(\alpha^2)=-4\alpha \text{에서 } f(\beta)=-4(-\beta-1)$$

$$\therefore f(\beta)-4\beta-4=0$$

$\textcircled{2}$ 에서 $\beta=-\alpha-1$ 이므로

$$f(\beta^2)=-4\beta \text{에서 } f(\alpha)=-4(-\alpha-1)$$

$$\therefore f(\alpha)-4\alpha-4=0$$

따라서 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$ 의 두 근이 α, β 이고 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-4x-4=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$f(x)-4x-4=x^2+x+1 \quad \therefore f(x)=x^2+5x+5$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=5, q=5$ 이므로 $p+q=10$

04 답 ③

1단계 $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ 사이의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 근이 α 이므로 $\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha \neq 0$ 이므로 양변을 α 로 나누면

$$\alpha-1+\frac{1}{\alpha}=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \alpha=-\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\alpha}=-\alpha+1$$

2단계 $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식 세우기

$$f(\alpha)=\frac{m}{\alpha}+5 \text{에서 } f(\alpha)=m(-\alpha+1)+5$$

$$\therefore f(\alpha)+m\alpha-m-5=0$$

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=m\alpha+5 \text{에서 } f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=m\left(-\frac{1}{\alpha}+1\right)+5$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{m}{\alpha}-m-5=0$$

따라서 $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ 은 이차방정식 $f(x)+mx-m-5=0$ 의 두 근이다.

3단계 $f(1)$ 의 값 구하기

㉠에서 $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 1$ 이고 $\alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1$ 이므로 이차방정식의 계수가 1이고 두 근의 합이 1, 두 근의 곱이 1인 이차방정식은 $x^2 - x + 1 = 0$
따라서 $f(x) + mx - m - 5 = x^2 - x + 1$ 이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) - 5 = 1 \quad \therefore f(1) = 6$

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 1 - 4 = -3 < 0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
이때 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 허수 α 이므로 다른 한 근은 α 의 켤레복소수인 $\bar{\alpha}$ 이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \bar{\alpha} = 1, \alpha\bar{\alpha} = 1$
 $\therefore \alpha = 1 - \bar{\alpha}, \bar{\alpha} = 1 - \alpha, \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$
 $f(\alpha) = \frac{m}{\alpha} + 5$ 에서 $f(\alpha) = m\bar{\alpha} + 5$
 $f(\alpha) = m(1 - \alpha) + 5 \quad \therefore f(\alpha) + m\alpha - m - 5 = 0$
 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = m\alpha + 5$ 에서 $f(\bar{\alpha}) = m\alpha + 5$
 $f(\bar{\alpha}) = m(1 - \bar{\alpha}) + 5 \quad \therefore f(\bar{\alpha}) + m\bar{\alpha} - m - 5 = 0$
따라서 이차방정식 $f(x) + mx - m - 5 = 0$ 의 두 근이 $\alpha, \bar{\alpha}$ 이고 이차방정식의 계수가 1이므로
 $f(x) + mx - m - 5 = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$
 $f(x) + mx - m - 5 = x^2 - x + 1$
 $\therefore f(x) = x^2 - (m+1)x + m+6$
 $\therefore f(1) = 1 - (m+1) + m+6 = 6$

05 답 ①

1단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기

이차방정식 $x^2 + (a+1)x + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -a - 1 \quad \dots\dots ㉠$
 $\alpha\beta = b \quad \dots\dots ㉡$
이차방정식 $x^2 + ax + c = 0$ 의 두 근이 $\alpha - i, \gamma$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha - i + \gamma = -a \quad \dots\dots ㉢$
 $(\alpha - i)\gamma = c \quad \dots\dots ㉣$

2단계 α, β 의 값 구하기

㉠에서 $-a = \alpha + \beta + 1$ 이므로 이를 ㉢에 대입하면
 $\alpha - i + \gamma = \alpha + \beta + 1 \quad \therefore \beta - \gamma = -1 - i$
이를 $\alpha + \beta - \gamma = 1$ 에 대입하면
 $\alpha - 1 - i = 1 \quad \therefore \alpha = 2 + i$
이차방정식 $x^2 + (a+1)x + b = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 $\alpha = 2 + i$ 이므로 다른 한 근은 $\beta = 2 - i$ 이다.

3단계 a, b, c 의 값 구하기

㉠에서 $(2+i) + (2-i) = -a - 1 \quad \therefore a = -5$
㉡에서 $b = (2+i)(2-i) = 5$
㉢에서 $(2+i) - i + \gamma = -a \quad \therefore \gamma = 3$
㉣에서 $c = (2+i-i) \times 3 = 6$

4단계 abc 의 값 구하기

$\therefore abc = -5 \times 5 \times 6 = -150$

06 답 ②

1단계 이차방정식이 켤레근을 가짐을 알기

이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$ 의 계수가 실수이고 한 허근 α 를 가지므로 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 다른 한 근은 $a - bi$ 이다.

2단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $(a+bi) + (a-bi) = p$
 $\therefore 2a = p \quad \dots\dots ㉠$
두 근의 곱은 $(a+bi)(a-bi) = p+3$
 $\therefore a^2 + b^2 = p+3 \quad \dots\dots ㉡$

3단계 α^3 이 실수임을 이용하여 식 세우기

$\alpha = a + bi$ 에서
 $\alpha^3 = (a+bi)^3$
 $= a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3$
 $= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$
 $= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$
이때 α^3 이 실수이려면
 $3a^2b - b^3 = 0, b(3a^2 - b^2) = 0$
 $\therefore 3a^2 - b^2 = 0 \quad (\because b \neq 0) \quad \dots\dots ㉢$

4단계 p 의 값의 곱 구하기

㉢에서 $b^2 = 3a^2$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면
 $a^2 + 3a^2 = p+3 \quad \therefore 4a^2 = p+3$
㉠에서 $a = \frac{1}{2}p$ 이므로 이를 위의 식에 대입하면
 $4\left(\frac{1}{2}p\right)^2 = p+3$
 $\therefore p^2 - p - 3 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p 의 값의 곱은 -3 이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$ 의 한 허근이 α 이므로
 $\alpha^2 - p\alpha + p + 3 = 0$
 $\alpha^2 - p\alpha = -p - 3$
 $\therefore \alpha^2 - p\alpha + p^2 = p^2 - p - 3$
양변에 $\alpha + p$ 를 곱하면
 $(\alpha + p)(\alpha^2 - p\alpha + p^2) = (\alpha + p)(p^2 - p - 3)$
 $\alpha^3 + p^3 = (p^2 - p - 3)\alpha + p^3 - p^2 - 3p$
 $\therefore \alpha^3 = (p^2 - p - 3)\alpha - p^2 - 3p$
이때 α^3 이 실수이려면
 $p^2 - p - 3 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p 의 값의 곱은 -3 이다.

비법 NOTE

a 가 허수이면 $a = p + qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)로 놓을 수 있으므로
실수 A, B, C 에 대하여 $Aa + B = C$ 에서
 $A(p+qi) + B = C$
 $(Ap+B) + Aqi = C$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $Ap+B=C, Aq=0$
이때 $q \neq 0$ 이므로 $A=0, B=C$
따라서 허수 a 에 대하여 $Aa+B=C$ (A, B, C 는 실수)이면
 $A=0, B=C$

07 답 ㄱ, ㄴ

1단계 $\alpha + \bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\alpha}$ 의 값 구하기

이차방정식 $x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 3 - 4 = -1 < 0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식 $x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 α 이므로 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \bar{\alpha} = -\sqrt{3}, \alpha\bar{\alpha} = 1$$

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 &= (\alpha + \bar{\alpha})^2 - 2\alpha\bar{\alpha} \\ &= (-\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \alpha^3 + \bar{\alpha}^3 &= (\alpha + \bar{\alpha})^3 - 3\alpha\bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}) \\ &= (-\sqrt{3})^3 - 3 \times 1 \times (-\sqrt{3}) = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠} \\ \alpha\bar{\alpha} &= 1 \text{에서 } \alpha^3\bar{\alpha}^3 = 1 \quad \cdots \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠에서 } \bar{\alpha}^3 &= -\alpha^3 \text{이므로 이를 ㉡에 대입하면} \\ -\alpha^6 &= 1 \quad \therefore \alpha^6 = -1 \quad \cdots \cdots \text{㉢} \\ \text{㉠에서 } \alpha^3 &= -\bar{\alpha}^3 \text{이므로 이를 ㉡에 대입하면} \\ -\bar{\alpha}^6 &= 1 \quad \therefore \bar{\alpha}^6 = -1 \\ \therefore \frac{1}{1+\alpha^8} + \frac{1}{1+\bar{\alpha}^8} &= \frac{1}{1+\alpha^6\alpha^2} + \frac{1}{1+\bar{\alpha}^6\bar{\alpha}^2} \\ &= \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\bar{\alpha}^2} \\ &= \frac{(1-\bar{\alpha}^2) + (1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)(1-\bar{\alpha}^2)} \\ &= \frac{2 - (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)}{1 - (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + (\alpha\bar{\alpha})^2} \\ &= \frac{2-1}{1-1+1} = 1 \end{aligned}$$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \text{㉢에서 } \alpha^6 &= -1 \text{이므로} \\ \alpha^{12} &= (\alpha^6)^2 = (-1)^2 = 1 \\ \therefore \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \cdots + \alpha^{20} \\ &= (\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{10}) + \alpha^{12}(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^8) \\ &= (\alpha^2 + \alpha^4 - 1 - \alpha^2 - \alpha^4) + (1 + \alpha^2 + \alpha^4 - 1 - \alpha^2) \\ &= \alpha^4 - 1 \\ \text{같은 방법으로 하면} \\ \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^4 + \bar{\alpha}^6 + \cdots + \bar{\alpha}^{20} &= \bar{\alpha}^4 - 1 \\ \therefore (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + (\alpha^4 + \bar{\alpha}^4) + (\alpha^6 + \bar{\alpha}^6) + \cdots + (\alpha^{20} + \bar{\alpha}^{20}) \\ &= (\alpha^4 - 1) + (\bar{\alpha}^4 - 1) \\ &= \alpha^4 + \bar{\alpha}^4 - 2 \\ &= (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)^2 - 2(\alpha\bar{\alpha})^2 - 2 \\ &= 1 - 2 \times 1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 답 ①

1단계 a, b, c, d 에 대한 식 세우기

$\alpha = m + ni$, $\beta = p + qi$ (m, n, p, q 는 실수)라 하면

$$\alpha + \beta = (m + ni) + (p + qi) = (m + p) + (n + q)i$$

$\alpha + \beta$ 는 순허수이므로

$$m + p = 0, n + q \neq 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\therefore p = -m$$

즉, $\beta = -m + qi$ 이므로

$$\alpha\beta = (m + ni)(-m + qi) = (-m^2 - nq) + (mq - mn)i$$

$\alpha\beta$ 는 실수이므로 $mq - mn = 0$, $m(q - n) = 0$

$$\therefore m = 0 \text{ 또는 } q = n$$

그런데 $m = 0$ 이면 $\alpha = ni$

이때 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 $\alpha = ni$ 이므로 다른 한 근은 $-ni$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$ni + (-ni) = -a \quad \therefore a = 0$$

그런데 a 는 0이 아닌 실수이므로 $m \neq 0$ 이고 $q = n$

$$\text{이때 ㉠에서 } n + q \neq 0 \text{이므로 } 2n \neq 0 \quad \therefore n \neq 0$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 $\alpha = m + ni$ 이므로 다른 한 근은 $m - ni$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(m + ni) + (m - ni) = -a, (m + ni)(m - ni) = b$$

$$\therefore a = -2m, b = m^2 + n^2$$

또 이차방정식 $x^2 + cx + d = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 $\beta = -m + ni$ 이므로 다른 한 근은 $-m - ni$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-m + ni) + (-m - ni) = -c, (-m + ni)(-m - ni) = d$$

$$\therefore c = 2m, d = m^2 + n^2$$

2단계 $abcd$ 의 값 구하기

이차방정식 $x^2 + (a - c)x + b + d = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 $2 + i$ 이므로 다른 한 근은 $2 - i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } (2 + i) + (2 - i) = -(a - c)$$

$$4 = -(-2m - 2m) \quad \therefore m = 1$$

$$\text{두 근의 곱은 } (2 + i)(2 - i) = b + d$$

$$5 = 2(m^2 + n^2) \quad \therefore m^2 + n^2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a = -2, b = d = \frac{5}{2}, c = 2 \text{이므로}$$

$$abcd = -2 \times \frac{5}{2} \times 2 \times \frac{5}{2} = -25$$

09 답 $-6\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$

1단계 α^3 이 실수임을 알기

α 가 실수이면 β 도 실수이므로 $\alpha^4 + \beta^4 \geq 0$

이는 ㉞를 만족시키지 않으므로 α 는 허수이다.

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 계수가 실수이고 한 근이 허수 α 이므로 다른 한 근은 α 의 켤레복소수인 $\bar{\alpha}$ 이다.

$$\therefore \beta = \bar{\alpha}$$

$$\text{㉞에서 } \frac{\alpha^2}{\beta} \text{이 실수이므로 } \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\bar{\alpha}} = \frac{\alpha^3}{\alpha\bar{\alpha}} \text{이 실수이다.}$$

이때 $\alpha\bar{\alpha}$ 는 항상 실수이므로 α^3 도 실수이다.

2단계 b 를 α 에 대한 식으로 나타내기

한편 α 는 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

$$\alpha^2 = -a\alpha - b$$

$$\therefore \alpha^3 = \alpha^2\alpha = (-a\alpha - b)\alpha = -a\alpha^2 - b\alpha$$

$$= -a(-a\alpha - b) - b\alpha = (a^2 - b)\alpha + ab$$

α^3 이 실수이므로

$$a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2$$

3단계 a 의 값 구하기

따라서 이차방정식 $x^2+ax+a^2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=a^2$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-a)^2-2a^2=-a^2,$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(-a^2)^2-2a^4=-a^4$$

(나)에서 $\alpha^4+\beta^4=-9$ 이므로

$$-a^4=-9, a^2=3 (\because a \text{는 실수})$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{3}$$

4단계 $\alpha^3+\beta^3$ 의 값 구하기

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(-a)^3-3a^2 \times (-a)=2a^3$$

$$=2 \times (\pm\sqrt{3})^3=\pm 6\sqrt{3}$$

10 답 $\frac{5}{8}$

1단계 $\overline{CF}$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타내기

그림과 같이 두 선분 BH, EF가 만나는 점을 I라 하자.

두 사각형 EBCF, EHGF는 합동이므로

$$\overline{BE}=\overline{HE}, \angle BEI=\angle HEI$$

$$\therefore \triangle EIB \cong \triangle EIH \text{ (SAS 합동)}$$

즉, $\angle EIB=\angle EIH$ 이므로

$$\angle EIH=\angle EIB=90^\circ$$

점 F에서 변 AB에 내린 수선의 발을 J라 하면

$$\angle EFJ=\angle HBA, \overline{JF}=\overline{AB},$$

$$\angle EJF=\angle HAB=90^\circ$$

$$\therefore \triangle EJF \cong \triangle HAB \text{ (ASA 합동)}$$

즉, $\overline{JE}=\overline{AH}=b$ 이므로

$$\overline{CF}=a-b$$

2단계 a, b 의 값 구하기

직각삼각형 AHE에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}^2+\overline{AE}^2=\overline{HE}^2$$

$$b^2+(2-a)^2=a^2$$

$$b^2+4-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}b^2+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

사각형 EBCF의 넓이가 $\frac{13}{8}$ 이므로

$$\frac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{CF}) \times \overline{BC}=\frac{13}{8}$$

$$\frac{1}{2}\{a+(a-b)\} \times 2=\frac{13}{8}, 2a-b=\frac{13}{8}$$

①을 대입하면

$$2\left(\frac{1}{4}b^2+1\right)-b=\frac{13}{8}, 4b^2-8b+3=0$$

$$(2b-1)(2b-3)=0 \quad \therefore b=\frac{1}{2} \text{ 또는 } b=\frac{3}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$b=\frac{1}{2} \text{ 일 때 } a=\frac{17}{16}, b=\frac{3}{2} \text{ 일 때 } a=\frac{25}{16}$$

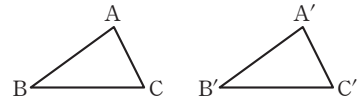
3단계 $a-b$ 의 값의 합 구하기

$$\therefore a-b=\frac{9}{16} \text{ 또는 } a-b=\frac{1}{16}$$

따라서 모든 $a-b$ 의 값의 합은 $\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$

개념 NOTE

다음의 각 경우에 두 삼각형 ABC, A'B'C'은 서로 합동이다.



(1) 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS 합동)

$$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{A'B'}, \overline{BC}=\overline{B'C'}, \overline{AC}=\overline{A'C'}$$

(2) 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)

$$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{A'B'}, \overline{BC}=\overline{B'C'}, \angle B=\angle B'$$

(3) 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 (ASA 합동)

$$\Rightarrow \overline{BC}=\overline{B'C'}, \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'$$

11 답 50

1단계 $\frac{1}{2}\overline{JI}$ 의 값 구하기

두 정사각형의 대각선이 모두 한 점

O에서 만나고 정사각형 EFGH의

대각선이 정사각형 ABCD의 한 변

을 이등분하므로 주어진 도형은 각

각의 대각선에 대하여 대칭이다.

꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선

의 발을 L이라 하고, $\overline{JL}=x$ 라 하면

삼각형 EJL은 직각이등변삼각형이

므로

$$\overline{EL}=x$$

따라서 삼각형 EJI의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{JI} \times \overline{EL}=\frac{1}{2} \times 2x \times x=x^2$$

삼각형 AKJ도 직각이등변삼각형이고 $\overline{AJ}=1-x$ 이므로 삼각형 AKJ의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AJ} \times \overline{AK}=\frac{1}{2}(1-x)^2$$

삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$ 배이면

$$\frac{1}{2}(1-x)^2=\frac{3}{2}x^2, 1-2x+x^2=3x^2$$

$$2x^2+2x-1=0 \quad \therefore x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{그런데 } x>0 \text{ 이므로 } x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

2단계 k 의 값 구하기

직각이등변삼각형 EJL에서 $\overline{EJ}=\sqrt{2}x$, 직각이등변삼각형 AKJ에서

$$\overline{KJ}=\sqrt{2}(1-x) \text{ 이므로}$$

$$\overline{EF}=2\overline{EJ}+\overline{KJ}$$

$$2k=2\sqrt{2}x+\sqrt{2}(1-x)$$

$$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

3단계 $100(p+q)$ 의 값 구하기

따라서 $p=\frac{1}{4}, q=\frac{1}{4}$ 이므로

$$100(p+q)=100\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=50$$

step 1 핵심 문제

| 60~61쪽

01 1, $\frac{7}{4}$ 02 ④ 03 ③ 04 4 05 ②06 $-2 < k < 2$ 07 6 08 60 09 ④ 10 ③

11 8 12 ②

01 답 1, $\frac{7}{4}$

이차함수 $y=x^2+2(2m-3)x-m-2$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 α, β 라 하면 두 점 사이의 거리가 4이므로

$$|\alpha - \beta| = 4$$

이차방정식 $x^2+2(2m-3)x-m-2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2(2m-3), \alpha\beta = -m-2$$

$$|\alpha - \beta|^2 = 16 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 16, (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 16$$

$$4(2m-3)^2 + 4(m+2) = 16, 4m^2 - 11m + 7 = 0$$

$$(m-1)(4m-7) = 0 \quad \therefore m=1 \text{ 또는 } m=\frac{7}{4}$$

02 답 ④

이차함수 $y=x^2-2(a-1)x-b^2+25$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x-b^2+25=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a-1)^2 + b^2 - 25 = 0 \quad \therefore (a-1)^2 + b^2 = 25$$

a, b 는 자연수이므로 $a-1$ 은 0 또는 자연수이다.

이때 제곱수의 합이 25가 되는 경우는 0과 5²의 합인 경우와 3²과 4²의 합인 경우가 있다.

즉, 순서쌍 $(a-1, b)$ 는 (0, 5), (3, 4), (4, 3)

따라서 순서쌍 (a, b) 는 (1, 5), (4, 4), (5, 3) ㉠

이차함수 $y=-x^2+2bx+c^2-25$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로

이차방정식 $-x^2+2bx+c^2-25=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = b^2 + c^2 - 25 < 0 \quad \therefore c^2 < 25 - b^2 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 ㉠에서 b 의 값은 3, 4, 5이다.

(i) $b=3$ 일 때,

㉡에서 $c^2 < 16$ 이므로 자연수 c 의 값은 1, 2, 3이다.

(ii) $b=4$ 일 때,

㉡에서 $c^2 < 9$ 이므로 자연수 c 의 값은 1, 2이다.

(iii) $b=5$ 일 때,

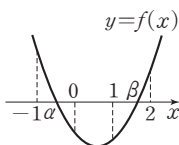
㉡에서 $c^2 < 0$ 이므로 자연수 c 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (a, b, c) 는 (4, 4, 1), (4, 4, 2), (5, 3, 1), (5, 3, 2), (5, 3, 3)의 5개이다.

03 답 ③

$f(x)=5x^2-(a+1)x-a$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $-1 < \alpha < 0$,

$1 < \beta < 2$ 이라면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 -1과 0 사이에서 x 축과 한 점에서 만나고, 1과 2 사이에서 x 축과 한 점에서 만나야 한다.



즉, $f(-1) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$ 이므로

$f(-1) > 0$ 에서 $6 > 0$

$f(0) < 0$ 에서 $-a < 0 \quad \therefore a > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$f(1) < 0$ 에서 $-2a+4 < 0 \quad \therefore a > 2 \quad \dots\dots ㉡$

$f(2) > 0$ 에서 $-3a+18 > 0 \quad \therefore a < 6 \quad \dots\dots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 정수 a 는 3, 4, 5의 3개이다.

04 답 4

그림과 같이 이차함수 $y=x^2-2$ 의 그래프와 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선 $y=mx$ 는 제1사분면과 제3사분면에서 각각 만난다.

두 점 A, B의 x 좌표를 각각

α, β ($\alpha < 0 < \beta$)라 하면 $A(\alpha, m\alpha), B(\beta, m\beta)$ 이고 $A'(\alpha, 0), B'(\beta, 0)$ 이므로

$$\overline{AA'} = |m\alpha| = -m\alpha, \overline{BB'} = |m\beta| = m\beta$$

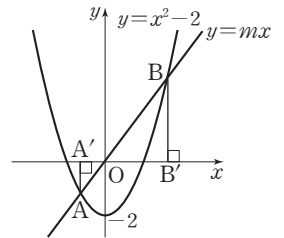
이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m$$

선분 AA' 과 선분 BB' 의 길이의 차이가 16이므로

$$|-m\alpha - m\beta| = 16, |m(\alpha + \beta)| = 16$$

$$m^2 = 16 \quad \therefore m = 4 \quad (\because m > 0)$$



05 답 ②

이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$ 의 그래프와 직선 $y=2ax+b$ 가 접하므로 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉

$x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k+a)^2 - 4k^2 - k + b = 0$$

$$4ak + a^2 - k + b = 0, (4a-1)k + a^2 + b = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-1=0, a^2+b=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{16} \quad \therefore a+b=\frac{3}{16}$$

06 답 $-2 < k < 2$

방정식 $|x^2-2x-3|=k+2$ 가 서로 다른 네 개의 실근을 가지면 함수 $y=|x^2-2x-3|$ 의 그래프와 직선 $y=k+2$ 가 서로 다른 네 점에서 만난다.

$f(x)=|x^2-2x-3|$ 이라 할 때 $x^2-2x-3=0$ 이면

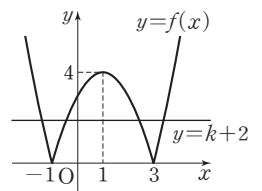
$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

또 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 교점이 4개가 되도록 직선 $y=k+2$

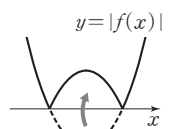
를 그어 보면

$$0 < k+2 < 4 \quad \therefore -2 < k < 2$$



비법 NOTE

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 축보다 아래쪽에 있는 부분을 x 축에 대하여 대칭이동하여 그린다.



07 답 6

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 2, 6이므로 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$ 의 두 근이 2, 6이다.배점 20%

즉, $h(x)=f(x)-g(x)$ 에서 이차방정식 $h(x)=0$ 의 두 근이 2, 6이므로 $h(x)$ 의 최고차항의 계수를 $a(a<0)$ 라 하면

$h(x)=a(x-2)(x-6)$ ↗ $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 $h(x)$ 의 최고차항의 계수도 음수이다.

$=a(x^2-8x+12)$

$=a(x-4)^2-4a$ 배점 30%

이차함수 $h(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값이 $-4a$ 이므로

$-4a=8 \quad \therefore a=-2$ 배점 30%

따라서 $h(x)=-2(x-4)^2+8$ 이므로

$h(5)=-2+8=6$ 배점 20%

08 답 60

(가)에서 이차함수 $y=-x^2+px-q$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 이차방정식 $-x^2+px-q=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D=p^2-4q=0 \quad \therefore q=\frac{p^2}{4}$ ㉠

$\therefore f(x)=-x^2+px-\frac{p^2}{4}=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$

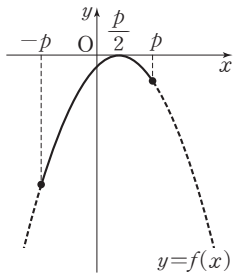
(나)에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 $\frac{p}{2}$ 가 $-p \leq x \leq p$ 에 포함되므로

$f(x)$ 는 $x=-p$ 일 때 최솟값이 $-\frac{9}{4}p^2$ 이다.

즉, $-\frac{9}{4}p^2=-54$ 이므로 $p^2=24$

이를 ㉠에 대입하면 $q=6$

$\therefore p^2+q^2=24+36=60$



09 답 ④

$x^2-4x+1=t$ 로 놓으면

$t=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$ ㉠

$1 \leq x \leq 4$ 에서 ㉠은 $x=4$ 일 때 최댓값이 1, $x=2$ 일 때 최솟값이 -3이므로

$-3 \leq t \leq 1$

주어진 함수는

$y=-(x^2-4x+1)^2-4(x^2-4x)-2=-t^2-4(t-1)-2$

$=-t^2-4t+2=-(t+2)^2+6$ ㉡

따라서 $-3 \leq t \leq 1$ 에서 ㉡은 $t=-2$ 일 때 최댓값이 6, $t=1$ 일 때 최솟값이 -3이므로

$M=6, m=-3 \quad \therefore M-m=9$

10 답 ③

$z^2+(\bar{z})^2=0$ 에서 $(a+2bi)^2+(a-2bi)^2=0$

$a^2+4abi-4b^2+a^2-4abi-4b^2=0$

$2a^2-8b^2=0 \quad \therefore b^2=\frac{1}{4}a^2$

이를 $6a+12b^2+11$ 에 대입하면

$6a+12b^2+11=6a+12 \times \frac{1}{4}a^2+11=3a^2+6a+11$

$=3(a+1)^2+8$

따라서 $6a+12b^2+11$ 은 $a=-1$ 일 때 최솟값이 8이다.

11 답 8

점 $P(a, b)$ 는 이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-5a+6$ ㉠

이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점은 $A(0, 6)$

이차함수 $y=x^2-5x+6$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$x^2-5x+6=0, (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3 \quad \therefore B(2, 0), C(3, 0)$

점 P 가 점 A 에서 점 B 를 지나 점 C 까지 움직이므로 $0 \leq a \leq 3$

$a+b$ 에 ㉠을 대입하면

$a+b=a+a^2-5a+6$

$=a^2-4a+6$

$=(a-2)^2+2$ ㉡

$0 \leq a \leq 3$ 에서 ㉡은 $a=0$ 일 때 최댓값이 6, $a=2$ 일 때 최솟값이 2이다.

따라서 $a+b$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $6+2=8$

12 답 ②

상품 한 개의 작년 가격을 a 라 하면 가격을 작년보다 $x\%$ 만큼 내린 올해 상품 한 개의 가격은

$a\left(1-\frac{x}{100}\right)$

상품의 작년 판매량을 b 라 하면 판매량은 작년보다 $2.5x\%$ 만큼 증가하므로 올해 판매량은

$b\left(1+\frac{2.5x}{100}\right)=b\left(1+\frac{x}{40}\right)$

따라서 올해 총 판매 금액은

$ab\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{40}\right)=-\frac{ab}{4000}(x-100)(x+40)$

$=-\frac{ab}{4000}(x^2-60x-4000)$

$=-\frac{ab}{4000}(x-30)^2+\frac{49}{40}ab$ ㉠

따라서 $0 \leq x \leq 50$ 에서 ㉠은 $x=30$ 일 때 최댓값이 $\frac{49}{40}ab$ 이다.

이때 $\frac{49}{40}ab=\left(1+\frac{22.5}{100}\right)ab$ 이므로 올해 총 판매 금액의 최댓값은 작년 총 판매 금액인 ab 보다 22.5% 증가한 것이다.

$\therefore p=22.5$

step 2 고난도 문제

| 62~66쪽

01 $3\sqrt{2}$	02 2	03 ④	04 ④	05 ③	06 39
07 $\frac{7}{4}$	08 ③	09 $3-\sqrt{7}$		10 9	11 ④
12 ①	13 $\frac{400}{9}$ m		14 28	15 ⑤	16 ③
17 33	18 0	19 11	20 ⑤	21 98	22 ③
23 $12\sqrt{3}-7$					

01 답 $3\sqrt{2}$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 α, β 라 하면

$\overline{AB}^2=|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$

이차함수 $y=f(ax-1)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $f(ax-1)=0$ 의 실근과 같다.

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$

따라서 이차방정식 $f(ax-1)=0$ 의 두 근은

$$ax-1=\alpha \text{ 또는 } ax-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{a} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{a}$$

$$\therefore \overline{CD}^2 = \left| \frac{\alpha+1}{a} - \frac{\beta+1}{a} \right|^2 = \frac{(\alpha-\beta)^2}{a^2}$$

$$\overline{AB}^2 = 18\overline{CD}^2 \text{에서 } (\alpha-\beta)^2 = \frac{18(\alpha-\beta)^2}{a^2}$$

이때 $\alpha \neq \beta$ 에서 $(\alpha-\beta)^2 \neq 0$ 이므로

$$1 = \frac{18}{a^2}, a^2 = 18 \quad \therefore a = 3\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

다른 풀이

이차함수 $y=x^2+ax+a$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 α, β 라 하면 이차방정식 $x^2+ax+a=0$ 의 두 근이 α, β 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=a$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = |\alpha-\beta|^2 = (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$$

$f(ax-1) = (ax-1)^2 + a(ax-1) + a = a^2x^2 + (a^2-2a)x + 1$ 에서 이차함수 $y=a^2x^2 + (a^2-2a)x + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 γ, δ 라 하면 이차방정식 $a^2x^2 + (a^2-2a)x + 1 = 0$ 의 두 근이 γ, δ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma+\delta = -\frac{a^2-2a}{a^2} = -\frac{a-2}{a}, \gamma\delta = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore \overline{CD}^2 = |\gamma-\delta|^2 = (\gamma-\delta)^2 = (\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta = \frac{(a-2)^2}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^2-4a}{a^2}$$

$$\overline{AB}^2 = 18\overline{CD}^2 \text{에서 } a^2-4a = \frac{18(a^2-4a)}{a^2}$$

이때 $a^2-4a \neq 0$ 이므로 $\rightarrow \overline{AB}^2 = a^2-4a > 0$

$$1 = \frac{18}{a^2}, a^2 = 18 \quad \therefore a = 3\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

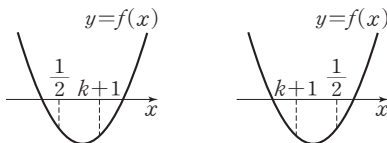
02 답 2

이차방정식 $2x^2 - (2k+3)x + k+1 = 0$ 에서

$$(2x-1)\{x-(k+1)\} = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = k+1$$

$f(x) = x^2 - kx + 2k - 8$ 이라 할 때, $\frac{1}{2}, k+1$ 이 모두 이차방정식

$f(x)=0$ 의 두 근 사이에 있으려면 그림과 같이 $f(\frac{1}{2}) < 0, f(k+1) < 0$ 이어야 한다.



$$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{에서 } \frac{3}{2}k - \frac{31}{4} < 0 \quad \therefore k < \frac{31}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

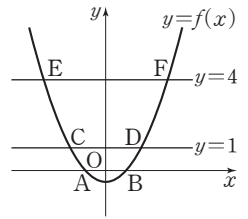
$$f(k+1) < 0 \text{에서 } (k+1)^2 - k(k+1) + 2k - 8 < 0$$

$$3k - 7 < 0 \quad \therefore k < \frac{7}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

03 답 ④

이차함수의 그래프를 x 축의 방향으로 평행 이동하여도 x 축 또는 x 축에 평행한 직선과 만나는 두 점 사이의 거리는 변하지 않으므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭인 그래프라 하자.



$\overline{AB}=l$ 이므로 두 점 A, B의 x 좌표는 $-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}$,

$\frac{l}{2}$ 이다.

따라서 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}$ 이므로 이차함수 $f(x)$

의 최고차항의 계수를 $a(a>0)$ 라 하면

$$f(x) = a\left(x + \frac{l}{2}\right)\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \text{--- } \overline{AB} < \overline{CD} < \overline{EF} \text{이므로 } a > 0$$

$\overline{CD}=l+1$ 이므로 두 점 C, D의 x 좌표는 $-\frac{l+1}{2}, \frac{l+1}{2}$ 이다.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{l+1}{2}, 1\right)$ 을 지나므로

$$f\left(\frac{l+1}{2}\right) = 1 \text{에서}$$

$$a\left(l + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore al + \frac{1}{2}a = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{EF}=l+3$ 이므로 두 점 E, F의 x 좌표는 $-\frac{l+3}{2}, \frac{l+3}{2}$ 이다.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{l+3}{2}, 4\right)$ 를 지나므로

$$f\left(\frac{l+3}{2}\right) = 4 \text{에서}$$

$$a\left(l + \frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{2} = 4 \quad \therefore al + \frac{3}{2}a = \frac{8}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } a = \frac{2}{3}$$

이를 ②에 대입하면

$$\frac{2}{3}l + 1 = \frac{8}{3} \quad \therefore l = \frac{5}{2}$$

04 답 ④

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선

$y=kx$ 위에 있으므로 꼭짓점의 좌표를 (a, ka) 라 하면

$$f(x) = (x-a)^2 + ka$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=kx+5$ 가 만나는 두 점의 x 좌표

가 α, β 이므로 이차방정식 $(x-a)^2 + ka = kx+5$, 즉

$$x^2 - (k+2a)x + a^2 + ka - 5 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k+2a, \alpha\beta=a^2+ka-5$$

한편 이차함수 $f(x)=(x-a)^2+ka$ 의 그래프의 축이 직선

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{4} \text{이므로 } \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{4} = a$$

$\alpha+\beta=k+2a$ 를 대입하면

$$\frac{k+2a}{2} - \frac{1}{4} = a, \frac{k}{2} = \frac{1}{4} \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha+\beta=2a+\frac{1}{2}, \alpha\beta=a^2+\frac{a}{2}-5$ 이므로

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(2a + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(a^2 + \frac{a}{2} - 5\right) = \frac{81}{4}$$

$$\therefore |\alpha-\beta| = \frac{9}{2}$$

05 답 ③

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(2)$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고 아래로 볼록하다.

ㄱ. $f(-1)=0$ 이고 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 $f(5)=0$

ㄴ. $f(-1)=0, f(5)=0$ 이므로 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 이다.

$f(x)=a(x+1)(x-5) (a>0)$ 라 하면

$$f(0)=-5a, f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{4}a, f(6)=7a$$

$$\therefore f(0)<f\left(-\frac{3}{2}\right)<f(6)$$

ㄷ. $f(x)=a(x+1)(x-5)$ 에서 $f(0)=k$ 이므로

$$-5a=k$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2kx$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=2kx$ 의 실근과 같다.

$$f(x)=2kx \text{에서 } a(x+1)(x-5)=2kx$$

$$ax^2-4ax-5a=-10ax$$

$$x^2+6x-5=0 \quad (\because a>0)$$

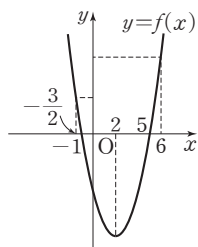
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 -6 이므로 두 교점의 x 좌표의 합은 -6 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

ㄴ. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(0)<f\left(-\frac{3}{2}\right)<f(6)$$



비법 NOTE

이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

(1) $f(x) \geq f(a)$ 이면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=a$ 이고 아래로 볼록하다.

(2) $f(x) \leq f(b)$ 이면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=b$ 이고 위로 볼록하다.

06 답 39

이차함수 $y=-x^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+k$ 가 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$A(\alpha, 2\alpha+k), B(\beta, 2\beta+k), A_1(\alpha, 0), B_1(\beta, 0)$$

$$\text{또 } y=2x+k \text{에 } y=0 \text{을 대입하면 } 2x+k=0 \quad \therefore x=-\frac{k}{2}$$

$$\therefore C\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$$

이차방정식 $-x^2+1=2x+k$, 즉 $x^2+2x+k-1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=k-1$$

삼각형 ACA_1 의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2} \times \overline{A_1C} \times \overline{A_1A}$$

$$=\frac{1}{2} \times \left(-\frac{k}{2}-\alpha\right) \times (-2\alpha-k)=\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2$$

삼각형 BCB_1 의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2=\frac{1}{2} \times \overline{B_1C} \times \overline{B_1B}$$

$$=\frac{1}{2} \times \left(\beta+\frac{k}{2}\right) \times (2\beta+k)=\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2$$

$$S_1+S_2=\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}, \alpha^2+\beta^2+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$(-2)^2-2(k-1)+k \times (-2)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$k^2-8k+9=0 \quad \therefore k=4 \pm \sqrt{7}$$

$$\text{그런데 } -2 < k < 2 \text{이므로 } k=4-\sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } p=4, q=-1 \text{이므로 } 10p+q=40-1=39$$

idea

07 답 7/4

두 점 B, C에서 x 축에 내린 수선의 길이가 각각 p, q 이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=-p$, 두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은 $y=q$ 이다.

따라서 $A(\alpha, -p), B(\beta, -p), C(\gamma, q), D(\delta, q)$ 라 하자.

이차함수 $y=x^2-3x$ 의 그래프와 직선 $y=-p$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2-3x=-p$, 즉 $x^2-3x+p=0$ 의 두 근이 α, β 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=p$$

또 이차함수 $y=-x^2+4x$ 의 그래프와 직선 $y=q$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 γ, δ 이므로 이차방정식 $-x^2+4x=q$, 즉 $x^2-4x+q=0$ 의 두 근이 γ, δ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma+\delta=4, \gamma\delta=q$$

사각형 ABCD가 평행사변형이면 $\overline{AB}=\overline{DC}$ 이므로 $|\beta-\alpha|=|\delta-\gamma|$

$$(\beta-\alpha)^2=(\delta-\gamma)^2, (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$$

$$3^2-4p=4^2-4q, 4(q-p)=7$$

$$\therefore q-p=\frac{7}{4}$$

08 답 ③

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1=a^2-4b$

이때 $a^2 < 4b$ 이면 $D_1 < 0$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다.

$$\text{따라서 } f(2)=4+2a+b>0 \text{이므로 } b>-2a-4$$

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(-x+2)$ 이면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=2$ 이다.

$$\text{이때 } f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b \text{이므로}$$

$$-\frac{a}{2}=2 \quad \therefore a=-4$$

$$x^2+ax+b=bx+a \text{에서 } x^2+(a-b)x-a+b=0$$

$$a=-4 \text{를 대입하면 } x^2-(4+b)x+4+b=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=(4+b)^2-4(4+b)=b(b+4)$$

이때 $b < -4$ 이면 $D_2 > 0$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=bx+a$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\therefore x^2+ax+b=-ax+3 \text{에서 } x^2+2ax+b-3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(x)=x^2+2ax+b-3 \text{이라 하면 } g(1)=2a+b-2$$

$$\text{이때 } 2a+b<2 \text{이면 } g(1)<0$$

즉, 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같이

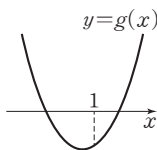
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정

식 ①의 판별식을 D_3 이라 하면 $D_3>0$

따라서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=-ax+3$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



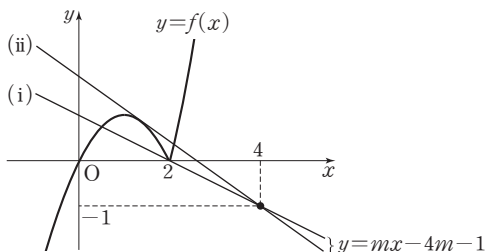
09 답 3-√7

$y=mx-4m-1=m(x-4)-1$ 이므로 직선 $y=mx-4m-1$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(4, -1)$ 을 지난다.

이차함수 $y=-x^2+2x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면 $-x^2+2x=0, -x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$

이차함수 $y=2x^2-4x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면 $2x^2-4x=0, 2x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx-4m-1$ 은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx-4m-1$ 이 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선의 기울기 m 의 값이 점 $(2, 0)$ 을 지나는 직선 (i)의 기울기와 $x<2$ 에서 이차함수 $y=-x^2+2x$ 의 그래프에 접하는 직선 (ii)의 기울기 사이의 값이어야 한다.배점 40%

(i) 직선 $y=mx-4m-1$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,

$$0=2m-4m-1 \quad \therefore m=-\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

(ii) 이차함수 $y=-x^2+2x$ 의 그래프와 직선 $y=mx-4m-1$ 이 접할 때,

$$-x^2+2x=mx-4m-1 \text{에서}$$

$$x^2+(m-2)x-4m-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D=(m-2)^2-4(-4m-1)=0$$

$$m^2+12m+8=0 \quad \therefore m=-6 \pm 2\sqrt{7}$$

① $m=-6+2\sqrt{7}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2+(-8+2\sqrt{7})x+23-8\sqrt{7}=0$$

$$\{x+(-4+\sqrt{7})\}^2=0 \quad \therefore x=4-\sqrt{7}$$

이때 접점의 x 좌표 $4-\sqrt{7}$ 이 $x<2$ 에 속한다.

② $m=-6-2\sqrt{7}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2+(-8-2\sqrt{7})x+23+8\sqrt{7}=0$$

$$\{x-(4+\sqrt{7})\}^2=0 \quad \therefore x=4+\sqrt{7}$$

이때 접점의 x 좌표 $4+\sqrt{7}$ 이 $x<2$ 에 속하지 않는다.

①, ②에서 $m=-6+2\sqrt{7}$ 배점 20%

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $-6+2\sqrt{7}<m<-\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-6+2\sqrt{7}, \beta=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha\beta=3-\sqrt{7} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

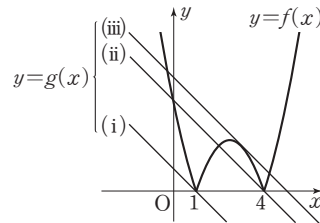
10 답 9

방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수 $h(k)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=|x^2-5x+4|$ 에서 $x^2-5x+4=0$ 이면

$$(x-1)(x-4)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 기울기가 -1 인 직선 $y=g(x)$ 는 그림과 같다.



(i) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때,

$$0=-1+k \quad \therefore k=1$$

(ii) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(4, 0)$ 을 지날 때,

$$0=-4+k \quad \therefore k=4$$

(iii) $1<x<4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 접할 때,

$1<x<4$ 에서 $f(x)=-(x^2-5x+4)$ 이므로 이차방정식

$-(x^2-5x+4)=-x+k$, 즉 $x^2-6x+k+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-k-4=0 \quad \therefore k=5$$

(i), (ii), (iii)에서

$$h(k)=\begin{cases} 0 & (k<1) \\ 1 & (k=1) \\ 2 & (1<k<4 \text{ 또는 } k>5) \\ 3 & (k=4 \text{ 또는 } k=5) \\ 4 & (4<k<5) \end{cases}$$

$$\therefore h\left(\frac{1}{2}\right)+h(1)+h\left(\frac{7}{2}\right)+h\left(\frac{9}{2}\right)+h\left(\frac{11}{2}\right)=0+1+2+4+2=9$$

11 답 ④

두 함수 $y=f(x), y=h(x)$ 의 그래프가 $x=\alpha$ 인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)-h(x)=0$ 은 중근 α 를 갖는다.

이때 ㉞에서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 함수 $y=g(x), y=h(x)$ 의 그래프가 $x=\beta$ 인 점에서 접하므로 방정식 $g(x)-h(x)=0$ 은 중근 β 를 갖는다.

이때 ㉞에서 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로

$$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉞에서 $\alpha:\beta=1:2$ 이므로 $\beta=2\alpha$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } g(x)-h(x)=4(x-2\alpha)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{3} \text{을 하면 } f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2-4(x-2\alpha)^2$$

$$\therefore f(x)-g(x)=-3x^2+14\alpha x-15\alpha^2$$

두 이차함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 $x=t$ 인 점에서 만나므로

$$f(t)=g(t) \text{에서 } f(t)-g(t)=0$$

$$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0, (3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$$

$$\therefore t=\frac{5}{3}\alpha \text{ 또는 } t=3\alpha$$

$$\text{그런데 } \alpha<t<\beta, \text{ 즉 } \alpha<t<2\alpha \text{이므로 } t=\frac{5}{3}\alpha \quad \therefore \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$$

12 답 ①

이차함수 $y=x^2-4mx$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-4mx=mx, x^2-5mx=0, x(x-5m)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=5m$$

따라서 점 A의 x 좌표가 $5m$ 이므로 $A'(5m, 0)$

직선 l 의 y 절편을 k 라 하면 직선 l 의 방정식은 $y=-\frac{1}{m}x+k$

$$x^2-4mx=-\frac{1}{m}x+k \text{에서 } x^2-\left(4m-\frac{1}{m}\right)x-k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D=\left(4m-\frac{1}{m}\right)^2+4k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{4}\left(4m-\frac{1}{m}\right)^2$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2-\left(4m-\frac{1}{m}\right)x+\frac{1}{4}\left(4m-\frac{1}{m}\right)^2=0, \left\{x-\frac{1}{2}\left(4m-\frac{1}{m}\right)\right\}^2=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}\left(4m-\frac{1}{m}\right)$$

따라서 점 B의 x 좌표가 $\frac{1}{2}\left(4m-\frac{1}{m}\right)$, 즉 $2m-\frac{1}{2m}$ 이므로

$$B'\left(2m-\frac{1}{2m}, 0\right)$$

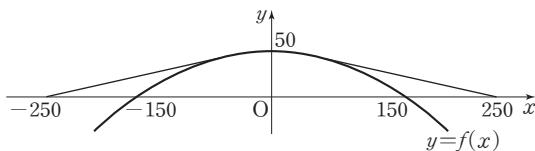
$$\overline{AB'}=6 \text{에서 } 5m-\left(2m-\frac{1}{2m}\right)=6$$

$$6m^2-12m+1=0 \quad \therefore m=\frac{6\pm\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{그런데 } m>1 \text{이므로 } m=\frac{6+\sqrt{30}}{6} \quad \therefore 6m=6+\sqrt{30}$$

13 답 $\frac{400}{9}$ m

그림과 같이 다리를 x 축, 아치의 높이가 최대인 점을 지나고 다리에 수직인 직선을 y 축, 포물선 모양의 아치가 나타내는 이차함수의 식을 $f(x)$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0, 50)$ 이므로

$$f(x)=ax^2+50 \text{ (단, } a<0\text{)}$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(150, 0)$ 을 지나므로 $f(150)=0$ 에서

$$150^2a+50=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{450} \quad \therefore f(x)=-\frac{1}{450}x^2+50$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 철근과 아치가 만나는 두 지점의 높이는 서로 같다.

철근이 나타내는 두 접선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선은 점 $(-250, 0)$ 을 지나므로

$$y=m(x+250) \quad \therefore y=mx+250m$$

$$-\frac{1}{450}x^2+50=mx+250m \text{에서}$$

$$x^2+450mx+450(250m-50)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=225^2m^2-450(250m-50)=0, 9m^2-20m+4=0$$

$$(9m-2)(m-2)=0 \quad \therefore m=\frac{2}{9} \text{ 또는 } m=2$$

(i) $m=\frac{2}{9}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2+100x+2500=0$$

$$(x+50)^2=0 \quad \therefore x=-50$$

이때 접점의 x 좌표 -50 이 $-150< x < 0$ 에 속한다.

(ii) $m=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2+900x+450^2=0$$

$$(x+450)^2=0 \quad \therefore x=-450$$

이때 접점의 x 좌표 -450 이 $-150< x < 0$ 에 속하지 않는다.

(i), (ii)에서 철근과 아치는 $x=-50$ 인 점에서 접하므로 그때의 y 좌표는

$$f(-50)=-\frac{1}{450}\times(-50)^2+50=\frac{400}{9}$$

따라서 구하는 높이는 $\frac{400}{9}$ m이다.

14 답 28

$$2x+3y=8 \text{에서 } 3y=8-2x$$

이때 $x>0, y>0$ 이므로 $8-2x>0$

$$\therefore 0<x<4$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+5})^2 &= 2x+1+2\sqrt{(2x+1)(3y+5)}+3y+5 \\ &= 2x+1+2\sqrt{(2x+1)(8-2x+5)}+8-2x+5 \\ &= 2\sqrt{-4x^2+24x+13}+14 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f(x)=-4x^2+24x+13$ 이라 하면

$$f(x)=-4(x-3)^2+49$$

$0<x<4$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값이 49이므로 ①에서

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+5})^2 &= 2\sqrt{-4x^2+24x+13}+14 \\ &\leq 2\sqrt{49}+14=28 \end{aligned}$$

따라서 $(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+5})^2$ 의 최댓값은 28이다.

15 답 ⑤

$$f(x)=x^2-3|x|-2 \text{에서}$$

(i) $-2\leq x\leq 0$ 일 때,

$$|x|=-x \text{이므로 } f(x)=x^2+3x-2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$$

$-2\leq x\leq 0$ 에서 이차함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값이 -2 ,

$$x=-\frac{3}{2} \text{일 때 최솟값이 } -\frac{17}{4} \text{이다.}$$

(ii) $0\leq x\leq 1$ 일 때,

$$|x|=x \text{이므로 } f(x)=x^2-3x-2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$$

$0\leq x\leq 1$ 에서 이차함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값이 -2 , $x=1$ 일 때 최솟값이 -4 이다.

(i), (ii)에서 $-2\leq x\leq 1$ 일 때, 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값은 -2 , 최솟값은 $-\frac{17}{4}$ 이므로

$$-\frac{17}{4}\leq f(x)\leq -2$$

$$f(x)=t \text{로 놓으면 } -\frac{17}{4}\leq t\leq -2 \text{이고}$$

$$y=\{f(x)\}^2+5f(x)+5=t^2+5t+5=\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-\frac{17}{4}\leq t\leq -2 \text{에서 } \textcircled{1} \text{은 } t=-\frac{17}{4} \text{일 때 최댓값이 } \frac{29}{16}, t=-\frac{5}{2} \text{일 때}$$

$$\text{최솟값이 } -\frac{5}{4} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } M=\frac{29}{16}, m=-\frac{5}{4} \text{이므로 } M-m=\frac{29}{16}+\frac{5}{4}=\frac{49}{16}$$

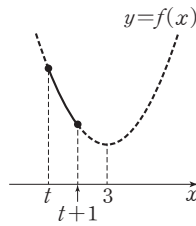
16 답 ③

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$$

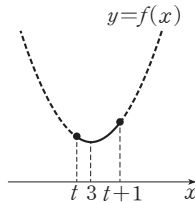
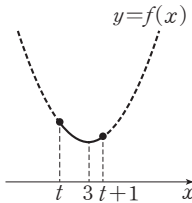
(i) $t+1 < 3$, 즉 $t < 2$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표가 $t \leq x \leq t+1$ 에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=t$ 일 때 최댓값이

$$f(t) = t^2 - 6t + 11$$



(ii) $t \leq 3 \leq t+1$, 즉 $2 \leq t \leq 3$ 일 때,



꼭짓점의 x 좌표가 $t \leq x \leq t+1$ 에 포함되므로

$3-t \geq (t+1)-3$, 즉 $2 \leq t \leq \frac{5}{2}$ 이면 이차함수 $f(x)$ 는 $x=t$ 일 때 최댓값이

$$f(t) = t^2 - 6t + 11$$

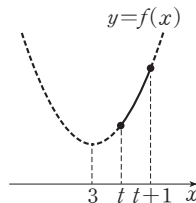
$3-t < (t+1)-3$, 즉 $\frac{5}{2} < t \leq 3$ 이면 이차함수 $f(x)$ 는 $x=t+1$ 일 때 최댓값이

$$f(t+1) = (t+1)^2 - 6(t+1) + 11 = t^2 - 4t + 6$$

(iii) $t > 3$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표가 $t \leq x \leq t+1$ 에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=t+1$ 일 때 최댓값이

$$f(t+1) = t^2 - 4t + 6$$



(i), (ii), (iii)에서

$$g(t) = \begin{cases} t^2 - 6t + 11 & (t \leq \frac{5}{2}) \\ t^2 - 4t + 6 & (t > \frac{5}{2}) \end{cases}$$

$t \leq \frac{5}{2}$ 일 때, 방정식 $g(t) = 3$ 에서 $t^2 - 6t + 11 = 3$, $t^2 - 6t + 8 = 0$

$$(t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 2 \left(\because t \leq \frac{5}{2} \right)$$

$t > \frac{5}{2}$ 일 때, 방정식 $g(t) = 3$ 에서 $t^2 - 4t + 6 = 3$, $t^2 - 4t + 3 = 0$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 \left(\because t > \frac{5}{2} \right)$$

따라서 방정식 $g(t) = 3$ 의 모든 실근의 합은 $2+3=5$

17 답 33

$$f(x) = x^2 - 4ax + 4a^2 + b \text{라 하면 } f(x) = (x-2a)^2 + b$$

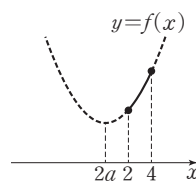
(i) $2a < 2$, 즉 $a < 1$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표가 $2 \leq x \leq 4$ 에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값이 $(2-2a)^2 + b$ 이다.

이때 최솟값이 4이므로

$$(2-2a)^2 + b = 4$$

$$\therefore b = -4(a-1)^2 + 4$$



(ii) $2 \leq 2a \leq 4$, 즉 $1 \leq a \leq 2$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표가 $2 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=2a$ 일 때 최솟값이 b 이다.

이때 최솟값이 4이므로

$$b = 4$$

(iii) $2a > 4$, 즉 $a > 2$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표가 $2 \leq x \leq 4$ 에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최솟값이 $(4-2a)^2 + b$ 이다.

이때 최솟값이 4이므로

$$(4-2a)^2 + b = 4$$

$$\therefore b = -4(a-2)^2 + 4$$

(i), (ii), (iii)에서

$$b = \begin{cases} -4(a-1)^2 + 4 & (a < 1) \\ 4 & (1 \leq a \leq 2) \\ -4(a-2)^2 + 4 & (a > 2) \end{cases}$$

이때 $b = g(a)$ 라 하면 함수 $b = g(a)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$2a + b = k$ 라 하면

$$b = -2a + k$$

이때 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이므로 k 는 이차함수 $b = -4(a-2)^2 + 4$ 의 그래프와 직선 $b = -2a + k$ 가 접할 때 최대이다.

이차방정식 $-4(a-2)^2 + 4 = -2a + k$, 즉 $4a^2 - 18a + k + 12 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 81 - 4(k+12) = 0$$

$$4k = 33 \quad \therefore k = \frac{33}{4}$$

따라서 $M = \frac{33}{4}$ 이므로 $4M = 33$

다른 풀이

$$b = \begin{cases} -4(a-1)^2 + 4 & (a < 1) \\ 4 & (1 \leq a \leq 2) \\ -4(a-2)^2 + 4 & (a > 2) \end{cases}$$

$$\therefore 2a + b = \begin{cases} -4(a-1)^2 + 4 + 2a & (a < 1) \\ 4 + 2a & (1 \leq a \leq 2) \\ -4(a-2)^2 + 4 + 2a & (a > 2) \end{cases}$$

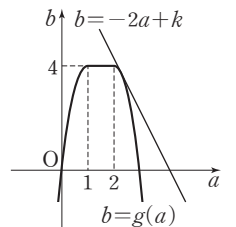
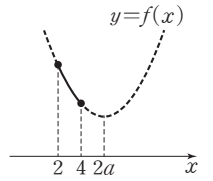
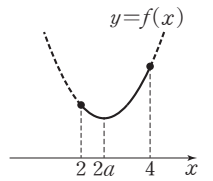
$$= \begin{cases} -4a^2 + 10a & (a < 1) \\ 2a + 4 & (1 \leq a \leq 2) \\ -4a^2 + 18a - 12 & (a > 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -4\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4} & (a < 1) \\ 2a + 4 & (1 \leq a \leq 2) \\ -4\left(a - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{33}{4} & (a > 2) \end{cases}$$

$2a + b$ 는 $a < 1$ 에서 최댓값이 존재하지 않고, $1 \leq a \leq 2$ 에서 $a=2$ 일 때 최댓값은 8, $a > 2$ 에서 $a = \frac{9}{4}$ 일 때 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

따라서 $2a + b$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이므로

$$M = \frac{33}{4} \quad \therefore 4M = 33$$



18 답 0

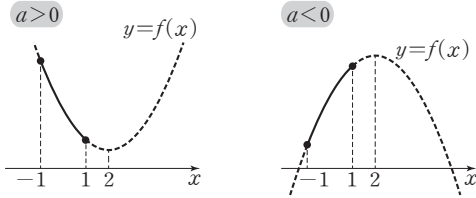
$f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{5}{2}-x\right)$ 의 양변에 x 대신 $\frac{1}{2}+x$ 를 대입하면

$$f(2+x)=f(2-x)$$

따라서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=2$ 이므로

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자. 배점 10%

(i) $-1 \leq x \leq 1$ 일 때,



꼭짓점의 x 좌표가 $-1 \leq x \leq 1$ 에 포함되지 않으므로

① $a > 0$ 인 경우

이차함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값이 $9a+b$, $x=1$ 일 때 최솟값이 $a+b$ 이다.

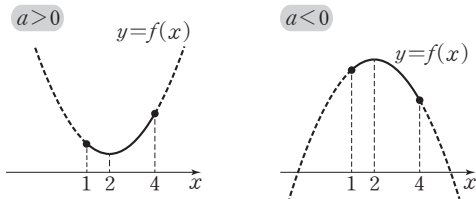
② $a < 0$ 인 경우

이차함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값이 $a+b$, $x=-1$ 일 때 최솟값이 $9a+b$ 이다.

①, ②에서 a 의 값의 부호에 관계없이 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $(9a+b)+(a+b)=10a+2b$ 이므로

$$10a+2b=14 \quad \therefore 5a+b=7 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(ii) $1 \leq x \leq 4$ 일 때,



꼭짓점의 x 좌표가 $1 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로

① $a > 0$ 인 경우

이차함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값이 $4a+b$, $x=2$ 일 때 최솟값이 b 이다.

② $a < 0$ 인 경우

이차함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값이 b , $x=4$ 일 때 최솟값이 $4a+b$ 이다.

①, ②에서 a 의 값의 부호에 관계없이 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $(4a+b)+b=4a+2b$ 이므로

$$4a+2b=26 \quad \therefore 2a+b=13 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=17 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

따라서 $f(x)=-2(x-2)^2+17$ 이므로

$$f(-2)+f(3)=(-32+17)+(-2+17)=0 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

19 답 11

$f(0)=f(4)$ 에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=2$ 이므로

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

이때 $f(-1) \neq f(4)$ 이고, $f(-1)+|f(4)|=0$ 에서

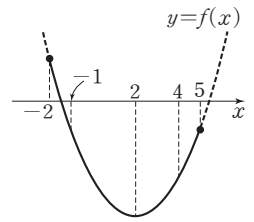
$$f(-1)=-|f(4)| \text{ 이므로}$$

$$f(-1)<0, f(-1)=-f(4) \quad \therefore f(4)>0$$

(i) $a > 0$ 인 경우

$-2 \leq x \leq 5$ 에서 $f(-1)<0$ 이면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $f(4)<0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a < 0$ 인 경우

$-2 \leq x \leq 5$ 에서 $f(-1)<0$ 이면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$f(-1)=-f(4) \text{ 이어야 하므로}$$

$$9a+b=-(4a+b)$$

$$\therefore 13a+2b=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

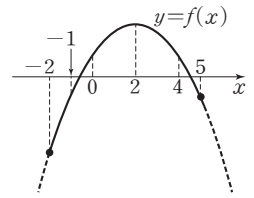
$-2 \leq x \leq 5$ 에서 이차함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최솟값이 $16a+b$ 이므로

$$16a+b=-19 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③, ④을 연립하여 풀면 $a=-2, b=13$

(i), (ii)에서 $f(x)=-2(x-2)^2+13$ 이므로

$$f(3)=-2+13=11$$



20 답 ⑤

그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 AH가 변 DG와 만나는 점을 I라 하자.

$\overline{DI}=a$ ($0 < a < 10$)라 하면 직각삼각형

ADI에서 $\angle ADI=60^\circ$ 이므로

$$\overline{AI}=\overline{DI} \tan 60^\circ = \sqrt{3}a$$

$$\overline{BH}=10, \angle B=60^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{AH}=\overline{BH} \tan 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{DE}=\overline{AH}-\overline{AI}=10\sqrt{3}-\sqrt{3}a$$

직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면

$$S=2\overline{DI} \times \overline{DE}=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}a)$$

$$=-2\sqrt{3}a^2+20\sqrt{3}a$$

$$=-2\sqrt{3}(a-5)^2+50\sqrt{3}$$

따라서 직사각형 DEFG의 넓이는 $a=\overline{DI}=5$ 일 때 최대이다.

$\overline{DI}=5$ 일 때, 직각삼각형 DBE에서

$$\overline{BE}=10-5=5, \overline{DE}=10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}, \overline{DB}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}=10$$

이므로 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{BE} \times \overline{DE} = \frac{1}{2} r (\overline{BE} + \overline{DE} + \overline{DB})$$

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{3} = \frac{1}{2} r (5 + 5\sqrt{3} + 10)$$

$$\therefore r = \frac{25\sqrt{3}}{15+5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

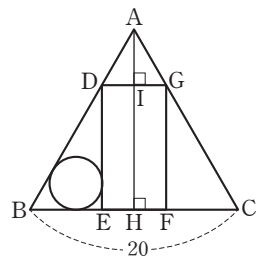
$$= \frac{5\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}-15}{6} = \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$$

원의 둘레의 길이는

$$2\pi r = 2\pi \times \frac{5\sqrt{3}-5}{2} = (5\sqrt{3}-5)\pi$$

따라서 $p=5, q=-5$ 이므로 $p^2+q^2=25+25=50$



21 [답] 98

변 AB의 중점이 P이므로

$$\overline{PB} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2$$

변 BC의 4등분점 중 꼭짓점 C에 가장 가까운 점이 Q이므로

$$\overline{QB} = \frac{3}{4} \overline{BC} = 3\sqrt{3}, \overline{QC} = \sqrt{3} \quad \text{배점 10\%}$$

두 직사각형의 공통부분인 직사각형의 가로의 길이를 a ($2 \leq a \leq 4$), 세로의 길이를 b 라 하자.

그림과 같이 점 F에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 QFH, QPB에서

$$\begin{aligned} \angle FQH &= \angle PQB, \\ \angle FHQ &= \angle PBQ = 90^\circ \\ \therefore \triangle QFH &\sim \triangle QPB \quad (\text{AA 닮음}) \end{aligned}$$

$$\overline{FH} : \overline{PB} = \overline{QH} : \overline{QB} \text{이므로}$$

$$(4-a) : 2 = (b-\sqrt{3}) : 3\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3}(4-a) = 2(b-\sqrt{3})$$

$$2b = 14\sqrt{3} - 3\sqrt{3}a$$

$$\therefore b = 7\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}a \quad \text{배점 30\%}$$

두 직사각형의 공통부분의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = ab$$

$$= a \left(7\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}a \right)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 7\sqrt{3}a$$

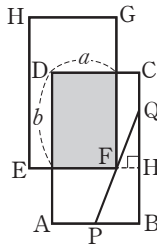
$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(a - \frac{7}{3} \right)^2 + \frac{49\sqrt{3}}{6} \quad \text{배점 30\%}$$

따라서 $2 \leq a \leq 4$ 에서 $S(a)$ 는 $a = \frac{7}{3}$ 일 때 최댓값이 $\frac{49\sqrt{3}}{6}$, $a = 4$ 일 때

최솟값이 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$M = \frac{49\sqrt{3}}{6}, m = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore Mm = 98 \quad \text{배점 30\%}$$



22 [답] ③

$A(t, -t+10)$ 이므로

$B(t, -t^2+11t-10)$

한편 $f(x) = -x^2+11x-10 = -\left(x-\frac{11}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}$ 이므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x = \frac{11}{2}$ 이다.

$\therefore C(11-t, -t^2+11t-10), D(11-t, -t+10)$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l 이라 하자.

(i) $2 < t < \frac{11}{2}$ 일 때,

$$\overline{AB} = -t^2+11t-10 - (-t+10)$$

$$= -t^2+12t-20$$

$$\overline{BC} = 11-t-t = 11-2t$$

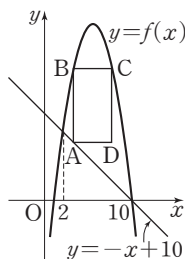
$$\therefore l = 2(\overline{AB} + \overline{BC})$$

$$= 2(-t^2+12t-20+11-2t)$$

$$= -2(t^2-10t+9)$$

$$= -2(t-5)^2+32$$

따라서 $2 < t < \frac{11}{2}$ 에서 l 은 $t=5$ 일 때 최댓값이 32이다.



(ii) $\frac{11}{2} < t < 10$ 일 때,

$$\overline{AB} = -t^2+11t-10 - (-t+10)$$

$$= -t^2+12t-20$$

$$\overline{BC} = t - (11-t) = 2t-11$$

$$\therefore l = 2(\overline{AB} + \overline{BC})$$

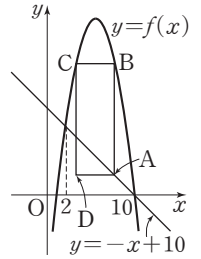
$$= 2(-t^2+12t-20+2t-11)$$

$$= -2(t^2-14t+31)$$

$$= -2(t-7)^2+36$$

따라서 $\frac{11}{2} < t < 10$ 에서 l 은 $t=7$ 일 때 최댓값이 36이다.

(i), (ii)에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.



23 [답] $12\sqrt{3}-7$

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 4\sqrt{3}$$

직각삼각형 ABH에서 $\angle B = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로 } \theta = 30^\circ$$

$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ$

삼각형 ABC의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 16\sqrt{3}$$

t 초 후 세 점 P, Q, R가 움직인 거리는 각각 $t, 2t, t$ 이므로

삼각형 PBQ의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{BQ} \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} (8-t) \times 2t \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 4t$$

삼각형 RQC의 넓이를 S_3 이라 하면

$$S_3 = \frac{1}{2} \times \overline{RC} \times \overline{CQ} \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} t (8\sqrt{3}-2t) \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 2\sqrt{3}t$$

사각형 APQR의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = S_1 - S_2 - S_3$$

$$= 16\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{2}t^2 + 4t\right) - \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2\sqrt{3}t\right)$$

$$= t^2 - 2(2+\sqrt{3})t + 16\sqrt{3}$$

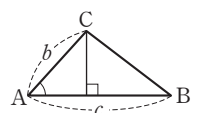
$$= \{t - (2+\sqrt{3})\}^2 + 12\sqrt{3} - 7$$

이때 $0 < t < 4\sqrt{3}$ 이므로 $S(t)$ 는 $t = 2+\sqrt{3}$ 일 때 최솟값이 $12\sqrt{3}-7$ 이다.

개념 NOTE

삼각형 ABC에서 두 변의 길이 b, c 와 끼인각 $\angle A$ 의 크기를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$



01 ⑤ 02 2 03 ⑤ 04 $10-6\sqrt{2}$ 05 ②
06 ⑤ 07 $\frac{17}{8}$ 08 360 09 ④

01 답 ⑤

1단계 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근의 부호 알기

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하고 $f(0)<0$ 이므로 $a>0, c<0$

따라서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표를 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 α, β 이고

$a<0, \beta>0$

2단계 $c|x-3|^2-b|x-3|+a=0$ 의 근 구하기

한편 함수 $y=c|x-3|^2-b|x-3|+a$ 에서 $|x-3|=t$ ($t\geq 0$)로 놓으면 $y=ct^2-bt+a$ ㉠

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 한 근이 α 이므로

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$

$a\neq 0$ 이므로 양변을 a^2 으로 나누면

$a+\frac{b}{a}+\frac{c}{a^2}=0 \quad \therefore c\left(-\frac{1}{a}\right)^2-b\times\left(-\frac{1}{a}\right)+a=0$

즉, $-\frac{1}{a}$ 은 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$ 의 한 근이다.

같은 방법으로 하면 $-\frac{1}{\beta}$ 도 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$ 의 한 근이다.

그런데 $-\frac{1}{a}>0, -\frac{1}{\beta}<0$ 이고 ㉠에서 $t\geq 0$ 이므로 이차방정식

$ct^2-bt+a=0$ 의 근은

$t=-\frac{1}{a}$

즉, 방정식 $c|x-3|^2-b|x-3|+a=0$ 의 근은

$|x-3|=-\frac{1}{a}$

$\therefore x=3-\frac{1}{a}$ 또는 $x=3+\frac{1}{a}$ ㉡

3단계 $y=c|x-3|^2-b|x-3|+a$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표의 합 구하기

㉡은 함수 $y=c|x-3|^2-b|x-3|+a$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표와 같으므로 그 합은

$3-\frac{1}{a}+3+\frac{1}{a}=6$

비법 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 α, β 일 때 (단, a, b, c 는 실수, $ac\neq 0$)

(1) 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$ 의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(2) 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$ 의 두 근은 $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$

idea

02 답 2

1단계 변환하였을 때 판별식 비교하기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1=b^2-4ac$

이차방정식 $a(x+1)^2+bx(x+1)+cx^2=0$, 즉

$(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$D_2=(2a+b)^2-4a(a+b+c)=b^2-4ac=D_1$

이차방정식 $a+b(x+1)+c(x+1)^2=0$, 즉

$cx^2+(b+2c)x+a+b+c=0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$D_3=(b+2c)^2-4c(a+b+c)=b^2-4ac=D_1$

$D_1=D_2=D_3$ 이므로 변환 후 판별식의 값이 모두 같다.

따라서 함수 $y=f_n(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수와 같다.

2단계 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수 구하기

$g(x)=x^2+3x+1$ 에서 이차방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 판별식을 D_4 라 하면

$D_4=9-4=5>0$

따라서 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

3단계 $y=h(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수 구하기

$h(x)=x^2-3x+5$ 에서 이차방정식 $x^2-3x+5=0$ 의 판별식을 D_5 라 하면

$D_5=9-4\times 5=-11<0$

따라서 이차함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다.

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 두 함수 $y=g_{10}(x), y=h_{10}(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수도 각각 2, 0이므로

$p=2, q=0 \quad \therefore p+q=2$

03 답 ⑤

1단계 $f(x)$ 의 식 세우기

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 A(1, 0), B(a, 0)을 지나므로

$f(x)=(x-1)(x-a)$ ㉠

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

ㄱ. ㉠에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=2-a$

3단계 $\angle$ 이 옳은지 확인하기

ㄴ. 직선 PB는 기울기가 m 이고 점 B(a, 0)을 지나므로 직선 PB의 방정식은 $y=m(x-a)$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 PB의 교점의 x 좌표를 구하면

$(x-1)(x-a)=m(x-a)$

$(x-1-m)(x-a)=0$

$\therefore x=m+1$ 또는 $x=a$

이때 $x=a$ 인 점은 B이므로 점 P의 x 좌표는 $m+1$ 이다.

한편 $f(x)=(x-1)(x-a)=x^2-(a+1)x+a$ 이므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점 P의 x 좌표는 $\frac{a+1}{2}$ 이다.

즉, $\frac{a+1}{2}=m+1$ 이므로 $a=2m+1$ ㉡

직선 AQ는 기울기가 m 이고 점 A(1, 0)을 지나므로 직선 AQ의 방정식은 $y=m(x-1)$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 AQ의 교점의 x 좌표를 구하면

$(x-1)(x-a)=m(x-1)$

$(x-1)(x-a-m)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=a+m$

이때 $x=1$ 인 점은 A이므로 점 Q의 x 좌표는 $a+m$ 이다.

따라서 점 R의 x 좌표도 $a+m$ 이므로

$\overline{AR}=a+m-1=(2m+1)+m-1 (\because \text{㉡})$
 $=3m$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 점 Q의 x좌표는 $a+m$ 이고 점 Q는 직선 $y=m(x-1)$ 위의 점이므로 점 Q의 y좌표는

$$\begin{aligned} y &= m(a+m-1) = m(2m+1+m-1) \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= 3m^2 \\ \therefore \overline{QR} &= 3m^2 \end{aligned}$$

$\overline{BR} = a+m-a = m$ 이고 삼각형 BRQ의 넓이가 $\frac{81}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{QR} &= \frac{81}{2}, \quad \frac{1}{2} \times m \times 3m^2 = \frac{81}{2} \\ m^3 &= 27 \quad \therefore m=3 \quad (\because m \text{은 실수}) \\ \therefore a+m &= (2m+1)+m \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= 3m+1=9+1=10 \end{aligned}$$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

★ idea

04 답 $10-6\sqrt{2}$

1단계 $f(0)$, $f(3)$ 의 값 구하기

$-3 \leq x \leq 0$ 에서 정의된 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $0 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

$$g(0)=f(0) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$g(x)=-f(-x) \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } g(0)=-f(0)$$

$$\textcircled{A} \text{을 대입하면 } f(0)=-f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

또 $3 \leq x \leq 6$ 에서 정의된 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 $0 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

$$h(3)=f(3) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$h(x)=6-f(6-x) \text{에 } x=3 \text{을 대입하면 } h(3)=6-f(3)$$

$$\textcircled{B} \text{을 대입하면 } f(3)=6-f(3), \quad 2f(3)=6 \quad \therefore f(3)=3$$

2단계 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 구하기

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(0)=0 \text{에서 } b=0$$

$$f(3)=3 \text{에서 } 9+3a+b=3, \quad 9+3a=3 \quad \therefore a=-2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2-2x \quad (0 \leq x \leq 3) \text{이므로}$$

$$g(x)=-f(-x)=-(-x^2+2x)=-x^2-2x \quad (\text{단, } -3 \leq x \leq 0)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 6-f(6-x) = 6-\{(6-x)^2-2(6-x)\} \\ &= -x^2+10x-18 \quad (\text{단, } 3 \leq x \leq 6) \end{aligned}$$

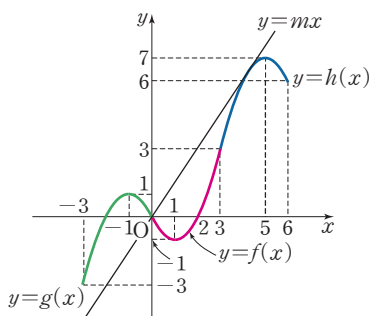
3단계 직선이 세 함수의 그래프와 두 점에서 만나는 경우 알기

$$\text{이때 } f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

$$g(x)=-x^2-2x=-(x+1)^2+1,$$

$$h(x)=-x^2+10x-18=-(x-5)^2+7$$

이고 $g(-3)=-3$, $g(0)=f(0)=0$, $f(3)=h(3)=3$, $h(6)=6$ 이므로 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



원점을 지나고 기울기가 1보다 큰 직선 $y=mx$ 가 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=mx$ 와 함수 $y=h(x)$ 의 그래프가 $3 \leq x \leq 5$ 에서 접해야 한다.

4단계 m 의 값 구하기

$$mx = -x^2 + 10x - 18 \text{에서}$$

$$x^2 + (m-10)x + 18 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이차방정식 $\textcircled{C}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m-10)^2 - 72 = 0$$

$$m^2 - 20m + 28 = 0$$

$$\therefore m = 10 \pm 6\sqrt{2}$$

(i) $m = 10 + 6\sqrt{2}$ 일 때,

$$\textcircled{C} \text{에서 } x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 = 0$$

$$(x + 3\sqrt{2})^2 = 0 \quad \therefore x = -3\sqrt{2}$$

이때 접점의 x좌표 $-3\sqrt{2}$ 가 $3 \leq x \leq 5$ 에 속하지 않는다.

(ii) $m = 10 - 6\sqrt{2}$ 일 때,

$$\textcircled{C} \text{에서 } x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0$$

$$(x - 3\sqrt{2})^2 = 0 \quad \therefore x = 3\sqrt{2}$$

이때 접점의 x좌표 $3\sqrt{2}$ 가 $3 \leq x \leq 5$ 에 속한다.

(i), (ii)에서

$$m = 10 - 6\sqrt{2}$$

★ idea

05 답 ②

1단계 주어진 함수가 최댓값을 갖는 경우 알기

주어진 함수를 $f_n(x)$ 라 하면

$$f_n(x) = -2[x]^2 + n[x] + 3$$

$$= -2\left([x] - \frac{n}{4}\right)^2 + \frac{n^2}{8} + 3$$

이때 $[x]$ 는 정수이므로 $\frac{n}{4}$ 의 값에 가장 가까운 정수에서 최댓값을 갖는다.

2단계 $M(12)$, $M(13)$, $M(15)$, $M(16)$ 의 값 구하기

(i) $n=12$ 일 때,

$$\frac{n}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{이므로 함수 } f_{12}(x) = -2[x]^2 + 12[x] + 3 \text{은}$$

$[x]=3$ 에서 최대이다.

$$\therefore M(12) = -2 \times 9 + 12 \times 3 + 3 = 21$$

(ii) $n=13$ 일 때,

$$\frac{n}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \text{이므로 함수 } f_{13}(x) = -2[x]^2 + 13[x] + 3 \text{은}$$

$[x]=3$ 에서 최대이다.

$$\therefore M(13) = -2 \times 9 + 13 \times 3 + 3 = 24$$

(iii) $n=15$ 일 때,

$$\frac{n}{4} = \frac{15}{4} = 3.75 \text{이므로 함수 } f_{15}(x) = -2[x]^2 + 15[x] + 3 \text{은}$$

$[x]=4$ 에서 최대이다.

$$\therefore M(15) = -2 \times 16 + 15 \times 4 + 3 = 31$$

(iv) $n=16$ 일 때,

$$\frac{n}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{이므로 함수 } f_{16}(x) = -2[x]^2 + 16[x] + 3 \text{은}$$

$[x]=4$ 에서 최대이다.

$$\therefore M(16) = -2 \times 16 + 16 \times 4 + 3 = 35$$

3단계 $M(12)+M(13)+M(15)+M(16)$ 의 값 구하기

(i)~(iv)에서

$$M(12)+M(13)+M(15)+M(16) = 21+24+31+35 = 111$$

06 답 ⑤

1단계 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타내기

(가)에서 방정식 $f(x) = g(x)$ 는

$$(x-a)^2 - a^2 = -(x-2a)^2 + 4a^2 + b$$

$$\therefore 2x^2 - 6ax - b = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3a, \alpha\beta = -\frac{b}{2}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

1. (나)에서 $\beta - \alpha = 2$ 이므로 $(\beta - \alpha)^2 = 4$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \therefore 9a^2 + 2b = 4$$

$$a = 1 \text{을 대입하면 } 9 + 2b = 4 \quad \therefore b = -\frac{5}{2}$$

3단계 $\angle$ 이 옳은지 확인하기

2. 이차함수 $f(x) = (x-a)^2 - a^2$ 은 $x=a$ 일 때 최소이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f(a)$$

이차함수 $g(x) = -(x-2a)^2 + 4a^2 + b$ 는 $x=2a$ 일 때 최대이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \leq g(2a)$$

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(\alpha) = g(\alpha), f(\beta) = g(\beta)$$

$$\therefore f(\beta) - g(\alpha) = g(\beta) - f(\alpha) \leq g(2a) - f(\alpha) \quad \dots\dots ①$$

$$(\because g(\beta) \leq g(2a), -f(\alpha) \leq -f(a))$$

4단계 $\triangle$ 이 옳은지 확인하기

3. $g(\beta) = f(\alpha) + 5a^2 + b$ 에서 $g(\beta) - f(\alpha) = 5a^2 + b$

$$① \text{에서 } g(\beta) - f(\alpha) \leq g(2a) - f(\alpha) \text{이고}$$

$$g(2a) - f(\alpha) = 4a^2 + b - (-a^2) = 5a^2 + b \text{이므로}$$

$$g(\beta) - f(\alpha) = g(2a) - f(\alpha) \quad \therefore \beta = 2a, \alpha = a$$

$$(나) \text{에서 } \beta - \alpha = 2 \text{이므로 } 2a - a = 2 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{또 } \alpha\beta = -\frac{b}{2} \text{이므로 } 2a^2 = -\frac{b}{2}, 8 = -\frac{b}{2} \quad \therefore b = -16$$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 1, 2, 3이다.

07 답 $\frac{17}{8}$

1단계 $g(x)$ 의 식 세우기

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a > 2$)라 하자.

$$(가) \text{에서 } f(1) = -1 \text{이므로 } a + b + c = -1 \quad \dots\dots ①$$

(나)에서 $f(x) = f(-x)$ 이므로

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c, 2bx = 0$$

이 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 $b = 0$

$$\text{이를 } ① \text{에 대입하면 } a + c = -1 \quad \therefore c = -a - 1$$

따라서 $f(x) = ax^2 - a - 1$ 이므로

$$g(x) = f(x-p) = a(x-p)^2 - a - 1$$

2단계 $\overline{HT} \times \overline{QT}$ 를 식으로 나타내기

이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 꼭짓점은 점

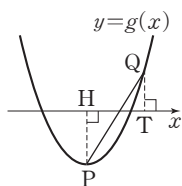
$P(p, -a-1)$ 이므로 $H(p, 0)$

$Q(q, r)$ ($q > p$)라 하면 $T(q, 0)$

직선 PQ의 기울기는 2이므로

$$\frac{r+a+1}{q-p} = 2$$

$$\therefore r + a + 1 = 2(q-p) \quad \dots\dots ②$$



점 $Q(q, r)$ 는 이차함수 $g(x) = a(x-p)^2 - a - 1$ 의 그래프 위의 점이므로

$$r = a(q-p)^2 - a - 1 \quad \dots\dots ③$$

③을 ②에 대입하면

$$a(q-p)^2 = 2(q-p)$$

$q \neq p$ 이므로 양변을 $q-p$ 로 나누면

$$a(q-p) = 2 \quad \therefore q-p = \frac{2}{a}$$

$$\text{이를 } ③ \text{에 대입하면 } r = a \times \left(\frac{2}{a}\right)^2 - a - 1 = \frac{4}{a} - a - 1$$

$$\therefore \overline{HT} \times \overline{QT} = (q-p) \times |r| = \left|\left(\frac{2}{a}\right)r\right| = \left|\frac{2}{a}\left(\frac{4}{a} - a - 1\right)\right| = \left|\frac{8}{a^2} - \frac{2}{a} - 2\right|$$

3단계 $\overline{HT} \times \overline{QT}$ 의 최댓값 구하기

$$\frac{2}{a} = t \text{로 놓으면 } a > 2 \text{이므로 } 0 < t < 1$$

$$h(t) = \overline{HT} \times \overline{QT} \text{라 하면}$$

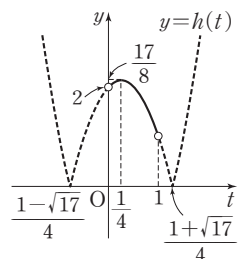
$$h(t) = |2t^2 - t - 2| = \left|2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}\right|$$

$$2t^2 - t - 2 = 0 \text{에서 } t = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

따라서 함수 $y = h(t)$ 의 그래프는 그림과

같으므로 $0 < t < 1$ 에서 $h(t)$, 즉 $\overline{HT} \times \overline{QT}$

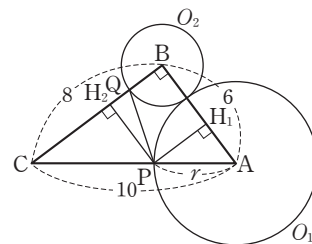
는 $t = \frac{1}{4}$ 일 때 최댓값이 $\frac{17}{8}$ 이다.



08 답 360

1단계 점 P에서 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 에 내린 수선의 길이를 원의 반지름의 길이에 대한 식으로 나타내기

그림과 같이 점 P에서 변 AB, 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하고 원 O_1 의 반지름의 길이를 r ($0 < r < 6$)라 하자.



두 삼각형 $\triangle PH_1P, \triangle ABC$ 에서

$$\angle PAH_1 = \angle CAB, \angle AH_1P = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle PH_1P \sim \triangle ABC \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{AP} : \overline{AC} = \overline{H_1P} : \overline{BC} \text{이므로}$$

$$r : 10 = \overline{H_1P} : 8$$

$$10\overline{H_1P} = 8r \quad \therefore \overline{H_1P} = \frac{4}{5}r$$

또 두 삼각형 $\triangle PH_2P, \triangle CBA$ 에서

$$\angle PCH_2 = \angle ACB, \angle CH_2P = \angle CBA = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle PH_2P \sim \triangle CBA \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{CP} : \overline{CA} = \overline{H_2P} : \overline{BA} \text{이므로}$$

$$(10-r) : 10 = \overline{H_2P} : 6$$

$$10\overline{H_2P} = 6(10-r) \quad \therefore \overline{H_2P} = \frac{3}{5}(10-r)$$

2단계 $\overline{PQ}$ 의 최솟값 구하기

$$\overline{BQ} = \overline{AB} - r = 6 - r \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\overline{QH_2} &= |\overline{H_1P} - \overline{BQ}| \\ &= \left| \frac{4}{5}r - (6-r) \right| = \left| \frac{9}{5}r - 6 \right|\end{aligned}$$

직각삼각형 PH_2Q 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{H_2P}^2 + \overline{QH_2}^2 \\ &= \left\{ \frac{3}{5}(10-r) \right\}^2 + \left| \frac{9}{5}r - 6 \right|^2 = \left\{ \frac{3}{5}(10-r) \right\}^2 + \left| \frac{3}{5}(3r-10) \right|^2 \\ &= \frac{9}{25} \{ (10-r)^2 + (3r-10)^2 \} = \frac{9}{25} (10r^2 - 80r + 200) \\ &= \frac{18}{5} (r^2 - 8r + 20) = \frac{18}{5} (r-4)^2 + \frac{72}{5}\end{aligned}$$

$0 < r < 6$ 에서 $\overline{PQ}^2$ 은 $r=4$ 일 때 최솟값이 $\frac{72}{5}$ 이다.

3단계 ab 의 값 구하기

따라서 $a=5$, $b=72$ 이므로 $ab=360$

09 답 ④

1단계 원 O_1 의 반지름의 길이를 a 에 대한 식으로 나타내기

정삼각형 DEF 의 넓이를 S_1 이라 하면 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

원 O_1 의 반지름의 길이를 r_1 이라 하면 $S_1 = \frac{1}{2}r_1 \times 3a = \frac{3}{2}ar_1$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3}{2}ar_1$ 이므로 $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

2단계 원 O_2 의 반지름의 길이를 a 에 대한 식으로 나타내기

세 삼각형 ADF , BED , CFE 에서 $\overline{DF} = \overline{ED} = \overline{FE} = a$

$\angle ADF = \theta$ 라 하면 $\angle BDE = 120^\circ - \theta$, $\angle BED = \theta$

$\angle CEF = 120^\circ - \theta$, $\angle CFE = \theta$, $\angle AFD = 120^\circ - \theta$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$ (ASA 합동)

정삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 ADF 의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{3} \left(16\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{12} (64 - a^2)$$

삼각형 ADF 에서 $\overline{AD} + \overline{AF} = 8$, $\overline{DF} = a$ 이므로 원 O_2 의 반지름의 길이를 r_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2}r_2(8+a)$$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{12} (64 - a^2) = \frac{1}{2}r_2(8+a)$ 이므로

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}(64-a^2)}{6(8+a)} = \frac{\sqrt{3}(8+a)(8-a)}{6(8+a)} = \frac{\sqrt{3}}{6}(8-a)$$

3단계 네 원의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 a 의 값 구하기

네 원 O_1, O_2, O_3, O_4 의 넓이의 합을 $S(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned}S(a) &= \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \right)^2 + 3 \times \pi \left\{ \frac{\sqrt{3}}{6}(8-a) \right\}^2 \\ &= \frac{\pi}{12}a^2 + \frac{\pi}{4}(64 - 16a + a^2) \\ &= \frac{\pi}{3}(a^2 - 12a + 48) = \frac{\pi}{3}(a-6)^2 + 4\pi\end{aligned}$$

따라서 $0 < a < 8$ 에서 $S(a)$ 가 최소가 되도록 하는 a 의 값은 6이다.

개념 NOTE

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

06 여러 가지 방정식

step 1 핵심 문제

| 70~71쪽

01 ①	02 ②	03 84	04 ④	05 -4	06 ②
07 ①	08 ㄱ, ㄷ		09 ②	10 4	11 7
12 ②					

01 답 ①

주어진 방정식의 좌변을 전개하면

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) \\ &= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7\end{aligned}$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 &= x^7+x^6+x^5+x^4 \\ x^3+x^2+x+1 &= 0\end{aligned}$$

$$x^2(x+1)+x+1=0$$

$$(x+1)(x^2+1)=0$$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = \pm i$

이 세 근이 α, β, γ 이므로

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (-1)^4 + i^4 + (-i)^4 = 1 + 1 + 1 = 3$$

다른 풀이

주어진 방정식의 우변을 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^7+x^6+x^5+x^4 &= x^4(x^3+x^2+x+1) = x^4\{x^2(x+1)+x+1\} \\ &= x^4(x+1)(x^2+1)\end{aligned}$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4) &= x^4(x+1)(x^2+1) \\ (1+x)(1+x^2)(1+x^4) - x^4(x+1)(x^2+1) &= 0 \\ \{(1+x^4) - x^4\}(x+1)(x^2+1) &= 0 \\ (x+1)(x^2+1) &= 0\end{aligned}$$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = \pm i$

이 세 근이 α, β, γ 이므로

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (-1)^4 + i^4 + (-i)^4 = 1 + 1 + 1 = 3$$

02 답 ②

(*)에서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 13$ 이라 하면 $f(-1) = 0$ 이므로 조립제법을

을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 9 & 13 \\ & & -1 & 4 & -13 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2-4x+13)$$

삼차방정식 $(x+1)(x^2-4x+13)=0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \pm 3i \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 $z = a + bi$ 이므로 (*)에서

$$\frac{z - \bar{z}}{i} = \frac{(a+bi) - (a-bi)}{i} = \frac{2bi}{i} = 2b$$

즉, $2b$ 가 음의 실수이므로 $b < 0$

①에서 허수부분이 음수인 허근은 $2-3i$ 이므로 $z = 2-3i$

따라서 $a=2$, $b=-3$ 이므로

$$a+b = -1$$

03 답 84

$f(x)=(x^2+8x+k)(x^2+8x+15)+15$ 가 $x+2$ 로 나누어떨어지면
 $f(-2)=0$ 이므로

$$(4-16+k)(4-16+15)+15=0$$

$$3k-21=0 \quad \therefore k=7$$

따라서 $f(x)=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$ 이므로 사차방정식

$f(x)=0$ 에서 $x^2+8x+7=t$ 로 놓으면

$$t(t+8)+15=0, \quad t^2+8t+15=0$$

$$(t+5)(t+3)=0 \quad \therefore t=-5 \text{ 또는 } t=-3$$

(i) $t=-5$ 일 때,

$$x^2+8x+7=-5 \text{에서 } x^2+8x+12=0$$

$$(x+6)(x+2)=0 \quad \therefore x=-6 \text{ 또는 } x=-2$$

(ii) $t=-3$ 일 때,

$$x^2+8x+7=-3 \text{에서 } x^2+8x+10=0$$

$$\therefore x=-4 \pm \sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 네 근이 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 &= (-6)^2+(-2)^2+(-4+\sqrt{6})^2+(-4-\sqrt{6})^2 \\ &= 36+4+(22-8\sqrt{6})+(22+8\sqrt{6})=84 \end{aligned}$$

다른 풀이

$f(x)=(x^2+8x+k)(x^2+8x+15)+15$ 가 $x+2$ 로 나누어떨어지면
 $f(-2)=0$ 이므로

$$(4-16+k)(4-16+15)+15=0$$

$$3k-21=0 \quad \therefore k=7$$

따라서 $f(x)=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$ 이므로 사차방정식

$f(x)=0$ 에서 $x^2+8x+7=t$ 로 놓으면

$$t(t+8)+15=0, \quad t^2+8t+15=0$$

$$(t+5)(t+3)=0 \quad \therefore t=-5 \text{ 또는 } t=-3$$

(i) $t=-5$ 일 때,

$$x^2+8x+7=-5 \text{에서 } x^2+8x+12=0$$

이차방정식 $x^2+8x+12=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-8, \alpha\beta=12$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-8)^2-2 \times 12=40$$

(ii) $t=-3$ 일 때,

$$x^2+8x+7=-3 \text{에서 } x^2+8x+10=0$$

이차방정식 $x^2+8x+10=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\gamma+\delta=-8, \gamma\delta=10$

$$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta=(-8)^2-2 \times 10=44$$

(i), (ii)에서

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=40+44=84$$

04 답 ④

$x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$2x^2+3x-1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$2t^2+3t-5=0, \quad (2t+5)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{5}{2} \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-\frac{5}{2}$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \text{에서 } 2x^2+5x+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1=25-4 \times 2 \times 2=9>0$
 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=1$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=1 \text{에서 } x^2-x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2=1-4=-3<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 허근은 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근
 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 1이다.

05 답 -4

$f(x)=2x^3+(a-11)x^2+(a^2-2a+14)x-2a^2$ 이라 하면 $f(2)=0$ 이므로
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & a-11 & a^2-2a+14 & -2a^2 \\ & & 4 & 2a-14 & 2a^2 \\ \hline & 2 & a-7 & a^2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)\{2x^2+(a-7)x+a^2\} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

삼차방정식 $(x-2)\{2x^2+(a-7)x+a^2\}=0$ 에서

$$x=2 \text{ 또는 } 2x^2+(a-7)x+a^2=0$$

주어진 삼차방정식이 중근을 가지므로 이차방정식 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$
 이 2를 근으로 갖거나 중근을 갖는다. $\dots\dots\dots \text{배점 30\%}$

(i) 이차방정식 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$ 이 2를 근으로 갖는 경우

$$x=2 \text{를 대입하면 } 8+2(a-7)+a^2=0$$

$$a^2+2a-6=0 \rightarrow \frac{D_1}{4}=1+6=7>0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 a 의 값의 합은 -2이다.

(ii) 이차방정식 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$ 이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a-7)^2-4 \times 2 \times a^2=0, \quad -7a^2-14a+49=0$$

$$a^2+2a-7=0 \rightarrow \frac{D_2}{4}=1+7=8>0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 a 의 값의 합은 -2이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은 $-2+(-2)=-4 \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$

06 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \quad \alpha\beta\gamma=4$$

$$\therefore (\alpha+\beta+1)(\beta+\gamma+1)(\gamma+\alpha+1)$$

$$=(3-\gamma)(3-\alpha)(3-\beta)$$

$$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

$$=27-9 \times 2+3 \times 3-4=14$$

07 답 ①

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-8=0$ 의 계수가 실수이고 $1-\sqrt{3}i$ 가 한 근이므로
 $1+\sqrt{3}i$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=8, \quad 4\alpha=8 \quad \therefore \alpha=2$$

즉, 세 근이 $1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, 2$ 이므로
 세 근의 합은 $(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+2=-a \quad \therefore a=-4$
 두 근의 곱의 합은
 $(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+2(1+\sqrt{3}i)+2(1-\sqrt{3}i)=b \quad \therefore b=8$
 $\therefore a+b=-4+8=4$

08 답 ㄱ, ㄷ

삼차방정식 $x^3=1$ 에서 $x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$
 이때 ω 는 삼차방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근이므로
 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$
 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 계수가 실수이고 한 허근이 ω 이므로 다른
 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\therefore \omega^{16}=(\omega^3)^5\omega=\omega$$

$$\therefore \omega^2+\bar{\omega}^2=(\omega+\bar{\omega})^2-2\omega\bar{\omega}=(-1)^2-2\times 1=-1$$

$$\therefore \omega^2+\omega+1=0\text{에서 } 1+\omega^2=-\omega, 1+\omega=-\omega^2\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\omega^2}+\frac{1}{1+\omega^4}+\frac{1}{1+\omega^6} &= -\frac{1}{\omega}+\frac{1}{1+\omega^3\omega}+\frac{1}{1+(\omega^3)^2} \\ &= -\frac{1}{\omega}+\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{2}=-\frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{1}{2} \\ &= -\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 답 ②

주어진 두 연립방정식의 해가 일치하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases} 2x+2y=1 \\ x^2-y^2=-1 \end{cases} \text{의 해와 같다.}$$

$$\text{방정식 } 2x+2y=1\text{에서 } 2y=1-2x \quad \therefore y=\frac{1}{2}-x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①을 $x^2-y^2=-1$ 에 대입하면

$$x^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=-1$$

$$-\frac{1}{4}+x=-1 \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } y=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

$$x=-\frac{3}{4}, y=\frac{5}{4}\text{를 } 3x+y=a\text{에 대입하면}$$

$$a=-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=-1$$

$$x=-\frac{3}{4}, y=\frac{5}{4}\text{를 } x-y=b\text{에 대입하면}$$

$$b=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-2$$

$$\therefore ab=-1\times(-2)=2$$

10 답 4

방정식 $(x+1)(y+1)=-4$ 에서 $xy+x+y=-5$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u+v=-5 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ u^2-v=7 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $v=-u-5$ 이므로 이를 ②에 대입하면

$$u^2-(-u-5)=7, u^2+u-2=0$$

$$(u+2)(u-1)=0 \quad \therefore u=-2 \text{ 또는 } u=1$$

이를 각각 $v=-u-5$ 에 대입하면

$$u=-2\text{일 때 } v=-3, u=1\text{일 때 } v=-6$$

(i) $u=-2, v=-3$, 즉 $x+y=-2, xy=-3$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$ 의 두 근이므로

$$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore x=-3, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-3$$

$$\therefore x+2y=-1 \text{ 또는 } x+2y=-5$$

(ii) $u=1, v=-6$, 즉 $x+y=1, xy=-6$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-t-6=0$ 의 두 근이므로

$$(t+2)(t-3)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore x=-2, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=-2$$

$$\therefore x+2y=4 \text{ 또는 } x+2y=-1$$

(i), (ii)에서 $x+2y$ 의 최댓값은 4이다.

11 답 7

방정식 $2x-y=5$ 에서 $y=2x-5$

이를 $x^2-2y=k$ 에 대입하면

$$x^2-2(2x-5)=k$$

$$\therefore x^2-4x+10-k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지면 이차방정식 ①이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-10+k=0 \quad \therefore k=6$$

이를 ①에 대입하면 $x^2-4x+4=0$

$$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$$

이를 $y=2x-5$ 에 대입하면 $y=-1$

따라서 $\alpha=2, \beta=-1$ 이므로

$$\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$$

12 답 ②

방정식 $2x^2+6xy+9y^2-2x+1=0$ 에서

$$(x^2+6xy+9y^2)+(x^2-2x+1)=0$$

$$\therefore (x+3y)^2+(x-1)^2=0$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$x+3y=0, x-1=0 \quad \therefore x=1, y=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore x-3y=1+1=2$$

다른 풀이

주어진 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^2+2(3y-1)x+9y^2+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 x 에 대한 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(3y-1)^2-2(9y^2+1)\geq 0$$

$$9y^2+6y+1\leq 0 \quad \therefore (3y+1)^2\leq 0$$

이때 y 가 실수이므로

$$3y+1=0 \quad \therefore y=-\frac{1}{3}$$

이를 ①에 대입하면 $2x^2-4x+2=0$

$$x^2-2x+1=0, (x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

$$\therefore x-3y=1+1=2$$

01 ③	02 ⑤	03 ⑤	04 21	05 ④	06 ①
07 4	08 $\frac{1}{2}$	09 $-\frac{3}{2}$	10 ④	11 31	12 ③
13 ⑤	14 16	15 $\frac{3}{4}$ cm	16 3	17 ①	
18 5	19 $\frac{31}{8}$	20 6	21 ②	22 ②	23 39
24 3	25 12	26 ②	27 10	28 8	

01 답 ③

$g(x)=2x^3-nx^2+(n-n^2)x-n^2$ 이라 하면 $g(n)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} n & 2 & -n & n-n^2 & -n^2 \\ & & 2n & n^2 & n^2 \\ \hline & 2 & n & n & 0 \end{array}$$

$$\therefore g(x)=(x-n)(2x^2+nx+n)$$

$$\text{삼차방정식 } (x-n)(2x^2+nx+n)=0\text{에서}$$

$$x=n \text{ 또는 } 2x^2+nx+n=0 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $n=7$ 일 때,

$$\text{㉠에 대입하면 } x=7 \text{ 또는 } 2x^2+7x+7=0$$

$$\text{이차방정식 } 2x^2+7x+7=0\text{에서}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7}i}{4}$$

$$\therefore f(7)=1$$

(ii) $n=8$ 일 때,

$$\text{㉠에 대입하면 } x=8 \text{ 또는 } 2x^2+8x+8=0$$

$$\text{이차방정식 } 2x^2+8x+8=0\text{에서 } x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$$

$$\therefore f(8)=2$$

(iii) $n=9$ 일 때,

$$\text{㉠에 대입하면 } x=9 \text{ 또는 } 2x^2+9x+9=0$$

$$\text{이차방정식 } 2x^2+9x+9=0\text{에서}$$

$$(x+3)(2x+3)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(9)=3$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(7)+f(8)+f(9)=1+2+3=6$$

02 답 ⑤

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

ㄴ. $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\ & & 1 & 2a & b^2 \\ \hline & 1 & 2a & b^2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$$

$$\text{삼차방정식 } (x-1)(x^2+2ax+b^2)=0\text{에서}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x^2+2ax+b^2=0$$

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-b^2$$

$$\text{이때 } a<b<0\text{이므로 } a^2>b^2 \quad \therefore D_1>0$$

즉, 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 이 1을 근으로 가져야 한다.

$$\therefore 1+2a+b^2=0 \quad \dots\dots ㉠$$

따라서 $a<b<0$ 과 ㉠을 만족시키는 어떤 두 실수 a, b 를

$a=-2, b=-\sqrt{3}$ 이라 하면 $\rightarrow$ 조건을 만족시키는 a, b 가 한 쌍이라도 존재하면 된다.

$$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)$$

$$=(x-1)^2(x-3)$$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 삼차방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x-1)(x^2+2ax+b^2)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-2a$ 이므로 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 세 근의 합은

$$1+(-2a)=7 \quad \therefore a=-3$$

이차방정식 $x^2-6x+b^2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=9-b^2>0 \quad \therefore b^2<9 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 이차방정식 $x^2-6x+b^2=0$ 이 1을 근으로 갖지 않아야 하므로

$$1-6+b^2\neq 0 \quad \therefore b^2\neq 5 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢에서 정수 b 의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이다.

따라서 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(-3, -2), (-3, -1),$

$(-3, 0), (-3, 1), (-3, 2)$ 의 5개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

idea

03 답 ⑤

$g(x)=2x^4-3x^3+4x^2-3x+2$ 라 하면 사차방정식 $g(x)=0$ 의 네 근이 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이므로

$$g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \quad \dots\dots ㉠$$

사차방정식 $g(x)=0$ 의 상수항이 2이므로

$$2\alpha\beta\gamma\delta=2 \quad \therefore \alpha\beta\gamma\delta=1 \quad \dots\dots ㉡$$

사차방정식 $f(x)=0$ 의 네 근이 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 이므로 $f(x)$ 의 사차항의 계수를 $k(k\neq 0)$ 라 하면

$$f(x)=k(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$$

이때 $f(0)=2$ 에서

$$k\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2=2, k(\alpha\beta\gamma\delta)^2=2$$

$$\therefore k=2 (\because ㉡)$$

따라서 $f(x)=2(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$ 이므로

$$f(1)=2(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)(1-\delta^2)$$

$$=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)$$

이때 $g(1)=2-3+4-3+2=2$ 이므로 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면

$$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=2$$

$$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=1$$

또 $g(-1)=2+3+4+3+2=14$ 이므로 ㉠에 $x=-1$ 을 대입하면

$$2(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)(-1-\delta)=14$$

$$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)=7$$

$$\therefore f(1)=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta) \\ =2\times 1\times 7=14$$

다른 풀이

사차방정식 $f(x)=0$ 의 네 근이 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 이므로 $f(x)$ 의 사차항의 계수를 $k(k \neq 0)$ 라 하면

$$f(x)=k(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$$

$x \neq 0$ 이므로 사차방정식 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$2x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$2t^2-3t=0, t(2t-3)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}$$

(i) $t=0$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=0 \text{에서 } x^2+1=0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha^2=-1, \beta^2=-1$$

(ii) $t=\frac{3}{2}$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \text{에서 } 2x^2-3x+2=0$$

이 이차방정식의 두 근을 γ, δ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma+\delta=\frac{3}{2}, \gamma\delta=1$$

$$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2 \times 1=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} f(x) &= k(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2) \\ &= k(x+1)^2\left(x^2-(\gamma^2+\delta^2)x+\gamma^2\delta^2\right) \\ &= k(x+1)^2\left(x^2-\frac{1}{4}x+1\right) \end{aligned}$$

이때 $f(0)=2$ 에서 $k=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)^2\left(x^2-\frac{1}{4}x+1\right)$ 이므로

$$f(1)=2 \times 4 \times \frac{7}{4}=14$$

04 답 21

사차방정식 $x^4-9x^2+k-10=0$ 에서 $x^2=t$ 로 놓으면

$$t^2-9t+k-10=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 주어진 사차방정식의 모든 근이 실수이면 $t \geq 0$ 이므로 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근이 모두 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면

$$D \geq 0, \alpha + \beta \geq 0, \alpha\beta \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

(i) $D \geq 0$ 에서 $81-4(k-10) \geq 0$

$$121-4k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{121}{4}$$

(ii) $\alpha + \beta \geq 0$ 에서 $9 \geq 0$

즉, k 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(iii) $\alpha\beta \geq 0$ 에서 $k-10 \geq 0$

$$\therefore k \geq 10$$

(i), (ii), (iii)에서 자연수 k 는 10, 11, 12, ..., 30의 21개이다.

05 답 ④

삼차방정식 $x^3-ax^2+26x+b=0$ 의 세 근을 $n-1, n, n+1$ (n 은 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱의 합은

$$(n-1)n+n(n+1)+(n-1)(n+1)=26$$

$$3n^2-1=26, n^2=9 \quad \therefore n=-3 \text{ 또는 } n=3$$

(i) $n=-3$ 일 때,

삼차방정식의 세 근이 $-4, -3, -2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{세 근의 합은 } -4+(-3)+(-2)=a \quad \therefore a=-9$$

$$\text{세 근의 곱은 } -4 \times (-3) \times (-2)=-b \quad \therefore b=24$$

$$\therefore |a|+|b|=9+24=33$$

(ii) $n=3$ 일 때,

삼차방정식의 세 근이 2, 3, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{세 근의 합은 } 2+3+4=a \quad \therefore a=9$$

$$\text{세 근의 곱은 } 2 \times 3 \times 4=-b \quad \therefore b=-24$$

$$\therefore |a|+|b|=9+24=33$$

(i), (ii)에서 $|a|+|b|=33$

06 답 ①

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 의 세 근이 $\frac{1}{\alpha\beta}, \frac{1}{\beta\gamma}, \frac{1}{\gamma\alpha}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{세 근의 곱은 } \frac{1}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\beta\gamma} \times \frac{1}{\gamma\alpha}=1$$

$$\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=1 \quad \therefore \alpha\beta\gamma=\pm 1$$

$$\text{세 근의 합은 } \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}=2$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2 \quad \therefore \alpha+\beta+\gamma=\pm 2$$

$$\text{두 근의 곱의 합은 } \frac{1}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} \times \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\gamma\alpha} \times \frac{1}{\alpha\beta}=3$$

$$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=3 \quad \therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{세 근의 합은 } -a=\alpha+\beta+\gamma=\pm 2 \quad \therefore a^2=4$$

$$\text{두 근의 곱의 합은 } b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 \quad \therefore b^2=9$$

$$\text{세 근의 곱은 } -c=\alpha\beta\gamma=\pm 1 \quad \therefore c^2=1$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=4+9+1=14$$

07 답 4

삼차방정식 $2x^3-mx^2+(m^3-10m)x+n=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{m}{2}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{m^3-10m}{2}, \alpha\beta\gamma=-\frac{n}{2}$$

또 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 도 주어진 삼차방정식의 세 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{n}{2} \quad \therefore \alpha\beta\gamma=-\frac{2}{n}$$

$$\text{즉, } -\frac{2}{n}=-\frac{n}{2} \text{이므로 } n^2=4 \quad \therefore n=2 (\because n \text{은 자연수})$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\text{두 근의 곱의 합은 } \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{m^3-10m}{2}$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{m^3-10m}{2}$$

$$-\frac{m}{2} = \frac{m^3-10m}{2}, m^3-9m=0$$

$$m(m+3)(m-3)=0 \quad \therefore m=3 (\because m \text{은 자연수})$$

따라서 주어진 삼차방정식은 $2x^3-3x^2-3x+2=0$ 이다.

$f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ 라 하면 $f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ & & -2 & 5 & -2 \\ \hline 2 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ & & 4 & -2 & \\ \hline & 2 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(2x-1)$$

삼차방정식 $(x+1)(2x-1)(x-2)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{따라서 } \alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}, \gamma=2 \text{이므로 } \beta\gamma-3\alpha=1+3=4$$

다른 풀이

α 는 삼차방정식 $2x^3-mx^2+(m^3-10m)x+n=0$ 의 한 근이므로

$$2\alpha^3-m\alpha^2+(m^3-10m)\alpha+n=0$$

$\alpha \neq 0$ 이므로 양변을 α^3 으로 나누면

$$2-\frac{m}{\alpha}+\frac{m^3-10m}{\alpha^2}+\frac{n}{\alpha^3}=0$$

$$n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+(m^3-10m)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-m\times\frac{1}{\alpha}+2=0$$

즉, $\frac{1}{\alpha}$ 은 삼차방정식 $nx^3+(m^3-10m)x^2-mx+2=0$ 의 한 근이다.

같은 방법으로 하면 $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 도 삼차방정식

$$nx^3+(m^3-10m)x^2-mx+2=0 \text{의 근이다.}$$

따라서 두 삼차방정식 $2x^3-mx^2+(m^3-10m)x+n=0,$

$nx^3+(m^3-10m)x^2-mx+2=0$ 은 서로 같은 근을 가지므로 계수의 비가 같다.

$$\text{즉, } \frac{n}{2}=\frac{2}{n} \text{이므로 } n^2=4 \quad \therefore n=2 (\because n \text{은 자연수})$$

또 $m^3-10m=-m$ 이므로

$$m^3-9m=0, m(m+3)(m-3)=0 \quad \therefore m=3 (\because m \text{은 자연수})$$

따라서 주어진 삼차방정식은 $2x^3-3x^2-3x+2=0$ 이다.

$f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ 라 하면 $f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ & & -2 & 5 & -2 \\ \hline 2 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ & & 4 & -2 & \\ \hline & 2 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(2x-1)$$

삼차방정식 $(x+1)(2x-1)(x-2)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{따라서 } \alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}, \gamma=2 \text{이므로 } \beta\gamma-3\alpha=1+3=4$$

08 답 $\frac{1}{2}$

삼차방정식 $f(x-3)=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이고 $\alpha+\beta+\gamma=12,$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=50$ 이므로 삼차항의 계수를 1이라 하면

$$f(x-3)=x^3-12x^2+50x+a \text{ (단, } a \text{는 실수)}$$

$x-3=t$ 로 놓으면 $x=t+3$ 이므로

$$f(t)=(t+3)^3-12(t+3)^2+50(t+3)+a$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2x+1) &= (2x+4)^3-12(2x+4)^2+50(2x+4)+a \\ &= 8x^3+4x+72+a \end{aligned}$$

따라서 삼차방정식 $f(2x+1)=0$, 즉 $8x^3+4x+72+a=0$ 의 세 근이

p, q, r 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$pq+qr+rp=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

삼차방정식 $f(x-3)=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

$$f(\alpha-3)=0, f(\beta-3)=0, f(\gamma-3)=0$$

따라서 삼차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 세 근은

$$2x+1=\alpha-3 \text{ 또는 } 2x+1=\beta-3 \text{ 또는 } 2x+1=\gamma-3$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-4}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-4}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\gamma-4}{2}$$

이 세 근이 p, q, r 이므로

$$\begin{aligned} pq+qr+rp &= \frac{\alpha-4}{2} \times \frac{\beta-4}{2} + \frac{\beta-4}{2} \times \frac{\gamma-4}{2} + \frac{\gamma-4}{2} \times \frac{\alpha-4}{2} \\ &= \frac{1}{4} \{ \alpha\beta - 4(\alpha+\beta) + 16 \} + \frac{1}{4} \{ \beta\gamma - 4(\beta+\gamma) + 16 \} \\ &\quad + \frac{1}{4} \{ \gamma\alpha - 4(\gamma+\alpha) + 16 \} \\ &= \frac{1}{4} \{ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 8(\alpha+\beta+\gamma) + 48 \} \\ &= \frac{1}{4} \times (50 - 8 \times 12 + 48) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

비법 NOTE

삼차방정식 $f(x)=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0, f(\gamma)=0$

따라서 삼차방정식 $f(ax+b)=0$ 의 세 근은

$$ax+b=\alpha \text{ 또는 } ax+b=\beta \text{ 또는 } ax+b=\gamma$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-b}{a} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-b}{a} \text{ 또는 } x=\frac{\gamma-b}{a}$$

09 답 $-\frac{3}{2}$

(가)에서 $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지는 $x-1$ 이므로

$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+x-1$$

$$\therefore f(-1)=-2, f(1)=0 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

이때 $f(1)=0$ 이므로 사차방정식 $f(x)=0$ 의 한 근은 1이다.

또 사차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 유리수이고 (나)에서 $-1-\sqrt{2}$ 가 한 근이므로 $-1+\sqrt{2}$ 도 근이다.

이때 사차방정식 $f(x)=0$ 의 나머지 한 근을 a 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\{x-(-1-\sqrt{2})\}\{x-(-1+\sqrt{2})\}(x-a) \\ &= (x-1)(x^2+2x-1)(x-a) \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

$$f(-1)=-2 \text{이므로 } -2 \times (1-2-1)(-1-a)=-2$$

$$-4-4a=-2 \quad \therefore a=-\frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

따라서 사차방정식 $f(x)=0$ 의 모든 근의 합은

$$1+(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

10 답 ④

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$ 의 계수가 실수이고 허수 a 가 한 근이므로 a 의 켈레복소수인 $\bar{a}$ 도 근이다.

$a=p+qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)라 하면

$$a^2=p^2-q^2+2pqi, \bar{a}=p-qi$$

$$-a^2=\bar{a} \text{이므로}$$

$$-p^2+q^2-2pqi=p-qi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-p^2+q^2=p \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -2pq=-q \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 2pq-q=0, \quad q(2p-1)=0$$

이때 $q \neq 0$ 이므로

$$2p-1=0 \quad \therefore p=\frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-\frac{1}{4}+q^2=\frac{1}{2}, \quad q^2=\frac{3}{4} \quad \therefore q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 가 주어진 삼차방정식의 근이므로 나머지

한 근을 β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{세 근의 곱은 } \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\beta=3$$

$$\therefore \beta=3$$

즉, 세 근이 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, 3$ 이므로

$$\text{세 근의 합은 } \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3=-a$$

$$\therefore a=-4$$

두 근의 곱의 합은

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=b$$

$$\therefore b=4$$

$$\therefore b-a=4-(-4)=8$$

11 답 31

$g(x)=x^3-2x^2-x-6$ 이라 하면 $g(3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ & & 3 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore g(x)=(x-3)(x^2+x+2)$$

삼차방정식 $(x-3)(x^2+x+2)=0$ 에서

$$x=3 \text{ 또는 } x^2+x+2=0$$

삼차방정식 $x^3-2x^2-x-6=0$ 의 계수가 실수이고 허수 a 가 한 근이므로 a 의 켈레복소수인 $\bar{a}$ 도 근이다.

이때 a 와 $\bar{a}$ 는 이차방정식 $x^2+x+2=0$ 의 두 근이므로

$$a^2+a+2=0, \quad \bar{a}^2+\bar{a}+2=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\bar{a}=-1, \quad a\bar{a}=2$$

$$\bar{a}^2+\bar{a}+2=0 \text{에서 } \bar{a}^2+2=-\bar{a} \text{이고, } a\bar{a}=2 \text{에서 } \bar{a}=\frac{2}{a} \text{이므로}$$

$$f(a)=\frac{1}{a^2+2}=-\frac{1}{\bar{a}}=-\frac{1}{\frac{2}{a}}=-\frac{a}{2}$$

$$\therefore f(a)+\frac{a}{2}=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a^2+a+2=0 \text{에서 } a^2=-a-2,$$

$$a^3=a(-a-2)=-a^2-2a=-(-a-2)-2a=-a+2 \text{이고,}$$

$$a\bar{a}=2 \text{에서 } a=\frac{2}{\bar{a}} \text{이므로}$$

$$f(\bar{a})=\frac{1}{\bar{a}^2+2}=-\frac{1}{\bar{a}}=-\frac{1}{\frac{2}{a}}=-\frac{\bar{a}}{2}$$

$$\therefore f(\bar{a})+\frac{\bar{a}}{2}=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 삼차방정식 $f(x)+\frac{x}{2}=0$ 의 두 근이 $a, \bar{a}$ 이고 삼차항의 계수가 1이므로 나머지 한 근을 β 라 하면

$$\begin{aligned} f(x)+\frac{x}{2} &= (x-a)(x-\bar{a})(x-\beta) \\ &= (x^2+x+2)(x-\beta) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x)=(x^2+x+2)(x-\beta)-\frac{x}{2}$$

이때 $f(0)=4$ 에서

$$2 \times (-\beta)=4$$

$$\therefore \beta=-2$$

$$\text{따라서 } f(x)=(x^2+x+2)(x+2)-\frac{x}{2} \text{이므로}$$

$$f(2)=(4+2+2)(2+2)-1=31$$

12 답 ③

삼차방정식 $x^3=1$ 에서

$$x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

$$\therefore \omega^3=1, \quad \bar{\omega}^3=1, \quad \omega^2+\omega+1=0, \quad \bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \quad \omega\bar{\omega}=1$$

$$\therefore \omega+1=-\bar{\omega}, \quad \bar{\omega}+1=-\omega$$

$$f(n)=\frac{\bar{\omega}^{-2n}}{\omega^{2n}+1}+\frac{\omega^{2n}}{\bar{\omega}^{2n}+1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\bar{\omega}^{-2}}{\omega^2+1}+\frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2+1}=\frac{\bar{\omega}^{-2}}{-\omega}+\frac{\omega^2}{-\bar{\omega}} \\ &= -\frac{\bar{\omega}^{-3}+\omega^3}{\omega\bar{\omega}}=-\frac{1+1}{1}=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{\bar{\omega}^{-4}}{\omega^4+1}+\frac{\omega^4}{\bar{\omega}^4+1}=\frac{\bar{\omega}^{-3}\bar{\omega}}{\omega^3\omega+1}+\frac{\omega^3\omega}{\bar{\omega}^3\bar{\omega}+1} \\ &= \frac{\bar{\omega}}{\omega+1}+\frac{\omega}{\bar{\omega}+1}=\frac{\bar{\omega}}{-\omega}+\frac{\omega}{-\bar{\omega}}=-1-1=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{\bar{\omega}^{-6}}{\omega^6+1}+\frac{\omega^6}{\bar{\omega}^6+1}=\frac{(\bar{\omega}^{-3})^2}{(\omega^3)^2+1}+\frac{(\omega^3)^2}{(\bar{\omega}^3)^2+1} \\ &= \frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}=1 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \omega^2=\omega^8=\omega^{14}=\cdots, \quad \bar{\omega}^2=\bar{\omega}^8=\bar{\omega}^{14}=\cdots, \quad \omega^4=\omega^{10}=\omega^{16}=\cdots, \\ \bar{\omega}^4=\bar{\omega}^{10}=\bar{\omega}^{16}=\cdots, \quad \omega^6=\omega^{12}=\omega^{18}=\cdots, \quad \bar{\omega}^6=\bar{\omega}^{12}=\bar{\omega}^{18}=\cdots \text{이므로}$$

$$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots, \quad f(2)=f(5)=f(8)=\cdots,$$

$$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1)+f(2)+f(3) &= f(4)+f(5)+f(6)=f(7)+f(8)+f(9) \\ &= \cdots = -3 \end{aligned}$$

$$-101=33 \times (-3) + (-2) \text{이므로}$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(97)+f(98)+f(99)+f(100)=-101$$

$$\therefore k=100$$

13 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 이때 α 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로
 $\alpha^3=1, \alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha+1=-\alpha^2, \alpha^2+1=-\alpha, \alpha^2+\alpha=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= (\alpha+1)^n + (\alpha^2+1)^n + (\alpha^2+\alpha)^n \\ &= (-\alpha^2)^n + (-\alpha)^n + (-1)^n \\ &= (-1)^n (\alpha^{2n} + \alpha^n + 1) \end{aligned}$$

또 삼차방정식 $x^3+1=0$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 β 는 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이므로

$$\beta^3=-1, \beta^2-\beta+1=0$$

이때 $1-\beta=-\beta^2, 1+\beta^2=\beta, \beta^2-\beta=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} g(n) &= (1-\beta)^n + (1+\beta^2)^n + (\beta^2-\beta)^n \\ &= (-\beta^2)^n + \beta^n + (-1)^n \\ &= (-1)^n \{\beta^{2n} + (-\beta)^n + 1\} \end{aligned}$$

ㄱ. $f(1)=-(\alpha^2+\alpha+1)=0, g(1)=-(\beta^2-\beta+1)=0$ 이므로

$$f(1)=g(1)$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } f(101) &= -(\alpha^{202} + \alpha^{101} + 1) = -\{(\alpha^3)^{67}\alpha + (\alpha^3)^{33}\alpha^2 + 1\} \\ &= -(\alpha + \alpha^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(101) &= -(\beta^{202} - \beta^{101} + 1) = -\{(\beta^3)^{67}\beta - (\beta^3)^{33}\beta^2 + 1\} \\ &= -(-\beta + \beta^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(101)=g(101)$$

ㄷ. 음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n=3k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(3k+1) &= (-1)^{3k+1} \{\alpha^{2(3k+1)} + \alpha^{3k+1} + 1\} \\ &= (-1)^{3k+1} \{(\alpha^3)^{2k}\alpha^2 + (\alpha^3)^k\alpha + 1\} \\ &= (-1)^{3k+1} (\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \\ g(3k+1) &= (-1)^{3k+1} \{\beta^{2(3k+1)} + (-\beta)^{3k+1} + 1\} \\ &= (-1)^{3k+1} \{(\beta^3)^{2k}\beta^2 + (-\beta^3)^k(-\beta) + 1\} \\ &= (-1)^{3k+1} (\beta^2 - \beta + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(3k+1)=g(3k+1)$$

(ii) $n=3k+2$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(3k+2) &= (-1)^{3k+2} \{\alpha^{2(3k+2)} + \alpha^{3k+2} + 1\} \\ &= (-1)^{3k+2} \{(\alpha^3)^{2k+1}\alpha + (\alpha^3)^k\alpha^2 + 1\} \\ &= (-1)^{3k+2} (\alpha + \alpha^2 + 1) = 0 \\ g(3k+2) &= (-1)^{3k+2} \{\beta^{2(3k+2)} + (-\beta)^{3k+2} + 1\} \\ &= (-1)^{3k+2} \{(\beta^3)^{2k+1}\beta + (-\beta^3)^k(-\beta)^2 + 1\} \\ &= (-1)^{3k+2} (-\beta + \beta^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(3k+2)=g(3k+2)$$

(iii) $n=3k+3$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(3k+3) &= (-1)^{3k+3} \{\alpha^{2(3k+3)} + \alpha^{3k+3} + 1\} \\ &= (-1)^{3k+3} \{(\alpha^3)^{2k+2}\alpha + (\alpha^3)^{k+1}\alpha^2 + 1\} \\ &= (-1)^{3k+3} (1 + 1 + 1) = (-1)^{3k+3} \times 3 \\ g(3k+3) &= (-1)^{3k+3} \{\beta^{2(3k+3)} + (-\beta)^{3k+3} + 1\} \\ &= (-1)^{3k+3} \{(\beta^3)^{2k+2}\beta + (-\beta^3)^{k+1}\beta^2 + 1\} \\ &= (-1)^{3k+3} (1 + 1 + 1) = (-1)^{3k+3} \times 3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(3k+3)=g(3k+3)$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(n)=g(n)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1000) \\ =g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(1000) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 16

삼차방정식 $x^3=1$ 에서

$$x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

또 ω 가 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1$$

$$\textcircled{ㄱ} \text{에서 } \left(\frac{1}{\omega} - \omega + \frac{1}{\omega^2}\right)^n = \left(\frac{\omega - \omega^3 + 1}{\omega^2}\right)^n = \left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)^n = \frac{1}{\omega^n}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\omega^n} = 1 \text{이므로 } \omega^n = 1$$

따라서 n 은 3의 배수이다. ㉠

$\omega + \bar{\omega} = -1$ 에서 $\bar{\omega} = -\omega - 1$ 이므로 ㉡의 좌변에 대입하면

$$(-\omega - 1)^n = \bar{\omega}^n$$

㉡의 우변에서

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega + \bar{\omega}}\right)^n = (-\bar{\omega})^n$$

$$\text{즉, } \bar{\omega}^n = (-\bar{\omega})^n \text{이므로 } n \text{은 2의 배수이다. ㉢}$$

㉠, ㉢에서 n 은 6의 배수이므로 100 이하의 자연수 n 은 6, 12, 18, ..., 96의 16개이다.

15 답 $\frac{3}{4}$ cm

상자의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라 하자.

모든 모서리의 길이의 합이 30 cm이므로

$$4(a+b+c)=30$$

$$\therefore a+b+c=\frac{15}{2}$$

겉넓이가 34 cm²이므로

$$2(ab+bc+ca)=34$$

$$\therefore ab+bc+ca=17$$

부피가 12 cm³이므로

$$abc=12$$

이때 a, b, c 를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$$x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 17x - 12 = 0$$

$$\therefore 2x^3 - 15x^2 + 34x - 24 = 0$$

$f(x)=2x^3-15x^2+34x-24$ 라 하면 $f(2)=0, f(4)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -15 & 34 & -24 \\ & & 4 & -22 & 24 \\ \hline 4 & 2 & -11 & 12 & 0 \\ & & 8 & -12 & \\ \hline & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x-4)(2x-3)$$

삼차방정식 $(2x-3)(x-2)(x-4)=0$ 에서

$$x=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

즉, 상자의 세 모서리의 길이가 $\frac{3}{2}$ cm, 2 cm, 4 cm이므로 상자 안에 구

모양의 물건을 넣으려면 지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ cm보다 작거나 같아야 한다.

따라서 물건의 반지름의 길이의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ cm이다.

16 답 3

밑면이 한 변의 길이가 a 인 정삼각형이고 높이가 $a+5$ 인 정삼각기둥의 꼭짓점을 그림과 같이 각각 A, B, C, D, E, F라 하고 이 정삼각기둥의 부피를 V_1 이라 하면

$$V_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+5)$$

이 정삼각기둥을 자른 단면이 변 AD, 변 BE와 만나는 점을 각각 G, H라 하면

$$\overline{DG}=3, \overline{EH}=6$$

잘려 나간 입체도형은 밑면이 사다리꼴 DGHE인 사각뿔이므로 밑면의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (3+6) \times a = \frac{9}{2}a$$

이 사각뿔의 높이는 꼭짓점 F에서 변 DE에 내린 수선의 길이와 같고 이는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이와 같으므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이 사각뿔의 부피를 V_2 라 하면

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

따라서 주어진 도형의 부피를 V 라 하면

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+5) - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+2)$$

$$\text{이때 } V = \frac{45\sqrt{3}}{4} \text{ 이므로 } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+2) = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2(a+2) = 45, a^3 + 2a^2 - 45 = 0$$

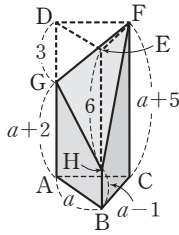
$f(a) = a^3 + 2a^2 - 45$ 라 하면 $f(3) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(a)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 2 & 0 & -45 \\ & & 3 & 15 & 45 \\ \hline & 1 & 5 & 15 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(a) = (a-3)(a^2+5a+15)$$

$$\text{삼차방정식 } (a-3)(a^2+5a+15) = 0 \text{에서}$$

$$a=3 (\because a \text{는 실수})$$



개념 NOTE

(1) 기둥의 밑넓이를 S , 높이를 h , 부피를 V 라 하면

$$V = Sh$$

(2) 뿔의 밑넓이를 S , 높이를 h , 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

17 답 ①

$$\text{방정식 } |x^2 - 4y^2| = 48 \text{에서 } |(x+2y)(x-2y)| = 48$$

$$\therefore |x+2y||x-2y| = 48$$

$$\text{이때 } |x+2y| = 6 \text{이므로 } |x-2y| = 8$$

즉, 주어진 연립방정식의 해는 연립방정식 $\begin{cases} |x-2y| = 8 \\ |x+2y| = 6 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$$\text{방정식 } |x-2y| = 8 \text{에서 } x-2y = -8 \text{ 또는 } x-2y = 8$$

$$\text{방정식 } |x+2y| = 6 \text{에서 } x+2y = -6 \text{ 또는 } x+2y = 6$$

$$(i) x-2y = -8, x+2y = -6 \text{일 때,}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x = -7, y = \frac{1}{2}$$

$$(ii) x-2y = -8, x+2y = 6 \text{일 때,}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x = -1, y = \frac{7}{2}$$

$$(iii) x-2y = 8, x+2y = -6 \text{일 때,}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x = 1, y = -\frac{7}{2}$$

$$(iv) x-2y = 8, x+2y = 6 \text{일 때,}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x = 7, y = -\frac{1}{2}$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } xy = -\frac{7}{2}$$

18 답 5

$$(i) x \geq y \text{일 때,}$$

$$\text{주어진 연립방정식은 } \begin{cases} xy - 2x + 2 = -x \\ 2xy - 3x + 3y - 5 = -x \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} xy - x + 2 = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ 2xy - 2x + 3y - 5 = 0 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$2 \times \textcircled{A} - \textcircled{B} \text{을 하면 } -3y + 9 = 0 \quad \therefore y = 3$$

$$\text{이를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 3x - x + 2 = 0 \quad \therefore x = -1$$

그런데 $x \geq y$ 이므로 $x = -1, y = 3$ 은 해가 아니다. 배점 40%

$$(ii) x < y \text{일 때,}$$

$$\text{주어진 연립방정식은 } \begin{cases} xy - 2x + 2 = y \\ 2xy - 3x + 3y - 5 = y \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} xy - 2x - y + 2 = 0 & \cdots \textcircled{C} \\ 2xy - 3x + 2y - 5 = 0 & \cdots \textcircled{D} \end{cases}$$

$$2 \times \textcircled{C} - \textcircled{D} \text{을 하면 } -x - 4y + 9 = 0$$

$$\therefore x = -4y + 9 \quad \cdots \textcircled{E}$$

$\textcircled{E}$ 을 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$(-4y + 9)y - 2(-4y + 9) - y + 2 = 0$$

$$-4y^2 + 16y - 16 = 0, y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(y - 2)^2 = 0 \quad \therefore y = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{E} \text{에 대입하면 } x = 1$$

이때 $x < y$ 이므로 $x = 1, y = 2$ 는 해이다. 배점 40%

$$(i), (ii) \text{에서 } x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5 \quad \cdots \text{배점 20\%}$$

19 답 $\frac{31}{8}$

$$x + y = u, xy = v \text{로 놓으면}$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v \text{이므로 주어진 연립방정식은}$$

$$\begin{cases} u^2 - 2v - u = 8 & \cdots \textcircled{1} \\ u^2 - v = k & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $v = u^2 - k$ 이므로 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$u^2 - 2(u^2 - k) - u = 8$$

$$\therefore u^2 + u - 2k + 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

이때 $x + y$, 즉 u 의 값이 항상 음수이므로 이차방정식 $\textcircled{3}$ 의 두 근이 모두 음수이다.

즉, 이차방정식 $\textcircled{3}$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면

$$D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0 \text{이어야 한다.}$$

$$(i) D \geq 0 \text{에서 } 1 - 4(-2k + 8) \geq 0$$

$$8k - 31 \geq 0 \quad \therefore k \geq \frac{31}{8}$$

$$(ii) \alpha + \beta < 0 \text{에서 } -1 < 0$$

즉, k 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

$$(iii) \alpha\beta > 0 \text{에서 } -2k + 8 > 0 \quad \therefore k < 4$$

(i), (ii), (iii)에서 실수 k 의 최솟값은 $\frac{31}{8}$ 이다.

20 답 6

두 이차방정식의 공통인 근을 α 라 하면

$$\alpha^2 - p\alpha - q = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 - q\alpha - p = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$(p-q)\alpha - p + q = 0 \quad \therefore (p-q)(\alpha-1) = 0$$

그런데 $p=q$ 이면 두 이차방정식이 서로 같으므로

$$\alpha-1=0 \quad \therefore \alpha=1$$

이차방정식 $x^2 - px - q = 0$ 의 한 근이 1이므로 다른 한 근을 β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$1 + \beta = p \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

이때 $|1-\beta|=3$ 이므로

$$1-\beta = -3 \text{ 또는 } 1-\beta = 3$$

$$\therefore \beta = 4 \text{ 또는 } \beta = -2$$

이차방정식 $x^2 - qx - p = 0$ 의 한 근이 1이므로 다른 한 근을 γ 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$\gamma = -p$$

(i) $\beta = 4$ 일 때,

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } p = 1 + \beta = 5 \text{이므로 } \gamma = -p = -5$$

따라서 이차방정식 $x^2 - qx - p = 0$ 의 두 근의 차는

$$|1 - (-5)| = 6$$

(ii) $\beta = -2$ 일 때,

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } p = 1 + \beta = -1 \text{이므로 } \gamma = -p = 1$$

따라서 이차방정식 $x^2 - qx - p = 0$ 의 두 근의 차는

$$|1 - 1| = 0$$

(i), (ii)에서 이차방정식 $x^2 - qx - p = 0$ 의 두 근의 차의 최댓값은 6이다.

비법 NOTE

두 방정식의 공통인 근은 다음과 같이 구한다.

(1) 인수분해가 가능한 경우

두 방정식을 각각 인수분해하여 공통인 근을 구한다.

(2) 인수분해가 가능하지 않은 경우

① 공통인 근을 α 라 하고, $x = \alpha$ 를 두 방정식에 대입한다.

② α 에 대한 두 방정식을 연립하여 인수분해가 되는 식을 얻는다.

③ ②에서 얻은 식을 인수분해하여 α 의 값을 구한다.

21 답 ②

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 계수가 실수이고 $1 + \sqrt{3}i$ 가 한 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다.

이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이지만 $(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) = 4$ 이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 또는 $1 + \sqrt{3}i$ 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 의 근이 아니다.

$$\therefore m \neq 1 - \sqrt{3}i, m \neq 1 + \sqrt{3}i$$

m 이 이차방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 의 근이므로

$$m^2 + am + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

한편 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 세 근이 $1 + \sqrt{3}i$, $1 - \sqrt{3}i$, m 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + m = -a$$

$$\therefore a = -m - 2$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$m^2 + (-m-2)m + 2 = 0$$

$$-2m + 2 = 0 \quad \therefore m = 1$$

22 답 ②

사차방정식 $(x^2 + 2x)^2 - 6x(x^2 + 2x + m) - m^2 = 0$ 에서 $x^2 + 2x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6x(t+m) - m^2 = 0$$

$$(t+m)(t-m) - 6x(t+m) = 0$$

$$(t+m)(t-6x-m) = 0$$

$$(x^2 + 2x + m)(x^2 - 4x - m) = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x + m = 0 \text{ 또는 } x^2 - 4x - m = 0$$

주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지므로 두 이차방정식

$x^2 + 2x + m = 0$, $x^2 - 4x - m = 0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고 공통인 근을 갖지 않아야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2 + 2x + m = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 1 - m > 0 \quad \therefore m < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) 이차방정식 $x^2 - 4x - m = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 4 + m > 0 \quad \therefore m > -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(iii) 두 이차방정식 $x^2 + 2x + m = 0$, $x^2 - 4x - m = 0$ 이 공통인 근을 갖는다고 하고 공통인 근을 α 라 하면

$$\alpha^2 + 2\alpha + m = 0, \alpha^2 - 4\alpha - m = 0$$

두 식을 더하면

$$2\alpha^2 - 2\alpha = 0, 2\alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 1$$

$\alpha = 0$ 일 때 $m = 0$ 이고, $\alpha = 1$ 일 때 $m = -3$ 이다.

따라서 두 이차방정식이 공통인 근을 갖지 않으려면

$$m \neq -3, m \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 을 모두 만족시키는 정수 m 은 $-2, -1$ 의 2개이다.

23 답 39

$\overline{CD} = x$, $\overline{AB} = y$ 라 하면

$$\overline{AC} = x - 1$$

두 삼각형 ABC , DBA 에서

$$\angle BCA = \angle BAD,$$

$$\angle ABC = \angle DBA$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{DA} \text{이므로}$$

$$y : 8 = (x-1) : 6, 8(x-1) = 6y$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}(x-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또 } \overline{AB} : \overline{DB} = \overline{BC} : \overline{BA} \text{이므로}$$

$$y : 8 = (8+x) : y$$

$$\therefore y^2 = 8x + 64 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$\frac{16}{9}(x-1)^2 = 8x + 64$$

$$2x^2 - 13x - 70 = 0$$

$$(2x+7)(x-10) = 0$$

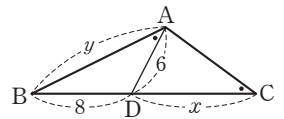
$$\therefore x = 10 \text{ (} \because x > 0 \text{)}$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $y = 12$

따라서 $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 8 + 10 = 18$, $\overline{AC} = 10 - 1 = 9$ 이므로 삼각형

ABC 의 둘레의 길이는

$$12 + 18 + 9 = 39$$



24 답 3

그림과 같이 두 원 O_1, O_2 의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하고, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하자.
두 원의 넓이의 합이 58π 이므로

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 58\pi$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = 58 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 O_1 에서 변 CD 에 내린 수선과 점 O_2 에서 변 BC 에 내린 수선의 교점을 P 라 하면

$$\overline{O_1P} = 16 - (r_1 + r_2), \quad \overline{O_2P} = 18 - (r_1 + r_2)$$

이때 직각삼각형 O_1PO_2 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(r_1 + r_2)^2 = \{16 - (r_1 + r_2)\}^2 + \{18 - (r_1 + r_2)\}^2$$

$$r_1 + r_2 = X \text{로 놓으면}$$

$$X^2 = (16 - X)^2 + (18 - X)^2$$

$$X^2 - 68X + 580 = 0, (X - 10)(X - 58) = 0$$

$$\therefore X = 10 \text{ 또는 } X = 58$$

$$\therefore r_1 + r_2 = 10 \text{ 또는 } r_1 + r_2 = 58$$

그런데 $r_1 + r_2 < 16$ 이므로

$$r_1 + r_2 = 10 \quad \therefore r_2 = 10 - r_1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

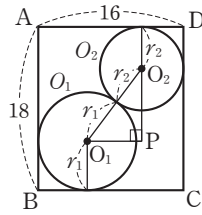
$$r_1^2 + (10 - r_1)^2 = 58$$

$$r_1^2 - 10r_1 + 21 = 0$$

$$(r_1 - 3)(r_1 - 7) = 0$$

$$\therefore r_1 = 3 \text{ 또는 } r_1 = 7$$

따라서 $r_1 = 3$ 일 때 $r_2 = 7$ 이고, $r_1 = 7$ 일 때 $r_2 = 3$ 이므로 작은 원의 반지름의 길이는 3이다.



25 답 12

그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 를 접었을 때, 꼭짓점 D 가 이동한 점을 D' , 점 F 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, $\overline{AB} = x, \overline{BE} = y$ 라 하자.

직각삼각형 ABE 에서 $\overline{AB} = x, \overline{BE} = y, \overline{AE} = \overline{CE} = 8 - y$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$(8 - y)^2 = x^2 + y^2 \quad \therefore x^2 = 64 - 16y \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 삼각형 $ABE, AD'F$ 에서

$$\overline{AB} = \overline{AD'}, \angle ABE = \angle AD'F = 90^\circ,$$

$$\angle BAE = 90^\circ - \angle EAF = \angle D'AF$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AD'F \text{ (ASA 합동)}$$

$$\text{즉, } \overline{BE} = \overline{D'F} \text{이므로 } \overline{D'F} = \overline{DF} = y$$

직각삼각형 EHF 에서 $\overline{EF} = \sqrt{20}, \overline{EH} = 8 - y - y = 8 - 2y, \overline{FH} = x$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$(\sqrt{20})^2 = (8 - 2y)^2 + x^2$$

$$\therefore 4y^2 + x^2 - 32y + 44 = 0$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$4y^2 + (64 - 16y) - 32y + 44 = 0$$

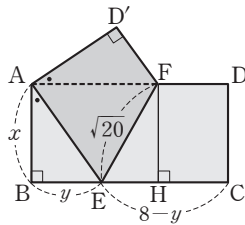
$$4y^2 - 48y + 108 = 0, y^2 - 12y + 27 = 0$$

$$(y - 3)(y - 9) = 0 \quad \therefore y = 3 \quad (\because y < 8)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2 = 64 - 48 = 16 \quad \therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{BE} = xy = 4 \times 3 = 12$$



26 답 ②

$$(2x^2 - 5xy + y^2 - 26)^2 + (xy + 2x - 3y - 8)^2 = 0 \text{에서}$$

$$(2x^2 - 5xy + y^2 - 26)^2 \geq 0, (xy + 2x - 3y - 8)^2 \geq 0 \text{이므로}$$

$$2x^2 - 5xy + y^2 - 26 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$xy + 2x - 3y - 8 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에서

$$x(y + 2) - 3(y + 2) - 2 = 0$$

$$\therefore (x - 3)(y + 2) = 2$$

이때 x, y 는 정수이므로 $x - 3, y + 2$ 도 정수이다.

따라서 $(x - 3)(y + 2) = 2$ 인 경우는

(i) $x - 3 = -2, y + 2 = -1$ 일 때,

$$x = 1, y = -3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2 + 15 + 9 - 26 = 0$ 이므로 주어진 방정식을 만족시킨다.

(ii) $x - 3 = -1, y + 2 = -2$ 일 때,

$$x = 2, y = -4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $8 + 40 + 16 - 26 = 38 \neq 0$ 이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

(iii) $x - 3 = 1, y + 2 = 2$ 일 때,

$$x = 4, y = 0$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $32 - 26 = 6 \neq 0$ 이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

(iv) $x - 3 = 2, y + 2 = 1$ 일 때,

$$x = 5, y = -1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $50 + 25 + 1 - 26 = 50 \neq 0$ 이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 주어진 방정식을 만족시키는 정수 x, y 의 값은

$$x = 1, y = -3$$

$$\therefore x - y = 4$$

27 답 10

$$f(x) = x^4 - kx^3 + 2(3k - 2)x^2 + 4kx - 24k \text{라 하면 } f(-2) = 0,$$

$$f(2) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & -k & 2(3k-2) & 4k & -24k & \\ & & -2 & 2k+4 & -16k & 24k & \\ \hline 2 & 1 & -k-2 & 8k & -12k & 0 & \\ & & 2 & -2k & 12k & & \\ \hline & 1 & -k & 6k & 0 & & \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x + 2)(x - 2)(x^2 - kx + 6k)$$

$$\text{사차방정식 } (x + 2)(x - 2)(x^2 - kx + 6k) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x^2 - kx + 6k = 0$$

$$\text{이때 } m, n \text{이 자연수이므로 } 3m \geq 3, 4n \geq 4$$

즉, 이차방정식 $x^2 - kx + 6k = 0$ 의 두 근이 $3m, 4n$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$3m + 4n = k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, 12mn = 6k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$12mn = 6(3m + 4n), 2mn - 3m - 4n = 0$$

$$2n(m - 2) - 3(m - 2) = 6$$

$$\therefore (m - 2)(2n - 3) = 6$$

이때 m, n 이 자연수이므로 $m - 2, 2n - 3$ 은 $m - 2 \geq -1, 2n - 3 \geq -1$ 인 정수이다.

따라서 $(m-2)(2n-3)=6$ 인 경우는

(i) $m-2=1, 2n-3=6$ 일 때,

$$m=3, n=\frac{9}{2}$$

그런데 n 이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m-2=2, 2n-3=3$ 일 때,

$$m=4, n=3$$

$$\therefore m+n=7$$

(iii) $m-2=3, 2n-3=2$ 일 때,

$$m=5, n=\frac{5}{2}$$

그런데 n 이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $m-2=6, 2n-3=1$ 일 때,

$$m=8, n=2$$

$$\therefore m+n=10$$

(i)~(iv)에서 $m+n$ 의 최댓값은 10이다.

28 답 8

이차방정식 $x^2-2(a+2b)x+a^2+4b^2+10ab-10a-10b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2b)^2-(a^2+4b^2+10ab-10a-10b)=0$$

$$-6ab+10a+10b=0, 3ab-5a-5b=0$$

$$9ab-15a-15b=0$$

$$3a(3b-5)-5(3b-5)-25=0$$

$$\therefore (3a-5)(3b-5)=25 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때 a, b 는 정수이므로 $3a-5, 3b-5$ 도 정수이다.

따라서 $(3a-5)(3b-5)=25$ 인 경우는

(i) $3a-5=-25, 3b-5=-1$ 일 때,

$$a=-\frac{20}{3}, b=\frac{4}{3}$$

그런데 a, b 가 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

또 $3a-5=-1, 3b-5=-25$ 일 때도 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $3a-5=-5, 3b-5=-5$ 일 때,

$$a=0, b=0 \quad \therefore |a-b|=0$$

(iii) $3a-5=1, 3b-5=25$ 일 때,

$$a=2, b=10 \quad \therefore |a-b|=|-8|=8$$

(iv) $3a-5=5, 3b-5=5$ 일 때,

$$a=\frac{10}{3}, b=\frac{10}{3}$$

그런데 a, b 가 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $3a-5=25, 3b-5=1$ 일 때,

$$a=10, b=2 \quad \therefore |a-b|=8 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

(i)~(v)에서 $|a-b|$ 의 최댓값은 8이다. $\dots\dots \text{배점 20\%}$

step 3 최고난도 문제

| 77~79쪽

01 34	02 64	03 46	04 20	05 ⑤	06 4
07 ②	08 ⑤	09 ③	10 12	11 ③	12 8

01 답 34

1단계 주어진 삼차방정식이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는 조건 알기

주어진 삼차방정식은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖고, 두 허근의 합이 2이므로 $(x-a)(x^2-2x+b)=0$ (a, b 는 실수)으로 놓을 수 있다.

즉, $x^3+mx^2+nx-6=(x-a)(x^2-2x+b)$ 에서

$$x^3+mx^2+nx-6=x^3-(a+2)x^2+(2a+b)x-ab$$

$$m=-a-2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$n=2a+b \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$6=ab \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이때 m, n 은 정수이므로 a, b 도 정수이다.

이차방정식 $x^2-2x+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면 서로 다른 두 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=1-b<0 \quad \therefore b>1$$

그런데 b 는 정수이므로 ㉢에서 b 가 될 수 있는 값은 2, 3, 6이다.

2단계 $m+2n$ 의 값 구하기

(i) $b=2$ 일 때,

$$\text{㉠에서 } a=3 \text{이므로 } \text{㉠, } \text{㉡에서 } m=-5, n=8$$

$$\therefore m+2n=-5+16=11$$

(ii) $b=3$ 일 때,

$$\text{㉠에서 } a=2 \text{이므로 } \text{㉠, } \text{㉡에서 } m=-4, n=7$$

$$\therefore m+2n=-4+14=10$$

(iii) $b=6$ 일 때,

$$\text{㉠에서 } a=1 \text{이므로 } \text{㉠, } \text{㉡에서 } m=-3, n=8$$

$$\therefore m+2n=-3+16=13$$

3단계 $m+2n$ 의 값의 합 구하기

(i), (ii), (iii)에서 모든 $m+2n$ 의 값의 합은 $11+10+13=34$

02 답 64

1단계 $f(x), g(x)$ 의 식 세우기

(가)에서 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하고, x 축에 접한다.

이때 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(m, 0)$ 을 지나므로 $f(x)$ 의 이차항의 계수를 k 라 하면

$$f(x)=k(x-m)^2 \quad (\text{단, } k<0)$$

(나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(m+4, 32n)$ 을 지나므로

$$f(m+4)=32n \text{에서 } 16k=32n \quad \therefore k=2n$$

$$\therefore f(x)=2n(x-m)^2$$

(나)에서 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(m, 0), (m+4, 32n)$ 을 지나므로 직선 $y=g(x)$ 의 기울기는 $\frac{32n}{4}=8n$

$$\therefore g(x)=8n(x-m)$$

2단계 n 의 값 구하기

(다)에서 정수 a 에 대하여 $0 \leq a \leq 4$ 이므로

(i) $a=0$ 일 때,

$g(m+a)=g(m)=0, f(m+a)=f(m)=0$ 이므로 $0 \leq b \leq 0$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는 1이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 1이다.

(ii) $a=1$ 일 때,

$g(m+a)=g(m+1)=8n, f(m+a)=f(m+1)=2n$ 이므로 정수 n 에 대하여 $8n \leq b \leq 2n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는

$$2n-8n+1=-6n+1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $-6n+1$ 이다.

(iii) $a=2$ 일 때,

$g(m+a)=g(m+2)=16n$, $f(m+a)=f(m+2)=8n$ 이므로 정수 n 에 대하여 $16n \leq b \leq 8n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는

$$8n - 16n + 1 = -8n + 1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $-8n + 1$ 이다.

(iv) $a=3$ 일 때,

$g(m+a)=g(m+3)=24n$, $f(m+a)=f(m+3)=18n$ 이므로 정수 n 에 대하여 $24n \leq b \leq 18n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는

$$18n - 24n + 1 = -6n + 1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $-6n + 1$ 이다.

(v) $a=4$ 일 때,

$g(m+a)=g(m+4)=32n$, $f(m+a)=f(m+4)=32n$ 이므로 정수 n 에 대하여 $32n \leq b \leq 32n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는 1이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 1이다.

(i)~(v)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1 + (-6n + 1) + (-8n + 1) + (-6n + 1) + 1 = -20n + 5$$

이때 (ㄷ)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수가 45이므로

$$-20n + 5 = 45 \quad \therefore n = -2$$

3단계 m 의 값 구하기

$$\therefore f(x) = -4(x-m)^2, g(x) = -16(x-m)$$

방정식 $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0$ 에서

$$16(x-m)^4 - 16^2(x-m)^2 = 0$$

$$16(x-m)^2\{(x-m)^2 - 16\} = 0$$

$$16(x-m)^2(x-m+4)(x-m-4) = 0$$

$$\therefore x=m \text{ 또는 } x=m-4 \text{ 또는 } x=m+4$$

이 실근 중 최댓값은 $m+4$, 최솟값은 $m-4$ 이고 최댓값과 최솟값의 합이 8이므로

$$(m+4) + (m-4) = 8, 2m = 8$$

$$\therefore m = 4$$

4단계 $f(5) \times g(5)$ 의 값 구하기

따라서 $f(x) = -4(x-4)^2$, $g(x) = -16(x-4)$ 이므로

$$f(5) \times g(5) = -4 \times (-16) = 64$$

03 답 46

1단계 주어진 삼차방정식의 근 구하기

$f(x) = ax^3 + 2bx^2 + 4bx + 8a$ 라 하면 $f(-2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & a & 2b & 4b & 8a \\ & & -2a & 4a-4b & -8a \\ \hline & a & -2a+2b & 4a & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+2)\{ax^2 - 2(a-b)x + 4a\}$$

삼차방정식 $(x+2)\{ax^2 - 2(a-b)x + 4a\} = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } ax^2 - 2(a-b)x + 4a = 0$$

주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2 - 2(a-b)x + 4a = 0$ 이 -2 가 아닌 서로 다른 두 정수를 근으로 갖는다.

$$\text{즉, } 4a + 4(a-b) + 4a \neq 0 \text{이므로 } b \neq 3a$$

이차방정식 $ax^2 - 2(a-b)x + 4a = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{4a}{a} = 4$ 이므로 서로 다른 두 정수인 근은

$$-1 \text{과 } -4 \text{ 또는 } 1 \text{과 } 4$$

2단계 a, b 사이의 관계식 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\frac{2(a-b)}{a} = -5 \text{ 또는 } \frac{2(a-b)}{a} = 5$$

$$2a - 2b = -5a \text{ 또는 } 2a - 2b = 5a$$

$$\therefore a = \frac{2}{7}b \text{ 또는 } a = -\frac{2}{3}b$$

3단계 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i) $a = \frac{2}{7}b$ 일 때,

$\leftarrow k=0$ 이면 $b \neq 3a$ 를 만족시키지 않는다.

$b = 7k$ (k 는 0이 아닌 정수) 꼴인 정수이고, $|b| \leq 50$ 이면

$$|a| \leq \frac{100}{7} \text{이므로 } |a| \leq 50, |b| \leq 50 \text{을 만족시키는 정수 } a, b \text{의 순}$$

서쌍 (a, b) 는 $(-14, -49), (-12, -42), (-10, -35), \dots, (-2, -7), (2, 7), \dots, (10, 35), (12, 42), (14, 49)$ 의 14개이다.

(ii) $a = -\frac{2}{3}b$ 일 때,

$b = 3k$ (k 는 0이 아닌 정수) 꼴인 정수이고, $|b| \leq 50$ 이면

$$|a| \leq \frac{100}{3} \text{이므로 } |a| \leq 50, |b| \leq 50 \text{을 만족시키는 정수 } a, b \text{의 순}$$

서쌍 (a, b) 는 $(-32, 48), (-30, 45), (-28, 42), \dots, (-2, 3), (2, -3), \dots, (28, -42), (30, -45), (32, -48)$ 의 32개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $14 + 32 = 46$

idea

04 답 20

1단계 a 의 값 구하기

사차방정식 $x^4 - 2ax^2 + a + 1 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2at + a + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지면 $t \geq 0$ 이므로 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 두 양의 실근을 A, B ($A < B$)라 하면

$$x^2 = A \text{ 또는 } x^2 = B$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{A} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{B}$$

$$\therefore \alpha = -\sqrt{B}, \beta = -\sqrt{A}, \gamma = \sqrt{A}, \delta = \sqrt{B}$$

$\beta\gamma - \alpha\delta = 2$ 에서

$$-A - (-B) = 2 \quad \therefore B - A = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근이 A, B 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$A + B = 2a, AB = a + 1$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } (B - A)^2 = 4 \text{이므로}$$

$$(A + B)^2 - 4AB = 4$$

$$(2a)^2 - 4(a + 1) = 4, a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a + 1)(a - 2) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가지면 두 근의 합이 양수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2a > 0 \quad \therefore a > 0$$

$$\therefore a = 2$$

2단계 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4$ 의 값 구하기

이차방정식 $\textcircled{1}$ 에서

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t - 1)(t - 3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

따라서 $x^2 = 1$ 또는 $x^2 = 3$ 이므로

$$x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \alpha = -\sqrt{3}, \beta = -1, \gamma = 1, \delta = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 = 9 + 1 + 1 + 9 = 20$$

05 답 ⑤

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 사차방정식 $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$ 에서 $a=1$ 이면

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + t - 12 = 0, (t+4)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } x^2 = -4 \text{ 또는 } x^2 = 3 \text{이므로 } x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 모든 실근의 곱은 } -\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 사차방정식 $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (3-2a)t + (a-5)(a+2) = 0$$

$$\{t - (a-5)\}\{t - (a+2)\} = 0$$

$$\therefore t = a-5 \text{ 또는 } t = a+2$$

$$\therefore x^2 = a-5 \text{ 또는 } x^2 = a+2$$

이때 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지므로

$$a-5 < 0, a+2 \geq 0 \rightarrow a-5 \geq 0, a+2 < 0 \text{이면 } a \text{의 값은 존재하지 않는다.}$$

$$\therefore -2 \leq a < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $a = -2$ 일 때, 주어진 사차방정식의 실근은 0이고 이는 모든 실근의 곱이 -4 라는 조건을 만족시키지 않으므로

$$-2 < a < 5$$

이때 주어진 사차방정식의 실근은 $\pm\sqrt{a+2}$ 이고, 허근은 $\pm\sqrt{5-a}i$ 이다.

모든 실근의 곱이 -4 이므로

$$-\sqrt{a+2} \times \sqrt{a+2} = -4 \quad \therefore a = 2$$

따라서 허근은 $\pm\sqrt{3}i$ 이므로 모든 허근의 곱은 $-\sqrt{3}i \times \sqrt{3}i = 3$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ①에서 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 a 의 값의 범위는 $-2 \leq a < 5$ 이므로

$$0 \leq a+2 < 7 \quad \therefore 0 \leq \sqrt{a+2} < \sqrt{7}$$

주어진 사차방정식의 실근이 $\pm\sqrt{a+2}$ 이므로 정수인 근을 가지려면

$$(i) \sqrt{a+2} = 0 \text{일 때, } a = -2$$

$$(ii) \sqrt{a+2} = 1 \text{일 때, } a = -1$$

$$(iii) \sqrt{a+2} = 2 \text{일 때, } a = 2$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 모든 실수 } a \text{의 값의 합은 } -2 + (-1) + 2 = -1$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 4

1단계 α, β 에 대한 조건 알기

$$\text{사차방정식 } \left(x^2 - \frac{p}{3}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{20}{p}x + 1\right) = 0 \text{에서}$$

$$x^2 - \frac{p}{3}x + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ 또는 } x^2 + \frac{20}{p}x + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ①의 두 근의 합은 $\frac{p}{3}$, ②의 두

근의 합은 $-\frac{20}{p}$ 이고, 두 근의 곱은 모두 1이다.

↳ 두 근의 부호가 서로 같다.

이때 $p > 0, \alpha > 0, \beta < 0$ 이므로 α 는 이차방정식 ①의 근이고, β 는 이차방정식 ②의 근이다.

또 두 근의 곱이 모두 1이므로 한 근이 α 이면 다른 한 근은 $\frac{1}{\alpha}$ 이고, 한

근이 β 이면 다른 한 근은 $\frac{1}{\beta}$ 이다.

2단계 α 의 값 구하기

즉, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{p}{3}, \beta + \frac{1}{\beta} = -\frac{20}{p}$ 이므로 각 변끼리 곱하면

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{20}{3}$$

이때 $3\alpha + \beta = 0$ 에서 $\beta = -3\alpha$ 이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(-3\alpha - \frac{1}{3\alpha}\right) = -\frac{20}{3}$$

$$-3\alpha^2 - \frac{10}{3} - \frac{1}{3\alpha^2} = -\frac{20}{3}$$

$$9\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0, (9\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 1) = 0$$

$$(3\alpha + 1)(3\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{3} \text{ 또는 } \alpha = 1 (\because \alpha > 0)$$

3단계 주어진 사차방정식의 네 실근 중 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차 구하기

(i) $\alpha = \frac{1}{3}$ 일 때,

$$\frac{1}{\alpha} = 3 \text{이고, } 3\alpha + \beta = 0 \text{에서 } \beta = -1, \frac{1}{\beta} = -1 \text{이므로 주어진 사차방}$$

정식의 네 실근 중 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -1 이다.

$$\text{따라서 그 차는 } |3 - (-1)| = 4$$

(ii) $\alpha = 1$ 일 때,

$$\frac{1}{\alpha} = 1 \text{이고, } 3\alpha + \beta = 0 \text{에서 } \beta = -3, \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{3} \text{이므로 주어진 사차}$$

방정식의 네 실근 중 가장 큰 근은 1, 가장 작은 근은 -3 이다.

$$\text{따라서 그 차는 } |1 - (-3)| = 4$$

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 네 실근 중 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차는 4이다.

07 답 ②

1단계 α, β, γ 사이의 관계식 구하기

삼차방정식 $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

2단계 $f(x)$ 를 이용하여 세 근이 α, β, γ 이고 상수항이 2인 삼차방정식 세우기

$$\beta + \gamma = 1 - \alpha, \gamma + \alpha = 1 - \beta, \alpha + \beta = 1 - \gamma \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{2\beta + 2\gamma}{\alpha}\right) = f\left(\frac{2\gamma + 2\alpha}{\beta}\right) = f\left(\frac{2\alpha + 2\beta}{\gamma}\right) = 1 \text{에서}$$

$$f\left(\frac{2-2\alpha}{\alpha}\right) = f\left(\frac{2-2\beta}{\beta}\right) = f\left(\frac{2-2\gamma}{\gamma}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{\alpha} - 2\right) = f\left(\frac{2}{\beta} - 2\right) = f\left(\frac{2}{\gamma} - 2\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{\alpha} - 2\right) = 1 \text{에서}$$

$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 + a\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 + b \times \frac{2}{\alpha} + c = 1$$

$\alpha \neq 0$ 이므로 양변에 α^3 을 곱하면

$$8 + 4a\alpha + 2b\alpha^2 + c\alpha^3 = \alpha^3$$

$$\frac{c-1}{4}\alpha^3 + \frac{b}{2}\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0$$

$$\text{같은 방법으로 하면 } f\left(\frac{2}{\beta} - 2\right) = 1, f\left(\frac{2}{\gamma} - 2\right) = 1 \text{에서}$$

$$\frac{c-1}{4}\beta^3 + \frac{b}{2}\beta^2 + a\beta + 2 = 0$$

$$\frac{c-1}{4}\gamma^3 + \frac{b}{2}\gamma^2 + a\gamma + 2 = 0$$

따라서 α, β, γ 를 세 근으로 하고 상수항이 2인 삼차방정식은

$$\frac{c-1}{4}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + ax + 2 = 0$$

3단계 $a+b+c$ 의 값 구하기

즉, $x^3 - x^2 - 6x + 2 = \frac{c-1}{4}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + ax + 2$ 이므로

$$\frac{c-1}{4} = 1, \frac{b}{2} = -1, a = -6$$

따라서 $a = -6, b = -2, c = 5$ 이므로

$$a+b+c = -3$$

08 답 ⑤

1단계 주어진 식을 변형하여 관계식 구하기

삼차방정식 $x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

이때 a 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로

$$a^3 = 1, a^2 + a + 1 = 0$$

$$\therefore a^3 + 3a^2 + aa + b = 1 + 3(-a-1) + aa + b \\ = (a-3)a + b - 2$$

즉, 주어진 식은

$$(a-3)a + b - 2 + \frac{1}{(a-3)a + b - 2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 a, b 는 정수이므로 $a-3, b-2$ 도 정수이다.

$a-3=m, b-2=n$ (m, n 은 정수)으로 놓으면 $\textcircled{1}$ 에서

$$ma + n + \frac{1}{ma + n} = k \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

양변에 $ma+n$ 을 곱하면

$$(ma+n)^2 + 1 = k(ma+n)$$

$$kma + kn = m^2a^2 + 2mna + n^2 + 1$$

$$= m^2(-a-1) + 2mna + n^2 + 1$$

$$= (2mn - m^2)a - m^2 + n^2 + 1$$

$$\therefore km = 2mn - m^2 \quad \cdots \textcircled{2}, kn = -m^2 + n^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

2단계 관계식을 이용하여 순서쌍 (a, b) 구하기

(i) $m=0$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } kn = n^2 + 1 \quad \therefore k = n + \frac{1}{n}$$

n 이 정수이므로 k 가 정수이려면 $\frac{1}{n}$ 이 정수이어야 한다.

따라서 n 의 값은 $-1, 1$ 이다.

즉, 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은

$$(0, -1), (0, 1)$$

(ii) $m \neq 0$ 일 때,

$$\textcircled{2} \text{에서 } k = 2n - m$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$(2n-m)n = -m^2 + n^2 + 1$$

$$\therefore n^2 - mn + m^2 - 1 = 0$$

이를 n 에 대한 이차방정식으로 생각하여 풀면

$$n = \frac{m \pm \sqrt{-3m^2 + 4}}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

n 이 정수이려면 $-3m^2 + 4 \geq 0$, 즉 $m^2 \leq \frac{4}{3}$ 이어야 하므로 정수 m 의 값은 $-1, 0, 1$ 이다.

그런데 $m \neq 0$ 이므로 $m = -1$ 또는 $m = 1$

이를 각각 $\textcircled{4}$ 에 대입하면

$$m = -1 \text{일 때 } n = -1 \text{ 또는 } n = 0$$

$$m = 1 \text{일 때 } n = 0 \text{ 또는 } n = 1$$

즉, 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은

$$(-1, -1), (-1, 0), (1, 0), (1, 1)$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

$$m = a - 3, n = b - 2 \text{에서}$$

$$a = m + 3, b = n + 2$$

따라서 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 3)$$

3단계 $a+b$ 의 최댓값 구하기

이때 $a+b$ 의 값은 3, 4, 6, 7이므로 최댓값은 7이다.

idea

09 답 ③

1단계 $\frac{n}{m} = t$ 로 놓고 이차방정식 세우기

주어진 연립방정식의 해가 $x=m, y=n$ 이므로

$$\begin{cases} 3m^2 + kmn - 3n^2 = -2 & \cdots \textcircled{1} \\ 6m^2 - 5mn + 2n^2 = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$15m^2 + (k-10)mn + n^2 = 0$$

$m \neq 0$ 이므로 양변을 m^2 으로 나누면

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 + (k-10)\frac{n}{m} + 15 = 0$$

이때 $\frac{n}{m} = t$ (t 는 정수)로 놓으면

$$t^2 + (k-10)t + 15 = 0$$

2단계 t 에 대한 이차방정식의 정수인 해 구하기

이차방정식 $t^2 + (k-10)t + 15 = 0$ 의 두 근을 정수 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 α, β 가 정수이므로 α, β 도 정수이다.

$$\alpha + \beta = -k + 10 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\alpha\beta = 15 \quad \cdots \textcircled{6}$$

따라서 정수 α, β 에 대하여 $\textcircled{5}$ 을 만족시키는 순서쌍 (α, β) 는

$$(-15, -1), (-5, -3), (-3, -5), (-1, -15),$$

$$(1, 15), (3, 5), (5, 3), (15, 1)$$

3단계 k 의 값의 합 구하기

이때 $\alpha + \beta$ 의 값은 $-16, -8, 8, 16$ 이고 $\textcircled{5}$ 에서 $k = 10 - (\alpha + \beta)$ 이므로

$$k = 26 \text{ 또는 } k = 18 \text{ 또는 } k = 2 \text{ 또는 } k = -6$$

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은

$$26 + 18 + 2 + (-6) = 40$$

10 답 12

1단계 α 의 값 구하기

$f(x) = x^3 + 2x^2 + (p^2+1)x + 2p^2+2$ 라 하면 $f(-2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & p^2+1 & 2p^2+2 \\ & & -2 & 0 & -2p^2-2 \\ \hline & 1 & 0 & p^2+1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+2)(x^2+p^2+1)$$

삼차방정식 $(x+2)(x^2+p^2+1) = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x^2 + p^2 + 1 = 0$$

이때 이차방정식 $x^2 + p^2 + 1 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로

$$\alpha = -2 \quad \leftarrow D = -4(p^2+1) < 0$$

2단계 x^3+4x^2+ax+b 인수분해하기

따라서 삼차방정식 $x^3+4x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 -2 이므로
 $-8+16-2a+b=0$

$$\therefore b=2a-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$g(x)=x^3+4x^2+ax+2a-8$ 이라 하면 $g(-2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 4 & a & 2a-8 \\ & & -2 & -4 & -2a+8 \\ \hline & 1 & 2 & a-4 & 0 \end{array}$$

$$\therefore g(x)=(x+2)(x^2+2x+a-4)$$

3단계 a, b, c 의 값 구하기

$h(x)=x^3+6x^2+cx+a-6$ 이라 하면 두 삼차방정식 $h(x)=0$,
 $g(x)=0$ 은 -2 가 아닌 서로 다른 두 근을 공통인 근으로 가지므로 삼차
 식 $h(x)$ 는 $x^2+2x+a-4$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $h(x)=(x^2+2x+a-4)(x+q)$ (q 는 실수)로 놓으면

$$x^3+6x^2+cx+a-6=(x^2+2x+a-4)(x+q) \text{이므로}$$

$$x^3+6x^2+cx+a-6=x^3+(q+2)x^2+(2q+a-4)x+(a-4)q$$

$$6=q+2 \text{이므로 } q=4$$

$$a-6=(a-4)q \text{이므로}$$

$$a-6=4(a-4)$$

$$3a=10 \quad \therefore a=\frac{10}{3}$$

$$c=2q+a-4 \text{이므로}$$

$$c=2 \times 4 + \frac{10}{3} - 4 = \frac{22}{3}$$

$$a=\frac{10}{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$b=2 \times \frac{10}{3} - 8 = -\frac{4}{3}$$

4단계 $a-b+c$ 의 값 구하기

$$\therefore a-b+c=\frac{10}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{22}{3}=12$$

★ idea

11 답 ③

1단계 공통인 근 사이의 관계 구하기

두 이차방정식 $x^2+x+a=0$, $x^2+bx+c=0$ 의 공통인 실근을 α 라 하면

$$\alpha^2+\alpha+a=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면 } (1-b)\alpha+a-c=0$$

$$\therefore \alpha=\frac{a-c}{b-1} \quad (\because b \neq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

두 이차방정식 $x^2+ax+1=0$, $x^2+cx+b=0$ 의 공통인 실근을 β 라 하면

$$\beta^2+a\beta+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\beta^2+c\beta+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}-\textcircled{5} \text{을 하면 } (a-c)\beta+1-b=0$$

$$\therefore \beta=\frac{b-1}{a-c} \quad (\because a \neq c) \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{6} \text{에서 } \alpha\beta=\frac{a-c}{b-1} \times \frac{b-1}{a-c}=1 \text{이므로 } \alpha=\frac{1}{\beta}$$

2단계 $a, b+c$ 의 값 구하기

$$a=\frac{1}{\beta} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}+a=0$$

$$\therefore a\beta^2+\beta+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{3}-\textcircled{6}$ 을 하면

$$(1-a)\beta^2+(a-1)\beta=0, (1-a)\beta(\beta-1)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } \beta=1 \quad (\because \beta \neq 0)$$

(i) $a=1$ 일 때,

이차방정식 $x^2+x+a=0$, 즉 $x^2+x+1=0$ 이 실근을 갖지 않으므로
 조건을 만족시키지 않는다. $\hookrightarrow D=1-4=-3<0$

(ii) $\beta=1$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에 대입하면 } 1+a+1=0$$

$$\therefore a=-2$$

$$\textcircled{6} \text{에 대입하면 } 1+c+b=0$$

$$\therefore b+c=-1$$

3단계 $b+c-2a$ 의 값 구하기

(i), (ii)에서

$$b+c-2a=-1-2 \times (-2)=3$$

12 답 8

1단계 $f(x)$ 를 m 에 대한 식으로 나타내기

이차방정식 $f(x)-4=0$ 의 한 근이 1이므로 $f(1)-4=0$ 에서

$$1+m+n-4=0$$

$$\therefore n=3-m$$

$$\therefore f(x)=x^2+mx+3-m$$

2단계 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i) $b=0$ 일 때,

이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 근은 a 이고, 다른 한 근을 k 라 하면 근과
 계수의 관계에 의하여

$$a+k=-m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, ak=3-m \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$ak-a-k=3$$

$$a(k-1)-(k-1)=4$$

$$\therefore (a-1)(k-1)=4$$

이때 a, m 이 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 k 도 정수이다.

즉, $a-1, k-1$ 도 정수이므로 $(a-1)(k-1)=4$ 를 만족시키는 순
 서쌍 $(a-1, k-1)$ 은

$$(-4, -1), (-2, -2), (-1, -4), (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

따라서 a 의 값은 $-3, -1, 0, 2, 3, 5$ 이므로 정수 a, b 의 순서쌍

(a, b) 는 $(-3, 0), (-1, 0), (0, 0), (2, 0), (3, 0), (5, 0)$ 의 6
 개이다.

(ii) $b \neq 0$ 일 때,

이차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 실수이고 $a+bi$ 가 한 근이므로 다른
 한 근은 $a-bi$ 이다.

이차방정식 $x^2+mx+3-m=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+bi)+(a-bi)=-m, (a+bi)(a-bi)=3-m$$

$$\therefore 2a=-m \quad \cdots \cdots \textcircled{3}, a^2+b^2=3-m \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}-\textcircled{4}$ 을 하면

$$a^2-2a+b^2=3$$

$$\therefore (a-1)^2+b^2=4$$

이때 a 는 정수이므로 $a-1$ 도 정수이고, b 는 0이 아닌 정수이므로

$$(a-1)^2=0, b^2=4$$

$$\therefore a=1, b=\pm 2$$

따라서 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, -2), (1, 2)$ 의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$6+2=8$$

step 1 핵심 문제

| 80~81쪽

01 $x > -2$	02 9	03 16	04 ⑤	05 ⑤
06 $0 \leq a \leq 3$	07 2	08 ③	09 7	10 5
11 ③	12 ②	13 ①	14 18	

01 답 $x > -2$ 부등식 $(a+b)x+3a-b \geq 0$ 에서

$$(a+b)x \geq -3a+b$$

이 부등식의 해가 없으므로

$$a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad -3a+b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = -a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③을 ②에 대입하면

$$-3a-a > 0, \quad -4a > 0 \quad \therefore a < 0$$

③을 부등식 $(2a-b)x+5a-b < 0$ 에 대입하면

$$(2a+a)x+5a+a < 0$$

$$3ax < -6a \quad \therefore x > -2 \quad (\because a < 0)$$

02 답 9

$$3x-2y=1 \text{에서 } y = \frac{3x-1}{2}$$

이를 주어진 부등식에 대입하면

$$\frac{5x-1}{3} \leq \frac{3x-1}{2} + 2 \leq \frac{5x+7}{2}$$

$$\therefore \frac{5x-1}{3} \leq \frac{3x+3}{2} \leq \frac{5x+7}{2} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{부등식 } \frac{5x-1}{3} \leq \frac{3x+3}{2} \text{에서}$$

$$10x-2 \leq 9x+9 \quad \therefore x \leq 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{부등식 } \frac{3x+3}{2} \leq \frac{5x+7}{2} \text{에서}$$

$$3x+3 \leq 5x+7, \quad -2x \leq 4 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분을 구하면 } -2 \leq x \leq 11 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

따라서 $M=11, m=-2$ 이므로

$$M+m=9 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

03 답 16

부등식 $3x-a \leq -x+4$ 에서

$$4x \leq a+4 \quad \therefore x \leq \frac{a+4}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

부등식 $-x+4 \leq b(x-2)$ 에서

$$-x+4 \leq bx-2b, \quad (b+1)x \geq 2b+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 주어진 부등식의 해가 $3 \leq x \leq 5$ 이므로 ①에서 $\frac{a+4}{4}=5$ 이고,

$$\textcircled{2} \text{에서 } b+1 > 0 \text{이고 } \frac{2b+4}{b+1}=3 \text{이다.}$$

$$\frac{a+4}{4}=5 \text{에서 } a=16$$

$$\frac{2b+4}{b+1}=3 \text{에서 } 2b+4=3b+3 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore ab=16 \times 1=16$$

04 답 ⑤

$$\text{부등식 } x+2 > 3 \text{에서 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{부등식 } 3x < a+1 \text{에서 } x < \frac{a+1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

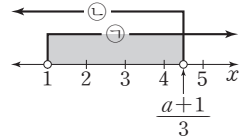
주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정

수 x 의 값의 합이 9가 되려면

$$9=2+3+4 \text{이므로}$$

$$4 < \frac{a+1}{3} \leq 5$$

$$12 < a+1 \leq 15 \quad \therefore 11 < a \leq 14$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 14이다.

05 답 ⑤

$$(i) x < \frac{1}{3} \text{일 때,}$$

$$|3x-1| = -(3x-1) \text{이므로}$$

$$-(3x-1) < x+a, \quad -4x < a-1 \quad \therefore x > \frac{1-a}{4}$$

$$\text{주어진 부등식의 해가 } -1 < x < 3 \text{이므로 } \rightarrow x < \frac{1}{3} \text{일 때 } -1 < x < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1-a}{4} = -1, \quad 1-a = -4 \quad \therefore a = 5$$

$$(ii) x \geq \frac{1}{3} \text{일 때,}$$

$$|3x-1| = 3x-1 \text{이므로}$$

$$3x-1 < x+a, \quad 2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{a+1}{2}$$

$$\text{주어진 부등식의 해가 } -1 < x < 3 \text{이므로 } \rightarrow x \geq \frac{1}{3} \text{일 때 } \frac{1}{3} \leq x < 3$$

$$\frac{a+1}{2} = 3, \quad a+1 = 6 \quad \therefore a = 5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a = 5$$

06 답 $0 \leq a \leq 3$

$$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$|x-2| + |x-1| < 4$$

$$(i) x < 1 \text{일 때,}$$

$$|x-2| = -(x-2), \quad |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$-(x-2) - (x-1) < 4$$

$$-2x < 1 \quad \therefore x > -\frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } x < 1 \text{이므로 } -\frac{1}{2} < x < 1$$

$$(ii) 1 \leq x < 2 \text{일 때,}$$

$$|x-2| = -(x-2), \quad |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$-(x-2) + (x-1) < 4$$

$$0 < x < 3 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } 1 \leq x < 2 \text{이므로 } 1 \leq x < 2$$

$$(iii) x \geq 2 \text{일 때,}$$

$$|x-2| = x-2, \quad |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$(x-2) + (x-1) < 4$$

$$2x < 7 \quad \therefore x < \frac{7}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq x < \frac{7}{2}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2} \text{이므로 정수 } x \text{의 값은 } 0, 1, 2, 3 \text{이다.}$$

한편 부등식 $|x-a| \leq 3$ 에서

$$-3 \leq x-a \leq 3$$

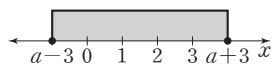
$$\therefore a-3 \leq x \leq a+3$$

x 의 값이 0, 1, 2, 3일 때, 위의 부등식

이 성립해야 하므로

$$a-3 \leq 0, a+3 \geq 3$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3$$



07 답 2

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-1<x<5$ 이므로 $a<0$

해가 $-1<x<5$ 이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-5)<0 \quad \therefore x^2-4x-5<0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2-4ax-5a>0$ ($\because a<0$)

이 이차부등식이 $ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로

$$b=-4a, c=-5a$$

이를 부등식 $a(x-12)^2-bx(x-12)+cx^2>0$ 에 대입하면

$$a(x-12)^2+4ax(x-12)-5ax^2>0$$

양변을 a 로 나누면

$$(x-12)^2+4x(x-12)-5x^2<0 \quad (\because a<0)$$

$$-72x+144<0, -72x<-144 \quad \therefore x>2$$

$$\therefore a=2$$

08 답 ③

이차부등식 $x^2-(n+5)x+5n \leq 0$ 에서 $(x-n)(x-5) \leq 0$

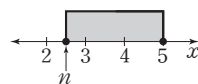
(i) $n < 5$ 일 때,

이차부등식 $(x-n)(x-5) \leq 0$ 에서 $n \leq x \leq 5$

이를 만족시키는 정수 x 가 3개이려면

$$2 < n \leq 3$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=3$



(ii) $n = 5$ 일 때,

이차부등식 $(x-n)(x-5) \leq 0$ 에서 $(x-5)^2 \leq 0$

이를 만족시키는 정수 x 는 5뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

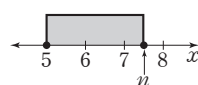
(iii) $n > 5$ 일 때,

이차부등식 $(x-n)(x-5) \leq 0$ 에서 $5 \leq x \leq n$

이를 만족시키는 정수 x 가 3개이려면

$$7 \leq n < 8$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=7$



(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+7=10$$

09 답 7

이차부등식 $x^2-4ax+(a-1)^2 < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2-4ax+(a-1)^2 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4ax+(a-1)^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2-(a-1)^2 \leq 0$$

$$3a^2+2a-1 \leq 0, (a+1)(3a-1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore M=\frac{1}{3}$$

또 $f(x)=x^2-4x-4b+3$ 이라 하면

$$f(x)=(x-2)^2-4b-1$$

$3 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

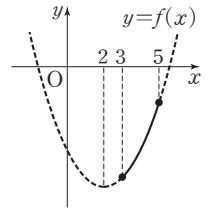
$3 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x)$ 는 $x=5$ 일 때 최대이므로

$$f(5) \leq 0$$

$$-4b+8 \leq 0, -4b \leq -8 \quad \therefore b \geq 2$$

$$\therefore m=2$$

$$\therefore 3(M+m)=3\left(\frac{1}{3}+2\right)=7$$



10 답 5

이차부등식 $x^2+x-6 \geq 0$ 에서

$$(x+3)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 2$$

이때 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \geq 0 \\ x^2-ax+b \leq 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 \leq x \leq 3$ 이므로 이차방정식

$x^2-ax+b=0$ 의 한 근이 3이다. 배점 30%

또 이차부등식 $x^2+x-2 < 0$ 에서

$$(x+2)(x-1) < 0 \quad \therefore -2 < x < 1$$

이때 연립부등식 $\begin{cases} x^2-ax+b > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < -1$ 이므로 이차방

정식 $x^2-ax+b=0$ 의 한 근이 -1이다. 배점 30%

따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 3, -1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=3+(-1)=2, b=3 \times (-1)=-3$$

$$\therefore a-b=5 \quad \text{배점 40\%}$$

11 답 ③

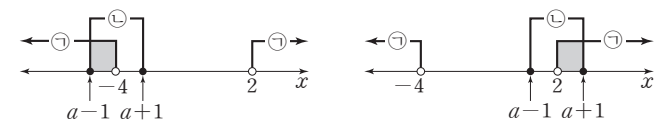
이차부등식 $x^2+2x-8 > 0$ 에서

$$(x+4)(x-2) > 0 \quad \therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 2 \quad \text{..... ㉠}$$

부등식 $|x-a| \leq 1$ 에서

$$-1 \leq x-a \leq 1 \quad \therefore a-1 \leq x \leq a+1 \quad \text{..... ㉡}$$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식이 항상 해를 가지려면

$$a-1 < -4 \text{ 또는 } a+1 > 2$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 1$$

12 답 ②

$f(x)=x^2+2ax+4a+5$ 라 할 때, 이차방정식

$f(x)=0$ 의 두 근이 모두 -1보다 크려면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

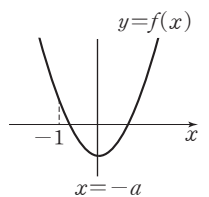
$$\frac{D}{4}=a^2-4a-5 \geq 0$$

$$(a+1)(a-5) \geq 0 \quad \therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 5$$

(ii) $f(-1) > 0$ 이므로

$$1-2a+4a+5 > 0$$

$$2a+6 > 0 \quad \therefore a > -3$$



- (iii) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=-a$ 이므로
 $-a > -1 \quad \therefore a < 1$
 (i), (ii), (iii)에서 실수 a 의 값의 범위는
 $-3 < a \leq -1$

13 답 ①

상자의 개수를 x 라 하자.
 사과를 한 상자에 4개씩 담으면 사과가 15개 남으므로 사과의 개수는 $4x+15$ 이다.
 사과를 한 상자에 5개씩 담으면 상자가 4개 남으므로 비어 있지 않은 $(x-4)$ 개의 상자 중에서 $(x-5)$ 개의 상자에는 사과가 5개씩 들어 있고, 1개의 상자에는 사과가 최소 1개에서 최대 5개까지 들어 있다.
 $5(x-5)+1 \leq 4x+15 \leq 5(x-5)+5$ 이므로
 $5x-24 \leq 4x+15 \leq 5x-20$
 부등식 $5x-24 \leq 4x+15$ 에서 $x \leq 39$ ㉠
 부등식 $4x+15 \leq 5x-20$ 에서 $x \geq 35$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $35 \leq x \leq 39$
 따라서 보기 중 상자의 개수가 될 수 없는 것은 34이다.

14 답 18

$\overline{QC} = a$ ($0 < a < 12$)이므로 $\overline{BQ} = 12-a$
 삼각형 APR는 직각이등변삼각형이므로 $\rightarrow$ 두 삼각형 ABC, APR에서
 $\angle ACB = \angle ARP, \angle BAC = \angle PAR$
 $\overline{PR} = \overline{AR} = a$ $\therefore \triangle ABC \sim \triangle APR$ (AA 닮음)
 따라서 삼각형 APR의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{AR} = \frac{1}{2}a^2$
 삼각형 PBQ도 직각이등변삼각형이므로 $\rightarrow$ 두 삼각형 ABC, PBQ에서
 $\angle ACB = \angle PQB, \angle ABC = \angle PBQ$
 $\overline{BQ} = \overline{PQ} = 12-a$ $\therefore \triangle ABC \sim \triangle PBQ$ (AA 닮음)
 따라서 삼각형 PBQ의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{PQ} = \frac{1}{2}(12-a)^2$
 직사각형 PQCR의 넓이는
 $\overline{QC} \times \overline{PQ} = a(12-a) = 12a - a^2$
 직사각형 PQCR의 넓이가 두 삼각형 APR, PBQ의 각각의 넓이보다 크므로

$$\begin{cases} 12a - a^2 > \frac{1}{2}a^2 \\ 12a - a^2 > \frac{1}{2}(12-a)^2 \end{cases}$$

 이차부등식 $12a - a^2 > \frac{1}{2}a^2$ 에서
 $-\frac{3}{2}a^2 + 12a > 0, a^2 - 8a < 0$
 $a(a-8) < 0 \quad \therefore 0 < a < 8$ ㉠
 이차부등식 $12a - a^2 > \frac{1}{2}(12-a)^2$ 에서
 $12a - a^2 > \frac{1}{2}a^2 - 12a + 72, -\frac{3}{2}a^2 + 24a - 72 > 0$
 $a^2 - 16a + 48 < 0, (a-4)(a-12) < 0$
 $\therefore 4 < a < 12$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4 < a < 8$
 따라서 자연수 a 의 값은 5, 6, 7이므로 그 합은
 $5+6+7=18$

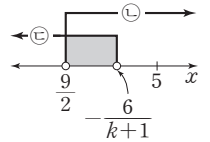
step 2 고난도 문제

| 82~85쪽

01 $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{11}{5}$	02 28	03 ②	04 -3
05 49	06 ⑤	07 ④	08 ①
09 ②	10 27		
11 $a < -1$	12 30	13 ③	14 $1 \leq a \leq 2$
15 ②	16 ④	17 $2 \leq a < 3$	18 43
19 ②			
20 15	21 ①	22 $0 < a \leq 4$	

01 답 $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{11}{5}$

부등식 $kx+9 > -x+3$ 에서
 $(k+1)x > -6$ ㉠
 부등식 $2(x+1)+1 < 4(x-1)-2$ 에서
 $2x+3 < 4x-6, -2x < -9$
 $\therefore x > \frac{9}{2}$ ㉡
 주어진 연립부등식의 해는 존재하지만 정수인 해는 존재하지 않으므로
 ㉠에서 $k+1 < 0$, 즉 $k < -1$ 이고
 $x < -\frac{6}{k+1}$ ㉢
 ㉡, ㉢의 공통부분이 조건을 만족시키도록 수직 선 위에 나타내면 그림과 같다.
 따라서 정수인 해가 존재하지 않으려면
 $\frac{9}{2} < -\frac{6}{k+1} \leq 5$
 부등식 $\frac{9}{2} < -\frac{6}{k+1}$ 에서 $9k+9 > -12$ ($\because k+1 < 0$)
 $\therefore k > -\frac{7}{3}$ ㉣
 부등식 $-\frac{6}{k+1} \leq 5$ 에서 $-6 \geq 5k+5$ ($\because k+1 < 0$)
 $\therefore k \leq -\frac{11}{5}$ ㉤
 ㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{11}{5}$
 이때 $k < -1$ 이므로 $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{11}{5}$



02 답 28

어떤 양수를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 정수가 6보다 크거나 같으려면 그 양수는 5.5 이상이어야 한다.
 즉, 부등식 $f\left(\frac{5}{2}x+2\right) \geq 6$ 에서 $\frac{5}{2}x+2 \geq 5.5$
 $\frac{5}{2}x \geq \frac{7}{2} \quad \therefore x \geq \frac{7}{5}$ ㉠
 또 어떤 양수를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 정수가 12보다 작으려면 그 양수는 11.5 미만이어야 한다.
 즉, 부등식 $f\left(\frac{3}{4}x+1\right) < 12$ 에서 $0 < \frac{3}{4}x+1 < 11.5$
 $-1 < \frac{3}{4}x < \frac{21}{2} \quad \therefore -\frac{4}{3} < x < 14$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{7}{5} \leq x < 14$
 따라서 $\alpha = \frac{7}{5}, \beta = 14$ 이므로
 $10\alpha + \beta = 14 + 14 = 28$

idea
03 답 ②

세 부등식 $x-y+1<0$, $3x-y+6>0$, $3x+y-3<0$ 에서
 $y>x+1$, $y<3x+6$, $y<-3x+3$

$$\therefore \begin{cases} x+1 < y < 3x+6 & \cdots \cdots \textcircled{㉑} \\ x+1 < y < -3x+3 & \cdots \cdots \textcircled{㉒} \end{cases}$$

㉑에서 $x+1<3x+6$ 이므로

$$-2x < 5 \quad \therefore x > -\frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}$$

㉒에서 $x+1<-3x+3$ 이므로

$$4x < 2 \quad \therefore x < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔의 공통부분을 구하면

$$-\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 세 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-2, -1, 0$ 이다.

(i) $x=-2$ 일 때,

㉑에서 $-1<y<0$ 이고, ㉒에서 $-1<y<9$ 이므로

$$-1 < y < 0$$

이때 정수 y 는 존재하지 않는다.

(ii) $x=-1$ 일 때,

㉑에서 $0<y<3$ 이고, ㉒에서 $0<y<6$ 이므로

$$0 < y < 3$$

즉, 정수 y 의 값은 $1, 2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(-1, 1), (-1, 2)$ 의 2개이다.

(iii) $x=0$ 일 때,

㉑에서 $1<y<6$ 이고, ㉒에서 $1<y<3$ 이므로

$$1 < y < 3$$

즉, 정수 y 의 값은 2 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 2)$ 의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$2+1=3$$

04 답 -3

$$|2x-9| \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$|2x-9| + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{부등식 } \left| 2x-9 \right| + \frac{1}{3} < \frac{4}{3} \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{3} \leq |2x-9| + \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$$

$$0 \leq |2x-9| < 1$$

$$-1 < 2x-9 < 1$$

$$8 < 2x < 10$$

$$\therefore 4 < x < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑} \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

부등식 $2a+5b-5 < (a+2b)x < a+b-1$ 에서

(i) $a+2b>0$ 일 때,

$$\frac{2a+5b-5}{a+2b} < x < \frac{a+b-1}{a+2b} \text{ 이고 이는 } \textcircled{㉑} \text{ 과 같으므로}$$

$$\frac{2a+5b-5}{a+2b} = 4, \quad \frac{a+b-1}{a+2b} = 5$$

$$\therefore 2a+3b=-5, \quad 4a+9b=-1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-7, \quad b=3$$

이때 $a+2b=-1<0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.배점 30%

(ii) $a+2b<0$ 일 때,

$$\frac{a+b-1}{a+2b} < x < \frac{2a+5b-5}{a+2b} \text{ 이고 이는 } \textcircled{㉑} \text{ 과 같으므로}$$

$$\frac{a+b-1}{a+2b} = 4, \quad \frac{2a+5b-5}{a+2b} = 5$$

$$3a+7b=-1, \quad 3a+5b=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5, b=2$

이때 $a+2b=-1<0$ 이므로 조건을 만족시킨다.배점 30%

(i), (ii)에서 $a=-5, b=2$ 이므로

$$a+b=-3 \quad \cdots \cdots \text{배점 10\%}$$

05 답 49

(i) $x<0$ 일 때,

$$|x-m| = -(x-m), \quad |x| = -x \text{ 이므로}$$

$$-(x-m) - x < n, \quad -2x < -m+n$$

$$\therefore x > \frac{m-n}{2}$$

$$\text{그런데 } x < 0 \text{ 이므로 } \frac{m-n}{2} < x < 0 \quad (\because m < n)$$

(ii) $0 \leq x < m$ 일 때,

$$|x-m| = -(x-m), \quad |x| = x \text{ 이므로}$$

$$-(x-m) + x < n$$

$$0 \times x < n-m \text{ 이고 } n-m > 0 \text{ 이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } 0 \leq x < m \text{ 이므로 } 0 \leq x < m$$

(iii) $x \geq m$ 일 때,

$$|x-m| = x-m, \quad |x| = x \text{ 이므로}$$

$$(x-m) + x < n, \quad 2x < m+n$$

$$\therefore x < \frac{m+n}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq m \text{ 이고, } m = \frac{m+m}{2} < \frac{m+n}{2} \text{ 이므로}$$

$$m \leq x < \frac{m+n}{2}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{ 에서 } \frac{m-n}{2} < x < \frac{m+n}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$m=1, n=5 \text{ 일 때, } \textcircled{㉑} \text{ 에서 } -2 < x < 3 \text{ 이므로 } f(1, 5) = 4 - \text{정수 } x \text{ 는 } -1, 0.$$

$$m=2, n=6 \text{ 일 때, } \textcircled{㉑} \text{ 에서 } -2 < x < 4 \text{ 이므로 } f(2, 6) = 5$$

$$m=3, n=7 \text{ 일 때, } \textcircled{㉑} \text{ 에서 } -2 < x < 5 \text{ 이므로 } f(3, 7) = 6$$

⋮

$$m=7, n=11 \text{ 일 때, } \textcircled{㉑} \text{ 에서 } -2 < x < 9 \text{ 이므로 } f(7, 11) = 10$$

$$\therefore f(1, 5) + f(2, 6) + f(3, 7) + \cdots + f(7, 11) = 4 + 5 + 6 + \cdots + 10 = 49$$

06 답 ⑤

그림과 같이 두 이차함수 $y=f(x), y=g(x)$

의 그래프의 두 교점의 x 좌표를 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$

라 하면

$$-3 < \alpha < -2, \quad -1 < \beta < 0$$

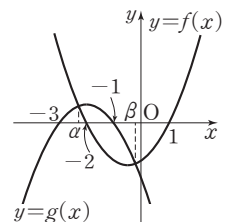
부등식 $\{f(x)\}^2 \geq f(x)g(x)$ 에서

$$f(x)\{f(x)-g(x)\} \geq 0$$

(i) $f(x) \geq 0, f(x)-g(x) \geq 0$ 일 때,

부등식 $f(x) \geq 0$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$



부등식 $f(x)-g(x)\geq 0$, 즉 $f(x)\geq g(x)$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$x\leq\alpha \text{ 또는 } x\geq\beta \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{A}}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$

그런데 $-5<x<5$ 이므로

$$-5<x\leq\alpha \text{ 또는 } 1\leq x<5$$

즉, 정수 x 는 $-4, -3, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

(ii) $f(x)\leq 0, f(x)-g(x)\leq 0$ 일 때,

부등식 $f(x)\leq 0$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$-2\leq x\leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{B}}$$

부등식 $f(x)-g(x)\leq 0$, 즉 $f(x)\leq g(x)$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\alpha\leq x\leq\beta \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{C}}$$

③, ④의 공통부분을 구하면 $-2\leq x\leq\beta$

그런데 $-5<x<5$ 이므로 $-2\leq x\leq\beta$

즉, 정수 x 는 $-2, -1$ 의 2개이다.

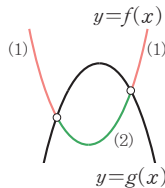
(i), (ii)에서 정수 x 의 개수는 $6+2=8$

개념 NOTE

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

(1) 부등식 $f(x)>g(x)$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.

(2) 부등식 $f(x)<g(x)$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.



07 답 ④

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$ 일 때 $f(x)\geq 0$ 이고,

$-1<x<3$ 일 때 $f(x)<0$ 이므로

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 3) \\ -f(x) & (-1<x<3) \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)+f(x)}{2} & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 3) \\ \frac{f(x)-f(x)}{2} & (-1<x<3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x) & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 3) \\ 0 & (-1<x<3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$\therefore f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선

$x=1$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$

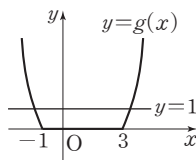
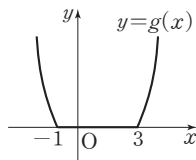
의 그래프도 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수와 같다.

그림과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직

선 $y=1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나므로

방정식 $g(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



ㄷ. 부등식 $g(x)\leq 0$ 의 해는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽

에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$-1\leq x\leq 3 \rightarrow \text{아래쪽에 있는 부분은 없고 만나는 부분만 존재한다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ①

$[x-2]=n$ (n 은 정수)이라 하면

$$n\leq x-2< n+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{A}}$$

$$\therefore n+3\leq x+1< n+4$$

$[x+1]=n+3$ 이므로 부등식 $[x-2]^2-3[x+1]+9\leq 0$ 에서

$$n^2-3(n+3)+9\leq 0$$

$$n^2-3n\leq 0, n(n-3)\leq 0$$

$$\therefore 0\leq n\leq 3$$

이때 정수 n 의 값은 0, 1, 2, 3이므로 ㉠에서

$$0\leq x-2< 4 \rightarrow n=0\text{일 때 } 0\leq x-2< 1, n=1\text{일 때 } 1\leq x-2< 2,$$

$$\therefore 2\leq x< 6 \quad n=2\text{일 때 } 2\leq x-2< 3, n=3\text{일 때 } 3\leq x-2< 4$$

즉, $\alpha=2, \beta=6$ 이므로 주어진 이차함수 $f(x)$ 에서

$$f(x)=(x-2)(x-6)=x^2-8x+12$$

$$=(x-4)^2-4$$

따라서 이차함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최솟값이 -4 이다.

비법 NOTE

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n 에 대하여

$$(1) n\leq x< n+1\text{이면 } [x]=n$$

$$(2) [x]=n\text{이면 } n\leq x< n+1$$

09 답 ②

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(a, 0), (a+3, 0)$ 에서 만

나므로 최고차항의 계수를 k ($k>0$)라 하면

$$f(x)=k(x-a)(x-a-3)$$

$$\text{부등식 } f\left(\frac{x+b}{2}\right)\leq 0\text{에서}$$

$$k\left(\frac{x+b}{2}-a\right)\left(\frac{x+b}{2}-a-3\right)\leq 0$$

$$\frac{k}{4}(x+b-2a)(x+b-2a-6)\leq 0$$

$$(x+b-2a)(x+b-2a-6)\leq 0 (\because k>0)$$

$$\therefore 2a-b\leq x\leq 2a-b+6$$

이 부등식의 해가 $-3\leq x\leq 3$ 이므로

$$2a-b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{A}}$$

$$\text{부등식 } f\left(\frac{b-x}{4}\right)\leq 0\text{에서}$$

$$k\left(\frac{b-x}{4}-a\right)\left(\frac{b-x}{4}-a-3\right)\leq 0$$

$$\frac{k}{16}(x-b+4a)(x-b+4a+12)\leq 0$$

$$(x-b+4a)(x-b+4a+12)\leq 0 (\because k>0)$$

$$\therefore -4a+b-12\leq x\leq -4a+b$$

이 부등식의 해가 $-8\leq x\leq 4$ 이므로

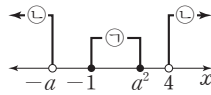
$$-4a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{B}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{2}, b=2$$

$$\therefore 2ab=-2$$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.
따라서 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면



$$\begin{aligned} -a &\leq -1, a^2 \leq 4 \\ -a &\leq -1 \text{에서 } a \geq 1 & \dots\dots \text{㉠} \\ a^2 \leq 4 \text{에서 } a^2 - 4 &\leq 0 \\ (a+2)(a-2) &\leq 0 \\ \therefore -2 &\leq a \leq 2 & \dots\dots \text{㉡} \\ \text{㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 } 1 &\leq a \leq 2 \end{aligned}$$

15 답 ②

이차부등식 $-x^2+3x+2 \leq mx+n$ 에서
 $x^2+(m-3)x+n-2 \geq 0$
 이 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 이차방정식
 $x^2+(m-3)x+n-2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1=(m-3)^2-4(n-2) \leq 0$
 $\therefore 4n \geq m^2-6m+17 \dots\dots \text{㉠}$
 또 이차부등식 $mx+n \leq x^2-x+4$ 에서
 $x^2-(m+1)x+4-n \geq 0$
 이 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 이차방정식
 $x^2-(m+1)x+4-n=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2=(m+1)^2-4(4-n) \leq 0$
 $\therefore 4n \leq -m^2-2m+15 \dots\dots \text{㉡}$
 ㉠, ㉡에서
 $m^2-6m+17 \leq 4n \leq -m^2-2m+15 \dots\dots \text{㉢}$
 즉, $m^2-6m+17 \leq -m^2-2m+15$ 이므로
 $2m^2-4m+2 \leq 0$
 $2(m-1)^2 \leq 0$
 이때 $(m-1)^2 \geq 0$ 이므로 $m=1$
 이를 ㉢에 대입하면 $12 \leq 4n \leq 12$ 이므로
 $4n=12 \quad \therefore n=3$
 $\therefore m^2+n^2=1+9=10$

16 답 ④

부등식 $|x+b| \leq 1$ 에서 $-1 \leq x+b \leq 1$
 $\therefore -b-1 \leq x \leq -b+1 \dots\dots \text{㉠}$
 이때 $-b+1 - (-b-1) = 2$ 이므로 ㉠은 연립부등식의 해인 $2 \leq x \leq 3$ 과 같지 않다.
 또 이차부등식 $x^2+x+a \geq 0$ 에서 이차항의 계수가 양수이므로 이 부등식의 해는 연립부등식의 해인 $2 \leq x \leq 3$ 과 같지 않다.
 (i) $-b-1=2$, 즉 $b=-3$ 인 경우
 부등식 $|x+b| \leq 1$ 의 해는 ㉠에서
 $2 \leq x \leq 4 \dots\dots \text{㉡}$
 이때 주어진 연립부등식의 해가 $2 \leq x \leq 3$ 이므로 이차방정식
 $x^2+x+a=0$ 의 한 근이 3이다.
 따라서 $9+3+a=0$ 이므로 $a=-12$
 이차부등식 $x^2+x-12 \geq 0$ 에서 $(x+4)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 3 \dots\dots \text{㉢}$
 ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $3 \leq x \leq 4$
 이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-b+1=3$, 즉 $b=-2$ 인 경우
 부등식 $|x+b| \leq 1$ 의 해는 ㉠에서
 $1 \leq x \leq 3 \dots\dots \text{㉡}$
 이때 주어진 연립부등식의 해가 $2 \leq x \leq 3$ 이므로 이차방정식
 $x^2+x+a=0$ 의 한 근이 2이다.
 따라서 $4+2+a=0$ 이므로 $a=-6$
 이차부등식 $x^2+x-6 \geq 0$ 에서 $(x+3)(x-2) \geq 0$
 $\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 2 \dots\dots \text{㉢}$
 ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $2 \leq x \leq 3$
 이는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-6$, $b=-2$
 이차부등식 $x^2+ax+3-b \leq 0$ 에서
 $x^2-6x+5 \leq 0$, $(x-1)(x-5) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq x \leq 5$
 이를 만족시키는 정수 x 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

17 답 $2 \leq a < 3$

$f(x)=x^2-2(a-1)x-a+3$ 이라 하자.

(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 모두 0과 3 사이에 있는 경우

㉠ 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라

하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 + a - 3 \geq 0$$

$$a^2 - a - 2 \geq 0, (a+1)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 2$$

㉡ $f(0) > 0$ 이므로

$$-a+3 > 0 \quad \therefore a < 3$$

㉢ $f(3) > 0$ 이므로

$$9-6a+6-a+3 > 0$$

$$-7a+18 > 0 \quad \therefore a < \frac{18}{7}$$

㉣ 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=a-1$ 이므로

$$0 < a-1 < 3 \quad \therefore 1 < a < 4$$

㉠~㉣에서 $2 \leq a < \frac{18}{7}$

(ii) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 실근이 0 또는 3이고 다른 한 근이 0과 3 사이에 있는 경우

㉠ $f(0)=0$, 즉 $a=3$ 인 경우

$$f(3) > 0 \text{이므로 } a < \frac{18}{7}$$

그런데 $a=3$ 은 이를 만족시키지 않는다.

㉡ $f(3)=0$, 즉 $a=\frac{18}{7}$ 인 경우

$$f(0) > 0 \text{이므로 } a < 3$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직

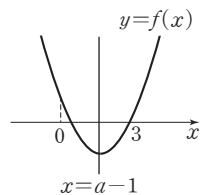
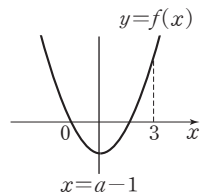
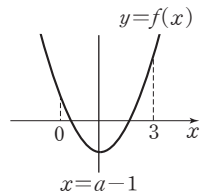
선 $x=a-1$ 이므로

$$0 < a-1 < 3$$

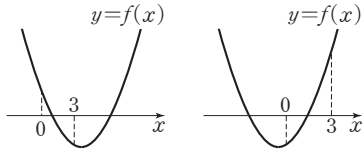
$$\therefore 1 < a < 4$$

이때 $a=\frac{18}{7}$ 은 이를 모두 만족시킨다.

㉠, ㉡에서 $a=\frac{18}{7}$



(iii) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 실근만이 0과 3 사이에 있는 경우



$$f(0)f(3) < 0 \text{ 이므로}$$

$$(-a+3)(-7a+18) < 0$$

$$(a-3)(7a-18) < 0 \quad \therefore \frac{18}{7} < a < 3$$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a < 3$$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2(a-1)x-a+3=0$ 에서

$$x^2+2x+3=a(2x+1)$$

주어진 이차방정식의 실근은 이차함수 $y=x^2+2x+3$ 의 그래프와 직선 $y=a(2x+1)$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 $0 < x < 3$ 에서 교점이 존재해야 한다.

$f(x)=x^2+2x+3$ 이라 하면

$$f(x)=(x+1)^2+2, f(0)=3, f(3)=18$$

직선 $y=a(2x+1)$ 은 a 의 값에 관계없이

항상 점 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 을 지나므로 $0 < x < 3$ 에

서 이 직선과 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나려면 그림과 같이 직선이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 접하거나 점 $(0, 3)$ 을 지나는 직선 사이에 있어야 한다.

또 직선 $y=a(2x+1)$ 의 기울기가 양수이어야 하므로 $a > 0$

(i) 이차함수 $y=x^2+2x+3$ 의 그래프와 직선 $y=a(2x+1)$ 이 접할 때,

$$x^2+2x+3=a(2x+1) \text{에서 } x^2-2(a-1)x-a+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a-3=0$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

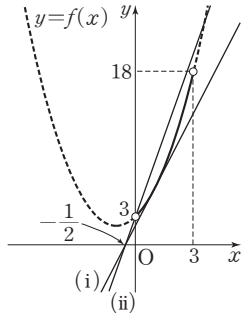
$$\therefore a=2 (\because a > 0)$$

(ii) 직선 $y=a(2x+1)$ 이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때,

$$a=3$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a < 3$$



18 답 43

$f(x)=x^3-3ax^2+(2a^2+a+6)x-a^2-6a$ 라 하면 $f(a)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} x & 1 & -3a & 2a^2+a+6 & -a^2-6a \\ & & a & -2a^2 & a^2+6a \\ \hline & 1 & -2a & a+6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-a)(x^2-2ax+a+6)$$

삼차방정식 $(x-a)(x^2-2ax+a+6)=0$ 에서

$$x=a \text{ 또는 } x^2-2ax+a+6=0$$

이때 세 근이 모두 4보다 작아야 하므로

$$a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

또 이차방정식 $x^2-2ax+a+6=0$ 의 근이 모두 4보다 작아야 한다.

$g(x)=x^2-2ax+a+6$ 이라 하자.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-a-6 \geq 0$$

$$(a+2)(a-3) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 3$$

(ii) $g(4) > 0$ 이므로

$$16-8a+a+6 > 0$$

$$-7a+22 > 0 \quad \therefore a < \frac{22}{7}$$

(iii) 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=a$ 이므로

$$a < 4$$

(i), (ii), (iii)에서

$$a \leq -2 \text{ 또는 } 3 \leq a < \frac{22}{7} \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}$ 의 공통부분을 구하면

$$a \leq -2 \text{ 또는 } 3 \leq a < \frac{22}{7}$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$3 \leq a < \frac{22}{7} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

따라서 $p=3, q=\frac{22}{7}$ 이므로

$$7(p+q)=7\left(3+\frac{22}{7}\right)=43 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

19 답 ②

그림과 같이 점 A에서 변 CD에 내린 수선의 발을 E라 하자.

사각형 ACDB는 등변사다리꼴이고,

$$\angle BAC=120^\circ \text{이므로}$$

$$\angle CAE=30^\circ, \angle ACE=60^\circ$$

$$\overline{AB}=d(\text{m}) \text{이므로}$$

$$\overline{CE}=10-\frac{1}{2}d(\text{m})$$

$$\therefore \overline{AE}=\overline{CE} \tan 60^\circ = \sqrt{3}\left(10-\frac{1}{2}d\right) = 10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}d(\text{m}),$$

$$\overline{AC}=\frac{\overline{CE}}{\sin 30^\circ}=2\left(10-\frac{1}{2}d\right)=20-d(\text{m})$$

이때 $\overline{AB} \leq 4 \overline{AC}$ 이므로

$$d \leq 4(20-d)$$

$$d \leq 80-4d \quad \therefore d \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 사다리꼴 ACDB의 넓이는 $75\sqrt{3} \text{ m}^2$ 이하이므로

$$\frac{1}{2} \times (\overline{AB}+\overline{CD}) \times \overline{AE} \leq 75\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}(d+20)\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}d\right) \leq 75\sqrt{3}$$

$$100-\frac{1}{4}d^2 \leq 75, d^2-100 \geq 0$$

$$(d+10)(d-10) \geq 0$$

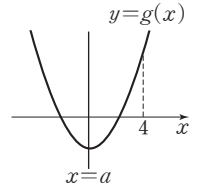
$$\therefore d \leq -10 \text{ 또는 } d \geq 10$$

그런데 $d > 0$ 이므로 $d \geq 10 \quad \dots\dots \textcircled{9}$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}$ 의 공통부분을 구하면

$$10 \leq d \leq 16$$

따라서 d 의 최댓값은 16, 최솟값은 10이므로 그 합은 26이다.



20 답 15

점 A는 y축 위의 점이므로

$$A(0, k^2+4)$$

점 A를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=k^2+4$

이차함수 $y=-x^2+2kx+k^2+4$ 의 그래프와 직선 $y=k^2+4$ 의 교점의 x좌표를 구하면

$$-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4$$

$$x^2-2kx=0$$

$$x(x-2k)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

이때 $x=0$ 인 점은 A이므로

$$B(2k, k^2+4), C(2k, 0)$$

사각형 OCBA의 둘레의 길이가 $g(k)$ 이므로

$$g(k)=2(\overline{OC}+\overline{BC})$$

$$=2(2k+k^2+4)$$

$$=2k^2+4k+8$$

부등식 $14 \leq g(k) \leq 78$ 에서

$$14 \leq 2k^2+4k+8 \leq 78$$

$$\therefore 7 \leq k^2+2k+4 \leq 39$$

이차부등식 $7 \leq k^2+2k+4$ 에서

$$k^2+2k-3 \geq 0$$

$$(k+3)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이차부등식 $k^2+2k+4 \leq 39$ 에서

$$k^2+2k-35 \leq 0$$

$$(k+7)(k-5) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq k \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분을 구하면

$$-7 \leq k \leq -3 \text{ 또는 } 1 \leq k \leq 5$$

그런데 $k > 0$ 이므로

$$1 \leq k \leq 5$$

따라서 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

21 답 ①

$\overline{AB}, \overline{BC}, \frac{1}{2}\overline{AC}$ 를 세 변의 길이로 하는 삼각형이 존재하려면 삼각형의 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 커야 한다.

(i) $x < 1$ 일 때,

$$\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \text{이므로 삼각형}$$

이 존재하지 않는다.

(ii) $x = 1$ 또는 $x = 5$ 일 때,

$$\frac{1}{2}\overline{AC} = 0 \text{ 또는 } \overline{BC} = 0 \text{이므로 삼각형이 존재하지 않는다.}$$

(iii) $1 < x < 5$ 일 때,

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} > \frac{1}{2}\overline{AC} + \overline{BC} \text{이므로 삼각형이}$$

존재하지 않는다.

(iv) $x > 5$ 일 때,

$$\overline{AB} = 4, \overline{BC} = x - 5, \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{AC} > \overline{AB} \text{에서}$$

$$x - 5 + \frac{1}{2}(x - 1) > 4$$

$$\frac{3}{2}x > \frac{19}{2} \quad \therefore x > \frac{19}{3} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} > \overline{BC} \text{에서}$$

$$4 + \frac{1}{2}(x - 1) > x - 5$$

$$-\frac{1}{2}x > -\frac{17}{2} \quad \therefore x < 17 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \frac{1}{2}\overline{AC} \text{에서}$$

$$4 + x - 5 > \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\frac{1}{2}x > \frac{1}{2} \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$\textcircled{C}, \textcircled{D}, \textcircled{E}$ 의 공통부분을 구하면

$$\frac{19}{3} < x < 17$$

$$\text{그런데 } x > 5 \text{이므로 } \frac{19}{3} < x < 17$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } \frac{19}{3} < x < 17$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{19}{3}, \beta = 17 \text{이므로}$$

$$3\alpha - \beta = 19 - 17 = 2$$

22 답 $0 < a \leq 4$

처음 ag 의 설탕물을 덜어 내어도 설탕물의 농도는 변하지 않으므로 남은 10%의 설탕물 $(80-a)g$ 의 설탕의 양은

$$\frac{10}{100}(80-a) = 8 - \frac{1}{10}a(g)$$

또 물 ag 을 부은 후의 설탕물의 농도는

$$\frac{8 - \frac{1}{10}a}{80} \times 100 = 10 - \frac{1}{8}a(\%)$$

다시 설탕물 $10a$ g을 덜어 낼 때, 덜어 낸 설탕물의 설탕의 양은

$$\frac{10 - \frac{1}{8}a}{100} \times 10a = a - \frac{1}{80}a^2(g)$$

이때 남아 있는 설탕물의 설탕의 양은

$$\left(8 - \frac{1}{10}a\right) - \left(a - \frac{1}{80}a^2\right) = \frac{1}{80}a^2 - \frac{11}{10}a + 8(g)$$

남아 있는 설탕의 양이 $\frac{19}{5}g$ 이상이 되어야 하므로

$$\frac{1}{80}a^2 - \frac{11}{10}a + 8 \geq \frac{19}{5}, a^2 - 88a + 640 \geq 304$$

$$a^2 - 88a + 336 \geq 0, (a-4)(a-84) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 4 \text{ 또는 } a \geq 84$$

그런데 $0 < a < 80$ 이므로

$$0 < a \leq 4$$

개념 NOTE

(1) 농도가 $a\%$ 인 설탕물 mg 에 있는 설탕의 양은 $\frac{a}{100}mg$

(2) 설탕물 mg 에 설탕이 xg 있을 때 설탕물의 농도는 $\left(\frac{x}{m} \times 100\right)\%$

01 ② 02 ④ 03 6 04 2 05 ① 06 -15
07 $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$ 08 $\sqrt{5} - \sqrt{10}$

idea

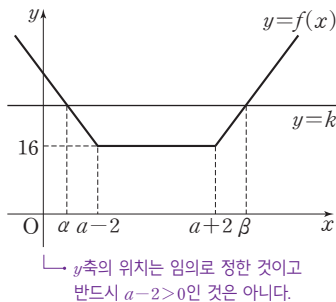
01 답 ②

1단계 주어진 부등식의 좌변을 절댓값이 없는 식으로 나타내기

$$\begin{aligned} b-a=8 \text{에서 } b=a+8 \text{이므로 주어진 부등식에서} \\ f(x) = |4x-3a-b| + |4x-5a+b| \text{라 하면} \\ f(x) = |4x-4a-8| + |4x-4a+8| \\ = 4|x-(a+2)| + 4|x-(a-2)| \\ x < a-2 \text{일 때,} \\ f(x) = -4(x-a-2) - 4(x-a+2) = -8x+8a \\ a-2 \leq x < a+2 \text{일 때,} \\ f(x) = -4(x-a-2) + 4(x-a+2) = 16 \\ x \geq a+2 \text{일 때,} \\ f(x) = 4(x-a-2) + 4(x-a+2) = 8x-8a \\ \therefore f(x) = \begin{cases} -8x+8a & (x < a-2) \\ 16 & (a-2 \leq x < a+2) \\ 8x-8a & (x \geq a+2) \end{cases} \end{aligned}$$

2단계 주어진 부등식의 해를 함수의 그래프와 직선의 위치 관계로 파악하기

이때 a 가 정수이므로 $a-2 \leq x < a+2$ 를 만족시키는 정수 x 는 $a-2$, $a-1$, a , $a+1$, $a+2$ 의 5개이다.
부등식 $f(x) \leq k$ 의 해는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.
즉, 부등식 $f(x) \leq k$ 를 만족시키는 정수 x 가 9개이려면 그림과 같이 직선 $y=k$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $k > 16$



3단계 정수 k 의 개수 구하기

$x < a-2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표를 α 라 하면
 $-8\alpha+8a=k \quad \therefore \alpha = \frac{8a-k}{8}$
또 $x \geq a+2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표를 β 라 하면
 $8\beta-8a=k \quad \therefore \beta = \frac{8a+k}{8}$
따라서 부등식 $f(x) \leq k$ 의 해는 $\frac{8a-k}{8} \leq x \leq \frac{8a+k}{8}$
이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 9개이려면
 $8 \leq \frac{8a+k}{8} - \frac{8a-k}{8} < 10, 8 \leq \frac{k}{4} < 10$
 $\therefore 32 \leq k < 40$
따라서 정수 k 는 32, 33, 34, ..., 39의 8개이다.

02 답 ④

1단계 b 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \text{부등식 } \{x+a(1-[a])\}^2 - b^2 \leq 0 \text{에서} \\ (x+a-a[a]+b)(x+a-a[a]-b) \leq 0 \\ \therefore -a+a[a]-b \leq x \leq -a+a[a]+b \quad (\because a > 0, b > 0) \\ \text{이때 주어진 부등식의 해가 } 9 \leq x \leq 19 \text{이므로} \\ -a+a[a]-b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, -a+a[a]+b=19 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면} \\ 2(-a+a[a])=28 \quad \therefore -a+a[a]=14 \\ \textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면} \\ -2b=-10 \quad \therefore b=5 \end{aligned}$$

2단계 a 의 값 구하기

이때 $-a+a[a]=14$ 에서
 $a([a]-1)=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$
 $[a]=n$ (n 은 음이 아닌 정수)이라 하면 $n \leq a < n+1$ 이므로
 $n(n-1) \leq a([a]-1) < (n+1)(n-1)$
 $\therefore n(n-1) \leq 14 < (n+1)(n-1) \quad (\because \textcircled{3})$
이차부등식 $n(n-1) \leq 14$ 에서 n 의 값은 0, 1, 2, 3, 4이고
이차부등식 $(n+1)(n-1) > 14$ 에서 n 의 값은 4, 5, 6, ...이므로
 $n=4$
따라서 $[a]=4$ 이므로 이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면
 $3a=14$

$$\therefore a = \frac{14}{3}$$

3단계 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b = \frac{14}{3} + 5 = \frac{29}{3}$$

03 답 6

1단계 $\beta - \alpha$ 가 될 수 있는 값 구하기

(가)에서 $\beta - \alpha$ 는 자연수이므로 α, β 는 모두 정수이거나 α, β 는 모두 정수가 아닌 실수이다.
(나)에서 $\alpha \leq x \leq \beta$ 를 만족시키는 정수 x 가 3개이므로 α, β 가 모두 정수인 경우에는 $\beta - \alpha = 2$ 이고 α, β 가 모두 정수가 아닌 실수인 경우에는 $\beta - \alpha = 3$ 이다.

2단계 a 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \text{이차부등식 } (2x-a^2+2a)(2x-3a) \leq 0 \text{에서} \\ 4\left(x-\frac{a^2-2a}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}a\right) \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i) } \frac{a^2-2a}{2} > \frac{3}{2}a \text{일 때,} \\ a^2-5a > 0, a(a-5) > 0 \\ \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이때 이차부등식 $\textcircled{1}$ 의 해는

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a \leq x \leq \frac{a^2-2a}{2} \\ \therefore a = \frac{3}{2}a, \beta = \frac{a^2-2a}{2} \end{aligned}$$

① α, β 가 모두 정수인 경우

$$\begin{aligned} \beta - \alpha = 2 \text{이므로} \\ \frac{a^2-2a}{2} - \frac{3}{2}a = 2 \\ a^2-5a-4=0 \\ \therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

그런데 $a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ 이면 α, β 가 모두 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

② α, β 가 모두 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{a^2 - 2a}{2} - \frac{3}{2}a = 3$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$(a+1)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 6 (\because \text{㉠})$$

$a = -1$ 이면 $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{3}{2}$ 이므로 α, β 는 모두 정수가 아닌 실수이다.

$a = 6$ 이면 $\alpha = 9, \beta = 12$ 이므로 α, β 는 모두 정수이다.

즉, $a = -1$ 일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

①, ②에서 조건을 만족시키는 a 의 값은

$$a = -1$$

(ii) $\frac{a^2 - 2a}{2} < \frac{3}{2}a$ 일 때,

$$a^2 - 5a < 0$$

$$a(a-5) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 이차부등식 ㉡의 해는

$$\frac{a^2 - 2a}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}a$$

$$\therefore \alpha = \frac{a^2 - 2a}{2}, \beta = \frac{3}{2}a$$

① α, β 가 모두 정수인 경우

$$\beta - \alpha = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{3}{2}a - \frac{a^2 - 2a}{2} = 2$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$(a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 4 (\because \text{㉢})$$

$a = 1$ 이면 $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$ 이므로 α, β 는 모두 정수가 아닌 실수이다.

$a = 4$ 이면 $\alpha = 4, \beta = 6$ 이므로 α, β 는 모두 정수이다.

즉, $a = 4$ 일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

② α, β 가 모두 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{3}{2}a - \frac{a^2 - 2a}{2} = 3$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$(a-2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 3 (\because \text{㉣})$$

$a = 2$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 3$ 이므로 α, β 는 모두 정수이다.

$a = 3$ 이면 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{9}{2}$ 이므로 α, β 는 모두 정수가 아닌 실수이다.

즉, $a = 3$ 일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

①, ②에서 조건을 만족시키는 a 의 값은

$$a = 3 \text{ 또는 } a = 4$$

3단계 a 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1 + 3 + 4 = 6$$

04 답 2

1단계 주어진 부등식의 좌변을 절댓값이 없는 식으로 나타내기

주어진 부등식에서 $g(x) = \frac{|f(x)|}{3} - f(x)$ 라 하자.

$f(x) \geq 0$ 에서

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0, (x+4)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2$$

따라서 $f(x) < 0$ 이면 $-4 < x < 2$ 이므로

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -f(x) & (-4 < x < 2) \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{3} - f(x) & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -\frac{f(x)}{3} - f(x) & (-4 < x < 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{3}f(x) & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -\frac{4}{3}f(x) & (-4 < x < 2) \end{cases}$$

2단계 주어진 부등식의 해를 함수의 그래프와 직선의 위치 관계로 파악하기

이때 직선 $y = m(x-2)$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기 m 은 양수이다.

또 $g(-4) = 0, g(2) = 0$ 이므로 함수

$y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m(x-2)$

는 그림과 같다.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선

$y = m(x-2)$ 의 교점 중 점 $(2, 0)$ 이 아

닌 다른 한 점의 x 좌표를 $t (t < -4)$ 라 하면 주어진 부등식의 해는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 직선 $y = m(x-2)$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$t \leq x \leq 2$$

이를 만족시키는 정수 x 가 10개이려면

$$-8 < t \leq -7$$

3단계 양수 m 의 최솟값 구하기

즉, 조건을 만족시키는 m 의 값은 점 $(-7, g(-7))$ 을 지나는 직선

$y = m(x-2)$ 의 기울기보다 크거나 같고, 점 $(-8, g(-8))$ 을 지나는 직선 $y = m(x-2)$ 의 기울기보다 작다.

(i) 직선 $y = m(x-2)$ 가 점 $(-7, g(-7))$ 을 지날 때,

$$g(-7) = -\frac{2}{3}f(-7) = -\frac{2}{3}(49 - 14 - 8) = -18$$

즉, 점 $(-7, -18)$ 이 직선 $y = m(x-2)$ 위의 점이므로

$$-18 = -9m$$

$$\therefore m = 2$$

(ii) 직선 $y = m(x-2)$ 가 점 $(-8, g(-8))$ 을 지날 때,

$$g(-8) = -\frac{2}{3}f(-8) = -\frac{2}{3}(64 - 16 - 8) = -\frac{80}{3}$$

즉, 점 $(-8, -\frac{80}{3})$ 이 직선 $y = m(x-2)$ 위의 점이므로

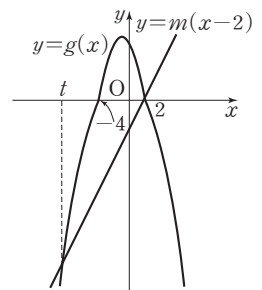
$$-\frac{80}{3} = -10m$$

$$\therefore m = \frac{8}{3}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 m 의 값의 범위는

$$2 \leq m < \frac{8}{3}$$

따라서 양수 m 의 최솟값은 2이다.



05 답 ①

1단계 주어진 연립부등식 풀기

이차부등식 $x^2 - a^2 \geq 0$ 에서

$$x(x - a^2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq a^2 (\because a^2 > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차부등식 $x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 < 0$ 에서

$$\{x - (2a - 1)\} \{x - (2a + 1)\} < 0$$

$$\therefore 2a - 1 < x < 2a + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

2단계 a의 값의 범위에 따라 정수 x의 개수 구하기

$0 < a < \sqrt{2}$ 에서 a^2 , $2a - 1$, $2a + 1$ 중 적어도 하나는 양의 정수가 되도록 하는 a의 값은

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 1$$

또 $a^2 - (2a - 1) = (a - 1)^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 \geq 2a - 1$

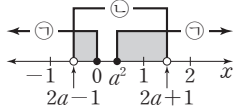
따라서 다음과 같이 a의 값의 범위를 나누어 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

(i) $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$0 < a^2 < \frac{1}{4}, -1 < 2a - 1 < 0, 1 < 2a + 1 < 2$$

이때 ①, ②의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 0 < x < 2$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{1}{4} \leq x < 2$

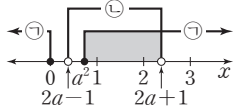
즉, 정수 x는 1의 1개이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $\frac{1}{2} < a < 1$ 일 때,

$$\frac{1}{4} < a^2 < 1, 0 < 2a - 1 < 1, 2 < 2a + 1 < 3$$

이때 ①, ②의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(iv) $a = 1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 1 < x < 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $1 < x < 3$

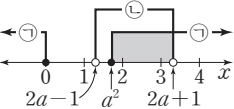
즉, 정수 x는 2의 1개이므로 조건을 만족시킨다.

(v) $1 < a < \sqrt{2}$ 일 때,

$$1 < a^2 < 2, 1 < 2a - 1 < 2\sqrt{2} - 1, 3 < 2a + 1 < 2\sqrt{2} + 1$$

이때 ①, ②의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



3단계 a의 값의 합 구하기

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

idea

06 답 -15

1단계 조건을 만족시키는 m, p에 대한 부등식 세우기

이차부등식 $-x^2 + px + p \leq (m - 1)x + n$ 에서

$$x^2 + (m - p - 1)x + n - p \geq 0$$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식

$$x^2 + (m - p - 1)x + n - p = 0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1 = (m - p - 1)^2 - 4(n - p) \leq 0$$

$$\therefore \frac{(m - p - 1)^2}{4} + p \leq n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 이차부등식 $x^2 \geq (m - 1)x + n$ 에서 $x^2 - (m - 1)x - n \geq 0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식

$$x^2 - (m - 1)x - n = 0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2 = (m - 1)^2 + 4n \leq 0 \quad \therefore n \leq -\frac{(m - 1)^2}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{(m - p - 1)^2}{4} + p \leq -\frac{(m - 1)^2}{4}$$

2단계 p의 값 구하기

$$m - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{(t - p)^2}{4} + p \leq -\frac{t^2}{4}$$

$$2t^2 - 2pt + p^2 + 4p \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이때 t의 값이 유일하게 존재하므로 t에 대한 이차방정식

$$2t^2 - 2pt + p^2 + 4p = 0 \text{의 중근을 가져야 한다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D_3 이라 하면

$$\frac{D_3}{4} = p^2 - 2(p^2 + 4p) = 0, -p^2 - 8p = 0$$

$$p(p + 8) = 0 \quad \therefore p = -8 (\because p \neq 0)$$

3단계 m, n의 값 구하기

$$p = -8 \text{을 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } 2t^2 + 16t + 32 \leq 0, 2(t + 4)^2 \leq 0$$

$$\text{따라서 } t = -4 \text{이므로 } m - 1 = -4 \quad \therefore m = -3$$

$$m = -3, p = -8 \text{을 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 각각 대입하면}$$

$$n \geq -4, n \leq -4 \text{이므로 } n = -4$$

4단계 p + m + n의 값 구하기

$$\therefore p + m + n = -8 + (-3) + (-4) = -15$$

07 답 $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$

1단계 주어진 방정식을 $x + \frac{1}{x}$ 에 대한 식으로 나타내기

$x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 2ax + 6a + 1 - \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6a + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6a - 1 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2at + 6a - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 $x + \frac{1}{x}$ 의 값의 범위 구하기

$$\text{이때 } x + \frac{1}{x} = t \text{에서 } x^2 - tx + 1 = 0$$

즉, 이차방정식 $x^2 - tx + 1 = 0$ 의 근이 모두 양수이어야 하므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = t^2 - 4 \geq 0, (t + 2)(t - 2) \geq 0 \quad \therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 2$$

또 (두 근의 합) $= t > 0$, (두 근의 곱) $= 1 > 0$ 이므로 조건을 만족시키는 t의 값의 범위는

$$t \geq 2$$

3단계 a 의 값의 범위 구하기

따라서 이차방정식 ①이 $t \geq 2$ 에서 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^2 - 2at + 6a - 1$ 이라 하자.

(i) 이차방정식 $f(t) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 6a + 1 \geq 0$$

$$\therefore a \leq 3 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } a \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

(ii) $f(2) \geq 0$ 이므로

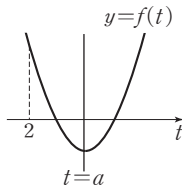
$$4 - 4a + 6a - 1 \geq 0, 2a + 3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{2}$$

(iii) 이차함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 축이 직선 $t = a$ 이므로 $a \geq 2$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$a \geq 3 + 2\sqrt{2}$$



08 답 $\sqrt{5} - \sqrt{10}$

1단계 k 에 대한 부등식 세우기

을의 속력을 v 라 하면 갑의 속력은 kv ($k > 1$)이다.

트랙 한 바퀴의 길이를 a 라 하고 두 사람이 처음 만날 때까지 걸린 시간을 t_1 이라 하자.

두 사람이 같은 방향으로 달려서 만나면 갑이 을보다 한 바퀴만큼 더 달렸으므로

$$kvt_1 - vt_1 = a \quad \therefore t_1 = \frac{a}{(k-1)v}$$

또 두 사람이 처음 만날 때부터 두 번째 만날 때까지 걸린 시간을 t_2 라 하자.

두 사람이 반대 방향으로 달려서 만나면 움직인 거리의 합이 트랙의 한 바퀴만큼이므로

$$kvt_2 + vt_2 = a \quad \therefore t_2 = \frac{a}{(k+1)v}$$

두 사람이 두 번째 만날 때, 을은 두 바퀴를 지나 세 바퀴째를 돌고 있으므로

$$2a < (t_1 + t_2)v < 3a$$

$$2a < \left\{ \frac{a}{(k-1)v} + \frac{a}{(k+1)v} \right\} v < 3a$$

$$2 < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} < 3, 2 < \frac{2k}{k^2-1} < 3$$

각 변에 $k^2 - 1$ 을 곱하면

$$2k^2 - 2 < 2k < 3k^2 - 3 \quad (\because k^2 - 1 > 0)$$

2단계 k 의 값의 범위 구하기

(i) 이차부등식 $2k^2 - 2 < 2k$ 에서 $2k^2 - 2k - 2 < 0$

$$k^2 - k - 1 < 0 \quad \therefore \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{그런데 } k > 1 \text{이므로 } 1 < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6\cdots$$

(ii) 이차부등식 $2k < 3k^2 - 3$ 에서 $3k^2 - 2k - 3 > 0$

$$\therefore k < \frac{1-\sqrt{10}}{3} \text{ 또는 } k > \frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{그런데 } k > 1 \text{이므로 } k > \frac{1+\sqrt{10}}{3} \rightarrow \frac{1+\sqrt{10}}{3} = 1.3\cdots$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{1+\sqrt{10}}{3} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3단계 $2\beta - 3\alpha$ 의 값 구하기

$$\text{즉, } \alpha = \frac{1+\sqrt{10}}{3}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

$$2\beta - 3\alpha = (1+\sqrt{5}) - (1+\sqrt{10}) = \sqrt{5} - \sqrt{10}$$

기출 변형 문제로 단원 마스터

| 88~91쪽

01 21	02 165	03 12	04 ②	05 15	06 ⑤
07 23	08 ②	09 6	10 42	11 ㄱ, ㄴ, ㄷ	
12 1	13 2	14 ④			

01 답 21

$-240 = -2^4 \times 3 \times 5$ 이므로 3, 5는 반드시 한 번 나와야 하고 0은 나오지 않아야 한다.

이때 $2i, 1+i$ 에 대하여

$$(2i)^2 = -4$$

$$(1+i)^2 = 2i, (1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

$$2i(1+i)^2 = 2i \times 2i = -4$$

(i) $2i$ 가 2번 나오는 경우

2가 2번, 3이 1번, 5가 1번 나와야

$$(2i)^2 \times 2^2 \times 3 \times 5 = -4 \times 60 = -240 \text{이므로 주사위를 6번 던져야 한다.}$$

(ii) $1+i$ 가 4번 나오는 경우

2가 2번, 3이 1번, 5가 1번 나와야

$$(1+i)^4 \times 2^2 \times 3 \times 5 = -4 \times 60 = -240 \text{이므로 주사위를 8번 던져야 한다.}$$

(iii) $2i$ 가 1번, $1+i$ 가 2번 나오는 경우

2가 2번, 3이 1번, 5가 1번 나와야

$$2i(1+i)^2 \times 2^2 \times 3 \times 5 = -4 \times 60 = -240 \text{이므로 주사위를 7번 던져야 한다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 n 의 값은 6, 7, 8이므로 그 합은

$$6 + 7 + 8 = 21$$

02 답 165

$$\left\{ i^n - \left(-\frac{1}{i} \right)^{2n} \right\}^m = (i^n - i^{2n})^m = \{ i^n - (-1)^n \}^m$$

$f(n) = i^n - (-1)^n$ 이라 하면 음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n = 4k + 1$ 일 때,

$$f(n) = f(4k+1) = i^{4k+1} - (-1)^{4k+1} = i - (-1) = i + 1 \text{이므로}$$

$$\{f(n)\}^2 = (i+1)^2 = 2i, \{f(n)\}^4 = (2i)^2 = -4,$$

$$\{f(n)\}^8 = 4^2, \{f(n)\}^{16} = 4^4, \cdots$$

즉, $n = 4k + 1$ 일 때 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 양의 실수가 되도록 하는 30 이하의 자연수 m 은 8, 16, 24의 3개이다.

또 $n = 4k + 1$ 꼴인 30 이하의 자연수 n 은 1, 5, 9, ..., 29의 8개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $3 \times 8 = 24$

(ii) $n = 4k + 2$ 일 때,

$$f(n) = f(4k+2) = i^{4k+2} - (-1)^{4k+2} = i^2 - 1 = -1 - 1 = -2 \text{이므로}$$

$$\{f(n)\}^2 = (-2)^2 = 4, \{f(n)\}^4 = 4^2, \{f(n)\}^6 = 4^3, \cdots$$

즉, $n = 4k + 2$ 일 때 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 양의 실수가 되도록 하는 30 이하의 자연수 m 은 2, 4, 6, ..., 30의 15개이다.

또 $n = 4k + 2$ 꼴인 30 이하의 자연수 n 은 2, 6, 10, ..., 30의 8개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $15 \times 8 = 120$

(iii) $n=4k+3$ 일 때,

$$f(n)=f(4k+3)=i^{4k+3}-(-1)^{4k+3}=i^3-(-1)=-i+1 \text{이므로}$$

$$\{f(n)\}^2=(-i+1)^2=-2i, \{f(n)\}^4=(-2i)^2=-4,$$

$$\{f(n)\}^8=4^2, \{f(n)\}^{16}=4^4, \dots$$

즉, $n=4k+3$ 일 때 $\{f(n)\}^m$ 의 값이 양의 실수가 되도록 하는 30 이하의 자연수 m 은 8, 16, 24의 3개이다.

또 $n=4k+3$ 꼴인 30 이하의 자연수 n 은 3, 7, 11, ..., 27의 7개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $3 \times 7 = 21$

(iv) $n=4k+4$ 일 때,

$$f(n)=f(4k+4)=i^{4k+4}-(-1)^{4k+4}=1-1=0 \text{이므로 } \{f(n)\}^m \text{의}$$

$$\text{값은 양의 실수가 될 수 없다.}$$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $24+120+21=165$

03 답 12

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2-\alpha+1=0, \beta^2-\beta+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$$\therefore -\alpha+1=\beta, -\beta+1=\alpha$$

이를 ①에 대입하면

$$\alpha^2+\beta=0, \beta^2+\alpha=0 \quad \therefore -\alpha^2=\beta, -\beta^2=\alpha$$

②에서 $\alpha=1-\beta$ 이므로

$$f(-\alpha^2)=5\alpha \text{에서 } f(\beta)=5(1-\beta)$$

$$\therefore f(\beta)+5\beta-5=0$$

②에서 $\beta=1-\alpha$ 이므로

$$f(-\beta^2)=5\beta \text{에서 } f(\alpha)=5(1-\alpha)$$

$$\therefore f(\alpha)+5\alpha-5=0$$

즉, 이차방정식 $f(x)+5x-5=0$ 의 두 근이 α, β 이고 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x)+5x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$f(x)+5x-5=x^2-x+1 \quad \therefore f(x)=x^2-6x+6$$

따라서 $p=-6, q=6$ 이므로 $q-p=12$

04 답 ②

이차방정식 $x^2+px+2p+5=0$ 의 계수가 실수이고 한 허근 α 를 가지므로 $\alpha=a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 다른 한 근은 $a-bi$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } (a+bi)+(a-bi)=-p$$

$$\therefore 2a=-p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } (a+bi)(a-bi)=2p+5$$

$$\therefore a^2+b^2=2p+5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\alpha=a+bi$ 에서

$$\alpha^3+\alpha=(a+bi)^3+a+bi$$

$$=a^3+3a^2bi+3a(bi)^2+(bi)^3+a+bi$$

$$=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i+a+bi$$

$$=(a^3-3ab^2+a)+(3a^2b-b^3+b)i$$

이때 $\alpha^3+\alpha$ 가 실수이려면

$$3a^2b-b^3+b=0, b(3a^2-b^2+1)=0$$

$$\therefore 3a^2-b^2+1=0 \quad (\because b \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②에서 $b^2=3a^2+1$ 이므로 이를 ③에 대입하면

$$a^2+3a^2+1=2p+5 \quad \therefore 4a^2=2p+4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①에서 $a=-\frac{1}{2}p$ 이므로 이를 ④에 대입하면

$$4\left(-\frac{1}{2}p\right)^2=2p+4 \quad \therefore p^2-2p-4=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p 의 값의 곱은 -4 이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2+px+2p+5=0$ 의 한 허근이 α 이므로

$$\alpha^2+p\alpha+2p+5=0, \alpha^2+p\alpha=-2p-5$$

$$\therefore \alpha^2+p\alpha+p^2=p^2-2p-5$$

양변에 $\alpha-p$ 를 곱하면

$$(\alpha-p)(\alpha^2+p\alpha+p^2)=(\alpha-p)(p^2-2p-5)$$

$$\alpha^3-p^3=(p^2-2p-5)\alpha-p^3+2p^2+5p$$

$$\therefore \alpha^3=(p^2-2p-5)\alpha+2p^2+5p$$

$$\therefore \alpha^3+\alpha=(p^2-2p-4)\alpha+2p^2+5p$$

이때 $\alpha^3+\alpha$ 가 실수이려면

$$p^2-2p-4=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p 의 값의 곱은 -4 이다.

05 답 15

두 정사각형의 대각선이 모두 한

점 O에서 만나고 정사각형 EFGH

의 대각선이 정사각형 ABCD의 한

변을 이등분하므로 주어진 도형은

각각의 대각선에 대하여 대칭이다.

꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선

의 발을 L이라 하고, $\overline{JL}=x$ 라 하

면 삼각형 EKL은 직각이등변삼각

형이므로 $\overline{EL}=x$

따라서 삼각형 EJI의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{JI} \times \overline{EL} = \frac{1}{2} \times 2x \times x = x^2$$

삼각형 AKJ도 직각이등변삼각형이고 $\overline{AJ}=1-x$ 이므로 삼각형 AKJ의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AJ} \times \overline{AK} = \frac{1}{2} (1-x)^2$$

삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{4}{3}$ 배이면

$$\frac{1}{2} (1-x)^2 = \frac{4}{3} x^2, 3-6x+3x^2=8x^2$$

$$5x^2+6x-3=0 \quad \therefore x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x = \frac{-3+2\sqrt{6}}{5}$$

직각이등변삼각형 EKL에서 $\overline{EJ}=\sqrt{2}x$, 직각이등변삼각형 AKJ에서

$$\overline{KJ}=\sqrt{2}(1-x) \text{이므로}$$

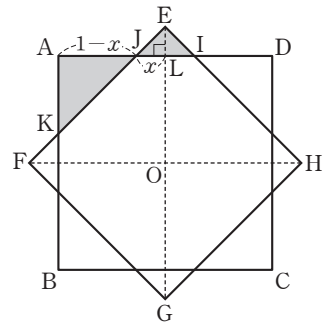
$$\overline{EF}=2\overline{EJ}+\overline{KJ}$$

$$2k=2\sqrt{2}x+\sqrt{2}(1-x)$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2} (x+1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-3+2\sqrt{6}}{5} + 1 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2+2\sqrt{6}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

따라서 $p=\frac{1}{5}, q=\frac{2}{5}$ 이므로 $25(p+q)=25\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)=15$



06 답 ⑤

(가)에서 방정식 $f(x)=g(x)$ 는

$$(x-a)^2-a^2=-(x-3a)^2+9a^2+b$$

$$\therefore 2x^2-8ax-b=0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4a, \alpha\beta=-\frac{b}{2}$$

ㄱ. (나)에서 $\beta-a=3$ 이므로 $(\beta-a)^2=9$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$$

$$\therefore 16a^2+2b=9$$

$$a=\frac{1}{4} \text{을 대입하면 } 1+2b=9 \quad \therefore b=4$$

ㄴ. 이차함수 $f(x)=(x-a)^2-a^2$ 은 $x=a$ 일 때 최소이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f(a)$$

이차함수 $g(x)=-(x-3a)^2+9a^2+b$ 는 $x=3a$ 일 때 최대이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \leq g(3a)$$

방정식 $f(x)=g(x)$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(\alpha)=g(\alpha), f(\beta)=g(\beta)$$

$$\therefore f(\alpha)-g(\beta)=g(\alpha)-f(\beta) \leq g(3a)-f(a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\because g(\alpha) \leq g(3a), -f(\beta) \leq -f(a))$$

ㄷ. $g(\alpha)=f(\beta)+10a^2+b$ 에서 $g(\alpha)-f(\beta)=10a^2+b$

㉠에서 $g(\alpha)-f(\beta) \leq g(3a)-f(a)$ 이고

$$g(3a)-f(a)=(9a^2+b)-(-a^2)=10a^2+b \text{이므로}$$

$$g(\alpha)-f(\beta)=g(3a)-f(a)$$

$$\therefore \alpha=3a, \beta=a$$

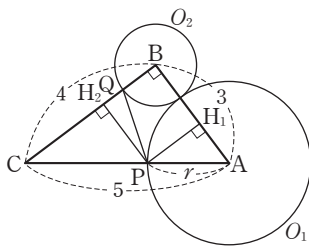
$$(나)에서 \beta-a=3 \text{이므로 } a-3a=3 \quad \therefore a=-\frac{3}{2}$$

$$\text{또 } \alpha\beta=-\frac{b}{2} \text{이므로 } 3a^2=-\frac{b}{2} \quad \therefore b=-\frac{27}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

07 답 23

그림과 같이 점 P에서 변 AB, 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하고 원 O_1 의 반지름의 길이를 r ($0 < r < 3$)라 하자.



두 삼각형 AH_1P, ABC 에서

$$\angle PAH_1 = \angle CAB, \angle AH_1P = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle AH_1P \sim \triangle ABC \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{AP} : \overline{AC} = \overline{H_1P} : \overline{BC} \text{이므로}$$

$$r : 5 = \overline{H_1P} : 4$$

$$5\overline{H_1P} = 4r \quad \therefore \overline{H_1P} = \frac{4}{5}r$$

또 두 삼각형 CH_2P, CBA 에서

$$\angle PCH_2 = \angle ACB, \angle CH_2P = \angle CBA = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle CH_2P \sim \triangle CBA \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{CP} : \overline{CA} = \overline{H_2P} : \overline{BA} \text{이므로}$$

$$(5-r) : 5 = \overline{H_2P} : 3$$

$$5\overline{H_2P} = 3(5-r) \quad \therefore \overline{H_2P} = \frac{3}{5}(5-r)$$

$$\overline{BQ} = \overline{AB} - r = 3 - r \text{이므로}$$

$$\overline{QH_2} = |\overline{H_1P} - \overline{BQ}|$$

$$= \left| \frac{4}{5}r - (3-r) \right| = \left| \frac{9}{5}r - 3 \right|$$

직각삼각형 PH_2Q 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = \overline{H_2P}^2 + \overline{QH_2}^2$$

$$= \left\{ \frac{3}{5}(5-r) \right\}^2 + \left| \frac{9}{5}r - 3 \right|^2 = \left\{ \frac{3}{5}(5-r) \right\}^2 + \left\{ \frac{3}{5}(3r-5) \right\}^2$$

$$= \frac{9}{25} \{ (5-r)^2 + (3r-5)^2 \} = \frac{9}{25} (10r^2 - 40r + 50)$$

$$= \frac{18}{5} (r^2 - 4r + 5) = \frac{18}{5} (r-2)^2 + \frac{18}{5}$$

$0 < r < 3$ 에서 $\overline{PQ}^2$ 은 $r=2$ 일 때 최솟값이 $\frac{18}{5}$ 이다.

따라서 $a=5, b=18$ 이므로

$$a+b=23$$

08 답 ②

ㄱ. $f(-1) = -1 + (1-2a) - (b^2-2a) + b^2 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

ㄴ. $f(-1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1-2a & b^2-2a & b^2 \\ & & -1 & 2a & -b^2 \\ \hline & 1 & -2a & b^2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2-2ax+b^2)$$

$$\text{삼차방정식 } (x+1)(x^2-2ax+b^2)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x^2-2ax+b^2=0$$

이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

이때 $b < a < 0$ 에서 $a+b < 0, a-b > 0$ 이므로 $D_1 < 0$

즉, 이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 $b < a < 0$ 인 임의의 실수 a, b 에 대하여 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 -1 의 1개이다.

ㄷ. 삼차방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x+1)(x^2-2ax+b^2)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$ 이 -1 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $2a$ 이므로 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 세 근의 합은

$$-1+2a=-11 \quad \therefore a=-5$$

이차방정식 $x^2+10x+b^2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 25 - b^2 > 0 \quad \therefore b^2 < 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 이차방정식 $x^2+10x+b^2=0$ 이 -1 을 근으로 갖지 않아야 하므로

$$1-10+b^2 \neq 0 \quad \therefore b^2 \neq 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 정수 b 의 값은 $-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4$ 이다.

따라서 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(-5, -4), (-5, -2),$

$(-5, -1), (-5, 0), (-5, 1), (-5, 2), (-5, 4)$ 의 7개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 6

(가)에서 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하고, x 축에 접한다.

이때 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(m, 0)$ 을 지나므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라 하면

$$f(x)=k(x-m)^2 \text{ (단, } k < 0 \text{)}$$

(나)에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(m+4, 16n)$ 을 지나므로

$$f(m+4)=16n \text{에서}$$

$$16k=16n \quad \therefore k=n$$

$$\therefore f(x)=n(x-m)^2$$

(나)에서 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(m, 0)$, $(m+4, 16n)$ 을 지나므로 직선 $y=g(x)$ 의 기울기는 $\frac{16n}{4}=4n$

$$\therefore g(x)=4n(x-m)$$

(다)에서 정수 a 에 대하여 $-3 \leq a \leq 0$ 이므로

(i) $a=-3$ 일 때,

$$f(m+a)=f(m-3)=9n, g(m+a)=g(m-3)=-12n \text{이므로}$$

정수 n 에 대하여 $9n \leq b \leq -12n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는

$$-12n-9n+1=-21n+1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $-21n+1$ 이다.

(ii) $a=-2$ 일 때,

$$f(m+a)=f(m-2)=4n, g(m+a)=g(m-2)=-8n \text{이므로 정수 } n \text{에 대하여}$$

$4n \leq b \leq -8n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는

$$-8n-4n+1=-12n+1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $-12n+1$ 이다.

(iii) $a=-1$ 일 때,

$$f(m+a)=f(m-1)=n, g(m+a)=g(m-1)=-4n \text{이므로 정수 } n \text{에 대하여}$$

$n \leq b \leq -4n$ 을 만족시키는 정수 b 의 개수는

$$-4n-n+1=-5n+1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $-5n+1$ 이다.

(iv) $a=0$ 일 때,

$$f(m+a)=f(m)=0, g(m+a)=g(m)=0 \text{이므로 } 0 \leq b \leq 0 \text{을 만족시키는 정수 } b \text{의 개수는 } 1 \text{이다.}$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 1이다.

(i)~(iv)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$(-21n+1)+(-12n+1)+(-5n+1)+1=-38n+4$$

이때 (다)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수가 80이므로

$$-38n+4=80$$

$$\therefore n=-2$$

$$\therefore f(x)=-2(x-m)^2, g(x)=-8(x-m)$$

$$\text{방정식 } \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-m)^4 - 64(x-m)^2 = 0$$

$$4(x-m)^2 \{(x-m)^2 - 16\} = 0$$

$$4(x-m)^2 (x-m+4)(x-m-4) = 0$$

$$\therefore x=m \text{ 또는 } x=m-4 \text{ 또는 } x=m+4$$

이 실근 중 최댓값은 $m+4$, 최솟값은 $m-4$ 이고 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$$(m+4)+(m-4)=6$$

$$2m=6$$

$$\therefore m=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=-2(x-3)^2, g(x)=-8(x-3) \text{이므로}$$

$$f(4)+g(2)=-2+8=6$$

10 답 42

$f(x)=ax^3+3bx^2+9bx+27a$ 라 하면 $f(-3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & a & 3b & 9b & 27a \\ & & -3a & 9a-9b & -27a \\ \hline & a & -3a+3b & 9a & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+3)\{ax^2-3(a-b)x+9a\}$$

$$\text{삼차방정식 } (x+3)\{ax^2-3(a-b)x+9a\}=0 \text{에서}$$

$$x=-3 \text{ 또는 } ax^2-3(a-b)x+9a=0$$

주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2-3(a-b)x+9a=0$ 이 -3 이 아닌 서로 다른 두 정수를 근으로 갖는다.

$$\text{즉, } 9a+9(a-b)+9a \neq 0 \text{이므로 } b \neq 3a$$

이차방정식 $ax^2-3(a-b)x+9a=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두

$$\text{근의 곱은 } \frac{9a}{a}=9 \text{이므로 서로 다른 두 정수인 근은}$$

$$-1 \text{과 } -9 \text{ 또는 } 1 \text{과 } 9$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\frac{3(a-b)}{a}=-10 \text{ 또는 } \frac{3(a-b)}{a}=10$$

$$3a-3b=-10a \text{ 또는 } 3a-3b=10a$$

$$\therefore a=\frac{3}{13}b \text{ 또는 } a=-\frac{3}{7}b$$

(i) $a=\frac{3}{13}b$ 일 때,

$\leftarrow k=0$ 이면 $b \neq 3a$ 를 만족시키지 않는다.

$$b=13k \text{ (} k \text{는 } 0 \text{이 아닌 정수) 풀인 정수이고, } |b| \leq 100 \text{이면}$$

$$|a| \leq \frac{300}{13} \text{이므로 } |a| \leq 100, |b| \leq 100 \text{을 만족시키는 정수 } a, b \text{의}$$

순서쌍 (a, b) 는 $(-21, -91), (-18, -78), (-15, -65), \dots, (-3, -13), (3, 13), \dots, (15, 65), (18, 78), (21, 91)$ 의 14개이다.

(ii) $a=-\frac{3}{7}b$ 일 때,

$$b=7k \text{ (} k \text{는 } 0 \text{이 아닌 정수) 풀인 정수이고, } |b| \leq 100 \text{이면}$$

$$|a| \leq \frac{300}{7} \text{이므로 } |a| \leq 100, |b| \leq 100 \text{을 만족시키는 정수 } a, b \text{의}$$

$$\text{순서쌍 } (a, b) \text{는 } (-42, 98), (-39, 91), (-36, 84), \dots,$$

$$(-3, 7), (3, -7), \dots, (36, -84), (39, -91), (42, -98) \text{의 } 28 \text{개이다.}$$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$14+28=42$$

11 답 1, 2, 3

1. 사차방정식 $x^4+(3-4a)x^2+4a^2-6a-18=0$ 에서 $a=1$ 이면

$$x^4-x^2-20=0$$

$$x^2=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2-t-20=0$$

$$(t+4)(t-5)=0$$

$$\therefore t=-4 \text{ 또는 } t=5$$

$$\text{즉, } x^2=-4 \text{ 또는 } x^2=5 \text{이므로}$$

$$x=\pm 2i \text{ 또는 } x=\pm \sqrt{5}$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$-\sqrt{5} \times \sqrt{5} = -5$$

ㄴ. 사차방정식 $x^4 + (3-4a)x^2 + 4a^2 - 6a - 18 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 + (3-4a)t + (2a-6)(2a+3) = 0$

$$\{t - (2a-6)\} \{t - (2a+3)\} = 0$$

$$\therefore t = 2a-6 \text{ 또는 } t = 2a+3$$

$$\therefore x^2 = 2a-6 \text{ 또는 } x^2 = 2a+3$$

이때 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지므로

$$2a-6 < 0, 2a+3 \geq 0 \rightarrow 2a-6 \geq 0, 2a+3 < 0 \text{이면 } a \text{의 값은 존재하지 않는다.}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

그런데 $a = -\frac{3}{2}$ 일 때, 주어진 사차방정식의 실근은 0이고 이는 모든 실근의 곱이 -6이라는 조건을 만족시키지 않으므로

$$-\frac{3}{2} < a < 3$$

이때 주어진 사차방정식의 실근은 $\pm\sqrt{2a+3}$ 이고, 허근은 $\pm\sqrt{6-2a}i$ 이다.

모든 실근의 곱이 -6이므로

$$-\sqrt{2a+3} \times \sqrt{2a+3} = -6$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 허근은 $\pm\sqrt{3}i$ 이므로 모든 허근의 곱은

$$-\sqrt{3}i \times \sqrt{3}i = 3$$

ㄷ. ㉑에서 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 a 의 값의 범위는 $-\frac{3}{2} \leq a < 3$ 이므로

$$-3 \leq 2a < 6, 0 \leq 2a+3 < 9$$

$$\therefore 0 \leq \sqrt{2a+3} < 3$$

주어진 사차방정식의 실근이 $\pm\sqrt{2a+3}$ 이므로 정수인 근을 가지려면

$$(i) \sqrt{2a+3} = 0 \text{ 일 때, } a = -\frac{3}{2}$$

$$(ii) \sqrt{2a+3} = 1 \text{ 일 때, } a = -1$$

$$(iii) \sqrt{2a+3} = 2 \text{ 일 때, } a = \frac{1}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-\frac{3}{2} + (-1) + \frac{1}{2} = -2$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 답 1

(가)에서 $\beta - \alpha$ 는 자연수이므로 α, β 는 모두 정수이거나 α, β 는 모두 정수가 아닌 실수이다.

(나)에서 $\alpha \leq x \leq \beta$ 를 만족시키는 정수 x 가 2개이므로 α, β 가 모두 정수인 경우에는 $\beta - \alpha = 1$ 이고 α, β 가 모두 정수가 아닌 실수인 경우에는 $\beta - \alpha = 2$ 이다.

이차부등식 $(3x - a^2 + 3a)(3x - 2a) \leq 0$ 에서

$$9\left(x - \frac{a^2 - 3a}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}a\right) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

(i) $\frac{a^2 - 3a}{3} > \frac{2}{3}a$ 일 때,

$$a^2 - 5a > 0, a(a-5) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

이때 이차부등식 ㉑의 해는

$$\frac{2}{3}a \leq x \leq \frac{a^2 - 3a}{3}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}a, \beta = \frac{a^2 - 3a}{3}$$

㉑ α, β 가 모두 정수인 경우

$$\beta - \alpha = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a^2 - 3a}{3} - \frac{2}{3}a = 1$$

$$a^2 - 5a - 3 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \quad (\because \textcircled{㉒})$$

그런데 $a = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ 이면 α, β 가 모두 정수가 아니므로 조건을

만족시키지 않는다.

㉒ α, β 가 모두 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a^2 - 3a}{3} - \frac{2}{3}a = 2$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$(a+1)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 6 \quad (\because \textcircled{㉒})$$

$a = -1$ 이면 $\alpha = -\frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}$ 이므로 α, β 는 모두 정수가 아닌

실수이다.

$a = 6$ 이면 $\alpha = 4, \beta = 6$ 이므로 α, β 는 모두 정수이다.

즉, $a = -1$ 일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

㉑, ㉒에서 조건을 만족시키는 a 의 값은 $a = -1$

(ii) $\frac{a^2 - 3a}{3} < \frac{2}{3}a$ 일 때,

$$a^2 - 5a < 0, a(a-5) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

이때 이차부등식 ㉑의 해는

$$\frac{a^2 - 3a}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}a$$

$$\therefore a = \frac{a^2 - 3a}{3}, \beta = \frac{2}{3}a$$

㉑ α, β 가 모두 정수인 경우

$$\beta - \alpha = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{3}a - \frac{a^2 - 3a}{3} = 1$$

$$a^2 - 5a + 3 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad (\because \textcircled{㉓})$$

그런데 $a = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ 이면 α, β 가 모두 정수가 아니므로 조건을

만족시키지 않는다.

㉒ α, β 가 모두 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{3}a - \frac{a^2 - 3a}{3} = 2$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$(a-2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 3 \quad (\because \textcircled{㉓})$$

$a = 2$ 이면 $\alpha = -\frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}$ 이므로 α, β 는 모두 정수가 아닌 실수이다.

$a = 3$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 2$ 이므로 α, β 는 모두 정수이다.

즉, $a = 2$ 일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

㉑, ㉒에서 조건을 만족시키는 a 의 값은 $a = 2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1 + 2 = 1$$

13 답 2

주어진 부등식에서 $g(x) = \frac{|f(x)|}{2} - f(x)$ 라 하자.

$f(x) \geq 0$ 에서

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

$$(x+3)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 1$$

따라서 $f(x) < 0$ 이면 $-3 < x < 1$ 이므로

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -f(x) & (-3 < x < 1) \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{2} - f(x) & (x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -\frac{f(x)}{2} - f(x) & (-3 < x < 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}f(x) & (x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -\frac{3}{2}f(x) & (-3 < x < 1) \end{cases}$$

이때 직선 $y = m(x-1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기 m 은 양수이다.

또 $g(-3) = 0, g(1) = 0$ 이므로 함수

$y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m(x-1)$

은 그림과 같다.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선

$y = m(x-1)$ 의 교점 중 점 $(1, 0)$ 이 아

닌 다른 한 점의 x 좌표를 t ($t < -3$)라 하면 주어진 부등식의 해는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 직선 $y = m(x-1)$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위와 같으므로

$$t \leq x \leq 1$$

이를 만족시키는 정수 x 가 7개이려면

$$-6 < t \leq -5$$

즉, 조건을 만족시키는 m 의 값은 점 $(-5, g(-5))$ 를 지나는 직선 $y = m(x-1)$ 의 기울기보다 크거나 같고, 점 $(-6, g(-6))$ 을 지나는 직선 $y = m(x-1)$ 의 기울기보다 작다.

(i) 직선 $y = m(x-1)$ 이 점 $(-5, g(-5))$ 를 지날 때,

$$\begin{aligned} g(-5) &= -\frac{1}{2}f(-5) \\ &= -\frac{1}{2}(25 - 10 - 3) = -6 \end{aligned}$$

즉, 점 $(-5, -6)$ 이 직선 $y = m(x-1)$ 위의 점이므로

$$-6 = -6m \quad \therefore m = 1$$

(ii) 직선 $y = m(x-1)$ 이 점 $(-6, g(-6))$ 을 지날 때,

$$\begin{aligned} g(-6) &= -\frac{1}{2}f(-6) \\ &= -\frac{1}{2}(36 - 12 - 3) = -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

즉, 점 $(-6, -\frac{21}{2})$ 이 직선 $y = m(x-1)$ 위의 점이므로

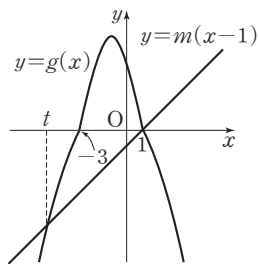
$$-\frac{21}{2} = -7m \quad \therefore m = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 m 의 값의 범위는

$$1 \leq m < \frac{3}{2}$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2\beta - \alpha = 3 - 1 = 2$$



14 답 ④

이차부등식 $x^2 - a^2x > 0$ 에서

$$x(x-a^2) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > a^2 \quad (\because a^2 > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차부등식 $x^2 - 6ax + 9a^2 - 1 \leq 0$ 에서

$$\{x - (3a-1)\}\{x - (3a+1)\} \leq 0$$

$$\therefore 3a-1 \leq x \leq 3a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$0 < a < 1$ 에서 $a^2, 3a-1, 3a+1$ 중 적어도 하나는 양의 정수가 되도록 하는 a 의 값은

$$a = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a = \frac{2}{3}$$

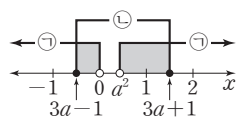
따라서 다음과 같이 a 의 값의 범위를 나누어 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구한다.

(i) $0 < a < \frac{1}{3}$ 일 때,

$$0 < a^2 < \frac{1}{9}, -1 < 3a-1 < 0, 1 < 3a+1 < 2$$

이때 ①, ②의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 1의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a = \frac{1}{3}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{1}{9}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 0 \leq x \leq 2$$

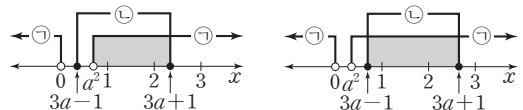
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{1}{9} < x \leq 2$

즉, 정수 x 는 1, 2의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$ 일 때,

$$\frac{1}{9} < a^2 < \frac{4}{9}, 0 < 3a-1 < 1, 2 < 3a+1 < 3$$

이때 ①, ②의 공통부분은 그림과 같다.



즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 1, 2의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a = \frac{2}{3}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{4}{9}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 1 \leq x \leq 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $1 \leq x \leq 3$

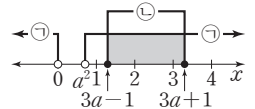
즉, 정수 x 는 1, 2, 3의 3개이므로 조건을 만족시킨다.

(v) $\frac{2}{3} < a < 1$ 일 때,

$$\frac{4}{9} < a^2 < 1, 1 < 3a-1 < 2, 3 < 3a+1 < 4$$

이때 ①, ②의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 2, 3의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 a 의 값은 $a = \frac{2}{3}$

step 1 핵심 문제

| 94~95쪽

- 01 $\frac{5}{4}$ 02 25π 03 ⑤ 04 $\frac{3}{5} < t < 1$
 05 (6, 3), (18, 27) 06 ② 07 14 08 ④
 09 $(15\sqrt{3}, 0)$ 10 ⑤ 11 $-\frac{1}{12}$
 12 $3x - 4y + 17 = 0, x = -3$

01 답 $\frac{5}{4}$

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{k^2 - 4k + 5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-4)^2 + (-k)^2} = \sqrt{k^2 + 4}$$

(i) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이면 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$5 = k^2 - 4k + 5$$

$$k^2 - 4k = 0, k(k-4) = 0$$

$$\therefore k = 4 (\because k > 0)$$

이때 C(4, 4)이면 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

(ii) $\overline{BC} = \overline{CA}$ 이면 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$$k^2 - 4k + 5 = k^2 + 4, -4k = -1$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

(iii) $\overline{CA} = \overline{AB}$ 이면 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$k^2 + 4 = 5, k^2 = 1$$

$$\therefore k = 1 (\because k > 0)$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 k의 값의 합은

$$\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

02 답 25π

삼각형 ABC의 외심을 P(a, b)라 하면 점 P에서 세 꼭짓점 A(6, 2), B(4, -2), C(-2, 6)에 이르는 거리가 같으므로

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} \rightarrow \overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP} \text{는 외접원의 반지름이다.}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$(a-6)^2 + (b-2)^2 = (a-4)^2 + (b+2)^2$$

$$a^2 - 12a + 36 + b^2 - 4b + 4 = a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4$$

$$4a + 8b = 20 \quad \therefore a + 2b = 5 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \text{배점 30\%}$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{ 이므로}$$

$$(a-6)^2 + (b-2)^2 = (a+2)^2 + (b-6)^2$$

$$a^2 - 12a + 36 + b^2 - 4b + 4 = a^2 + 4a + 4 + b^2 - 12b + 36$$

$$16a - 8b = 0 \quad \therefore 2a - b = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \text{배점 30\%}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 2 \quad \therefore P(1, 2) \quad \cdots \text{배점 20\%}$$

따라서 $\overline{AP} = |1-6| = 5$ 이므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times 5^2 = 25\pi \quad \cdots \text{배점 20\%}$$

03 답 ⑤

직선 $y = x + 1$ 위의 점 P의 좌표를 (a, a+1)이라 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{\{a - (-1)\}^2 + \{a + 1 - 3\}^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+1-k)^2}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ 이므로 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \frac{13}{2}$$

$$\overline{AP}^2 = \frac{13}{2} \text{에서 } (a+1)^2 + (a-2)^2 = \frac{13}{2}$$

$$2a^2 - 2a + 5 = \frac{13}{2}$$

$$4a^2 - 4a - 3 = 0, (2a+1)(2a-3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

(i) $a = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\overline{BP}^2 = \frac{13}{2} \text{에서 } \frac{81}{4} + \left(\frac{1}{2} - k\right)^2 = \frac{13}{2}$$

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{55}{4}$$

이때 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a = \frac{3}{2}$ 일 때,

$$\overline{BP}^2 = \frac{13}{2} \text{에서 } \frac{25}{4} + \left(\frac{5}{2} - k\right)^2 = \frac{13}{2}$$

$$\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, k - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = 2 \text{ 또는 } k = 3$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$2 \times 3 = 6$$

04 답 $\frac{3}{5} < t < 1$

선분 AB를 t : (1-t)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times 6 + (1-t) \times (-2)}{t + (1-t)}, \frac{t \times (-2) + (1-t) \times 3}{t + (1-t)}\right)$$

$$\therefore (8t-2, -5t+3)$$

이 점이 제4사분면 위에 있으므로

$$8t-2 > 0 \text{에서 } t > \frac{1}{4}, -5t+3 < 0 \text{에서 } t > \frac{3}{5}$$

$$\therefore t > \frac{3}{5}$$

그런데 $0 < t < 1$ 이므로 $\frac{3}{5} < t < 1$

05 답 (6, 3), (18, 27)

 $S_1 : S_2 = 9 : 4$ 에서 $\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 = 9 : 4$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$$

(i) 점 P가 선분 AB 위에 있을 때,

점 P는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 8 + 2 \times 3}{3+2}, \frac{3 \times 7 + 2 \times (-3)}{3+2}\right)$$

$$\therefore (6, 3)$$

(ii) 점 P가 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,

점 P는 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 8 - 2 \times 3}{3-2}, \frac{3 \times 7 - 2 \times (-3)}{3-2}\right)$$

$$\therefore (18, 27)$$

(i), (ii)에서 구하는 점 P의 좌표는 (6, 3), (18, 27)

06 답 ②

사각형 ABCD가 마름모이므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 같다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+5}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+5}{2}, 1\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{b+1}{2}, 1\right)$$

$$\therefore \frac{a+5}{2} = \frac{b+1}{2} \text{이므로}$$

$$a+5=b+1$$

$$\therefore a-b=-4 \quad \dots\dots ①$$

또 마름모는 네 변의 길이가 같으므로

$$\overline{CD}=\overline{DA} \text{에서 } \overline{CD}^2=\overline{DA}^2$$

$$(1-5)^2+(4-2)^2=(1-a)^2+4^2$$

$$16+4=1-2a+a^2+16$$

$$a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $b=7$

$$\therefore ab=3 \times 7=21$$

07 답 14

함수 $y=x^2-8x+1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+6$ 이 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$A(\alpha, 2\alpha+6), B(\beta, 2\beta+6)$$

이차방정식 $x^2-8x+1=2x+6$, 즉 $x^2-10x-5=0$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=10$$

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 (a, b) 이므로

$$a=\frac{\alpha+\beta+0}{3}=\frac{10}{3}$$

$$b=\frac{2\alpha+6+2\beta+6+0}{3}=\frac{2(\alpha+\beta)+12}{3}=\frac{32}{3}$$

$$\therefore a+b=14$$

08 답 ④

두 직선 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-2y+2+k(2x+y-6)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)} \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$4+2+k(8-6)=0$$

$$2k+6=0 \quad \therefore k=-3$$

이를 ①에 대입하면

$$x-2y+2-3(2x+y-6)=0$$

$$\therefore x+y-4=0$$

따라서 구하는 y 절편은 4이다.

다른 풀이

두 식 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=2$$

두 직선의 교점 $(2, 2)$ 와 점 $(4, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-2}{4-2}(x-4)$$

$$\therefore y=-x+4$$

따라서 구하는 y 절편은 4이다.

09 답 $(15\sqrt{3}, 0)$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PH는 선분 AB의 수직이등분선이다.

함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=2\sqrt{3}x+1$ 이 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$A(\alpha, 2\sqrt{3}\alpha+1), B(\beta, 2\sqrt{3}\beta+1)$$

이차방정식 $x^2=2\sqrt{3}x+1$, 즉 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2\sqrt{3}$$

선분 AB의 중점 H의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{2\sqrt{3}\alpha+1+2\sqrt{3}\beta+1}{2}\right)$$

$$\text{이때 } \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}(\alpha+\beta)+2}{2}=\frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}+2}{2}=7 \text{이므로}$$

$$H(\sqrt{3}, 7)$$

↖ 두 점 A, B는 직선 $y=2\sqrt{3}x+1$ 위에 있다.

한편 직선 AB의 기울기는 $2\sqrt{3}$ 이므로 기울기가 $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 이고 점 $(\sqrt{3}, 7)$

을 지나는 직선 PH의 방정식은

$$y-7=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{15}{2}$$

이 직선의 x 절편은

$$0=-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{15}{2} \quad \therefore x=15\sqrt{3}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(15\sqrt{3}, 0)$

다른 풀이

함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=2\sqrt{3}x+1$ 이 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$A(\alpha, 2\sqrt{3}\alpha+1), B(\beta, 2\sqrt{3}\beta+1)$$

이차방정식 $x^2=2\sqrt{3}x+1$, 즉 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2\sqrt{3}, \alpha\beta=-1$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=(2\sqrt{3})^2-4 \times (-1)=16$$

$$\therefore \alpha-\beta=-4 (\because \alpha < \beta)$$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발이 선분 AB를 이등분하므로

$$\overline{AP}=\overline{BP}$$

점 P의 좌표를 $(p, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(p-\alpha)^2+(2\sqrt{3}\alpha+1)^2=(p-\beta)^2+(2\sqrt{3}\beta+1)^2$$

$$13(\alpha^2-\beta^2)+(4\sqrt{3}-2p)\alpha-(4\sqrt{3}-2p)\beta=0$$

$$13(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+(4\sqrt{3}-2p)(\alpha-\beta)=0$$

$$13 \times 2\sqrt{3} \times (-4)+(4\sqrt{3}-2p) \times (-4)=0$$

$$4\sqrt{3}-2p=-26\sqrt{3}$$

$$\therefore p=15\sqrt{3}$$

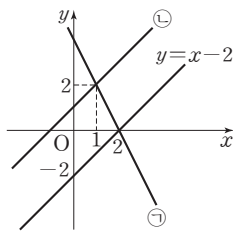
따라서 점 P의 좌표는 $(15\sqrt{3}, 0)$

10 답 ⑤

직선 $x-y-2=0$, 즉 $y=x-2$ 는 기울기가 1이고 x 절편은 2, y 절편은 -2이다.

또 직선 $ax+y-a-2=0$, 즉 $y=-a(x-1)+2$ 는 기울기가 $-a$ 이고 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

그림과 같이 두 점 (1, 2), (2, 0)을 지나
는 직선을 ㉠, 점 (1, 2)를 지나고 직선
 $y=x-2$ 에 평행한 직선을 ㉡이라 하자.
두 직선 $x-y-2=0$, $ax+y-a-2=0$ 이
제1사분면 위의 한 점에서 만나려면 직선
 $y=-a(x-1)+2$ 가 ㉠과 ㉡ 사이에 있어
야 한다.



이때 직선 ㉡의 기울기는 $\frac{0-2}{2-1}=-2$, 직선 ㉠의 기울기는 1이므로
 $-2 < -a < 1 \quad \therefore -1 < a < 2$

11 답 $-\frac{1}{12}$

세 직선을 $l: 2x-y-2=0$, $m: x+2y-6=0$, $n: ax+(a-1)y+1=0$
이라 하면 두 직선 l 과 m 은 평행하지 않으므로 세 직선이 삼각형을 이
루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 l 과 n 이 평행할 때,

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{a-1} \neq \frac{-2}{1}, -a=2a-2 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$$

(ii) 두 직선 m 과 n 이 평행할 때,

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{a-1} \neq \frac{-6}{1}, 2a=a-1 \quad \therefore a=-1$$

(iii) 직선 n 이 두 직선 l 과 m 의 교점을 지날 때,

$$\text{두 식 } 2x-y-2=0, x+2y-6=0 \text{을 연립하여 풀면 } x=2, y=2$$

즉, 두 직선 l 과 m 의 교점의 좌표는 (2, 2)이므로 직선 n 이 점 (2, 2)
를 지나면

$$2a+2(a-1)+1=0, 4a-1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(i), (ii), (iii)에서 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a 의
값의 합은

$$\frac{2}{3} + (-1) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

12 답 $3x-4y+17=0, x=-3$

(i) 직선 l 이 x 축 또는 y 축에 평행하지 않을 때,

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 이 직선이 점 $(-3, 2)$ 를 지나므로
직선 l 의 방정식은

$$y=m(x+3)+2$$

$$\therefore mx-y+3m+2=0$$

점 (1, 0)과 직선 l 사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|m+3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$$

$$|4m+2|=4\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$16m^2+16m+4=16(m^2+1)$$

$$16m=12 \quad \therefore m=\frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 직선 } l \text{의 방정식은 } \frac{3}{4}x-y+\frac{9}{4}+2=0$$

$$\therefore 3x-4y+17=0$$

(ii) 직선 l 이 x 축 또는 y 축에 평행할 때,

점 $(-3, 2)$ 를 지나고 직선 $x=-3$ 은 점 (1, 0)에서의 거리가 4이다.

(i), (ii)에서 구하는 직선 l 의 방정식은

$$3x-4y+17=0, x=-3$$

step 2 고난도 문제

| 96~100쪽

01 10	02 25	03 ④	04 $\frac{2}{3}$	05 ⑤	06 $\frac{8}{3}$
07 $\frac{1}{2}$	08 ④	09 $\frac{21}{2}$	10 ②	11 330	12 ①
13 2	14 ②	15 $\frac{11}{6}$	16 ①	17 ④	
18 $(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$	19 $\sqrt{2} < a < 2$	20 15	21 ①		
22 ③	23 4	24 8			

01 답 10

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-5)^2 + (x-3)^2 + (y-3)^2$$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 12x - 18y + 49$$

$$= 3(x-2)^2 + 3(y-3)^2 + 10$$

이때 x, y 가 실수이므로 $(x-2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$

$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \geq 10$$

따라서 $x=2, y=3$ 일 때 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 10이다.

02 답 25

그림과 같이 직선 AB를 x 축으로 하고, 직
선 AC를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면
점 A는 원점이 된다.

$B(a, 0) (a > 0)$ 이라 하면 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므

로 $C(0, a)$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{10} \text{에서 } \overline{AP}^2 = 10 \text{이므로 } x^2 + y^2 = 10 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\overline{BP} = 2\sqrt{5} \text{에서 } \overline{BP}^2 = 20 \text{이므로}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = 20 \quad \therefore x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 20 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\overline{CP} = 2\sqrt{10} \text{에서 } \overline{CP}^2 = 40 \text{이므로}$$

$$x^2 + (y-a)^2 = 40 \quad \therefore x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 40 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉠}-\text{㉡} \text{을 하면 } 2ax - a^2 = -10 \quad \therefore x = \frac{a^2 - 10}{2a}$$

$$\text{㉠}-\text{㉢} \text{을 하면 } 2ay - a^2 = -30 \quad \therefore y = \frac{a^2 - 30}{2a}$$

$$x = \frac{a^2 - 10}{2a}, y = \frac{a^2 - 30}{2a} \text{을 ㉠에 대입하면}$$

$$\left(\frac{a^2 - 10}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - 30}{2a}\right)^2 = 10$$

$$(a^2 - 10)^2 + (a^2 - 30)^2 = 40a^2$$

$$a^4 - 60a^2 + 500 = 0, (a^2 - 10)(a^2 - 50) = 0$$

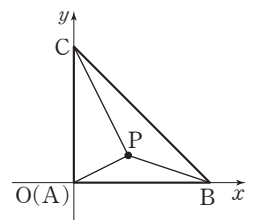
$$\therefore a^2 = 10 \text{ 또는 } a^2 = 50$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{10}$ 또는 $a = 5\sqrt{2}$

$a = \sqrt{10}$ 일 때, 점 P의 좌표는 $(0, -\sqrt{10})$ 이므로 점 P는 삼각형 ABC
의 내부에 있지 않다.

따라서 $a = 5\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 25$$



03 답 ④

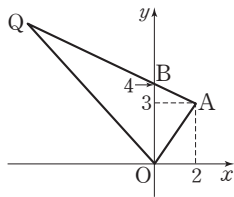
삼각형 OAQ의 넓이가 16이고 삼각형

OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ 이므로

$$\overline{AQ} : \overline{AB} = 16 : 4 = 4 : 1$$

따라서 점 Q는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점이므로

$$m : n = 4 : 3 \quad \therefore \frac{n}{m} = \frac{3}{4}$$



04 답 $\frac{2}{3}$

$\overline{AP} : \overline{PC} = \overline{BQ} : \overline{QC} = m : n$ (m, n 은 자연수)이라 하자.

점 P는 선분 AC를 $m : n$ 으로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{ma-2n}{m+n}, \frac{mb+2n}{m+n} \right)$$

이때 점 P는 y 축 위에 있으므로

$$\frac{ma-2n}{m+n} = 0 \quad \therefore a = \frac{2n}{m}$$

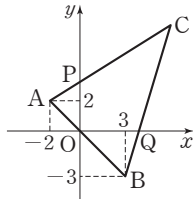
점 Q는 선분 BC를 $m : n$ 으로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{ma+3n}{m+n}, \frac{mb-3n}{m+n} \right)$$

이때 점 Q는 x 축 위에 있으므로

$$\frac{mb-3n}{m+n} = 0 \quad \therefore b = \frac{3n}{m}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\frac{2n}{m}}{\frac{3n}{m}} = \frac{2}{3}$$



05 답 ⑤

함수 $y=x^2$ 의 그래프 위의 점 P의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2t+3}{2+1}, \frac{2t^2-1}{2+1} \right) \quad \therefore \left(\frac{2t+3}{3}, \frac{2t^2-1}{3} \right)$$

$x = \frac{2t+3}{3}, y = \frac{2t^2-1}{3}$ 로 놓으면 $x = \frac{2t+3}{3}$ 에서 $t = \frac{3x-3}{2}$ 이므로

$$y = \frac{2}{3} \left(\frac{3x-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{6}$$

이때 함수 $y = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{6}$ 의 그래프와 직선 $y=x-k$ 가 접하므로 이

차방정식 $\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{6} = x - k$, 즉 $\frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{6} + k = 0$ 의 판별식을

D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{7}{6} + k \right) = 0, \quad \frac{9}{4} - \frac{3}{2}k = 0$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

06 답 $\frac{8}{3}$

선분 AD가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-6)^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-2)^2 + (a-6)^2} = \sqrt{a^2 - 12a + 72}$$

$$\overline{AC} = t \text{로 놓으면 } \overline{BD} : \overline{CD} = 5 : t$$

점 D는 선분 BC를 5 : t 로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 8 + t \times (-1)}{5+t}, \frac{5 \times a + t \times 2}{5+t} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{40-t}{5+t}, \frac{5a+2t}{5+t} \right)$$

$$D(2, b) \text{에서 } \frac{40-t}{5+t} = 2 \text{이므로}$$

$$40-t = 10+2t \quad \therefore t = 10$$

$$\overline{AC} = t \text{에서 } \sqrt{a^2 - 12a + 72} = 10$$

$$a^2 - 12a - 28 = 0$$

$$(a+2)(a-14) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore b = \frac{5a+2t}{5+t} = \frac{5 \times (-2) + 2 \times 10}{5+10} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore b-a = \frac{8}{3}$$

07 답 $\frac{1}{2}$

그림과 같이 직선 AB를 x 축으로 하고,

직선 AD를 y 축으로 하는 좌표평면을

잡으면 점 A는 원점이 된다.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$B(a, 0), C(a, a), D(0, a)$$

(i) 선분 AB를 $t : 1$ 로 외분하는 점을

P라 하면

$$P\left(\frac{at}{t-1}, 0\right)$$

선분 BC를 $t : 1$ 로 외분하는 점을 Q라 하면 $\overline{AP} = \overline{BQ} = \frac{at}{1-t}$ 이

로 삼각형 BPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{BQ} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{at}{1-t} \right) \times \frac{at}{1-t} = \frac{a^2 t}{2(1-t)^2}$$

따라서 S_1 은 정사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 BPQ의 넓이의 4배의 합이므로

$$S_1 = a^2 + 4 \times \frac{a^2 t}{2(1-t)^2} = \frac{a^2(1+t^2)}{(1-t)^2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) 선분 AB를 $t : 1$ 로 내분하는 점을 R라 하면

$$R\left(\frac{at}{t+1}, 0\right)$$

선분 BC를 $t : 1$ 로 내분하는 점을 S라 하면 $\overline{AR} = \overline{BS} = \frac{at}{t+1}$ 이

로 삼각형 BSR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{RB} \times \overline{SB} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{at}{t+1} \right) \times \frac{at}{t+1} = \frac{a^2 t}{2(t+1)^2}$$

따라서 S_2 는 정사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 BSR의 넓이의 4배의 차이므로

$$S_2 = a^2 - 4 \times \frac{a^2 t}{2(t+1)^2} = \frac{a^2(1+t^2)}{(t+1)^2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

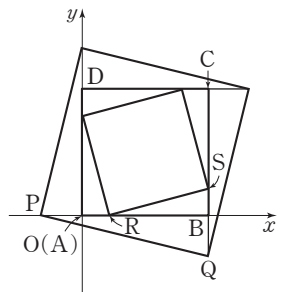
$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{(t+1)^2}{(1-t)^2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 9 \text{에서 } \frac{(t+1)^2}{(1-t)^2} = 9 \text{이므로}$$

$$(t+1)^2 = 9(1-t)^2, \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$(t-2)(2t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < t < 1) \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$



08 답 ④

두 점 A, B의 좌표를 각각 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) 라 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5, 4)$ 이므로

$$\frac{0+a_1+a_2}{3}=5, \frac{0+b_1+b_2}{3}=4$$

$$\therefore a_1+a_2=15, b_1+b_2=12$$

선분 OA를 2:1로 외분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2a_1-0}{2-1}, \frac{2b_1-0}{2-1}\right) \therefore (2a_1, 2b_1)$$

선분 OB를 2:1로 외분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2a_2-0}{2-1}, \frac{2b_2-0}{2-1}\right) \therefore (2a_2, 2b_2)$$

이때 두 선분 AD, BC는 각각 삼각형 OCD의 중선이므로 두 선분 AD와 BC의 교점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이다.

$$\text{즉, 점 E의 좌표는 } \left(\frac{0+2a_1+2a_2}{3}, \frac{0+2b_1+2b_2}{3}\right)$$

$$\text{이때 } \frac{2a_1+2a_2}{3} = \frac{2(a_1+a_2)}{3} = \frac{2 \times 15}{3} = 10,$$

$$\frac{2b_1+2b_2}{3} = \frac{2(b_1+b_2)}{3} = \frac{2 \times 12}{3} = 8 \text{ 이므로 } E(10, 8)$$

따라서 $p=10$, $q=8$ 이므로 $p+q=18$

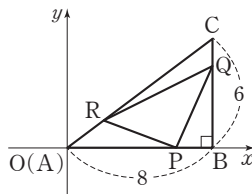
09 답 21/2

그림과 같이 점 A를 원점으로 하고, 직선

AB를 x축으로 하면 $B(8, 0)$, $C(8, 6)$

이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표

$$\text{는 } \left(\frac{0+8+8}{3}, \frac{0+0+6}{3}\right) \therefore \left(\frac{16}{3}, 2\right)$$



선분 AB를 3:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 8 + 0}{3+1}, 0\right) \therefore (6, 0)$$

직선 BC의 방정식은 $x=8$, 직선 AC의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$ 이므로

$Q(8, a)$, $R(b, \frac{3}{4}b)$ 라 하면 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+8+b}{3}, \frac{0+a+\frac{3}{4}b}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{b+14}{3}, \frac{4a+3b}{12}\right)$$

이때 삼각형 PQR의 무게중심이 삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로

$$\frac{b+14}{3} = \frac{16}{3}, \frac{4a+3b}{12} = 2$$

$$\therefore a = \frac{9}{2}, b = 2$$

$$\therefore Q\left(8, \frac{9}{2}\right), R\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{삼각형 ABC의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$$

$$\text{삼각형 APR의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\text{삼각형 PBQ의 넓이는 } \frac{1}{2} \times (8-6) \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\text{삼각형 QCR의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \left(6 - \frac{9}{2}\right) \times (8-2) = \frac{9}{2}$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$24 - 3 \times \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

idea

10 답 ②

삼각형 PQR의 무게중심을 G라 하면 점 G의 좌표는

$$\left(\frac{3+6+3}{3}, \frac{2+1+6}{3}\right) \therefore (4, 3)$$

이때

$$\overline{PG} = \sqrt{(4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2},$$

$$\overline{QG} = \sqrt{(4-6)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(6-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

에서 $\overline{PG}^2 + \overline{QG}^2 = \overline{PQ}^2$ 이므로 삼각형 PQG는 $\angle G = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 PQR과 합동인 삼각형 ABC에서 점 A가 x축 위에 있고 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로 $\angle AOB = 90^\circ$ 를 만족시키려면 점 B는 y축 위에 있어야 한다.

이때 점 C가 제3사분면 위에 있으므로 그림과 같이 점 A의 x좌표는 양수, 점 B의 y좌표는 양수이다.

$\overline{AO} = \overline{PG} = \sqrt{2}$ 이므로 점 A의 좌표는

$$(\sqrt{2}, 0)$$

$\overline{BO} = \overline{QG} = 2\sqrt{2}$ 이므로 점 B의 좌표는

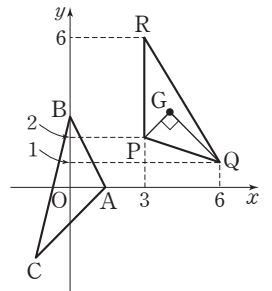
$$(0, 2\sqrt{2})$$

이때 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$$\frac{\sqrt{2}+0+a}{3} = 0, \frac{0+2\sqrt{2}+b}{3} = 0$$

$$\therefore a = -\sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore ab = 4$$



다른 풀이

삼각형 PQR의 무게중심을 G라 하면 점 G의 좌표는

$$\left(\frac{3+6+3}{3}, \frac{2+1+6}{3}\right) \therefore (4, 3)$$

이때 삼각형 PQR과 삼각형 ABC가 합동이므로 $\overline{PG} = \overline{AO}$

$$\therefore \overline{AO} = \overline{PG} = \sqrt{(4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

(*)에서 점 A는 x축 위의 점이므로

$$A(-\sqrt{2}, 0) \text{ 또는 } A(\sqrt{2}, 0)$$

$$\overline{GR} = \overline{OC} \text{에서 } \overline{GR}^2 = \overline{OC}^2 \text{ 이므로}$$

$$(3-4)^2 + (6-3)^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{PR} = \overline{AC} \text{에서 } \overline{PR}^2 = \overline{AC}^2$$

(i) $A(-\sqrt{2}, 0)$ 일 때,

$$(6-2)^2 = \{a - (-\sqrt{2})\}^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2\sqrt{2}a = 14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$2\sqrt{2}a = 4 \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

(ii) $A(\sqrt{2}, 0)$ 일 때,

$$(6-2)^2 = (a - \sqrt{2})^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2\sqrt{2}a = 14 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{3}$ 을 하면

$$-2\sqrt{2}a = 4 \quad \therefore a = -\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 $a = -\sqrt{2} (\because a < 0)$ 이므로 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2 + b^2 = 10, b^2 = 8 \quad \therefore b = -2\sqrt{2} (\because b < 0)$$

$$\therefore ab = -\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = 4$$

11 답 330

삼각형 ABC의 무게중심이 점 G이므로

$$\overline{AG} : \overline{GQ} = \overline{BG} : \overline{GR} = \overline{CG} : \overline{GP} = 2 : 1$$

$$\therefore \overline{AG} = 12, \overline{BG} = 10, \overline{CG} = 14$$

그림과 같이 삼각형 GBC에서 직선 BC를 x 축으로 하고, 점 Q를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 Q는 원점이 된다.

$$G(a, b), C(c, 0) \text{이라 하면 } B(-c, 0)$$

$$\begin{aligned} \overline{GB}^2 &= (-c-a)^2 + (-b)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{GC}^2 &= (c-a)^2 + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\overline{GQ}^2 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\overline{BQ}^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{을 하면 } \overline{GQ}^2 + \overline{BQ}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 2(\overline{GQ}^2 + \overline{BQ}^2)$$

$$\text{즉, } 10^2 + 14^2 = 2(6^2 + \overline{BQ}^2) \text{에서}$$

$$296 = 72 + 2\overline{BQ}^2 \quad \therefore \overline{BQ}^2 = 112$$

같은 방법으로 하면 삼각형 GCA에서

$$14^2 + 12^2 = 2(5^2 + \overline{CR}^2)$$

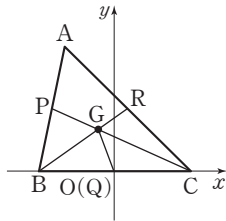
$$340 = 50 + 2\overline{CR}^2 \quad \therefore \overline{CR}^2 = 145$$

같은 방법으로 하면 삼각형 GAB에서

$$12^2 + 10^2 = 2(7^2 + \overline{AP}^2)$$

$$244 = 98 + 2\overline{AP}^2 \quad \therefore \overline{AP}^2 = 73$$

$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{BQ}^2 + \overline{CR}^2 = 73 + 112 + 145 = 330$$

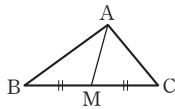


개념 NOTE

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

이를 중선 정리(파푸스 정리)라 한다.



12 답 ①

(가)에서 직선 l 이 삼각형 OAB의 점 O를 지나고, (나), (다)에서 점 P는 선분 AB를 2 : 1 또는 1 : 2로 내분하는 점이어야 한다.

(i) 점 P가 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점일 때,

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1} \right)$$

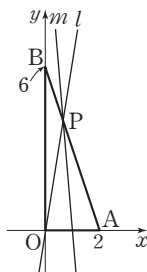
$$\therefore \left(\frac{2}{3}, 4 \right)$$

$$\text{즉, 직선 } l \text{의 기울기는 } \frac{4-0}{\frac{2}{3}-0} = 6$$

(다)에서 직선 m 은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하므로 선분 OA의 중점 (1, 0)을 지난다.

$$\text{즉, 직선 } m \text{의 기울기는 } \frac{4-0}{\frac{2}{2}-1} = -12$$

따라서 두 직선 l, m 의 기울기의 합은 $6 + (-12) = -6$



(ii) 점 P가 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점일 때,

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 2 \right)$$

$$\text{즉, 직선 } l \text{의 기울기는 } \frac{2-0}{\frac{4}{3}-0} = \frac{3}{2}$$

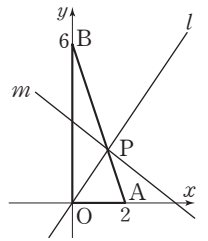
(다)에서 직선 m 은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하므로 선분 OB의 중점 (0, 3)을 지난다.

$$\text{즉, 직선 } m \text{의 기울기는 } \frac{2-3}{\frac{4}{3}-0} = -\frac{3}{4}$$

따라서 두 직선 l, m 의 기울기의 합은

$$\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

(i), (ii)에서 두 직선 l, m 의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.



13 답 2

직사각형 OCDE의 넓이를 이등분하는 직선 l 은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 (0, 0), (-2, -4)를 이은 선분의 중점이므로

$$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{0-4}{2} \right) \quad \therefore (-1, -2)$$

즉, 기울기가 m 이고 점 (-1, -2)를 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y+2=m(x+1)$$

$$\therefore y=mx+m-2$$

직선 l 이 x 축과 만나는 점을 P라 하면 점 P의 x 좌표는

$$mx+m-2=0$$

$$\therefore x = \frac{2-m}{m}$$

한편 직선 AB의 방정식은 $y = -x + 2$ 이므로 직선 AB와 직선 l 의 교점을 Q라 하면 점 Q의 y 좌표는

$$\frac{y-m+2}{m} = 2-y$$

$$y-m+2=2m-my$$

$$(m+1)y=3m-2$$

$$\therefore y = \frac{3m-2}{m+1}$$

삼각형 AQP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \left(2 - \frac{2-m}{m} \right) \times \frac{3m-2}{m+1} = \frac{(3m-2)^2}{2m(m+1)}$$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이므로 삼각형 AQP의 넓이는 1이어야 한다.

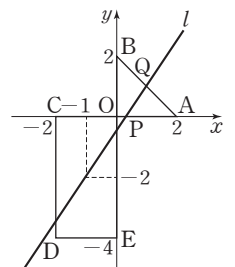
$$\text{즉, } \frac{(3m-2)^2}{2m(m+1)} = 1 \text{이므로}$$

$$(3m-2)^2 = 2m(m+1)$$

$$\therefore 7m^2 - 14m + 4 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 m 의 값의 합은

$$-\frac{-14}{7} = 2$$



14 답 ②

그림과 같이 사각형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 P'이라 하고, 사각형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡으면

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{PC} &\geq \overline{AC} \\ &= \overline{P'A} + \overline{P'C} \quad \dots\dots ㉠ \\ \overline{PB} + \overline{PD} &\geq \overline{BD} \\ &= \overline{P'B} + \overline{P'D} \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠+㉡을 하면

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} \geq \overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D}$$

즉, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 의 값이 최소일 때, 점 P는 두 대각선 AC, BD의 교점이다.

이때 직선 AC의 방정식은

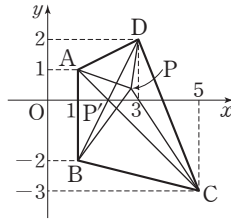
$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{-3-1}{5-1}(x-1) \\ \therefore y &= -x+2 \quad \dots\dots ㉢ \end{aligned}$$

직선 BD의 방정식은

$$\begin{aligned} y+2 &= \frac{2-(-2)}{3-1}(x-1) \\ \therefore y &= 2x-4 \quad \dots\dots ㉣ \end{aligned}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $x=2, y=0$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (2, 0)



15 답 11/6

A($\frac{1}{a}, 1$), B(1, b)이고, 두 점 A, B를 지나는 직선 l이 직선 $y=bx$ 와 수직이므로

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{1-\frac{1}{a}} \times b &= -1 \\ \therefore b(b-1) &= \frac{1}{a}-1 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

그림과 같이 직선 $y=bx$ 와 직선 $y=1$ 의 교점을 C라 하면 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1}{b}, 1\right)$$

직선 l이 x축과 만나는 점을 P라 하면 $\angle AOB = \angle COP = \angle OCA$ 이므로 삼각형 AOC는 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{OB} = \overline{BC}$, 즉 점 B는 선분 OC의 중점이므로

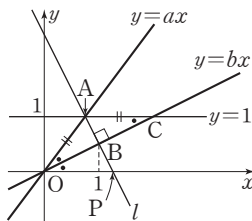
$$\frac{0+\frac{1}{b}}{2} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a}-1$$

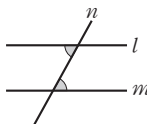
$$\therefore a = \frac{4}{3}$$

$$\therefore a+b = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$



개념 NOTE

서로 다른 두 직선 l, m이 다른 한 직선 n과 만날 때, 두 직선 l, m이 평행하면 엇각의 크기는 서로 같다.



16 답 ①

두 직선 $y=2x, y=-\frac{1}{2}x$ 의 기울기의

곱이 -1이므로 두 직선은 서로 수직이다. 즉, 직선 $y=mx+5$ 가 두 직선

$y=-\frac{1}{2}x, y=2x$ 와 만나는 점을 각각

A, B라 하면 삼각형 AOB는

$\angle AOB=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

$$-\frac{1}{2}x = mx+5 \text{에서 } x = -\frac{10}{2m+1}$$

$$\text{이를 } y = -\frac{1}{2}x \text{에 대입하면 } y = \frac{5}{2m+1}$$

$$\therefore A\left(-\frac{10}{2m+1}, \frac{5}{2m+1}\right)$$

$$2x = mx+5 \text{에서 } x = \frac{5}{2-m}$$

$$\text{이를 } y = 2x \text{에 대입하면 } y = \frac{10}{2-m}$$

$$\therefore B\left(\frac{5}{2-m}, \frac{10}{2-m}\right)$$

이때 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 에서 $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$\left(-\frac{10}{2m+1}\right)^2 + \left(\frac{5}{2m+1}\right)^2 = \left(\frac{5}{2-m}\right)^2 + \left(\frac{10}{2-m}\right)^2$$

$$\frac{125}{4m^2+4m+1} = \frac{125}{m^2-4m+4}$$

$$m^2-4m+4 = 4m^2+4m+1, 3m^2+8m-3=0$$

$$(m+3)(3m-1)=0 \quad \therefore m = \frac{1}{3} (\because m > 0)$$

다른 풀이

두 직선 $y=2x, y=-\frac{1}{2}x$ 의 기울기의

곱이 -1이므로 두 직선은 서로 수직이다. 즉, 직선 $y=mx+5$ 가 두 직선

$y=-\frac{1}{2}x, y=2x$ 와 만나는 점을 각각

A, B라 하면 삼각형 AOB는

$\angle AOB=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

원점을 지나고 $\angle AOB$ 를 이등분하는 직선을 l이라 하면 직선 l은 직선 $y=mx+5$ 와 수직이고, 직선 l 위의 점 (x, y)에서 두 직선 $y=2x,$

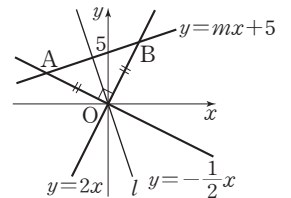
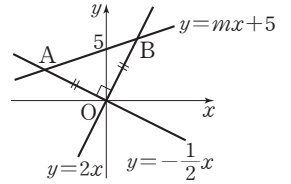
$y=-\frac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0, x+2y=0$ 에 이르는 거리는 같다.

$$\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}} \text{에서 } |2x-y| = |x+2y|$$

$$2x-y = \pm(x+2y) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x \text{ 또는 } y = -3x$$

이때 $m > 0$ 에서 직선 l의 기울기가 음수이므로

$$y = -3x \quad \therefore m = -\frac{1}{3}$$



17 답 ④

두 점 A(-2, -1), B(4, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{2-(-1)}{4-(-2)}(x-4) \quad \therefore x-2y=0$$

∴ 직선 AB와 직선 l이 평행하려면

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{-2}{k-1} \neq \frac{0}{-5k+2}, -4k-2=k-1 \quad \therefore k = -\frac{1}{5}$$

따라서 직선 AB와 평행한 직선 l이 존재한다.

ㄴ. $k = -\frac{2}{3}$ 일 때, 직선 l 의 방정식은

$$-\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y + \frac{16}{3} = 0 \quad \therefore x + 5y - 16 = 0$$

두 식 $x + 5y - 16 = 0$, $x - 2y = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{32}{7}, y = \frac{16}{7}$$

즉, 점 $(\frac{32}{7}, \frac{16}{7})$ 은 선분 AB 위에 있지 않으므로 $k = -\frac{2}{3}$ 일 때,

선분 AB와 직선 l 은 만나지 않는다.

ㄷ. 직선 l 은 $x - y + 2 + k(2x + y - 5) = 0$ 이므로 직선 $2x + y - 5 = 0$ 이 될 수 없다.

두 식 $2x + y - 5 = 0$, $x - 2y = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 1$$

따라서 선분 AB 위의 점 (2, 1)은 직선 l 이 지날 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18 답 $(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$

점 R를 지나고 직선 PQ와 평행한 직선이 선분 OA, BC와 만나는 점을 각각 T, S라 하자.

$\overline{TS} \parallel \overline{PQ}$ 이므로 $\triangle QRP = \triangle QTP$ 두 삼각형의 밑변이 PQ이고 높이는 PQ와 TS 사이의 거리이다.

즉, 선분 QT를 경계로 하면 두 부분의 넓이가 변하지 않는다.

직선 PQ의 기울기는 $\frac{5-0}{8-3} = 1$ 이므로 점 R를 지나면서 직선 PQ와 평

행한 직선 TS의 방정식은

$$y - 1 = x - 2 \quad \therefore y = x - 1$$

이때 점 T의 좌표는 (1, 0)이므로 직선 QT의 방정식은

$$y = \frac{0-5}{1-8}(x-1), y = \frac{5}{7}(x-1)$$

$$\therefore 5x - 7y - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

또 $\overline{TS} \parallel \overline{PQ}$ 이므로 $\triangle QRP = \triangle QSP$

즉, 선분 PS를 경계로 하면 두 부분의 넓이가 변하지 않는다.

점 S의 좌표를 구하면 $x - 1 = 5$ 에서 $x = 6$

$$\therefore S(6, 5)$$

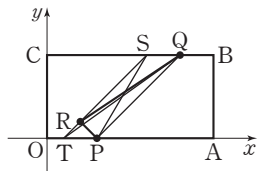
직선 PS의 방정식은

$$y = \frac{5-0}{6-3}(x-3), y = \frac{5}{3}(x-3)$$

$$\therefore 5x - 3y - 15 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } x = \frac{9}{2}, y = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 구하는 교점의 좌표는 } (\frac{9}{2}, \frac{5}{2}) \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$



19 답 $\sqrt{2} < a < 2$

$a\{x - (a^2 + a - 2)\} + y + 2 = 0$ 에서

$$y = -ax + a^3 + a^2 - 2a - 2$$

$$\therefore y = -ax + (a+1)(a^2-2)$$

이 직선의 x절편은 $\frac{(a+1)(a^2-2)}{a}$ 이므로 (가)에서

$$\frac{(a+1)(a^2-2)}{a} > 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a^2 - 2 > 0$

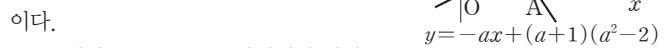
$$\therefore a > \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그림과 같이 직선

$$y = -ax + (a+1)(a^2-2) \text{의 기울기는 } 0$$

보다 작고, 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 기울기는 0보다 크므로 $\angle OAB, \angle AOB$ 는 모두 예각이다.

즉, (나)에서 $\angle OBA$ 는 둔각이어야 한다.



두 직선 $y = -ax + (a+1)(a^2-2)$, $y = \frac{1}{2}x$ 가 서로 수직일 때, $a = 2$

이므로 $\angle OBA$ 가 둔각이라면 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$\sqrt{2} < a < 2$$

20 답 15

그림과 같이 직선 $y = 2x + k$ 와 평행하고 곡

선 $y = -x^2 + 4$ 에 접하는 직선의 방정식을

$y = 2x + a$ (a 는 상수)라 하자.

이차방정식 $-x^2 + 4 = 2x + a$, 즉

$x^2 + 2x + a - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (a-4) = 0 \quad \therefore a = 5$$

이때 곡선 $y = -x^2 + 4$ 위의 점과 직선

$y = 2x + k$ 사이의 거리의 최솟값은 직선 $y = 2x + 5$ 위의 점 (0, 5)와

직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리와 같으므로

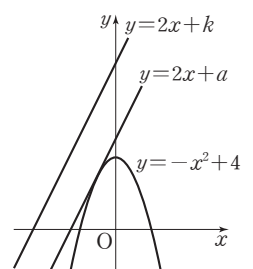
$$\frac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$|k-5| = 10, k-5 = \pm 10$$

$$\therefore k = 15 \text{ 또는 } k = -5$$

그런데 $k = -5$ 이면 곡선 $y = -x^2 + 4$ 와 직선 $y = 2x - 5$ 가 만나므로

$$k = 15$$



21 답 ①

원점과 직선 $3x + 2y - 5 + a(y-1) = 0$, 즉

$3x + (2+a)y - 5 - a = 0$ 사이의 거리를 d (d 는 자연수)라 하면

$$d = \frac{|-5-a|}{\sqrt{3^2+(2+a)^2}}$$

$$|a+5| = d\sqrt{a^2+4a+13}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 10a + 25 = d^2(a^2 + 4a + 13)$$

$$\therefore (d^2-1)a^2 + 2(2d^2-5)a + 13d^2-25 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $d^2 - 1 = 0$, 즉 $d = 1$ 일 때,

$$-6a - 12 = 0 \quad \therefore a = -2$$

(ii) $d^2 - 1 \neq 0$, 즉 $d \neq 1$ 일 때,

이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2d^2-5)^2 - (d^2-1)(13d^2-25) \geq 0$$

$$-9d^4 + 18d^2 \geq 0, 9d^2(d^2-2) \leq 0$$

$$d^2-2 \leq 0 \quad \therefore 0 < d \leq \sqrt{2} \quad (\because d \text{는 자연수})$$

$$\therefore 0 < d < 1 \text{ 또는 } 1 < d \leq \sqrt{2}$$

이때 이를 만족시키는 자연수 d 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값은 -2 이다.

22 답 ③

선분 PQ의 길이는 직선 $y=2x+4$ 위의 한 점 $(0, 4)$ 와 직선 $y=2x-2$, 즉 $2x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$PQ = \frac{|-4-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

원점 O에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{\sqrt{5}} \times OH = 8 \quad \therefore OH = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

이때 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 직선 PQ의 방정식을

$$y = -\frac{1}{2}x + k \quad (k > 0) \text{라 하면 원점 O와 직선 } y = -\frac{1}{2}x + k, \text{ 즉}$$

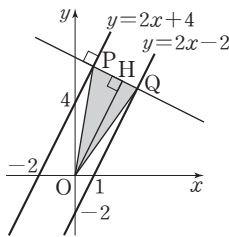
$$x + 2y - 2k = 0 \text{ 사이의 거리가 } \frac{8\sqrt{5}}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{2k}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{3} \quad \therefore k = \frac{20}{3}$$

따라서 직선 PQ의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{20}{3}$ 이므로 구하는 x절편은

$$\frac{40}{3} \text{이다.}$$



23 답 4

두 점 R, S의 좌표를 각각 (p, q) , (r, s) 라 하면 사각형 PQRS가 평행사변형이고, 평행사변형의 대각선의 교점은 선분 PR의 중점이며 선분 QS의 중점입니다

$$\frac{a+p}{2} = \frac{b+r}{2}, \frac{a+q}{2} = \frac{b+1+s}{2} = 0$$

$$\therefore p = -a, q = -a, r = -b, s = -b-1$$

$$\therefore R(-a, -a), S(-b, -b-1)$$

즉, 두 점 P, R는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

점 Q와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|b-(b+1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$PR = \sqrt{(-a-a)^2 + (-a-a)^2} = 2\sqrt{2}a$$

$$\text{삼각형 PQR의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a$$

이때 평행사변형의 대각선은 그 넓이를 이등분하므로 평행사변형 PQRS의 넓이는 $2a$ 이다.

따라서 $2a=8$ 에서 $a=4$

24 답 8

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{5}{3}x$ 이므로 점 P의 좌표를 (m, n) (m, n 은 정수)

이라 하면 점 P와 직선 $y = \frac{5}{3}x$, 즉 $5x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5m-3n|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}} = \frac{|5m-3n|}{\sqrt{34}}$$

이때 $OA = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ 이므로 두 선분 OA, OP를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는

$$\sqrt{34} \times \frac{|5m-3n|}{\sqrt{34}} = |5m-3n|$$

평행사변형의 넓이가 최소하려면 $|5m-3n|$ 이 최소이어야 한다.

이때 m, n 이 정수이므로 $5m-3n$ 도 정수이고, $5m-3n \neq 0$ 이므로 최솟값은 $|5m-3n|=1$ 일 때이다.

즉, $5m-3n=1$ 또는 $5m-3n=-1$ 이므로 점 $P(m, n)$ 은 직선 $-5x+3y+1=0$ 또는 직선 $5x-3y+1=0$ 위의 점이다.

따라서 $a=-5, b=3$ 또는 $a=5, b=-3$ 이므로

$$|a| + |b| = 8$$

step 3 최고난도 문제

| 101~103쪽

01 ①

02 55

03 $-9\sqrt{2}$

04 ⑤

05 $\frac{1}{3}$

06 ④

07 $(\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$

08 ④

09 43

01 답 ①

1단계 점 A의 좌표 구하기

그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 D를 원점으로 하는 좌표평면을 잡으면

$B(-1, 0), C(1, 0)$

점 A의 좌표를 (p, q) ($p > 0, q > 0$)

라 하면

$$\overline{AB} = 2\sqrt{3} \text{에서 } \overline{AB}^2 = 12 \text{이므로}$$

$$(p+1)^2 + q^2 = 12$$

$$\therefore p^2 + q^2 + 2p = 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{7} \text{에서 } \overline{AD}^2 = 7 \text{이므로}$$

$$p^2 + q^2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 2p = 4 \quad \therefore p = 2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$4 + q^2 = 7, q^2 = 3 \quad \therefore q = \sqrt{3} \quad (\because q > 0)$$

$$\therefore A(2, \sqrt{3})$$

2단계 S의 값 구하기

$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ 이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다.

따라서 직각삼각형 CEB에서 $\overline{CE} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

이때 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2\sqrt{7}}{3}, \overline{PD} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\overline{CP} : \overline{PE} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CE} = \frac{2}{3}, \overline{PE} = \frac{1}{3}\overline{CE} = \frac{1}{3}$$

삼각형 EPA에서 선분 PR가 $\angle APE$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AR} : \overline{ER} = \overline{PA} : \overline{PE} = \frac{2\sqrt{7}}{3} : \frac{1}{3} = 2\sqrt{7} : 1$$

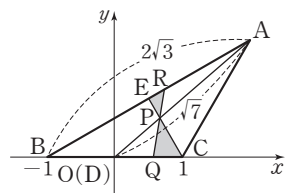
즉, $\overline{AR} : \overline{ER} = 2\sqrt{7} : 1$ 이므로 $\triangle ARP : \triangle REP = 2\sqrt{7} : 1$

이때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 AEP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$S_1 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1} = \sqrt{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1} = \frac{\sqrt{3}}{6(2\sqrt{7}+1)}$$



3단계 S_2 의 값 구하기

삼각형 CPD에서 선분 PQ가 $\angle DPC$ 의 이등분선이므로

$$\overline{DQ} : \overline{CQ} = \overline{PD} : \overline{PC} = \frac{\sqrt{7}}{3} : \frac{2}{3} = \sqrt{7} : 2$$

$\angle APE$ 의 이등분선은 $\angle DPC$ 의 이등분선과 같다.

$$\text{즉, } \overline{DQ} : \overline{CQ} = \sqrt{7} : 2 \text{ 이므로 } \triangle PDQ : \triangle PQC = \sqrt{7} : 2$$

따라서 삼각형 PDC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$S_2 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2} = \sqrt{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2} = \frac{\sqrt{3}}{3(\sqrt{7}+2)}$$

4단계 ab 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3(\sqrt{7}+2)}}{\frac{\sqrt{3}}{6(2\sqrt{7}+1)}} = \frac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2} \\ &= \frac{2(2\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)} = 8-2\sqrt{7} \end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=-2$ 이므로 $ab=-16$

idea

02 답 55

1단계 b , d 의 값 구하기

(나)에서 $\overline{BD}=1$ 이고 점 D는 y 축 위에 있으므로

$$D(0, 1-b)$$

점 D가 선분 AC의 중점이므로

$$\frac{-a+c}{2}=0, \frac{0+d}{2}=1-b$$

$$\therefore a=c, 2b+d=2$$

(가)에서 x 축이 $\angle BAC$ 를 이등분하고, x 축과

직선 BD는 수직으로 만나므로

$$\overline{OB}=\overline{OD}$$

$$b=1-b \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

이를 $2b+d=2$ 에 대입하여 풀면 $d=1$

2단계 a , c 의 값 구하기

(다)에서 $\overline{AE}=1$ 이고 점 E는 x 축 위에 있으므로

$$E(1-a, 0)$$

이때 $B(0, -\frac{1}{2})$, $C(a, 1)$ 이므로 직선 BC의 방정식은

$$y+\frac{1}{2}=\frac{1-(-\frac{1}{2})}{a-0}x \quad \therefore y=\frac{3}{2a}x-\frac{1}{2}$$

점 E가 이 직선 위에 있으므로

$$\frac{3}{2a}(1-a)-\frac{1}{2}=0$$

$$3-3a-a=0 \quad \therefore a=\frac{3}{4}$$

$$\therefore c=\frac{3}{4}$$

3단계 $8(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$ 의 값 구하기

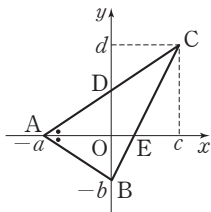
따라서 $A(-\frac{3}{4}, 0)$, $B(0, -\frac{1}{2})$, $C(\frac{3}{4}, 1)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}$$

$$\overline{BC}^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \frac{45}{16}$$

$$\overline{CA}^2 = \left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{13}{4}$$

$$\therefore 8(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2) = 8\left(\frac{13}{16} + \frac{45}{16} + \frac{13}{4}\right) = 55$$



03 답 $-9\sqrt{2}$

1단계 b 의 값 구하기

그림과 같이 직선 AB와 x 축의 교점을 P' 이

라 하면

$$\overline{BP} \leq \overline{AB} + \overline{AP}$$

$$\overline{BP} - \overline{AP} \leq \overline{AB}$$

$$= \overline{BP'} - \overline{AP'}$$

즉, 점 P가 직선 AB와 x 축의 교점일 때,

$\overline{BP} - \overline{AP}$ 의 값이 최대이다.

따라서 $\overline{BP} - \overline{AP}$ 의 최댓값은 선분 AB의 길이이므로

$$\sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{5 - 2\}^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore b = 3\sqrt{2}$$

2단계 a 의 값 구하기

두 점 $A(-1, 2)$, $B(2, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{5-2}{2-(-1)}(x-2) \quad \therefore y=x+3$$

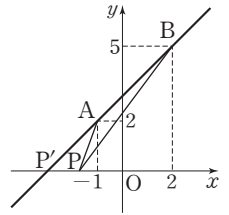
직선 $y=x+3$ 의 x 절편은 -3 이므로 $\overline{BP} - \overline{AP}$ 의 값이 최대가 될 때,

점 P의 x 좌표는 -3 이다.

$$\therefore a = -3$$

3단계 ab 의 값 구하기

$$\therefore ab = -3 \times 3\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$$



04 답 ⑤

1단계 점 O'의 좌표 구하기

점 D는 선분 OC를 2 : 1로 내분하는

점이므로

$$\overline{CD} = 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

점 F'에서 선분 BC에 내린 수선의 발을

H라 하면

$$\overline{F'H} = \overline{CD} = 4, \overline{OF'} = \overline{OF} = 5$$

이므로 직각삼각형 F'HO'에서

$$\overline{O'H} = \sqrt{\overline{OF'}^2 - \overline{F'H}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

이때 $\overline{CO'} = a$ 라 하면 $O'(a, 12)$, $F'(a+3, 8)$

두 직선 OO' , FF' 은 각각 직선 PQ와 수직이므로 $\overline{OO'} \parallel \overline{FF'}$

즉, 두 직선 OO' 과 FF' 의 기울기가 같으므로

$$\frac{12-0}{a-0} = \frac{8-0}{a+3-5}$$

$$12a-24=8a \quad \therefore a=6$$

$$\therefore O'(6, 12)$$

2단계 직선 PQ의 방정식 구하기

직선 OO' 의 기울기가 $\frac{12}{6}=2$ 이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

선분 OO' 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+12}{2}\right) \quad \therefore (3, 6)$$

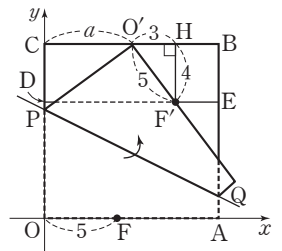
즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, 6)$ 을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$$

3단계 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{15}{2}$ 이므로

$$m+n=7$$



05 답 $\frac{1}{3}$

1단계 $a-b$ 의 값 구하기

직선 $y=mx+a$ 가 직선 $x=6$ 과 만나는 점을 R, 직선 $y=mx+b$ 가 y 축과 만나는 점을 S라 하면 사각형 PSQR는 평행사변형이다.

이때 $P(0, a)$, $S(0, b)$ 이고 평행사변형 PSQR의 넓이는 직사각형 OABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$(a-b) \times 6 = \frac{1}{3} \times 6 \times 12 \quad \therefore a-b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 직선 PQ의 방정식 구하기

$\triangle PQR = \triangle PSQ$ 이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선은 직사각형 OABC의 넓이를 이등분한다.

직사각형 OABC의 두 대각선의 교점은 두 점 $(6, 0)$, $(0, 12)$ 를 이은 선분의 중점이므로 교점의 좌표는

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+12}{2}\right) \quad \therefore (3, 6)$$

점 Q의 좌표는 $(6, 6m+b)$ 이므로 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{6m+b-a}{6-0} = \frac{6m-4}{6} = \frac{3m-2}{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, 직선 PQ는 기울기가 $\frac{3m-2}{3}$ 이고 직사각형 OABC의 두 대각선의 교점 $(3, 6)$ 을 지나므로 직선 PQ의 방정식은

$$y-6 = \frac{3m-2}{3}(x-3) \quad \therefore y = \frac{3m-2}{3}x - 3m + 8$$

3단계 m 의 값 구하기

직선 PQ의 x 절편은 $0 = \frac{3m-2}{3}x - 3m + 8$

$$\frac{3m-2}{3}x = 3m-8 \quad \therefore x = \frac{9m-24}{3m-2}$$

주어진 조건에서 이 직선의 x 절편이 $3m+5(a-b)=3m+20$ 이므로

$$\frac{9m-24}{3m-2} = 3m+20, \quad 9m^2+45m-16=0$$

$$(3m+16)(3m-1)=0 \quad \therefore m = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < m < 1)$$

06 답 ④

1단계 선분 AB의 수직이등분선을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-6}{18-0} = -\frac{1}{3}$ 이므로 직선 AB와 수직인 직선의 기울기는 3이고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0+18}{2}, \frac{6+0}{2}\right), \text{ 즉 } (9, 3) \text{ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은 } y-3=3(x-9) \quad \therefore y=3x-24$$

이때 점 $C(a, b)$ 가 이 직선 위의 점이므로

$$b=3a-24 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 무게중심을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기

삼각형 CAB의 무게중심을 G'이라 하면 $\overline{CP} : \overline{CA} = 3 : 4$ 이므로

$$\overline{CG} : \overline{CG'} = 3 : 4 \quad \therefore \overline{CG'} = \frac{4}{3}\overline{CG} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

$$\overline{CG'} : \overline{CM} = 2 : 3 \text{ 이므로 } \overline{CM} = \frac{3}{2}\overline{CG'} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{즉, } \overline{CM}^2 = 40 \text{ 이므로 } (a-9)^2 + (b-3)^2 = 40 \\ \therefore a^2 + b^2 - 18a - 6b + 50 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

3단계 $a+b$ 의 값 구하기

①을 ②에 대입하면

$$a^2 + (3a-24)^2 - 18a - 6(3a-24) + 50 = 0$$

$$10a^2 - 180a + 770 = 0$$

$$a^2 - 18a + 77 = 0$$

$$(a-7)(a-11) = 0$$

$$\therefore a=7 \text{ 또는 } a=11$$

이를 ①에 대입하여 풀면

$$a=7 \text{ 일 때 } b=-3, \quad a=11 \text{ 일 때 } b=9$$

이때 점 C는 제1사분면 위의 점이므로

$$a=11, \quad b=9 \quad \therefore a+b=20$$

07 답 $\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$

1단계 점 A의 좌표 구하기

점 A는 두 직선 $y=2x-1$, $y=\frac{5}{2}x-1$

의 교점이므로

$$A(0, -1)$$

2단계 점 B의 좌표 구하기

점 B의 좌표를 $(a, 1)$ 이라 하면 선분

AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 이고, 이

점은 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$$-\frac{a}{2} + 2 = 0 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore B(4, 1)$$

3단계 점 C의 좌표 구하기

점 C의 좌표를 $(b, -b+2)$ 라 하면 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+b}{2}, \frac{-1-b+2}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{b}{2}, \frac{-b+1}{2}\right) \text{ 이고 이 점은 직선 } y=1 \text{ 위에}$$

있으므로

$$\frac{-b+1}{2} = 1 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore C(-1, 3)$$

4단계 삼각형 ABC의 수심의 좌표 구하기

직선 AB의 기울기는 $\frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{1}{2}$ 이므로 점 $C(-1, 3)$ 을 지나고 직

선 AB에 수직인 직선의 방정식은

$$y-3 = -2(x+1) \quad \therefore y = -2x+1$$

두 식 $y=\frac{5}{2}x-1$, $y=-2x+1$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{4}{9}, \quad y = \frac{1}{9}$$

따라서 삼각형 ABC의 수심의 좌표는 $\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$ 이다.

08 답 ④

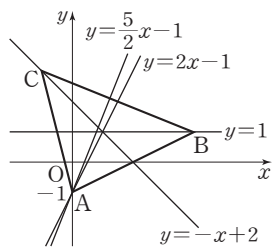
1단계 $(a-b)^2 + (2a-2b^2-3)^2$ 의 의미 파악하기

$P(b, 2b^2+3)$, $Q(a, 2a)$ 라 하면 점 P는 함수 $y=2x^2+3$ 의 그래프 위의 점이고, 점 Q는 직선 $y=2x$ 위의 점이다.

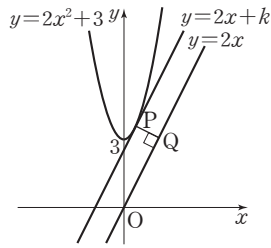
이때 $\overline{PQ} = \sqrt{(a-b)^2 + \{2a-(2b^2+3)\}^2}$ 이므로

$$\overline{PQ}^2 = (a-b)^2 + (2a-2b^2-3)^2$$

즉, 선분 PQ의 길이가 최소일 때, $(a-b)^2 + (2a-2b^2-3)^2$ 의 값이 최소이다.



따라서 그림과 같이 직선 $y=2x+k$ 와
함수 $y=2x^2+3$ 의 그래프가 접할 때,
선분 PQ의 길이는 최소이다.



2단계 $(a-b)^2 + (2a-2b^2-3)^2$ 의 최솟값 구하기

이차방정식 $2x+k=2x^2+3$, 즉 $2x^2-2x+3-k=0$ 의 판별식을 D 라
하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2(3-k) = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

이때 선분 PQ의 길이는 직선 $y=2x+\frac{5}{2}$ 위의 점 $(0, \frac{5}{2})$ 와 직선
 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PQ} = \frac{\left| -\frac{5}{2} \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 $(a-b)^2 + (2a-2b^2-3)^2$ 의 최솟값은 $\overline{PQ}^2 = \frac{5}{4}$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

즉, $p=4$, $q=5$ 이므로 $p+q=9$

09 답 43

1단계 사다리꼴 PRSQ의 높이 구하기

직선 AB의 방정식은 $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 즉 $4x-3y+12=0$ 이므로

점 C(4, -3)과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|16+9+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{37}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC와 삼각형 PQC는 닮음이고 $\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ 이

므로 $\overline{PQ} = a$ 라 하면 두 삼각형 ABC와 PQC의 닮음비는 $5 : a$

따라서 점 C와 직선 PQ 사이의 거리는

$$\frac{37}{5} \times \frac{a}{5} = \frac{37}{25}a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 사다리꼴 PRSQ의 높이는 $\frac{37}{5} - \frac{37}{25}a$

2단계 사다리꼴 PRSQ의 넓이의 최댓값 구하기

두 사각형 BQPR과 SQPA는 각각 평행사변형이므로

$$\overline{PQ} = \overline{BS} + \overline{SR} = \overline{AR} + \overline{SR} \text{에서 } \overline{BS} = \overline{AR}$$

$$\overline{AB} = \overline{BS} + \overline{AS} = \overline{BS} + \overline{PQ} = \overline{BS} + a \text{이므로 } \overline{BS} = 5 - a$$

$$\therefore \overline{SR} = 5 - 2\overline{BS} = 5 - 2(5-a) = 2a-5$$

사다리꼴 PRSQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \{ (2a-5) + a \} \left(\frac{37}{5} - \frac{37}{25}a \right)$$

$$= -\frac{111}{50} \left(a^2 - \frac{20}{3}a + \frac{25}{3} \right)$$

$$= -\frac{111}{50} \left(a - \frac{10}{3} \right)^2 + \frac{37}{6}$$

이때 사각형 PRSQ는 사다리꼴이고 $\overline{AP} < \overline{PC}$ 이므로 $\frac{5}{2} < a < 5$

따라서 $\frac{5}{2} < a < 5$ 에서 $a = \frac{10}{3}$ 일 때, S 는 최댓값 $\frac{37}{6}$ 을 갖는다.

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

즉, $p=6$, $q=37$ 이므로 $p+q=43$

09 원의 방정식

step 1 핵심 문제

| 104~105쪽

01 ③

02 10

03 ②

04 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

05 ②

06 $2\sqrt{5}$

07 ③

08 $a < -\frac{3}{4}$

09 50

10 ④

11 (25, -25)

12 ③

01 답 ③

$$x^2 + y^2 - 8kx + 4ky - 20k - 7 = 0 \text{에서}$$

$$(x-4k)^2 + (y+2k)^2 = 20k^2 + 20k + 7$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(4k, -2k)$ 이고, 반지름의 길이는

$$\sqrt{20k^2 + 20k + 7} \text{이다.}$$

원의 넓이가 최소하려면 반지름의 길이가 최소이어야 하므로

$$20k^2 + 20k + 7 = 20\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$$

따라서 $k = -\frac{1}{2}$ 일 때, 반지름의 길이는 최소이고 그때의 원의 중심의

좌표는 $(-2, 1)$ 이므로 원점과 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

02 답 10

세 점 (0, 0), (6, 0), (-4, 4)를 지나는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ (A, B, C 는 상수)이라 하면 이 원이 점

(0, 0)을 지나므로

$$C = 0$$

즉, 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ $\dots\dots \textcircled{1}$

원 ①이 점 (6, 0)을 지나므로

$$36 + 6A = 0 \quad \therefore A = -6$$

또 원 ①이 점 (-4, 4)를 지나므로

$$16 + 16 - 4A + 4B = 0$$

$$A - B = 8 \quad \therefore B = -14 (\because A = -6)$$

즉, 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 6x - 14y = 0$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-7)^2 = 58$$

따라서 원의 중심의 좌표는 (3, 7)이므로

$$p=3, q=7 \quad \therefore p+q=10$$

다른 풀이

주어진 세 점을 A(0, 0), B(6, 0), C(-4, 4)라 하고 원의 중심을

P(p, q)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$p^2 + q^2 = (p-6)^2 + q^2$$

$$-12p + 36 = 0 \quad \therefore p = 3$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$p^2 + q^2 = \{p - (-4)\}^2 + \{q - 4\}^2$$

$$8p - 8q = -32 \quad \therefore p - q = -4$$

$$\therefore q = 7 (\because p = 3)$$

$$\therefore p + q = 10$$

03 답 ②

원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$ 이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|a|$ 이므로 $(x-a)^2+(y-a-1)^2=a^2$ y 축에 접하므로 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$ 이다.

이 원이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2+(3-a-1)^2=a^2$$

$$a^2-6a+5=0, (a-1)(a-5)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=5$$

즉, 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(1, 2), (5, 6)$ 이므로

$$PQ=\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{2}$$

원점과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

04 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax-2y-7+k(x^2+y^2-8x+8y-9)=0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

..... ㉠

원 ㉠이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$1+4+a-4-7+k(1+4-8+16-9)=0$$

$$\therefore a+4k=6$$

..... ㉡

또 원 ㉠이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$4+4+2a-4-7+k(4+4-16+16-9)=0$$

$$\therefore 2a-k=3$$

..... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, k=1$

이를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+2x-2y-7+x^2+y^2-8x+8y-9=0$$

$$x^2+y^2-3x+3y-8=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

05 답 ②

두 원 C_1, C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-6y+9-(x^2+y^2+2x-8y+a)=0$$

$$\therefore 2x+2y+9-a=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2+y^2+4x-6y+9=0 \text{에서 } (x+2)^2+(y-3)^2=4$$

따라서 직선 ㉠이 원 C_1 의 넓이를 이등분하려면 원 C_1 의 중심 $(-2, 3)$

을 지나야 하므로

$$-4+6+9-a=0 \quad \therefore a=11$$

06 답 $2\sqrt{5}$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y-4-(x^2+y^2-4x-8y+6)=0$$

$$\therefore 4x+3y-5=0 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$x^2+y^2+4x-2y-4=0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9 \quad \dots\dots ㉡$$

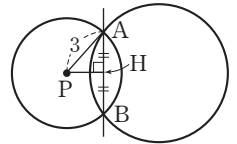
두 원의 교점을 각각 A, B, 원 ㉡의 중심을 P라 하고, 점 $P(-2, 1)$ 에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$PH=\frac{|-8+3-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때 $AP=3$ 이므로 직각삼각형 APH에서

$$AH=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore AB=2AH=2\sqrt{5} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$



07 답 ③

$P(x, y)$ 라 하면 $OP:AP=2:1$ 이므로

$$OP=2AP \text{에서 } OP^2=4AP^2$$

$$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+(y-3)^2\}$$

$$x^2+y^2-16x-8y+60=0$$

$$\therefore (x-8)^2+(y-4)^2=20$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{5})^2 = 20\pi$$

개념 NOTE

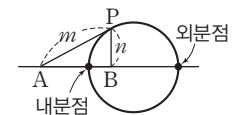
두 점 A, B에 대하여

$$AP:BP=m:n \quad (m>0, n>0, m \neq n)$$

인 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $m:n$ 으로

내분하는 점과 $m:n$ 으로 외분하는 점들 지름의 양

끝 점으로 하는 원이다. 이와 같은 원을 아폴로니오스의 원이라 한다.



08 답 $a < -\frac{3}{4}$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표가 $(r, -r)$ 이므로

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

원의 중심 $(r, -r)$ 가 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$$r+r-2=0 \quad \therefore r=1$$

즉, 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 이 직선 $y=ax+1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $(x-1)^2+(ax+1+1)^2=1$, 즉

$$(a^2+1)x^2+2(2a-1)x+4=0$$
이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a-1)^2-4(a^2+1)>0$$

$$-4a-3>0 \quad \therefore a<-\frac{3}{4}$$

다른 풀이

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표가 $(r, -r)$ 이므로

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

원의 중심 $(r, -r)$ 가 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$$r+r-2=0 \quad \therefore r=1$$

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 과 직선 $y=ax+1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심의 좌표가 $(1, -1)$ 이고, 원의 중심과 직선 $y=ax+1$, 즉 $ax-y+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 하므로

$$\frac{|a+1+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}<1, |a+2|<\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면 $a^2+4a+4<a^2+1$

$$4a<-3 \quad \therefore a<-\frac{3}{4}$$

09 답 50

원의 중심의 좌표를 (a, a) 라 하면 점 (a, a) 와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $|a|$ 와 같으므로

$$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$$

$$|-a+12|=5|a|$$

양변을 제곱하면 $a^2-24a+144=25a^2$

$$a^2+a-6=0, (a+3)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-3, -3), (2, 2)$ 이므로

$$\overline{AB}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2=50$$

10 답 ④

원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $5x-12y-26=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-15-24-26|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=5$$

원의 반지름의 길이는 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $5+2=7$, 최솟값은 $5-2=3$

이때 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중 자연수인 것은 3, 4, 5, 6, 7의 5개이고 거리가 3, 7일 때만 점이 1개이고 나머지 거리일 때는 점이 2개씩 있으므로 구하는 점의 개수는

$$5 \times 2 - 2 = 8$$

11 답 $(25, -25)$

점 $(a, a-1)$ 이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$$a^2+(a-1)^2=25$$

$$a^2-a-12=0, (a+3)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=4$$

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-3x-4y=25 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(4, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x+3y=25 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } x=25, y=-25$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(25, -25)$

12 답 ③

점 $(0, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y=mx+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=mx+4$,

즉 $mx-y+4=0$ 사이의 거리는 2이므로

$$\frac{|4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \sqrt{m^2+1}=2$$

$$m^2+1=4 \quad \therefore m^2=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또 직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $x^2+(y-a)^2=9$ 에 접하면 원의 중심 $(0, a)$ 와 직선

$y=mx+4$, 즉 $mx-y+4=0$ 사이의 거리는 3이므로

$$\frac{|-a+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3, \frac{|-a+4|}{2}=3 (\because \textcircled{2})$$

$$|-a+4|=6, -a+4=\pm 6$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-2+10=8$$

step 2 고난도 문제

| 106~110쪽

01 ② 02 ⑤ 03 16 04 ③ 05 $\frac{15}{4}$ 06 $\sqrt{5}\pi$

07 108 08 256 09 ⑤ 10 $\frac{3}{4}$ 11 ② 12 ④

13 2 14 9 15 $\sqrt{15}<k<7$ 16 31 17 ②

18 80 19 2 20 87 21 -20 22 π 23 $-\frac{4}{3}$

24 ①

01 답 ②

$$x^2+y^2-6x-4y+1=0 \text{에서 } (x-3)^2+(y-2)^2=12$$

두 직선 $y=ax, y=bx+c$ 가 원의 넓이를 4등분하려면 두 직선은 원의 중심 $(3, 2)$ 를 지나고 서로 수직이어야 한다.

직선 $y=ax$ 가 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$3a=2 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$$

직선 $y=bx+c$ 가 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$3b+c=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 두 직선 $y=ax, y=bx+c$ 가 서로 수직이므로

$$ab=-1 \quad \therefore b=-\frac{3}{2} (\because a=\frac{2}{3})$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -\frac{9}{2}+c=2 \quad \therefore c=\frac{13}{2}$$

$$\therefore a+b+c=\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{13}{2}=\frac{17}{3}$$

02 답 ⑤

호 BQ와 두 선분 PB, PQ에 접하는 원

을 C라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 r ,

중심을 M이라 하면

$$M(r+1, r)$$

$$\therefore \overline{OM}=\sqrt{(r+1)^2+r^2}$$

원 C와 호 BQ의 접점을 R라 하면

$$\overline{OM}=\overline{OR}-\overline{MR}=8-r \rightarrow \text{세 점 O, M, R가 일직선 위에 있다.}$$

즉, $\sqrt{(r+1)^2+r^2}=8-r$ 이므로 양변을 제곱하면

$$(r+1)^2+r^2=(8-r)^2$$

$$r^2+18r-63=0, (r+21)(r-3)=0$$

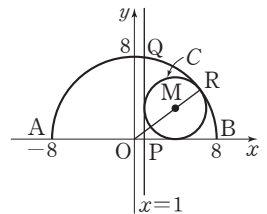
$$\therefore r=3 (\because r>0)$$

중심의 좌표가 $(4, 3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원 C의 방정식은

$$(x-4)^2+(y-3)^2=9$$

$$\therefore x^2+y^2-8x-6y+16=0$$

따라서 $a=-8, b=-6, c=16$ 이므로 $a+b+c=2$



03 답 16

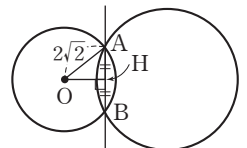
그림과 같이 두 원 $x^2+y^2-8=0$,

$x^2+y^2+3x-4y-k=0$ 의 두 교점을 A,

B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원의 넓이

가 최소가 되는 경우는 선분 AB를 지름으

로 할 때이다.



직선 AB의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 8 - (x^2 + y^2 + 3x - 4y - k) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - k + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $x^2 + y^2 - 8 = 0$, 즉 $x^2 + y^2 = 8$ 의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $\textcircled{1}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|-k+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|k-8|}{5}$$

원 $x^2 + y^2 = 8$ 의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{OA} = 2\sqrt{2}$$

직각삼각형 AOH에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{|k-8|}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{8 - \frac{(k-8)^2}{25}} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{8 - \frac{(k-8)^2}{25}}$$

따라서 두 교점 A, B를 지나는 원의 넓이의 최솟값은

$$\left\{8 - \frac{(k-8)^2}{25}\right\} \pi$$

$$\text{즉, } \left\{8 - \frac{(k-8)^2}{25}\right\} \pi = 4\pi \text{이므로}$$

$$\frac{(k-8)^2}{25} = 4, (k-8)^2 = 100$$

$$k-8 = \pm 10 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 18$$

따라서 구하는 모든 k의 값의 합은

$$-2 + 18 = 16$$

04 답 ③

두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 P, Q라 하면 $P(7, a), Q(3, b)$

$$\overline{OP} = 6 + 2 = 8 \text{에서}$$

→ 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이의 합과 같다.

$$\sqrt{7^2 + a^2} = 8, 49 + a^2 = 64$$

$$a^2 = 15 \quad \therefore a = \sqrt{15} \quad (\because a > 0)$$

$$\text{또 } \overline{OQ} = 6 - 1 = 5 \text{에서}$$

→ 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이의 차와 같다.

$$\sqrt{3^2 + b^2} = 5, 9 + b^2 = 25$$

$$b^2 = 16 \quad \therefore b = 4 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore C_1: (x-7)^2 + (y-\sqrt{15})^2 = 4, C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$$

두 원 $C: x^2 + y^2 - 36 = 0, C_1: x^2 + y^2 - 14x - 2\sqrt{15}y + 60 = 0$ 의 접점에
서의 접선은 두 원 C, C_1 의 교점을 지나는 직선이므로

$$x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 - 14x - 2\sqrt{15}y + 60) = 0$$

$$14x + 2\sqrt{15}y - 96 = 0$$

$$\therefore 7x + \sqrt{15}y - 48 = 0$$

$$\text{따라서 이 직선의 } y\text{-절편이 } \frac{16\sqrt{15}}{5} \text{이므로 점 A의 좌표는 } \left(0, \frac{16\sqrt{15}}{5}\right)$$

두 원 $C: x^2 + y^2 - 36 = 0, C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ 의 접점에서의
접선은 두 원 C, C_2 의 교점을 지나는 직선이므로

$$x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24) = 0$$

$$6x + 8y - 60 = 0$$

$$\therefore 3x + 4y - 30 = 0$$

따라서 이 직선의 x절편이 10이므로 점 B의 좌표는 (10, 0)

즉, 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OA} = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{16\sqrt{15}}{5} = 16\sqrt{15}$$

05 답 $\frac{15}{4}$

호 AB를 포함하는 원은 원 $x^2 + y^2 = 36$ 과
함동이므로 반지름의 길이가 6이고, 점
(3, 0)에서 x축에 접하므로 중심의 좌표가
(3, 6)이다.

따라서 호 AB를 포함하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 36$ 배점 40%

이때 선분 AB는 두 원 $x^2 + y^2 = 36,$

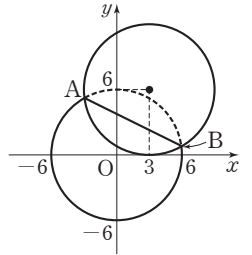
$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 36$ 의 공통인 현이므

로 두 원 $x^2 + y^2 - 36 = 0, x^2 + y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$ 의 교점을 지나는
직선 AB의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 - 6x - 12y + 9) = 0$$

$$2x + 4y - 15 = 0 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4} \quad \dots\dots\text{배점 40\%}$$

따라서 직선 AB의 y절편은 $\frac{15}{4}$ 이다.배점 20%



★ idea

06 답 $\sqrt{5}\pi$

두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 P, Q라 하면 t초 후 $P(-5+t, 0),$

$Q(0, 5-2t)$ 이므로 두 원 C_1, C_2 의 방정식은

$$C_1: (x-t+5)^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$C_2: x^2 + (y+2t-5)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편 두 원 C_1, C_2 의 내부의 공통부분의 넓이가 최대일 때, 두 원 C_1, C_2 의 중심 사이의 거리가 최소이다.

중심 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(5-t)^2 + (5-2t)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 30t + 50} \\ &= \sqrt{5(t-3)^2 + 5} \end{aligned}$$

따라서 $t=3$ 일 때, 선분 PQ의 길이가 최소이므로 공통부분의 넓이는
최대이다.

$t=3$ 을 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$C_1: x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$

이때 두 원 C_1, C_2 의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 + k(x^2 + y^2 + 2y - 3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이 원이 점 (0, -1)을 지나므로

$$1 + 3 + k(1 - 2 - 3) = 0$$

$$4 - 4k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 + x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + y = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\pi$

07 답 108

$\overline{PA}^2 = (x-5)^2 + y^2, \overline{PB}^2 = (x-1)^2 + y^2, \overline{PC}^2 = x^2 + (y-\sqrt{3})^2$ 이므로

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 \text{에서}$$

$$(x-5)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-\sqrt{3})^2$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 2\sqrt{3}y + 23 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore (x-6)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 16$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(6, -\sqrt{3})$ 이고, 반지름의 길이가 4인 원이므로 x 의 값의 범위는

$$6-4 \leq x \leq 6+4 \quad \therefore 2 \leq x \leq 10$$

이때 ㉠에서 $y^2 + 2\sqrt{3}y = -x^2 + 12x - 23$ 이므로

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}y &= x^2 - (-x^2 + 12x - 23) \\ &= 2x^2 - 12x + 23 = 2(x-3)^2 + 5 \end{aligned}$$

따라서 $2 \leq x \leq 10$ 에서 $x=10$ 일 때 최댓값은 103, $x=3$ 일 때 최솟값은 5이므로 그 합은 $103+5=108$

08 답 256

선분 AB의 길이가 3이므로

$$\sqrt{(a-5)^2 + (b-12)^2} = 3$$

$$\therefore (a-5)^2 + (b-12)^2 = 9$$

따라서 점 B가 나타내는 도형은 원 $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 9$ 이다.

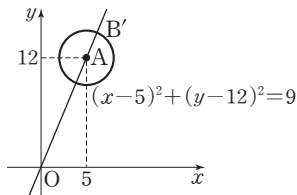
한편 원점 O에 대하여 $a^2 + b^2 = \overline{OB}^2$ 이므로 선분 OB의 길이가 최대일 때, $a^2 + b^2$ 이 최댓값을 갖는다.

직선 OA가 원과 만나는 두 점 중 원점에서 멀리 떨어져 있는 점을 B'이라 하면 선분 OB의 길이의 최댓값은 선분 OB'의 길이와 같으므로

$$\overline{OB'} = \overline{OA} + \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} + 3 = 16$$

따라서 선분 OB의 길이의 최댓값은 16이므로 $a^2 + b^2$ 의 최댓값은 $16^2 = 256$



09 답 ⑤

$P(a, b)$ 라 하고, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+4+1}{3}, y = \frac{b+3+7}{3}$$

$$\therefore a = 3x - 5, b = 3y - 10 \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 P는 원 C 위의 점이므로

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(3x-6)^2 + (3y-12)^2 = 4$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = \frac{4}{9}$$

즉, 삼각형 PAB의 무게중심이 나타내는 도형은 중심의 좌표가

$(2, 4)$ 이고, 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$ 인 원이다.

한편 직선 AB의 기울기는 $\frac{7-3}{1-4} = -\frac{4}{3}$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y-3 = -\frac{4}{3}(x-4)$$

$$\therefore 4x + 3y - 25 = 0$$

이때 삼각형 PAB의 무게중심이 나타내는 원의 중심 $(2, 4)$ 와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|8+12-25|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1$$

따라서 구하는 거리의 최솟값은

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

10 답 $\frac{3}{4}$

점 $(2, t)$ 를 중심으로 하고 원점을 지나는 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{4+t^2}$$
이므로 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-t)^2 = 4+t^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 2ty = 0$$

두 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2ty = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 의 두 교점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 2ty - (x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$\therefore 2x + ty = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

두 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2ty = 0$,

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ 의 중심을 지나는 직선의

$$\text{방정식은 } y = \frac{t}{2}x$$

선분 PQ의 중점은 직선 $y = \frac{t}{2}x$ 위에

있으므로 $y = \frac{t}{2}x$ 를 ㉠에 대입하여 풀면

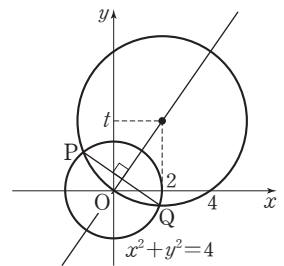
$$x = \frac{4}{4+t^2}, y = \frac{2t}{4+t^2}$$

$$\text{이때 } x^2 + y^2 = \frac{4(4+t^2)}{(4+t^2)^2} = \frac{4}{4+t^2} = x \text{이므로}$$

$$x^2 - x + y^2 = 0 \quad \therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $r^2 = \frac{1}{4}$ 이므로

$$a + b + r^2 = \frac{3}{4}$$



11 답 ②

원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 $\overline{OP} = \sqrt{10}$, $\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이

고, $\overline{OH} = a$, $\overline{HP} = b$ 라 하면 두 삼각형 OHP, OHA는 모두 직각삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = 10$$

$$\dots\dots ㉠$$

$$a^2 + (b+3)^2 = 25 \quad \therefore a^2 + b^2 + 6b = 16 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡-㉠을 하면

$$6b = 6 \quad \therefore b = 1$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a = 3$ ($\because a > 0$)

직선 l의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y - 3 = m(x - 4)$$

$$\therefore mx - y - 4m + 3 = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $mx - y - 4m + 3 = 0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 3$$

$$|-4m+3| = 3\sqrt{m^2+1}$$

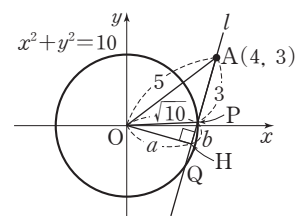
양변을 제곱하면

$$16m^2 - 24m + 9 = 9(m^2 + 1)$$

$$7m^2 - 24m = 0$$

$$m(7m - 24) = 0$$

$$\therefore m = \frac{24}{7} \quad (\because m > 0)$$



12 답 ④

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 36$$

원의 중심을 C(1, 2)라 하고, P(4, 6)이라 하면 $CP = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$ 이므로 점 P는 원 내부의 점이다.

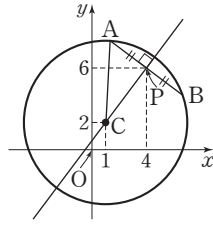
선분 AB의 길이는 선분 AB가 직선 CP와 수직일 때 최소이므로 최소값은

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2\overline{AP} = 2\sqrt{AC^2 - PC^2} \\ &= 2\sqrt{6^2 - 5^2} = 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

또 선분 AB의 길이는 선분 AB가 원의 중심을 지날 때, 즉 지름일 때 최대이므로 최대값은

$$\overline{AB} = 12 \quad \therefore 2\sqrt{11} \leq \overline{AB} \leq 12$$

따라서 자연수인 선분 AB의 길이는 7, 8, 9, 10, 11, 12이므로 그 합은 $7+8+9+10+11+12=57$



13 답 2

직선 $y = mx - m + 1$, 즉 $y = m(x-1) + 1$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (1, 1)을 지나고 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크므로

P(1, 1)

$$S_1 = S_2 \text{이므로 } \overline{PQ} = \overline{OQ}$$

따라서 삼각형 PQO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선은 점 Q를 지난다.

이때 직선 OP의 기울기는 1이고 선분 OP의 중점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이므로 선분 OP의 수직이등분선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = -x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x+1-1)^2 = 1, 2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

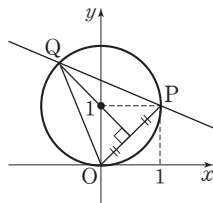
이를 ①에 대입하여 풀면

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{일 때 } y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{일 때 } y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, $Q(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ 또는 $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ 이므로 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = 1 - \sqrt{2} \text{ 또는 } \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = 1 + \sqrt{2}$$

따라서 m 은 직선 PQ의 기울기이므로 모든 실수 m 의 값의 합은 $(1-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) = 2$

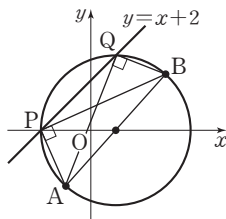


14 답 9

$\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ 이므로 그림과 같이 두 점 P, Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.

원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \therefore (1, 0)$$



원의 지름의 길이는 선분 AB의 길이이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})\}^2} = 6$$

즉, 중심의 좌표가 (1, 0)이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + y^2 = 9$$

$y = x + 2$ 를 대입하면

$$(x-1)^2 + (x+2)^2 = 9$$

$$x^2 + x - 2 = 0, (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

이를 $y = x + 2$ 에 대입하여 풀면

$$x = -2 \text{일 때 } y = 0, x = 1 \text{일 때 } y = 3$$

즉, P(-2, 0), Q(1, 3)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

점 A(-1, -√5)와 직선 $y = x + 2$, 즉 $x - y + 2 = 0$ 사이의 거리를 d_1

이라 하면

$$d_1 = \frac{|-1 + \sqrt{5} + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$$

이므로 삼각형 PAQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times d_1 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} = \frac{6 + 6\sqrt{5}}{4}$$

점 B(3, √5)와 직선 $x - y + 2 = 0$ 사이의 거리를 d_2 라 하면

$$d_2 = \frac{|3 - \sqrt{5} + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$$

이므로 삼각형 PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times d_2 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} = \frac{30 - 6\sqrt{5}}{4}$$

따라서 두 삼각형 PAQ와 PBQ의 넓이의 합은

$$\frac{6 + 6\sqrt{5}}{4} + \frac{30 - 6\sqrt{5}}{4} = 9$$

15 답 $\sqrt{15} < k < 7$

그림과 같이 함수 $y = k|x|$ 의 그래프가 원

$x^2 + (y-8)^2 = 4$ 와 접할 때, 두 원과 만나는 점의

개수는 4이고, 원 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$ 와 접할 때,

두 원과 만나는 점의 개수는 7이다.배점 20%

(i) 원 $x^2 + (y-8)^2 = 4$ 와 접할 때,

점 (0, 8)과 직선 $y = kx$, 즉 $kx - y = 0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|-8|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 2, 4 = \sqrt{k^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $16 = k^2 + 1$

$$k^2 = 15 \quad \therefore k = \sqrt{15} (\because k > 0) \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

(ii) 원 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$ 와 접할 때,

점 (1, 3)과 직선 $y = -kx$, 즉 $kx + y = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1^2}} = \sqrt{2}, |k+3| = \sqrt{2}\sqrt{k^2+1}$$

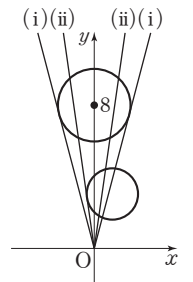
양변을 제곱하면 $k^2 + 6k + 9 = 2(k^2 + 1)$

$$k^2 - 6k - 7 = 0, (k+1)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 7 (\because k > 0) \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

따라서 함수 $y = k|x|$ 의 그래프가 (i), (ii) 사이에 있을 때, 두 원과 만나는 점의 개수는 6이므로 구하는 k 의 값의 범위는

$$\sqrt{15} < k < 7 \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$



16 답 31

원 $C: x^2 + y^2 - 5x = 0$, 즉 $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ 의 중심을 C 라 하면

$$C(\frac{5}{2}, 0)$$

원 C 가 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A 라 하면 점 P 가 원 C 위의 점이고 선분 OA 가 원 C 의 지름이므로

$$\angle OPA = 90^\circ$$

직각삼각형 OAP 에서 $\overline{OP} = 3$ 이고

$$\overline{OA} = 2 \times \frac{5}{2} = 5 \text{이므로}$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 OAP 과 삼각형 OPH 에서 $\angle OPA = \angle OHP = 90^\circ$, $\angle POA = \angle HOP$ 이므로

$\triangle OAP \sim \triangle OPH$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OH}$ 이므로

$$5 : 3 = 3 : \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{9}{5}$$

또 $\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{AP} : \overline{PH}$ 이므로

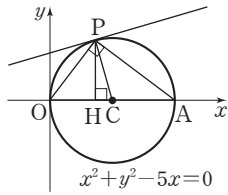
$$5 : 3 = 4 : \overline{PH} \quad \therefore \overline{PH} = \frac{12}{5}$$

즉, 점 P 의 좌표는 $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ 이므로 직선 CP 의 기울기는

$$\frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5} - \frac{5}{2}} = -\frac{24}{7}$$

이때 점 P 에서의 접선과 직선 CP 가 서로 수직이므로 점 P 에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$

따라서 $p=24$, $q=7$ 이므로 $p+q=31$



17 답 ②

삼각형 ABP 의 밑변을 선분 AB 라 하면

점 P 와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형의 넓이가 최대이므로 그림과 같이 직선 AB 에 평행한 원의 접선 중 제 1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점이 P 가 될 때 삼각형 ABP 의 넓이가 최대이다.

점 P 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직선 PH 는 점 P 에서의 접선과 수직이므로 원의 중심인 원점을 지난다.

이때 점 H 는 선분 AB 의 중점이므로 점 H 의 좌표는 $(\frac{-2+1}{2}, \frac{-1+(-2)}{2}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다.

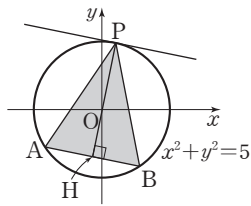
$$\overline{OH} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{이므로}$$

$$\overline{PH} = \overline{OP} + \overline{OH} = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + \{-2 - (-1)\}^2} = \sqrt{10}$ 이므로 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times (\sqrt{5} + \frac{\sqrt{10}}{2}) = \frac{5}{2}(1 + \sqrt{2})$$

따라서 $p=2$, $q=5$ 이므로 $pq=10$



18 답 80

원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 원의 중심과 두 직선 $x-3y=0$, $3x-y=0$ 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$a-3b = \pm(3a-b) \quad \therefore b = -a \text{ 또는 } b = a$$

즉, 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

원의 중심 (a, a) 와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$\frac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 4, \quad \frac{|2a|}{\sqrt{10}} = 4$$

$$|a| = 2\sqrt{10} \quad \therefore a = \pm 2\sqrt{10}$$

$$\therefore A(2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}), C(-2\sqrt{10}, -2\sqrt{10})$$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

원의 중심 $(a, -a)$ 와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$\frac{|3a+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 4, \quad \frac{|4a|}{\sqrt{10}} = 4$$

$$|a| = \sqrt{10} \quad \therefore a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore B(-\sqrt{10}, \sqrt{10}), D(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$$

이때 네 점 A, B, C, D 를 꼭짓점으로 하는 사각형은 두 선분 AC, BD 를 대각선으로 하는 마름모이다.

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2 + (-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2} = 8\sqrt{5}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(\sqrt{10}-(-\sqrt{10}))^2 + (-\sqrt{10}-\sqrt{10})^2} = 4\sqrt{5}$$

따라서 사각형 $ABCD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 80$$

19 답 2

두 점 $(0, 1)$, $(a, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + y = 1 \quad \therefore y = 1 - \frac{x}{a}$$

이를 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + (1 - \frac{x}{a})^2 = 1$$

$$(1 + \frac{1}{a^2})x^2 - \frac{2}{a}x = 0, \quad x(\frac{a^2+1}{a^2}x - \frac{2}{a}) = 0$$

$$\frac{a^2+1}{a^2}x = \frac{2}{a} \quad \therefore x = \frac{2a}{a^2+1}$$

이를 $y = 1 - \frac{x}{a}$ 에 대입하면

$$y = 1 - \frac{\frac{2a}{a^2+1}}{a} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

$$\therefore P(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1})$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2a}{a^2+1}x + \frac{a^2-1}{a^2+1}y = 1$$

$$\text{이때 점 } Q \text{의 } x \text{좌표는 } \frac{2a}{a^2+1}x = 1 \quad \therefore x = \frac{a^2+1}{2a}$$

삼각형 POQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{a^2+1}{2a} \times \frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{a^2-1}{4a}$$

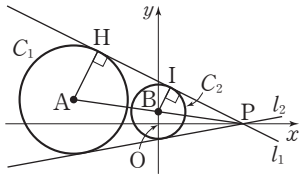
$$\text{즉, } \frac{a^2-1}{4a} = \frac{3}{8} \text{이므로}$$

$$2a^2 - 2 = 3a, \quad 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$(2a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 (\because a > 1)$$

20 답 87

두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 A, B라 하면 $A(-7, 2), B(0, b)$
 그림과 같이 두 원 C_1, C_2 와 직선 l_1 의 접점을 각각 H, I라 하면
 $\angle AHP = \angle BIP = 90^\circ$



이때 $\overline{AH} = 2\sqrt{5}, \overline{BI} = \sqrt{5}$ 이므로 $\overline{AH} : \overline{BI} = 2 : 1$

따라서 점 B는 선분 AP의 중점이므로 $\rightarrow$ 삼각형 PHA와 삼각형 PIB의
 닮음비는 2 : 1이다.
 $\frac{-7+a}{2} = 0, \frac{2+b}{2} = b \quad \therefore a = 7, b = 1$

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $P(7, 0)$ 을 지나는 접선의 방정식은
 $y = m(x - 7) \quad \therefore mx - y - 7m = 0$

이때 점 $B(0, 1)$ 과 직선 $mx - y - 7m = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|-1 - 7m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|-7m - 1| = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$49m^2 + 14m + 1 = 5(m^2 + 1)$$

$$\therefore 22m^2 + 7m - 2 = 0$$

따라서 이 이차방정식의 두 근이 두 직선 l_1, l_2 의 기울기이므로 근과 계
 수의 관계에 의하여 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 곱은

$$\frac{-2}{22} = -\frac{1}{11} \quad \therefore c = -\frac{1}{11}$$

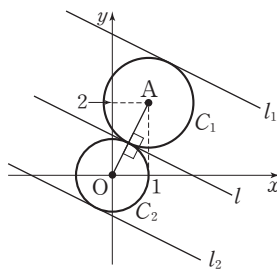
$$\therefore 11(a + b + c) = 11\left\{7 + 1 + \left(-\frac{1}{11}\right)\right\} = 87$$

21 답 -20

$A(1, 2)$ 라 하면 점 $O(0, 0)$ 에 대하여
 $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이므로 원 C_1 의 반
 지름의 길이는

$$\sqrt{5} - 1 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

두 점 O, A를 지나는 직선의 기울기는
 2이고 직선 l 과 직선 OA가 서로 수직
 이므로 직선 l 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.



즉, 두 직선 l_1, l_2 의 기울기도 $-\frac{1}{2}$ 이다. $\dots\dots \text{배점 20\%}$

직선 l_1 의 방정식을 $x + 2y + a = 0$ 이라 하면 점 $A(1, 2)$ 와 직선 l_1 사이
 의 거리가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

$$\frac{|1 + 4 + a|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} - 1, \frac{|a + 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

$$|a + 5| = 5 - \sqrt{5}, a + 5 = \pm(5 - \sqrt{5})$$

$$\therefore a = -\sqrt{5} \text{ 또는 } a = -10 + \sqrt{5}$$

이때 직선 l_1 은 직선 l 과 다르므로 직선 l_1 의 방정식은

$$x + 2y - 10 + \sqrt{5} = 0 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

또 직선 l_2 의 방정식을 $x + 2y + b = 0$ 이라 하면 원점과 직선 l_2 사이의
 거리가 1이므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1, |b| = \sqrt{5}$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{5}$$

이때 직선 l_2 는 직선 l 과 다르므로 직선 l_2 의 방정식은

$$x + 2y + \sqrt{5} = 0 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 점 $P(x_1, y_1)$ 에 대하여 $x_1 + 2y_1 - 10 + \sqrt{5} = 0$ 이고, 점 $Q(x_2, y_2)$
 에 대하여 $x_2 + 2y_2 + \sqrt{5} = 0$ 이므로

$$(x_1 + 2y_1 - 5)(x_2 + 2y_2 - 5) = (5 - \sqrt{5})(-5 - \sqrt{5}) = -20 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

22 답 π

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1, y_1),$

(x_2, y_2) 라 하면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 두

점 A, B에서의 접선의 방정식은 각각

$$x_1x + y_1y = 1, x_2x + y_2y = 1$$

이때 점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)

라 하면 점 P는 두 접선의 교점이므로

$$ax_1 + by_1 = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$ax_2 + by_2 = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선을 l 이라 하면 직선 l 의
 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡ - ㉠을 하면

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

$$b(y_2 - y_1) = -a(x_2 - x_1) \quad \therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}$$

이를 ㉢에 대입하면

$$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1)$$

$$b(y - y_1) = -a(x - x_1), ax + by = ax_1 + by_1$$

$$\therefore ax + by = 1 \quad (\because \text{㉠})$$

이때 삼각형 PAB는 정삼각형이므로 $\angle PAB = 60^\circ$

$$\therefore \angle BAO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

따라서 직선 l , 즉 $ax + by - 1 = 0$ 과 원점 O 사이의 거리는

$$\overline{OA} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{|-1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2} \quad \therefore a^2 + b^2 = 4$$

따라서 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 제1사분면 위의 점이므로 이 도형의 길
 이는

$$\frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 = \pi$$

23 답 $-\frac{4}{3}$

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $P(-1, -3)$ 을 지나는 접선의 방정식은
 $y + 3 = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m - 3 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 원 $x^2 + y^2 = 2$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지
 림의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

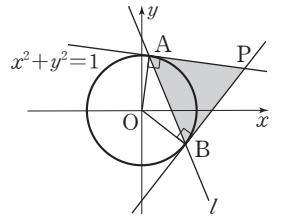
$$|m - 3| = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 6m + 9 = 2(m^2 + 1)$$

$$m^2 + 6m - 7 = 0, (m + 7)(m - 1) = 0$$

$$\therefore m = -7 \text{ 또는 } m = 1$$



이를 ㉠에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$$y = -7x - 10, y = x - 2$$

이때 $A(-\frac{10}{7}, 0)$, $B(2, 0)$ 이라 하면 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{24}{7} \times 3 = \frac{36}{7}$$

한편 직선 $y = ax + a$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $Q(-1, 0)$ 을 지나므로 삼각형 PAB의 넓이를 이등분하려면 직선 $y = x - 2$ 와 제4사분면에서 만나야 한다.

두 직선 $y = ax + a$, $y = x - 2$ 의 교점을 R라 하면 $ax + a = x - 2$ 에서

$$x = \frac{a+2}{1-a}$$

이를 $y = x - 2$ 에 대입하면

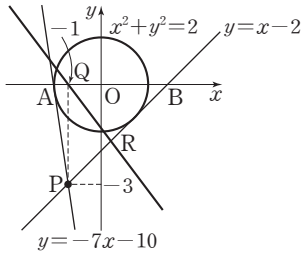
$$y = \frac{3a}{1-a}$$

$$\therefore R\left(\frac{a+2}{1-a}, \frac{3a}{1-a}\right)$$

따라서 삼각형 BQR의 넓이는 삼각형 PAB의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3a}{a-1} = \frac{1}{2} \times \frac{36}{7} \rightarrow \left| \frac{3a}{1-a} \right| = \frac{3a}{a-1}$$

$$7a = 4a - 4 \quad \therefore a = -\frac{4}{3}$$



idea 24 답 ①

$C_1: x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$, 즉 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$ 에서 원 C_1 은 중심의 좌표가 $(-3, -2)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

$C_2: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37 = 0$, 즉 $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ 에서 원 C_2 은 중심의 좌표가 $(5, 4)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

그림과 같이 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q를 지나는 직선이 ㉠과 같이 접할 때 최댓값, ㉡과 같이 접할 때 최솟값을 갖는다.

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이가 같으므로 두 접선 ㉠, ㉡은 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $(1, 1)$ 을 지난다.

점 $(1, 1)$ 을 지나고 두 원에 접하는 직선의 기울기를 a 라 하면 접선의 방정식은

$$y - 1 = a(x - 1)$$

$$\therefore ax - y - a + 1 = 0$$

점 $(5, 4)$ 와 직선 $ax - y - a + 1 = 0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|5a - 4 - a + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$|4a - 3| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

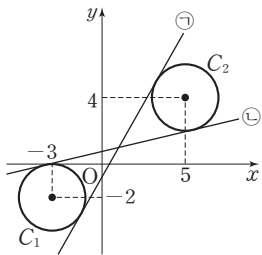
양변을 제곱하면

$$16a^2 - 24a + 9 = 4(a^2 + 1)$$

$$\therefore 12a^2 - 24a + 5 = 0$$

따라서 이 이차방정식의 두 근이 M, m 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$M + m = -\frac{-24}{12} = 2$$



step 3 최고난도 문제

| 111~113쪽

- 01 $\frac{3}{5}$ 02 ② 03 $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$ 04 13π 05 ③
06 ⑤ 07 $\sqrt{6}$ 08 ④ 09 ③ 10 $7\sqrt{21}$

01 답 $\frac{3}{5}$

1단계 삼각형 OPQ의 넓이 구하기

선분 OP의 중점을 M이라 하면

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2}$$

점 Q의 좌표를 $(t, t^2 - \frac{11}{4})$ 이라 하면

직각삼각형 OQM에서

$$\begin{aligned} \overline{QM} &= \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OM}^2} \\ &= \sqrt{\left\{t^2 + \left(t^2 - \frac{11}{4}\right)^2\right\} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^4 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{117}{16}} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{QM} = \frac{1}{2} \sqrt{t^4 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{117}{16}}$$

2단계 점 Q의 좌표 구하기

이때 $t^4 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{117}{16} = \left(t^2 - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}$ 에서 $t^2 = \frac{9}{4}$, 즉 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 삼각형

OPQ의 넓이가 최소가 된다.

따라서 점 Q의 좌표는 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

3단계 점 P의 x좌표 구하기

점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{OQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ 이므로 $\overline{PQ} = \overline{OQ}$, 즉 $\overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2$ 에서

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 3a + b = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ - ㉡ \text{을 하면 } 3a - b = 1 \quad \therefore b = 3a - 1$$

이를 ㉠에 대입하면 $a^2 + (3a - 1)^2 = 1$

$$5a^2 - 3a = 0, a(5a - 3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{5} (\because a > 0)$$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{3}{5}$ 이다.

02 답 ②

1단계 $a = 0$ 일 때, 선분 OC의 길이 구하기

(i) $a = 0$ 일 때,

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 점 C는 선분 AB의

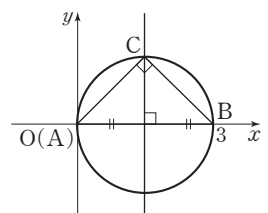
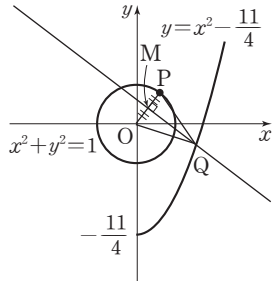
수직이등분선 위에 있고, 삼각형

ABC는 $\angle ACB = 90^\circ$ 인 직각삼각형

이므로 점 C는 선분 AB를 지름으로

하는 원 위에 있다.

$$\therefore \overline{OC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



2단계 $a \neq 0$ 일 때, 선분 OC의 길이 구하기

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

$\angle AOB = \angle ACB = 90^\circ$ 이므로 네 점 A, O, B, C가 한 원 위에 있고 선분 AB는 이 원의 지름이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 $(\frac{3}{2}, \frac{a}{2})$ 이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2+9}{4}} \text{이므로 원의 방정식은}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2+9}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

선분 AB의 수직이등분선을 l 이라 하면 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 점 C는 직선 l 과 원이 만나는 점이다.

이때 직선 AB의 기울기는 $-\frac{a}{3}$ 이므로 직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{a}$ 이다.

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y - \frac{a}{2} = \frac{3}{a}(x - \frac{3}{2}) \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

이를 ⑦에 대입하면

$$(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{a^2}(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{a^2+9}{4}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{a^2}{4}, x - \frac{3}{2} = \pm \frac{a}{2}$$

$$\therefore x = \frac{a+3}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3-a}{2}$$

이를 ⑧에 대입하여 풀면

$$x = \frac{a+3}{2} \text{일 때 } y = \frac{a+3}{2}, x = \frac{3-a}{2} \text{일 때 } y = \frac{a-3}{2}$$

즉, 점 C의 좌표는

$$(\frac{a+3}{2}, \frac{a+3}{2}) \text{ 또는 } (\frac{3-a}{2}, \frac{a-3}{2})$$

① $C(\frac{a+3}{2}, \frac{a+3}{2})$ 일 때,

$$\overline{OC} = \sqrt{(\frac{a+3}{2})^2 + (\frac{a+3}{2})^2} = \sqrt{2} \left| \frac{a+3}{2} \right|$$

이때 $-1 \leq a < 0, 0 < a \leq 2$ 이므로

$$\sqrt{2} \leq \overline{OC} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \frac{3\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

② $C(\frac{3-a}{2}, \frac{a-3}{2})$ 일 때,

$$\overline{OC} = \sqrt{(\frac{3-a}{2})^2 + (\frac{a-3}{2})^2} = \sqrt{2} \left| \frac{a-3}{2} \right|$$

이때 $-1 \leq a < 0, 0 < a \leq 2$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \overline{OC} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \frac{3\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq 2\sqrt{2}$$

3단계 $\frac{M}{m}$ 의 값 구하기

(i), (ii)에서 $M = \frac{5\sqrt{2}}{2}, m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\frac{M}{m} = 5$

03 답 $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$

1단계 점 C가 나타내는 도형의 방정식 구하기

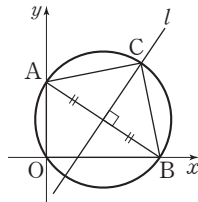
$C(x, y)$ 라 하면 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$ 이므로

$$2\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } 4\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$4\{(x-2)^2 + (y-1)^2\} = \{x-(-4)\}^2 + \{y-(-2)\}^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$



2단계 점 P와 점 Q의 좌표 구하기

한편 직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{-2-1}{-4-2}(x-2) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x$$

이를 ⑨에 대입하면 $(x-4)^2 + (\frac{1}{2}x-2)^2 = 20$

$$x^2 - 8x + 16 + \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 20$$

$$x^2 - 8x = 0, x(x-8) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 점 P는 원점이 아니므로 점 P의 좌표는 (8, 4)

또 $x=0$ 을 ⑨에 대입하여 풀면

$$(y-2)^2 = 4, y-2 = \pm 2 \quad \therefore y = 0 \text{ 또는 } y = 4$$

그런데 점 Q는 원점이 아니므로 점 Q의 좌표는 (0, 4)

3단계 점 R의 좌표 구하기

이때 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 를 만족시키는 점 $R(a, b)$

에 대하여 선분 QR의 중점 $(\frac{a}{2}, \frac{b+4}{2})$

가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+4}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2}$$

$$\therefore a - 2b = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

또 선분 QR는 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 와 수직이고, 직선 QR의 기울기는 $\frac{b-4}{a}$ 이

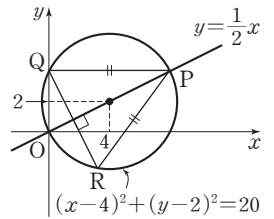
므로

$$\frac{b-4}{a} \times \frac{1}{2} = -1$$

$$\therefore 2a + b = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{11}$$

⑩, ⑪을 연립하여 풀면 $a = \frac{16}{5}, b = -\frac{12}{5}$

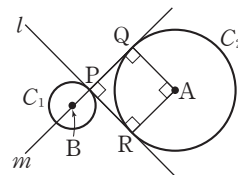
따라서 점 R의 좌표는 $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$



04 답 13π

1단계 두 직선 l, m 의 위치 관계 파악하기

두 원 C_1, C_2 가 서로 만나지 않고 직선 l 에 수직인 직선 m 이 원 C_1 의 중심을 지나려면 직선 l 이 그림과 같이 두 원 C_1, C_2 에 접해야 한다.



2단계 점 (a, b) 가 나타내는 도형의 방정식 구하기

직선 l 과 직선 m 의 교점을 P, 직선 m 과 원 C_2 의 교점을 Q, 직선 l 과 원 C_2 의 교점을 R, 원 C_2 의 중심을 $A(2, -3)$ 이라 하면 사각형 PRAQ

는 한 변의 길이가 2인 정사각형이다. — 원 C_2 의 반지름의 길이가 2이다.

즉, 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 의 중심을 $B(a, b)$ 라 하면

$$\overline{BQ} = \overline{BP} + \overline{PQ} = 1 + 2 = 3$$

이때 $\overline{QA} = 2$ 이고 $\angle AQB = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad \therefore \overline{AB}^2 = 13$$

따라서 $(a-2)^2 + (b+3)^2 = 13$ 이므로 점 (a, b) 는 중심의 좌표가 $(2, -3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 인 원 위의 점이다.

3단계 점 (a, b) 가 나타내는 도형의 넓이 구하기

따라서 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 인 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{13})^2 = 13\pi$$

idea
05 답 ③

1단계 $(a-1)^2 + (b-2)^2$ 이 최댓값과 최솟값을 갖는 경우 파악하기

$(a-1)^2 + (b-2)^2 = k (k > 0)$ 라 하면 점 $P(a, b)$ 는 중심의 좌표가 $(1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$ 인 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = k$ 위의 점이다. 따라서 이 원의 반지름의 길이가 가장 짧을 때 최솟값, 가장 길 때 최댓값을 갖는다.

2단계 $(a-1)^2 + (b-2)^2$ 의 최솟값 구하기

원의 중심을 $D(1, 2)$ 라 하면 점 D 와 직선 $x+y=7$, 즉 $x+y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2-7|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$$

점 D 와 직선 $x=3$ 사이의 거리는 2

따라서 점 P 가 점 D 에서 직선 $x=3$ 에 내린 수선의 발일 때 $(a-1)^2 + (b-2)^2$ 의 값은 최소이고, 그 최솟값은 $2^2=4$

3단계 $(a-1)^2 + (b-2)^2$ 의 최댓값 구하기

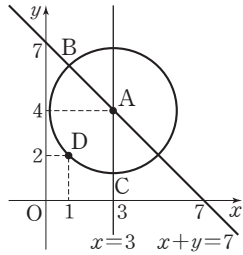
반지름의 길이가 가장 길 때는 점 P 가 두 점 D, A 를 지나는 직선과 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8$ 의 교점일 때이다.

따라서 점 P 가 직선 DA 와 원의 교점 중 D 가 아닌 점일 때,

$(a-1)^2 + (b-2)^2$ 의 값은 최대이고, 그 최댓값은 원의 지름의 길이의 제곱과 같으므로 $(2 \times 2\sqrt{2})^2 = 32$

4단계 $(a-1)^2 + (b-2)^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기

따라서 $(a-1)^2 + (b-2)^2$ 의 최댓값은 32, 최솟값은 4이므로 그 합은 $32+4=36$



06 답 ⑤

1단계 점 R의 y좌표 구하기

두 점 $A(-1, 0), B(1, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 C 의 방정식은 $x^2 + y^2 = 1$

선분 AP 의 중점을 S 라 하면 $\angle PSO = 90^\circ$ 이

고 점 Q 는 선분 AP 를 3 : 1로 외분하므로

$$\overline{AS} = \overline{SP} = \overline{PQ}$$

이때 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로 두 삼각형 QSO, QPR 는 닮음이고 닮음비가 2 : 1이다.

즉, 점 R 는 선분 OQ 의 중점이므로 점 R 의

y좌표를 a 라 하면 삼각형 OBR 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a = \frac{9}{26} \quad \therefore a = \frac{9}{13}$$

2단계 점 P의 좌표 구하기

점 R 의 y좌표가 $\frac{9}{13}$ 이므로 점 Q 의 y좌표는 $\frac{18}{13}$

이때 점 P 는 선분 AQ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P 의 y좌표는

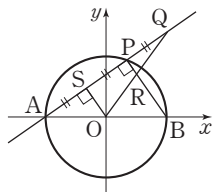
$$\frac{2 \times \frac{18}{13} + 1 \times 0}{2+1} = \frac{12}{13}$$

점 P 의 좌표를 $(b, \frac{12}{13})$ ($b > 0$)라 하면 점 P 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로

$$b^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1, \quad b^2 = \frac{25}{169}$$

$$\therefore b = \frac{5}{13} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$$



3단계 m의 값 구하기

따라서 두 점 $A(-1, 0), P\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{12}{13}-0}{\frac{5}{13}-(-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore m = \frac{2}{3}$$

idea
07 답 √6

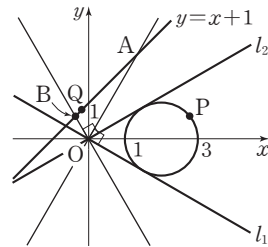
1단계 직선 OP와 직선 OQ의 위치 관계 파악하기

원점 O와 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 는 직선 OP의 기울기이고 원점 O와

점 $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{d}{c}$ 는 직선 OQ의 기울기이므로 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = -1$ 이면 직선 OP와 직선 OQ는 서로 수직이다.

2단계 점 Q가 나타내는 도형 파악하기

그림과 같이 원점을 지나고 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 두 직선을 l_1, l_2 라 하자.



접선의 방정식을 $y=mx$ 라 하면 점 $(2, 0)$ 과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리는 1이므로

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1$$

$$|2m| = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 = m^2 + 1, \quad m^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 두 직선 l_1, l_2 의 방정식은

$$l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad l_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

이때 원점을 지나면서 두 직선 l_1, l_2 에 수직인 직선이 직선 $y=x+1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 점 Q가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

3단계 점 Q가 나타내는 도형의 길이 구하기

원점을 지나면서 직선 l_1 에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x$$

즉, 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 직선 $y = x+1$ 의 교점의 좌표는

$$\sqrt{3}x = x+1 \text{에서 } (\sqrt{3}-1)x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

이를 $y = x+1$ 에 대입하면

$$y = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

또 원점을 지나면서 직선 l_2 에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{3}x$$

즉, 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 와 직선 $y = x + 1$ 의 교점의 좌표는 $-\sqrt{3}x = x + 1$ 에서 $(\sqrt{3} + 1)x = -1$

$$\therefore x = \frac{-1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

이를 $y = x + 1$ 에 대입하면

$$y = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore B\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6}$$

08 답 ④

1단계 m 의 값 구하기

직선 AB의 기울기는 $\frac{5-7}{7-5} = -1$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y - 7 = -(x - 5) \quad \therefore y = -x + 12$$

두 원 C_1, C_2 의 중심을 지나는 직선의 방정식은 직선 $y = -x + 12$ 와 서로 수직이므로 기울기가 1이고, 두 점 A, B를 이은 선분의 중점인 (6, 6)을 지나므로

$$y - 6 = x - 6 \quad \therefore y = x$$

이때 원의 중심의 좌표를 (a, a) 라 하면 점 (a, a) 와 두 직선 $y = mx, y = 4mx$, 즉 $mx - y = 0, 4mx - y = 0$ 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|ma - a|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|4ma - a|}{\sqrt{(4m)^2 + (-1)^2}}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{m^2 a^2 - 2ma^2 + a^2}{m^2 + 1} = \frac{16m^2 a^2 - 8ma^2 + a^2}{16m^2 + 1}$$

$$a^2 - \frac{2ma^2}{m^2 + 1} = a^2 - \frac{8ma^2}{16m^2 + 1}$$

$$\frac{1}{m^2 + 1} = \frac{4}{16m^2 + 1}$$

$$16m^2 + 1 = 4m^2 + 4$$

$$m^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore m = \frac{1}{2} \quad (\because m > 0)$$

2단계 $a + b$ 의 값 구하기

점 (a, a) 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$, 즉 $x - 2y = 0$ 사이의 거리는 점 (a, a) 와

점 A 사이의 거리와 같으므로 $\xrightarrow{\text{원의 중심과 점선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.}}$

$$\frac{|a - 2a|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{(a - 5)^2 + (a - 7)^2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{a^2}{5} = (a - 5)^2 + (a - 7)^2$$

$$\therefore 9a^2 - 120a + 370 = 0$$

따라서 이 이차방정식의 두 근이 a, b 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + b = -\frac{-120}{9} = \frac{40}{3}$$

3단계 $\frac{3(a+b)}{m}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{3(a+b)}{m} = \frac{3 \times \frac{40}{3}}{\frac{1}{2}} = 80$$

09 답 ③

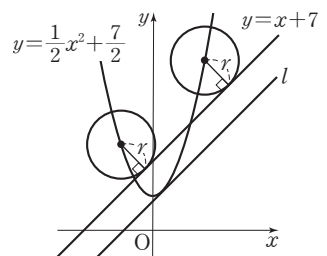
1단계 m 의 값 구하기

직선 $y = x + 7$ 에 평행하고 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 의 그래프에 접하는 직선을 l , 직선 $y = x + 7$ 과 직선 l 사이의 거리를 d 라 하자.

(i) $r > d$ 일 때, $m = 2$

그림과 같이 직선 $y = x + 7$ 의 위쪽에서 접하는 원이 2개이다.

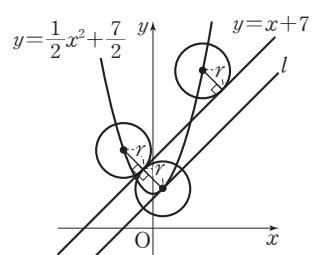
$$\therefore m = 2$$



(ii) $r = d$ 일 때, $m = 3$

그림과 같이 직선 $y = x + 7$ 의 위쪽에서 접하는 원이 2개, 아래쪽에서 접하는 원이 1개이다.

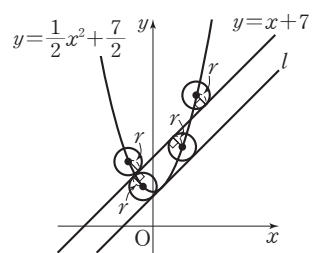
$$\therefore m = 3$$



(iii) $r < d$ 일 때, $m = 4$

그림과 같이 직선 $y = x + 7$ 의 위쪽에서 접하는 원이 2개, 아래쪽에서 접하는 원이 2개이다.

$$\therefore m = 4$$



(i), (ii), (iii)에서 m 이 홀수인 경우는 $m = 3$

2단계 r 의 값 구하기

직선 $y = x + 7$ 에 접하는 원 중 직선 $y = x + 7$ 의 아래쪽에 위치한 원을 C_1 이라 하면 원 C_1 의 반지름의 길이 r 는

이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 의 그래프에 접

하고 기울기가 1인 직선과 직선

$y = x + 7$ 사이의 거리와 같다.

이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식

을 $y = x + k$ 라 하면 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2} = x + k$ 에서

$$x^2 - 2x + 7 - 2k = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

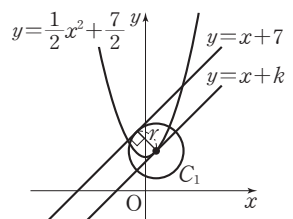
$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (7 - 2k) = 0$$

$$\therefore k = 3$$

두 직선 $y = x + 7$ 과 $y = x + 3$ 사이의 거리는 직선 $y = x + 3$ 위의 점 (0, 3)과 직선 $y = x + 7$, 즉 $x - y + 7 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2}$$

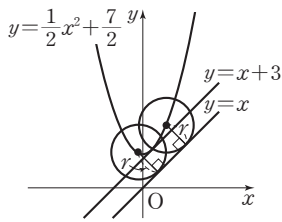


3단계 n 의 값 구하기

직선 $y=x$ 와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $2\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $n=2$ — 원의 반지름의 길이가 두 직선 사이의 거리보다 크므로 직선 $y=x$ 에 접하는 원은 두 개이다.



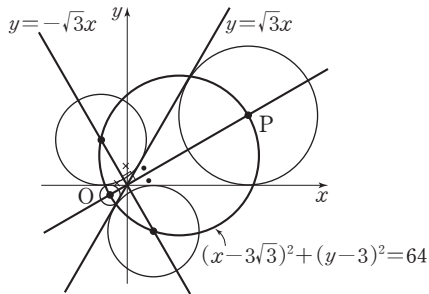
4단계 $m+n+r^2$ 의 값 구하기

$$\therefore m+n+r^2=3+2+(2\sqrt{2})^2=13$$

10 답 7√21

1단계 점 P의 위치 파악하기

그림과 같이 점 P를 중심으로 하는 원 C가 두 직선 $y=0$, $y=\sqrt{3}x$ 와 모두 접하므로 점 P는 두 직선 $y=0$, $y=\sqrt{3}x$ 가 이루는 각의 이등분선에 위에 있어야 한다.



2단계 서로 다른 모든 r 의 값의 곱 구하기

이때 직선 $y=\sqrt{3}x$ 가 x 축과 이루는 예각의 크기가 60° 이므로 원점을 지나고 기울기가 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

또 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{3}x$$

(i) 점 P가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 위에 있을 때,

$$(x-3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-3\right)^2 = 64$$

$$\frac{4}{3}(x-3\sqrt{3})^2 = 64, (x-3\sqrt{3})^2 = 48$$

$$x-3\sqrt{3} = \pm 4\sqrt{3} \quad \therefore x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 7\sqrt{3}$$

이를 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 에 대입하면

$$x = -\sqrt{3} \text{ 일 때 } y = -1, x = 7\sqrt{3} \text{ 일 때 } y = 7$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\sqrt{3}, -1)$ 또는 $(7\sqrt{3}, 7)$ 이므로 원 C의 반지름의 길이는 점 P의 y 좌표의 절댓값인 1 또는 7이다.

(ii) 점 P가 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 위에 있을 때,

$$(x-3\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}x-3)^2 = 64$$

$$4x^2 + 36 = 64, x^2 = 7 \quad \therefore x = -\sqrt{7} \text{ 또는 } x = \sqrt{7}$$

이를 $y = -\sqrt{3}x$ 에 대입하면

$$x = -\sqrt{7} \text{ 일 때 } y = \sqrt{21}, x = \sqrt{7} \text{ 일 때 } y = -\sqrt{21}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\sqrt{7}, \sqrt{21})$ 또는 $(\sqrt{7}, -\sqrt{21})$ 이므로 원 C의 반지름의 길이는 점 P의 y 좌표의 절댓값인 $\sqrt{21}$ 이다.

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 r 의 값의 곱은 $1 \times 7 \times \sqrt{21} = 7\sqrt{21}$

10 도형의 이동

step 1 핵심 문제

| 114~115쪽

01 ⑤	02 $-\frac{3}{4}$	03 6	04 (2, 5)	05 ②
06 36	07 4	08 ③	09 3	10 ①
				11 12

01 답 ⑤

점 $A(a, 3)$ 을 점 $A'(-2, -2)$ 로, 점 $B(1, b)$ 를 점 $B'(3, -2)$ 로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{즉, } a+2=-2, b-5=-2 \text{이므로 } a=-4, b=3$$

따라서 점 $(3, -4)$ 가 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는 $(3+2, -4-5) \quad \therefore (5, -9)$

02 답 $-\frac{3}{4}$

직선 $y=2x+3$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-n=2(x-m)+3 \quad \therefore y=2x-2m+n+3$$

이 직선이 $y=2x$ 와 같으므로

$$-2m+n+3=0 \quad \therefore 2m-n=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 직선 $y=3x+2$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-n=3(x-m)+2 \quad \therefore y=3x-3m+n+2$$

이 직선이 $y=3x-2$ 와 같으므로

$$-3m+n+2=-2 \quad \therefore 3m-n=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $m=1, n=-1$

따라서 직선 $2x-3y-1=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-1)-3(y+1)-1=0 \quad \therefore 2x-3y-6=0$$

이때 직선 $2x-3y-6=0$ 이 원 $(x-a)^2+(y-2a+1)^2=1$ 의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 원의 중심 $(a, 2a-1)$ 을 지나야 한다.

따라서 $2a-3(2a-1)-6=0$ 이므로

$$4a=-3 \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

03 답 6

원 $(x-a)^2+(y-a)^2=b^2$ 의 중심의 좌표는 (a, a) 이므로 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형은 중심의 좌표가 $(a, a-2)$, 반지름의 길이가 b 인 원이다.

이 원이 직선 $y=x$ 과 x 축에 동시에 접하려면 원의 중심 $(a, a-2)$ 과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리가 중심의 y 좌표인 $a-2$ 와 같아야 하므로

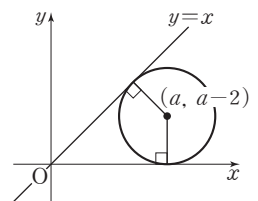
$$\frac{|a-(a-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = a-2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = a-2 \quad \therefore a=2+\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이 b 는 $a-2$ 와 같으므로

$$b=a-2=(2+\sqrt{2})-2=\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2-4b=(2+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}=6$$



04 답 (2, 5)

점 A의 좌표를 $(a, a+3)$ ($a>0$)이라 하면 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(a+3, a)$$

점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(-a-3, -a)$$

이때 $-a = (-a-3) + 3$ 이므로 점 C는 직선 $y=x+3$ 위의 점이고 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = 21$$

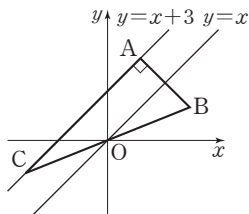
$$\overline{AB} = \sqrt{(a+3-a)^2 + \{a-(a+3)\}^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\{(-a-3)-a\}^2 + \{-a-(a+3)\}^2} = \sqrt{2}(2a+3)$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2}(2a+3) = 21, 2a+3=7 \quad \therefore a=2$$

따라서 점 A의 좌표는 (2, 5)이다.



05 답 ②

직선 $l: y=ax+2$ 의 x 절편은 $-\frac{2}{a}$, y 절편은 2

이고, 직선 l 을 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 직선의 방정식은

$$l_1: y=-ax-2,$$

$$l_2: y=-ax+2,$$

$$l_3: y=ax-2$$

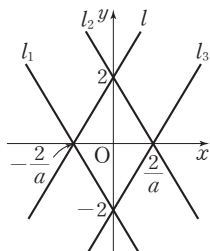
즉, 네 직선 l, l_1, l_2, l_3 으로 둘러싸인 도형은

한 변의 길이가 $\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{4}{a^2} + 4}$ 인 마름모이다.

이때 이 도형의 둘레의 길이가 10이므로

$$4\sqrt{\frac{4}{a^2} + 4} = 10, \frac{4}{a^2} + 4 = \frac{25}{4}$$

$$\frac{4}{a^2} = \frac{9}{4}, a^2 = \frac{16}{9} \quad \therefore a = \frac{4}{3} \quad (\because a>0)$$



06 답 36

$x^2+y^2-4x+8y+19=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+4)^2=1$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원 C_1 의 방정식은

$$(x-2)^2+(-y+4)^2=1$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-4)^2=1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

또 원 $(x-2)^2+(y+4)^2=1$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-2)^2=1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최댓값은 두 원 C_1, C_2 의 중심 (2, 4), (-4, 2)를 이은 선분의 길이에 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이의 합을 더한 것과 같고, 선분 PQ의 길이의 최솟값은 두 원 C_1, C_2 의 중심을 이은 선분의 길이에서 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같으므로

$$M = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-4)^2} + (1+1) = 2\sqrt{10} + 2$$

$$m = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-4)^2} - (1+1) = 2\sqrt{10} - 2 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore Mm = (2\sqrt{10}+2)(2\sqrt{10}-2) = 36 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

07 답 4

포물선 $y=x^2-ax+3$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-1=(x-2)^2-a(x-2)+3$$

$$\therefore y=x^2-(a+4)x+2a+8$$

이 포물선을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-x^2+(a+4)x-2a-8$$

이때 이 포물선이 직선 $y=4x-12$ 와 접하므로 이차방정식

$$-x^2+(a+4)x-2a-8=4x-12, \text{ 즉 } x^2-ax+2a-4=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D=(-a)^2-4(2a-4)=0$$

$$a^2-8a+16=0, (a-4)^2=0$$

$$\therefore a=4$$

08 답 ③

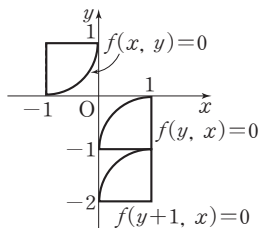
방정식 $f(y+1, x)=0$ 이 나타내는 도형

은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형

을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y

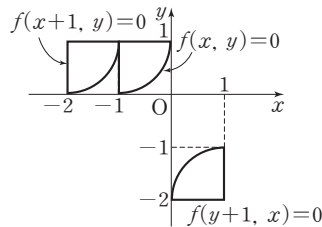
축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이

므로 ③과 같다.



다른 풀이

방정식 $f(y+1, x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로 ③과 같다.



09 답 3

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0-1+1}{3}, \frac{1+2+6}{3}\right) \quad \therefore (0, 3)$$

점 A'의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점 (0, 3)은 두 점 A, A'을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x_1+0}{2}=0, \frac{y_1+1}{2}=3 \quad \therefore x_1=0, y_1=5$$

$$\therefore A'(0, 5)$$

점 B'의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하면 점 (0, 3)은 두 점 B, B'을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x_2-1}{2}=0, \frac{y_2+2}{2}=3 \quad \therefore x_2=1, y_2=4$$

$$\therefore B'(1, 4)$$

점 C'의 좌표를 (x_3, y_3) 이라 하면 점 (0, 3)은 두 점 C, C'을 이은 선분의 중점이므로

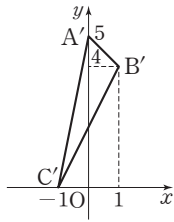
$$\frac{x_3+1}{2}=0, \frac{y_3+6}{2}=3 \quad \therefore x_3=-1, y_3=0$$

$$\therefore C'(-1, 0)$$

두 점 B', C'을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4-0}{1-(-1)}(x+1) \quad \therefore y = 2x+2$$

따라서 직선 B'C'이 y축과 만나는 점의 좌표는 (0, 2)이므로 삼각형 A'B'C'이 y축과 만나는 두 점 사이의 거리는 5-2=3



10 답 ①

점 P(0, 1)을 점 (-2, 3)에 대하여 대칭이동한 점을 R(a, b)라 하면 점 (-2, 3)은 두 점 P, R를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{a+0}{2} = -2, \frac{b+1}{2} = 3 \quad \therefore a = -4, b = 5$$

$\therefore R(-4, 5)$

점 R(-4, 5)를 점 (1, 2)에 대하여 대칭이동한 점을 Q(c, d)라 하면 점 (1, 2)는 두 점 R, Q를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{c-4}{2} = 1, \frac{d+5}{2} = 2 \quad \therefore c = 6, d = -1$$

$\therefore Q(6, -1)$

이때 두 점 P, Q를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$, 즉 (3, 0)이

직선 $y = mx + n$ 위의 점이므로

$$0 = 3m + n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 P, Q를 지나는 직선과 직선 $y = mx + n$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{-1-1}{6-0} \times m = -1 \quad \therefore m = 3$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $n = -9$

$$\therefore m + n = 3 + (-9) = -6$$

11 답 12

삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}$$

점 B(2, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한

점을 B'이라 하면 B'(2, -1)이므로

$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}$$

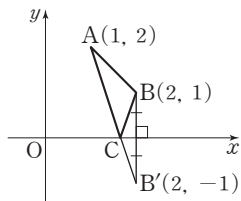
$$= \overline{AC} + \overline{CB'} + \overline{BA} \geq \overline{AB'} + \overline{BA}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} + \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{10} + \sqrt{2}$$

따라서 $a = 10, b = 2$ 또는 $a = 2, b = 10$ 이므로

$$a + b = 12$$



step 2 고난도 문제

| 116~119쪽

01 11 02 ㄴ, ㄷ 03 64 04 $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$

05 ③ 06 ㄴ, ㄷ 07 ② 08 (1, 2)

09 $\frac{2}{3}$ 10 4 11 $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$ 12 $\sqrt{34}$ 13 ①

14 3 15 -66 16 $4\sqrt{2}$ 17 ④ 18 ⑤

01 답 11

원 C의 중심의 좌표는 (2, 3)이므로 원 C₁의 중심의 좌표는 (2+m, 3)이고 반지름의 길이는 3이다.

㉞에서 원 C₁이 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원 C₁의 중심 (2+m, 3)과 직선 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|4(2+m) - 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} < 3$$

$$|4m - 1| < 15$$

$$-15 < 4m - 1 < 15$$

$$-14 < 4m < 16$$

$$\therefore -\frac{7}{2} < m < 4$$

따라서 자연수 m의 값은 1, 2, 3이다.

원 C₂의 중심의 좌표는 (2+m, 3+n)이고 반지름의 길이는 3이다.

㉞에서 원 C₂가 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원 C₂의 중심 (2+m, 3+n)과 직선 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|4(2+m) - 3(3+n)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} < 3$$

$$|4m - 3n - 1| < 15$$

$$-15 < 4m - 3n - 1 < 15$$

$$\therefore -14 < 4m - 3n < 16$$

(i) m=1일 때,

$$-14 < 4m - 3n < 16 \text{에서 } -14 < 4 - 3n < 16$$

$$-18 < -3n < 12 \quad \therefore -4 < n < 6$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 m+n의 최댓값은

$$1+5=6$$

(ii) m=2일 때,

$$-14 < 4m - 3n < 16 \text{에서 } -14 < 8 - 3n < 16$$

$$-22 < -3n < 8 \quad \therefore -\frac{8}{3} < n < \frac{22}{3}$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 m+n의 최댓값은 2+7=9

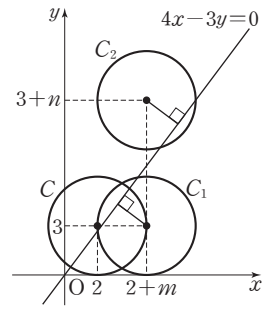
(iii) m=3일 때,

$$-14 < 4m - 3n < 16 \text{에서 } -14 < 12 - 3n < 16$$

$$-26 < -3n < 4 \quad \therefore -\frac{4}{3} < n < \frac{26}{3}$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 m+n의 최댓값은 3+8=11

(i), (ii), (iii)에서 m+n의 최댓값은 11이다.



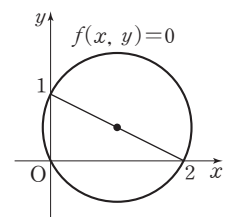
02 답 ㄴ, ㄷ

두 점 (2, 0), (0, 1)을 이은 선분이 원 C의 지름이므로 원 C의 중심의 좌표는 두 점 (2, 0), (0, 1)을 이은 선분의 중점인

$$\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 원 C의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



이때 원 C' 은 원 C 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이므로 원 C' 의 중심의 좌표는 $(1+m, \frac{1}{2}+n)$ 이고 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

ㄱ. 원 C' 이 x 축에 접하려면 원 C' 의 중심의 y 좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\left| \frac{1}{2} + n \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{2} + n = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore n = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } n = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = -1$$

ㄴ. 두 원 C, C' 이 서로 외접하려면 두 원의 중심 $(1, \frac{1}{2})$,

$(1+m, \frac{1}{2}+n)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로

$$\sqrt{(1+m-1)^2 + \left(\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 5$$

ㄷ. 두 원 C, C' 의 넓이를 모두 이등분하는 직선은 두 원의 중심

$(1, \frac{1}{2})$, $(1+m, \frac{1}{2}+n)$ 을 모두 지나야 하므로 두 원의 중심을 모두

지나는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}}{1 + m - 1}(x - 1)$$

$$y = \frac{n}{m}(x - 1) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2nx - 2my + m - 2n = 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 답 64

두 직선 AB, OD 의 교점을 E , 직선 AB 와 직선 $y=x$ 의 교점을 F 라 하자.

직선 AB 의 방정식은

$$y = \frac{2-0}{1-2}(x-2)$$

$$\therefore y = -2x + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $B(1, 2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한

점 D 의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 직선 OD 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$-2x + 4 = \frac{1}{2}x, \quad \frac{5}{2}x = 4 \quad \therefore x = \frac{8}{5}$$

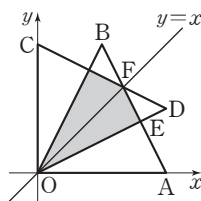
이를 ②에 대입하면

$$y = \frac{4}{5} \quad \therefore E\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

①에 $y=x$ 를 대입하면

$$x = -2x + 4, \quad 3x = 4 \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

$$\text{이를 } y=x \text{에 대입하면 } y = \frac{4}{3} \quad \therefore F\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$



$$\triangle OEF = \triangle OAF - \triangle OAE$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{8}{15}$$

$$\text{따라서 } S = 2\triangle OEF = 2 \times \frac{8}{15} = \frac{16}{15} \text{ 이므로}$$

$$60S = 60 \times \frac{16}{15} = 64$$

04 답 $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$

㉞에서 점 C 는 점 B 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 두 점 B, C 를 지나는 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

㉞에서 이 원의 반지름의 길이가 3이

므로 원의 둘레의 길이는 6π 이고, 호

BC 의 길이가 $\frac{3}{2}\pi$ 이므로 원의 중심을

M 이라 하면

$$\angle BMC = 360^\circ \times \frac{\frac{3}{2}\pi}{6\pi} = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 3\sqrt{2}$$

이때 점 M 의 좌표를 (a, a) ($a > 0$)라 하면

$B(a, a-3), C(a-3, a)$

두 점 B, C 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - (a-3) = \frac{a - (a-3)}{a-3-a}(x-a)$$

$$\therefore y = -x + 2a - 3$$

점 $A(-2, 2)$ 와 직선 $y = -x + 2a - 3$, 즉 $x + y - 2a + 3 = 0$ 사이의

$$\text{거리는 } \frac{|-2+2-2a+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-2a+3|}{\sqrt{2}}$$

㉞에서 삼각형 ABC 의 넓이는 9이므로

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{|-2a+3|}{\sqrt{2}} = 9$$

$$|-2a+3| = 6$$

$$-2a+3 = \pm 6$$

$$\therefore a = \frac{9}{2} \quad (\because a > 0)$$

따라서 점 B 의 좌표는 $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ 이다.

다른 풀이

㉞에서 점 C 는 점 B 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 두 점 B, C 를 지나는 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

㉞에서 이 원의 반지름의 길이가 3이

므로 원의 둘레의 길이는 6π 이고, 호

BC 의 길이가 $\frac{3}{2}\pi$ 이므로 원의 중심을

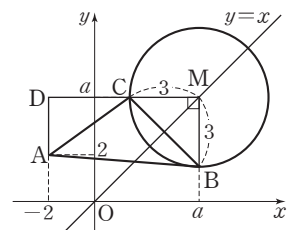
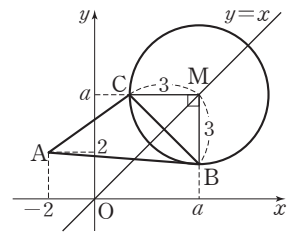
M 이라 하면

$$\angle BMC = 360^\circ \times \frac{\frac{3}{2}\pi}{6\pi} = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 3\sqrt{2}$$

이때 점 M 의 좌표를 (a, a) ($a > 0$)라 하면

$B(a, a-3)$



점 D의 좌표를 $(-2, a)$ 라 하면

(삼각형 ABC의 넓이)

$$= (\text{사다리꼴 ABMD의 넓이}) - (\text{삼각형 ACD의 넓이}) - (\text{삼각형 BMC의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times \{(a-2)+3\} \times (a+2) - \frac{1}{2} \times (a+2-3) \times (a-2) - \frac{1}{2} \times 3 \times 3$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - 1 - \frac{9}{2}$$

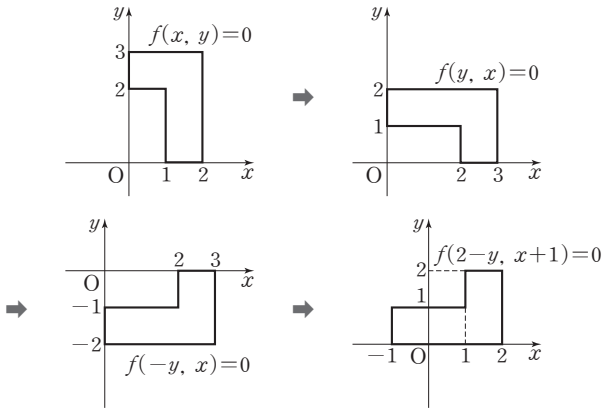
$$= 3a - \frac{9}{2}$$

$$\text{즉, } 3a - \frac{9}{2} = 9 \text{이므로 } a = \frac{9}{2}$$

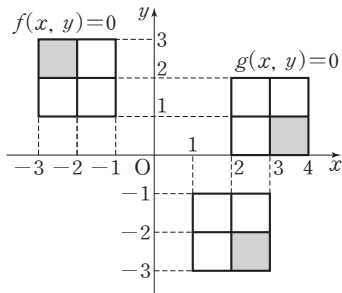
따라서 점 B의 좌표는 $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ 이다.

05 답 ③

방정식 $f(2-y, x+1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 ③과 같다.



06 답 ㄴ, ㄷ



방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것으로 볼 수 있으므로

$$f(x, y)=0 \rightarrow f(-x, -y)=0 \rightarrow f(-(x-1), -(y-3))=0$$

$$\therefore g(x, y)=f(-x+1, -y+3)$$

또 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것으로도 볼 수 있으므로

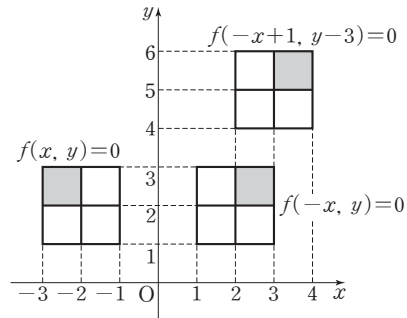
$$f(x, y)=0 \rightarrow f(y, x)=0 \rightarrow f(y-3, x-1)=0$$

$$\therefore g(x, y)=f(y-3, x-1)$$

따라서 보기에서 방정식 $g(x, y)=0$ 과 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

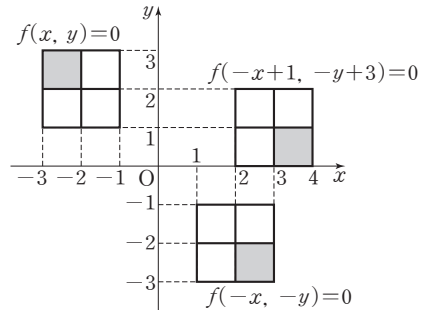
다른 풀이

ㄱ. 방정식 $f(-x+1, y-3)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.

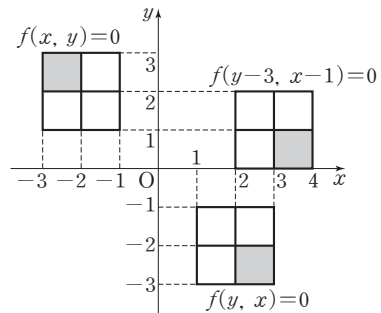


ㄴ. 방정식 $f(-x+1, -y+3)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

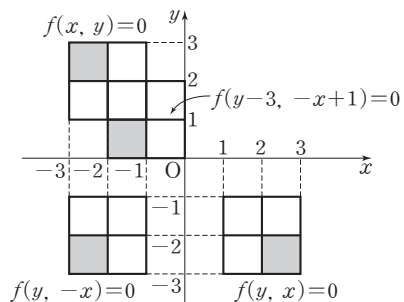
$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



ㄷ. 방정식 $f(y-3, x-1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



ㄹ. 방정식 $f(y-3, -x+1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 다음 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



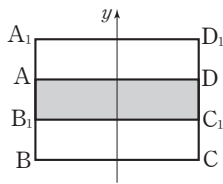
따라서 보기에서 방정식 $g(x, y)=0$ 과 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

07 답 ②

제1사분면 위의 점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면 직사각형의 두 대각선의 교점이 원점이고, 각 변은 x 축 또는 y 축에 평행하므로

$$A(-a, b), B(-a, -b), C(a, -b)$$

이때 네 점 A, B, C, D를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 네 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1 이라 하면 $\overline{AD} > \overline{AB} > 2$ 이므로 두 직사각형 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$ 은 그림과 같다.

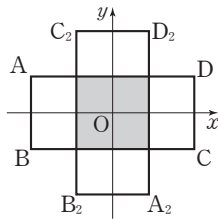


$\overline{AD} = 2a$, $\overline{AB_1} = \overline{AB} - \overline{B_1B} = 2b - 2$ 이고 (다)에서 공통부분, 즉 직사각형 AB_1C_1D 의 넓이는 18이므로

$$\overline{AD} \times \overline{AB_1} = 18, 2a(2b-2) = 18$$

$$\therefore a(b-1) = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 네 점 A, B, C, D를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2 라 하면 두 직사각형 ABCD와 $A_2B_2C_2D_2$ 는 그림과 같다.



$\overline{A_2B_2} = \overline{AB} = 2b$ 이고 (다)에서 공통부분의 넓이는 16이므로

$$2b \times 2b = 16, b^2 = 4$$

$$\therefore b = 2 (\because b > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \frac{9}{2}$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AD} \times \overline{AB} = 2a \times 2b = 2 \times \frac{9}{2} \times 2 \times 2 = 36$$

08 답 (1, 2)

포물선 $P_1: y = x^2 + x$ 위의 점 $P(x, y)$ 를 점 $(1, a)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(x', y')$ 이라 하면 점 $(1, a)$ 는 두 점 P, Q를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x+x'}{2} = 1, \frac{y+y'}{2} = a$$

$$\therefore x = 2 - x', y = 2a - y'$$

이를 $y = x^2 + x$ 에 대입하면

$$2a - y' = (2 - x')^2 + (2 - x')$$

$$2a - y' = 4 - 4x' + (x')^2 + 2 - x'$$

$$\therefore y' = -(x')^2 + 5x' + 2a - 6$$

따라서 포물선 P_2 의 방정식은 $y = -x^2 + 5x + 2a - 6$

두 포물선 P_1, P_2 가 한 점에서 만나므로 이차방정식

$$x^2 + x = -x^2 + 5x + 2a - 6, \text{ 즉 } x^2 - 2x - a + 3 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-a+3) = 0 \quad \therefore a = 2$$

이를 $x^2 - 2x - a + 3 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 2x - 2 + 3 = 0, (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

이를 $y = x^2 + x$ 에 대입하면 $y = 2$

따라서 점 A의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.

09 답 $\frac{2}{3}$

방정식 $f(x+1, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형은 세 점 $(0, 0), (2, 0), (1, 2)$ 를 각각 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 세 점 $(1, -2), (3, -2), (2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다.

평행이동한 세 점을 각각 A, B, C라 하고 세 점 $A(1, -2), B(3, -2), C(2, 0)$ 을 점 $(-1, 2)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A', B', C' 이라 하자.

점 A'의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점 $(-1, 2)$ 는 두 점 A, A'을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x_1+1}{2} = -1, \frac{y_1-2}{2} = 2$$

$$\therefore x_1 = -3, y_1 = 6 \quad \therefore A'(-3, 6)$$

점 B'의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하면 점 $(-1, 2)$ 는 두 점 B, B'을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x_2+3}{2} = -1, \frac{y_2-2}{2} = 2 \quad \therefore x_2 = -5, y_2 = 6 \quad \therefore B'(-5, 6)$$

점 C'의 좌표를 (x_3, y_3) 이라 하면 점 $(-1, 2)$ 는 두 점 C, C'을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x_3+2}{2} = -1, \frac{y_3+0}{2} = 2 \quad \therefore x_3 = -4, y_3 = 4 \quad \therefore C'(-4, 4)$$

즉, 도형 T는 삼각형 A'B'C'이다.

이때 직선 $ax - y + 3a + 6 = 0$, 즉 $y = a(x+3) + 6$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $A'(-3, 6)$ 을 지나므로 도형 T의 넓이를 이등분하려면 선분 B'C'의 중점 $(-\frac{9}{2}, 5)$ 를 지나야 한다.

$$\text{따라서 } -\frac{9}{2}a - 5 + 3a + 6 = 0 \text{이므로}$$

$$-\frac{3}{2}a = -1 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

idea 10 답 4

삼각형 A를 점 $(0, 0)$ 에 대하여 대칭이동한 도형을 T_1 , 삼각형 A를 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이동한 도형을 T_2 라 하면 $0 \leq a \leq 1$ 일 때, 도형 T는 도형 T_1 을 도형 T_2 로 옮기는 평행이동에 의하여 생기는 부분과 같다.

(i) $a = 0$ 일 때, 즉 점 $(0, 0)$ 에 대하여 대칭이동할 때,

삼각형 A의 세 꼭짓점 $(0, -2), (2, 0), (2, -2)$ 를 점 $(0, 0)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(0, 2), (-2, 0), (-2, 2)$ 이므로 도형 T_1 은 세 점 $(0, 2), (-2, 0), (-2, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형이다.

(ii) $a = 1$ 일 때, 즉 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이동할 때,

삼각형 A의 세 꼭짓점 $(0, -2), (2, 0), (2, -2)$ 를 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 이라 하면 점 $(1, 2)$ 는 두 점 $(0, -2), (x_1, y_1)$, 두 점 $(2, 0), (x_2, y_2)$, 두 점 $(2, -2), (x_3, y_3)$ 을 각각 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{x_1+0}{2} = 1, \frac{y_1-2}{2} = 2 \quad \therefore x_1 = 2, y_1 = 6$$

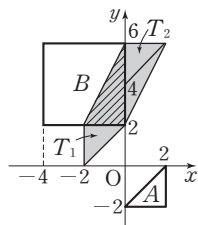
$$\frac{x_2+2}{2} = 1, \frac{y_2+0}{2} = 2 \quad \therefore x_2 = 0, y_2 = 4$$

$$\frac{x_3+2}{2} = 1, \frac{y_3-2}{2} = 2 \quad \therefore x_3 = 0, y_3 = 6$$

따라서 세 점은 $(2, 6), (0, 4), (0, 6)$ 이므로 도형 T_2 는 세 점 $(2, 6), (0, 4), (0, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형이다.

(i), (ii)에서 도형 T_1 을 도형 T_2 로 옮기는 평행 이동에 의하여 생기는 부분의 내부와 정사각형 B 의 내부의 공통부분은 세 점 $(-2, 2)$, $(0, 2)$, $(0, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 내부이다.

따라서 구하는 공통부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$



11 답 $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$

점 $P(0, a)$ 를 직선 $x-2y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표를 (m, n) ($m>0, n>0$)이라 하자.

이때 두 점 P, Q 를 이은 선분의 중점 $(\frac{m}{2}, \frac{n+a}{2})$ 가 직선

$x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$$\frac{m}{2} - 2 \times \frac{n+a}{2} + 1 = 0$$

$$m - 2(n+a) + 2 = 0$$

$$\therefore m - 2n = 2a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 P, Q 를 지나는 직선이 직선 $x-2y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 에 수직이므로

$$\frac{n-a}{m} \times \frac{1}{2} = -1, \quad n-a = -2m$$

$$\therefore 2m+n=a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } m = \frac{4a-2}{5}, \quad n = \frac{4-3a}{5}$$

이때 $m>0, n>0$ 이므로

$$\frac{4a-2}{5} > 0 \quad \therefore a > \frac{1}{2}$$

$$\frac{4-3a}{5} > 0 \quad \therefore a < \frac{4}{3}$$

따라서 구하는 a 의 값의 범위는 $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$

12 답 $\sqrt{34}$

포물선 $y=x^2+6x+8$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $y=(-x)^2+6 \times (-x)+8=x^2-6x+8$

이때 포물선 $y=x^2-6x+8$ 위의 두 점 A, B 의 좌표를

$(a, a^2-6a+8), (b, b^2-6b+8)$ ($a < b$)이라 하자. $\dots\dots$ 배점 20%

(i) 직선 AB 는 직선 $y=x+1$ 과 수직이므로

$$\frac{b^2-6b+8-(a^2-6a+8)}{b-a} \times 1 = -1$$

$$b^2-6b+8-a^2+6a-8=a-b$$

$$a^2-b^2-5a+5b=0$$

$$(a+b)(a-b)-5(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b-5)=0$$

그런데 $a \neq b$ 이므로 $a+b-5=0$

$$\therefore a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(ii) 두 점 A, B 를 이은 선분의 중점 $(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2-6a-6b+16}{2})$ 이

직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$$\frac{a^2+b^2-6a-6b+16}{2} = \frac{a+b}{2} + 1$$

$$a^2+b^2-6a-6b+16=a+b+2$$

$$a^2+b^2-7a-7b+14=0$$

$$(a+b)^2-2ab-7(a+b)+14=0$$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$5^2-2ab-7 \times 5+14=0 \quad \therefore ab=2$$

$$\therefore (b-a)^2=(a+b)^2-4ab=5^2-4 \times 2=17$$

$$\therefore b-a=\sqrt{17} \quad (\because a < b) \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore AB=\sqrt{(b-a)^2+\{b^2-6b+8-(a^2-6a+8)\}^2}$$

$$=\sqrt{(b-a)^2+\{b^2-a^2-6(b-a)\}^2}$$

$$=\sqrt{(b-a)^2+\{(b+a)(b-a)-6(b-a)\}^2}$$

$$=\sqrt{17+(5 \times \sqrt{17}-6\sqrt{17})^2}$$

$$=\sqrt{17+17}$$

$$=\sqrt{34} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

13 답 ①

선분 OP 의 길이가 최소가 되는 경우는 직

선 l 과 직선 $3x+4y+12=0$ 이 서로 수직

일 때이므로 직선 l 의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이다.

즉, 직선 l 의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$

직선 l 은 직선 $y=0$ 을 직선 $y=ax$ 에 대하

여 대칭이동한 것이므로 직선 l 위의 점을

직선 $y=ax$ 에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=0$ 위의 점이 된다.

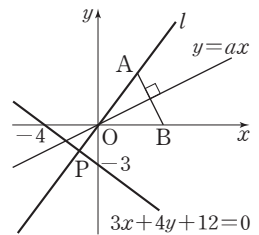
따라서 직선 l 위의 한 점 $A(3, 4)$ 에 대하여 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이므로

점 A 를 직선 $y=ax$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $B(5, 0)$ 이다.

이때 두 점 A, B 를 지나는 직선은 직선 $y=ax$ 과 수직이므로

$$\frac{0-4}{5-3} \times a = -1$$

$$-2a = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$



14 답 3

원 C 의 중심의 좌표가 (a, b) 이고, 두 원 C, C' 이 직선 $y=x$ 에 대하여

서로 대칭이므로 원 C' 의 중심의 좌표는 (b, a) 이다.

원 C' 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원을 C'' 이라 하면 원 C'' 의 중심의 좌표는 $(b-1, a)$ 이다.

이때 원 C 를 직선 $y=2x-2$ 에 대하여 대칭이동한 원은 C'' 이므로 두 원 C, C'' 의 중심 $(a, b), (b-1, a)$ 는 직선 $y=2x-2$ 에 대하여 서로 대칭이다.

즉, 두 원 C, C'' 의 중심을 이은 선분의 중점 $(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2})$ 가 직

선 $y=2x-2$ 위의 점이므로

$$\frac{a+b}{2} = 2 \times \frac{a+b-1}{2} - 2$$

$$a+b=2(a+b-1)-4$$

$$\therefore a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 원 C, C'' 의 중심을 지나는 직선이 직선 $y=2x-2$ 에 수직이므로

$$\frac{a-b}{b-1-a} \times 2 = -1$$

$$2(a-b) = -b+1+a$$

$$\therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{7}{2}, \quad b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 4b-2a = 4 \times \frac{5}{2} - 2 \times \frac{7}{2} = 3$$

15 답 -66

(가)에서 직선 l 은 두 점 $(-3, 2)$, $(1, 0)$ 을 이은 선분의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

(나)에서 직선 l 은 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, 즉 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 의 중심 $(1, 2)$ 를 지난다.

따라서 두 점 $(-1, 1)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y-2 = \frac{2-1}{1-(-1)}(x-1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

직선 $y=2x$ 를 직선 l 에 대하여 대칭이동한 직선을 m 이라 하자.

직선 $y=2x$ 와 직선 l 의 교점이 $(1, 2)$ 이므로 직선 m 도 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

또 직선 $y=2x$ 위의 한 점 $A(0, 0)$ 을 직선 l 에 대하여 대칭이동한 점을 $B(p, q)$ 라 하면

두 점 A, B 를 이은 선분의 중점 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$ 가 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{q}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\therefore p-2q = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 A, B 를 지나는 직선이 직선 l 에 수직이므로

$$\frac{q}{p} \times \frac{1}{2} = -1$$

$$\therefore q = -2p \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } p = -\frac{6}{5}, q = \frac{12}{5}$$

$$\therefore B\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

즉, 두 점 $(1, 2)$, $\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 를 지나는 직선 m 의 방정식은

$$y-2 = \frac{\frac{12}{5}-2}{-\frac{6}{5}-1}(x-1)$$

$$y = -\frac{2}{11}(x-1)+2$$

$$\therefore 2x+11y-24=0$$

따라서 $a=2, b=11, c=-24$ 이므로

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{11 \times (-24)}{4} = -66$$

다른 풀이

(가)에서 직선 l 은 두 점 $(-3, 2)$, $(1, 0)$ 을 이은 선분의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

(나)에서 직선 l 은 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, 즉 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 의 중심 $(1, 2)$ 를 지난다.

따라서 두 점 $(-1, 1)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 l 의 방정식은

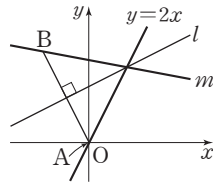
$$y-2 = \frac{2-1}{1-(-1)}(x-1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

직선 $y=2x$ 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하고 직선 l 에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(x', y')$ 이라 하자.

이때 두 점 P, Q 를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 이 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{x+x'}{2} + \frac{3}{2}$$



$$2(y+y') = x+x'+6$$

$$\therefore x-2y = -x'+2y'-6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 P, Q 를 지나는 직선이 직선 l 에 수직이므로

$$\frac{y-y'}{x-x'} \times \frac{1}{2} = -1$$

$$y-y' = -2(x-x')$$

$$\therefore 2x+y = 2x'+y' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$5x = 3x' + 4y' - 6$$

$$\therefore x = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - \frac{6}{5}$$

$2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-5y = -4x' + 3y' - 12$$

$$\therefore y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + \frac{12}{5}$$

이때 점 $P(x, y)$ 는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$$\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + \frac{12}{5} = 2\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - \frac{6}{5}\right)$$

$$\therefore 2x' + 11y' - 24 = 0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $2x+11y-24=0$ 이므로

$$a=2, b=11, c=-24$$

$$\therefore \frac{bc}{a^2} = \frac{11 \times (-24)}{4} = -66$$

16 답 $4\sqrt{2}$

세 점 P, A, B 를 $P(x, 0)$, $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ 이라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+1}$ 은 두 점 A, P 사이의 거리이고, $\sqrt{(x-5)^2+9}$ 은 두 점 B, P 사이의 거리이다.

즉, $\sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{(x-5)^2+9}$ 의 최솟값은 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이다.

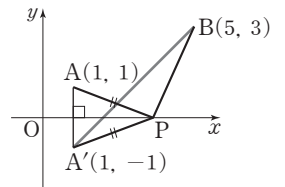
이때 점 $P(x, 0)$ 은 x 축 위의 점이므로

점 $A(1, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동

한 점을 $A'(1, -1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(5-1)^2 + \{3-(-1)\}^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.



17 답 ④

점 R 의 좌표를 $(a, 1)$ 이라 하자.

점 R 를 x 축에 대하여 대칭이동한

점을 R' 이라 하면 $R'(a, -1)$ 이고

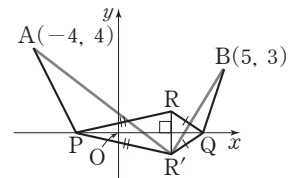
$$\overline{AP} + \overline{PR} = \overline{AP} + \overline{PR'} \geq \overline{AR'}$$

$$\overline{RQ} + \overline{QB} = \overline{R'Q} + \overline{QB} \geq \overline{R'B}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB} \geq \overline{AR'} + \overline{R'B}$$

세 점 $A(-4, 4)$, $B(5, 3)$, $R'(a, -1)$ 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A', B', R'' 이라 하면 $A'(-4, 5)$, $B'(5, 4)$, $R''(a, 0)$ 이고

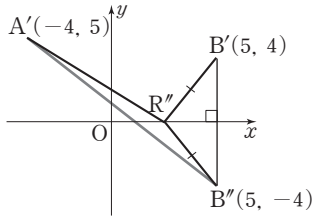
$$\overline{AR'} + \overline{R'B} = \overline{A'R''} + \overline{R''B'}$$



이때 점 $B'(5, 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'' 이라 하면 $B''(5, -4)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A'R''} + \overline{R''B''} \\ &= \overline{A'R''} + \overline{R''B''} \\ &\geq \overline{A'B''} \\ &= \sqrt{\{5 - (-4)\}^2 + \{(-4) - 5\}^2} \\ &= 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $9\sqrt{2}$ 이다.



18 답 ⑤

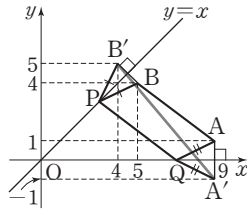
$\overline{AB} = \sqrt{(9-5)^2 + (1-4)^2} = 5$ 이므로 사각형 $ABPQ$ 의 둘레의 길이가 최소일 때는 나머지 세 변 BP , PQ , QA 의 길이의 합이 최소일 때이다.

점 $B(5, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(4, 5)$ 이고, 점 $A(9, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(9, -1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QA} &= \overline{B'P} + \overline{PQ} + \overline{QA'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(9-4)^2 + \{(-1)-5\}^2} \\ &= \sqrt{61} \\ \therefore \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QA} &\geq \overline{AB} + \overline{A'B'} \\ &= 5 + \sqrt{61} \end{aligned}$$

따라서 사각형 $ABPQ$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $5 + \sqrt{61}$ 이므로

$$a=5, b=61 \quad \therefore a+b=66$$



step 3 최고난도 문제

| 120~121쪽

- 01 ① 02 $a=1, b=\frac{10}{3}$ 03 ① 04 5
05 (15, 9) 06 $\frac{21}{32}$ 07 4

01 답 ①

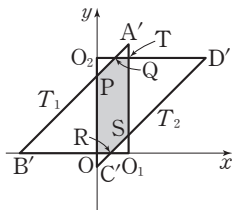
1단계 두 삼각형 T_1, T_2 의 꼭짓점의 좌표 구하기

세 점 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 세 점을 각각 O_1 , A' , B' 이라 하면

$$O_1(t, 0), A'(t, 1), B'(-1+t, 0)$$

세 점 $O(0, 0)$, $C(0, -1)$, $D(1, 0)$ 을 y 축의 방향으로 $2t$ 만큼 평행이동한 세 점을 각각 O_2 , C' , D' 이라 하면

$$O_2(0, 2t), C'(0, -1+2t), D'(1, 2t)$$



2단계 두 삼각형 T_1, T_2 가 만나는 점의 좌표 구하기

두 삼각형 T_1, T_2 의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 $A'B'$ 이 두 선분 O_2C' , O_2D' 과 A' , B' 이 아닌 두 점에서 만나야 한다. 또 선분 $C'D'$ 이 두 선분 O_1B' , O_1A' 과 C' , D' 이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

선분 $A'B'$ 이 두 선분 O_2C' , O_2D' 과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하고, 선분 $C'D'$ 이 두 선분 O_1B' , O_1A' 과 만나는 점을 각각 R, S 라 하자.

두 점 $A'(t, 1)$, $B'(-1+t, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{0-1}{-1+t-t}(x-t) \quad \therefore y=x-t+1$$

직선 $y=x-t+1$ 의 y 절편은 $1-t$ 이므로 점 P 의 좌표는 $(0, 1-t)$

두 점 $O_2(0, 2t)$, $D'(1, 2t)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y=2t$ 이므로 두 점 A' , B' 을 지나는 직선과 두 점 O_2 , D' 을 지나는 직선의 교점 Q 의 x 좌표를 구하면

$$x-t+1=2t \quad \therefore x=3t-1$$

따라서 점 Q 의 좌표는 $(3t-1, 2t)$

두 점 $C'(0, -1+2t)$, $D'(1, 2t)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2t = \frac{2t - (-1+2t)}{1-0}(x-1) \quad \therefore y=x+2t-1$$

직선 $y=x+2t-1$ 의 x 절편은 $1-2t$ 이므로 점 R 의 좌표는 $(1-2t, 0)$

두 점 $O_1(t, 0)$, $A'(t, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $x=t$ 이므로 두 점 C' , D' 을 지나는 직선과 두 점 O_1 , A' 을 지나는 직선의 교점 S 의 y 좌표를 구하면

$$y=t+2t-1 \quad \therefore y=3t-1$$

따라서 점 S 의 좌표는 $(t, 3t-1)$

3단계 a 의 값 구하기

이때 조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P 의 y 좌표) < (점 O_2 의 y 좌표) < (점 A' 의 y 좌표)이어야 하므로

$$1-t < 2t < 1$$

$$1-t < 2t \text{에서 } t > \frac{1}{3}, 2t < 1 \text{에서 } t < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{3} < t < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

또 (점 C' 의 y 좌표) < (점 O_1 의 y 좌표) < (점 S 의 y 좌표)이어야 하므로

$$-1+2t < 0 < 3t-1$$

$$-1+2t < 0 \text{에서 } t < \frac{1}{2}, 0 < 3t-1 \text{에서 } t > \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} < t < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } t \text{의 값의 범위는 } \frac{1}{3} < t < \frac{1}{2} \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

4단계 M 의 값 구하기

이때 두 선분 $A'O_1$, O_2D' 의 교점을 T 라 하고, 육각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (\text{직사각형 } OO_1TO_2 \text{의 넓이}) - (\text{삼각형 } O_1SR \text{의 넓이}) \\ &\quad - (\text{삼각형 } O_2PQ \text{의 넓이}) \end{aligned}$$

$$= t \times 2t - \frac{1}{2}(3t-1)^2 - \frac{1}{2}(3t-1)^2$$

$$= -7t^2 + 6t - 1$$

$$= -7\left(t - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{2}{7}$$

따라서 $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$ 에서 $t = \frac{3}{7}$ 일 때, S 는 최댓값 $M = \frac{2}{7}$ 를 갖는다.

5단계 $a+M$ 의 값 구하기

$$\therefore a+M = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} = \frac{11}{14}$$

02 답 $a=1, b=\frac{10}{3}$

1단계 두 도형 P_1, P_2 의 방정식 구하기

함수 $y=|x-1|+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $3a$ 만큼, y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$P_1: y+a=|x-1-3a|+2$$

또 함수 $y=|x-1|+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-2b$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$P_2: y-b=|x-1+2b|+2$$

2단계 두 점 A, B의 좌표 구하기

함수 $y=|x-1|+2$ 의 그래프는

$$x \geq 1 \text{ 일 때, } y=x+1,$$

$$x < 1 \text{ 일 때, } y=-x+3$$

P_1 의 그래프는

$$x \geq 1+3a \text{ 일 때, } y=x+1-4a$$

$$x < 1+3a \text{ 일 때, } y=-x+3+2a$$

점 A는 두 직선 $y=x+1$,

$y=-x+3+2a$ 의 교점이므로

$$x+1=-x+3+2a, 2x=2a+2$$

$$\therefore x=a+1$$

이를 $y=x+1$ 에 대입하면

$$y=a+2 \quad \therefore A(a+1, a+2)$$

P_2 의 그래프는

$$x \geq 1-2b \text{ 일 때, } y=x+1+3b$$

$$x < 1-2b \text{ 일 때, } y=-x+3-b$$

점 B는 두 직선 $y=-x+3$, $y=x+1+3b$ 의 교점이므로

$$-x+3=x+1+3b, 2x=-3b+2$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2}b+1$$

이를 $y=-x+3$ 에 대입하면

$$y=\frac{3}{2}b+2 \quad \therefore B\left(-\frac{3}{2}b+1, \frac{3}{2}b+2\right)$$

3단계 선분 AB의 중점의 좌표를 이용하여 a, b 의 값 구하기

한편 삼각형 ABC에서 $\angle C=90^\circ$ 이므로 선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다.

따라서 원 $x^2+y^2+2x-10y+13=0$, 즉 $(x+1)^2+(y-5)^2=13$ 의 중심 $(-1, 5)$ 가 선분 AB의 중점이므로

$$\frac{a+1+\left(-\frac{3}{2}b+1\right)}{2}=-1, \frac{a+2+\left(\frac{3}{2}b+2\right)}{2}=5$$

$$\therefore 2a-3b=-8, 2a+3b=12$$

따라서 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=\frac{10}{3}$$

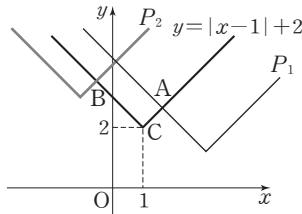
03 답 ①

1단계 삼각형 ABQ의 넓이가 최대인 경우 파악하기

점 P가 원 $x^2+(y-1)^2=9$ 위의 점이므로 점 P를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 점 Q는 원

$x^2+(y-1)^2=9$ 를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이다.

이때 삼각형 ABQ의 넓이가 최대가 되려면 점 Q와 직선 AB 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.



2단계 점 Q의 좌표 구하기

그림과 같이 점 Q는 직선 AB와 평행하고 원 $x^2+y^2=9$ 와 제2사분면에서 접하는 직선의 접점이다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{3-1}=\sqrt{3} \text{ 이므로 기울기가 } \sqrt{3} \text{ 이고}$$

제2사분면에서 원 $x^2+y^2=9$ 와 접하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x+3\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$$

$$\therefore y=\sqrt{3}x+6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+y^2=9$ 에 대입하면

$$x^2+(\sqrt{3}x+6)^2=9$$

$$4x^2+12\sqrt{3}x+27=0$$

$$(2x+3\sqrt{3})^2=0 \quad \therefore x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

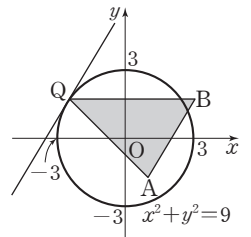
$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y=\frac{3}{2}$$

따라서 점 Q의 좌표가 $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 일 때, 삼각형 ABQ의 넓이가 최대가 된다.

3단계 점 P의 y좌표 구하기

점 Q를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 P가 되므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{5}{2}$ 이다.



04 답 5

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기

포물선 $y=f(x)$ 의 꼭짓점 $(3, 0)$ 을 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P, 점 P를 점 B에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 점 Q를 점 C에 대하여 대칭이동한 점을 R라 하면 점 R를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(3, 0)$ 이므로 점 R는 $(3, 0)$ 이다.

따라서 세 점 A, B, C는 각각 세 선분 RP, PQ, QR의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 사각형 ABCR는 평행사변형이다.

2단계 두 직선의 기울기가 같음을 이용하여 a, b 의 값 구하기

즉, 직선 BA의 기울기와 직선 CR의 기울기가 같으므로

$$\frac{3-8}{5-2}=\frac{0-b}{3-a}$$

$$-5(3-a)=3 \times (-b)$$

$$\therefore 5a+3b=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 직선 BC의 기울기와 직선 AR의 기울기가 같으므로

$$\frac{8-b}{2-a}=\frac{3-0}{5-3}$$

$$2(8-b)=3(2-a)$$

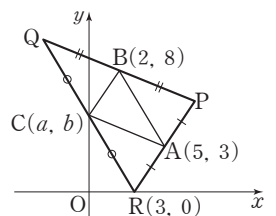
$$\therefore 3a-2b=-10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=0, b=5$$

3단계 $a+b$ 의 값 구하기

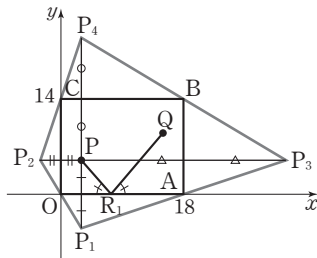
$$\therefore a+b=5$$



05 답 (15, 9)

1단계 점 P를 x축, y축, 직선 $x=18$, 직선 $y=14$ 에 대하여 각각 대칭이동한 네 점이 한 원 위의 점임을 알기

점 P를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P_1, P_2 라 하고, 두 직선 $x=18, y=14$ 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P_3, P_4 라 하자.
이때 $\angle PR_1O = \angle QR_1A$ 이고
 $\angle PR_1O = \angle P_1R_1O$ 이므로
 $\angle QR_1A = \angle P_1R_1O$



세 점 P_1, R_1, Q 는 한 직선 위에 있고 두 선분 PR_1, R_1Q 의 길이의 합이 항상 일정하므로 두 선분 P_1R_1, R_1Q 의 길이의 합, 즉 선분 P_1Q 의 길이가 항상 일정하다.
따라서 $P_1Q = P_2Q = P_3Q = P_4Q$ 이므로 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4 는 점 Q를 중심으로 하는 원 위의 점이다.

2단계 점 Q의 x좌표 구하기

선분 P_2P_3 은 중심이 점 Q인 원의 현이므로 점 Q는 선분 P_2P_3 의 수직이등분선 위에 있다.

즉, 점 Q의 x좌표는 두 점 $P_2(-3, 5), P_3(33, 5)$ 를 이은 선분의 중점의 x좌표이므로 $x = \frac{-3+33}{2} = 15$

3단계 점 Q의 y좌표 구하기

또 선분 P_1P_4 는 중심이 점 Q인 원의 현이므로 점 Q는 선분 P_1P_4 의 수직이등분선 위에 있다.

즉, 점 Q의 y좌표는 두 점 $P_1(3, -5), P_4(3, 23)$ 를 이은 선분의 중점의 y좌표이므로 $y = \frac{-5+23}{2} = 9$

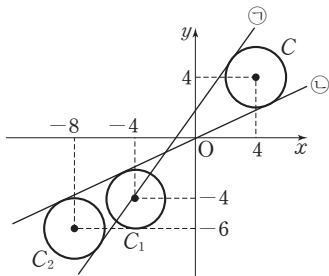
4단계 점 Q의 좌표 구하기

따라서 점 Q의 좌표는 (15, 9)이다.

06 답 $\frac{21}{32}$

1단계 $\frac{b+d+2}{a+c+4}$ 의 값 파악하기

원 $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$, 즉 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ 를 C 라 하고, 원 C 를 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_1 , 원 C_1 을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원을 C_2 라 하자.



점 $B(c, d)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B_1 이라 하면 $B_1(-c, -d)$ 이고, 점 B_1 은 원 C_1 위의 점이다.

또 점 B_1 을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점을 B_2 라 하면 $B_2(-c-4, -d-2)$ 이고, 점 B_2 는 원 C_2 위의 점이다. 따라서 $\frac{b+d+2}{a+c+4}$ 는 두 점 A, B_2 를 지나는 직선의 기울기이다.

2단계 Mm 의 값 구하기

원 C 위의 점 A와 원 C_2 위의 점 B_2 를 지나는 직선 중 기울기의 최댓값은 ①과 같이 접할 때이고, 최솟값은 ②과 같이 접할 때이다.

두 원 C, C_2 의 반지름의 길이가 같으므로 두 접선 ①, ②은 두 원의 중심 $(4, 4), (-8, -6)$ 을 이은 선분의 중점 $(-2, -1)$ 을 지난다.

점 $(-2, -1)$ 을 지나고 두 원에 접하는 직선의 기울기를 a 라 하면 접선의 방정식은

$$y+1=a(x+2) \quad \therefore ax-y+2a-1=0$$

이때 원 C 의 중심 $(4, 4)$ 와 직선 $ax-y+2a-1=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|4a-4+2a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2, \quad |6a-5|=2\sqrt{a^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 36a^2-60a+25=4(a^2+1)$$

$$\therefore 32a^2-60a+21=0$$

따라서 이 이차방정식의 두 근이 M, m 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$Mm=\frac{21}{32}$$

07 답 4

1단계 점 Q의 좌표 구하기

세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있지 않을 때,

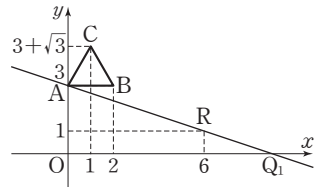
$$|QR+PR| > |PQ|, \quad |PQ+PR| > |QR| \quad \therefore |PR| > ||PQ|-|QR||$$

세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있을 때, $|PR| = |PQ - QR|$

따라서 $|PQ - QR|$ 의 값이 최대가

되려면 세 점 P, Q, R가 한 직선

위에 있어야 한다.



$$\text{한편 } |AR|^2 = 6^2 + 2^2 = 40,$$

$$|CR|^2 = 5^2 + (2+\sqrt{3})^2 = 32 + 4\sqrt{3} \text{에서 } |AR|^2 > |CR|^2, \text{ 즉 } |AR| > |CR| \text{이므로}$$

점 P가 점 A일 때 선분 PR의 길이가 최대이다.

이때 점 Q1의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 a 의 값은 점 P가 점 A일 때 직선

$$PR \text{의 } x \text{절편이고, 두 점 } A(0, 3), R(6, 1) \text{을 지나는 직선의 방정식은}$$

$$y-1=\frac{1-3}{6-0}(x-6), \text{ 즉 } y=-\frac{1}{3}x+3 \text{이므로}$$

$$0=-\frac{1}{3}a+3 \quad \therefore a=9 \quad \therefore Q_1(9, 0)$$

2단계 점 Q2의 좌표 구하기

세 점 $A(0, 3), B(2, 3),$

$C(1, 3+\sqrt{3})$ 을 x축에 대하여 대

칭이동한 점을 각각 A', B', C' 이

라 하면 $A'(0, -3), B'(2, -3),$

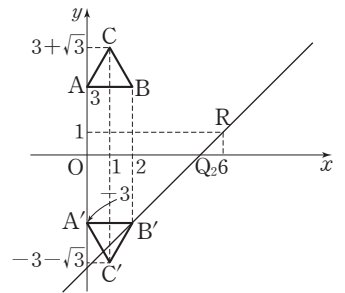
$C'(1, -3-\sqrt{3})$

삼각형 $A'B'C'$ 위의 한 점을 P'

이라 할 때 $|P'Q|+|QR|$ 의 값이 최

소가 되려면 세 점 P', Q, R 가 한

직선 위에 있어야 한다.



한편 삼각형 $A'B'C'$ 위의 점 P' 에 대하여 점 P' 이 점 B' 일 때 선분 $P'R$ 의 길이가 최소이다.

이때 점 Q2의 좌표를 $(b, 0)$ 이라 하면 b 의 값은 점 P' 이 점 B' 일 때 직

선 $P'R$ 의 x절편이고, 두 점 $B'(2, -3), R(6, 1)$ 을 지나는 직선의 방

$$\text{정식은 } y-1=\frac{1-(-3)}{6-2}(x-6), \text{ 즉 } y=x-5 \text{이므로}$$

$$0=b-5 \quad \therefore b=5 \quad \therefore Q_2(5, 0)$$

3단계 선분 Q1Q2의 길이 구하기

따라서 선분 Q_1Q_2 의 길이는 $9-5=4$

01 $-\frac{16}{3}$	02 $\frac{1}{2}$	03 ②	04 ③	05 $\frac{120}{119}$	06 60
07 34	08 ③	09 36	10 23	11 64	12 ③
13 ②					

01 답 $-\frac{16}{3}$

(가)에서 직선 l 이 삼각형 OAB 의 점 O 를 지나고, (나), (다)에서 점 P 는 선분 AB 를 2:1 또는 1:2로 내분하는 점이여야 한다.

(i) 점 P 가 선분 AB 를 2:1로 내분하는 점일 때,

점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 8 + 1 \times 0}{2+1}\right) \therefore \left(1, \frac{16}{3}\right)$$

즉, 직선 l 의 기울기는 $\frac{\frac{16}{3}-0}{1-0} = \frac{16}{3}$

(다)에서 직선 m 은 삼각형 OAP 의 넓이를 이등분하므로 선분 OA 의 중점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

즉, 직선 m 의 기울기는 $\frac{\frac{16}{3}-0}{1-\frac{3}{2}} = -\frac{32}{3}$

따라서 두 직선 l, m 의 기울기의 합은 $\frac{16}{3} + \left(-\frac{32}{3}\right) = -\frac{16}{3}$

(ii) 점 P 가 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점일 때,

점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 8 + 2 \times 0}{1+2}\right) \therefore \left(2, \frac{8}{3}\right)$$

즉, 직선 l 의 기울기는 $\frac{\frac{8}{3}-0}{2-0} = \frac{4}{3}$

(다)에서 직선 m 은 삼각형 OPB 의 넓이를 이등분하므로 선분 OB 의 중점 $(0, 4)$ 를 지난다.

즉, 직선 m 의 기울기는 $\frac{\frac{8}{3}-4}{2-0} = -\frac{2}{3}$

따라서 두 직선 l, m 의 기울기의 합은 $\frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 두 직선 l, m 의 기울기의 합의 최솟값은 $-\frac{16}{3}$ 이다.

02 답 $\frac{1}{2}$

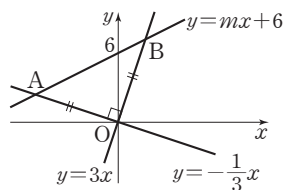
두 직선 $y=3x, y=-\frac{1}{3}x$ 의 기울기의

곱이 -1 이므로 두 직선은 서로 수직이다. 즉, 직선 $y=mx+6$ 이 두 직선 $y=-\frac{1}{3}x, y=3x$ 와 만나는 점을 각각 A, B 라 하면 삼각형 AOB 는

$\angle AOB=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

$$-\frac{1}{3}x=mx+6 \text{에서 } x=-\frac{18}{3m+1}$$

$$\text{이를 } y=-\frac{1}{3}x \text{에 대입하면 } y=\frac{6}{3m+1}$$



$$\therefore A\left(-\frac{18}{3m+1}, \frac{6}{3m+1}\right)$$

$$3x=mx+6 \text{에서 } x=\frac{6}{3-m}$$

$$\text{이를 } y=3x \text{에 대입하면 } y=\frac{18}{3-m}$$

$$\therefore B\left(\frac{6}{3-m}, \frac{18}{3-m}\right)$$

이때 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$ 이므로

$$\left(-\frac{18}{3m+1}\right)^2 + \left(\frac{6}{3m+1}\right)^2 = \left(\frac{6}{3-m}\right)^2 + \left(\frac{18}{3-m}\right)^2$$

$$\frac{360}{9m^2+6m+1} = \frac{360}{m^2-6m+9}$$

$$m^2-6m+9=9m^2+6m+1$$

$$8m^2+12m-8=0, 2m^2+3m-2=0$$

$$(m+2)(2m-1)=0 \therefore m=\frac{1}{2} (\because m>0)$$

다른 풀이

두 직선 $y=3x, y=-\frac{1}{3}x$ 의 기울기의

곱이 -1 이므로 두 직선은 서로 수직이다. 즉, 직선 $y=mx+6$ 이 두 직선

$y=-\frac{1}{3}x, y=3x$ 와 만나는 점을 각각

A, B 라 하면 삼각형 AOB 는

$\angle AOB=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

원점을 지나고 $\angle AOB$ 를 이등분하는 직선을 l 이라 하면 직선 l 은 직선

$y=mx+6$ 과 수직이고, 직선 l 위의 점 (x, y) 에서 두 직선 $y=3x,$

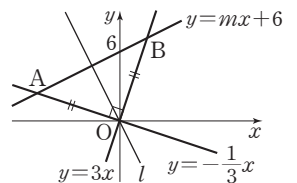
$y=-\frac{1}{3}x$, 즉 $3x-y=0, x+3y=0$ 에 이르는 거리는 같다.

$$\frac{|3x-y|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|x+3y|}{\sqrt{1^2+3^2}} \text{에서 } |3x-y| = |x+3y|$$

$$3x-y=\pm(x+3y) \therefore y=\frac{1}{2}x \text{ 또는 } y=-2x$$

이때 $m>0$ 에서 직선 l 의 기울기가 음수이므로

$$y=-2x \therefore m=\frac{1}{2}$$



03 답 ②

그림과 같이 직선 BC 를 x 축으로 하

고 점 D 를 원점으로 하는 좌표평면

을 잡으면

$B(-\sqrt{2}, 0), C(\sqrt{2}, 0)$

점 A 의 좌표를 $(p, q) (p>0, q>0)$

라 하면

$$\overline{AB}=2\sqrt{6} \text{에서 } \overline{AB}^2=24 \text{이므로}$$

$$(p+\sqrt{2})^2+q^2=24 \therefore p^2+q^2+2\sqrt{2}p=22 \dots\dots ㉠$$

$$\overline{AD}=\sqrt{14} \text{에서 } \overline{AD}^2=14 \text{이므로 } p^2+q^2=14 \dots\dots ㉡$$

$$㉠-㉡ \text{을 하면 } 2\sqrt{2}p=8 \therefore p=2\sqrt{2}$$

$$\text{이를 } ㉡ \text{에 대입하면 } 8+q^2=14 \therefore q=\sqrt{6} (\because q>0)$$

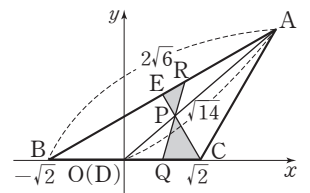
$$\therefore A(2\sqrt{2}, \sqrt{6})$$

$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABC 는 이등변삼각형

이고 선분 CE 는 선분 AB 의 수직이등분선이다.

따라서 직각삼각형 CEB 에서

$$\overline{CE}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$$



이때 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2\sqrt{14}}{3}, \overline{PD} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$\overline{CP} : \overline{PE} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \overline{PE} = \frac{1}{3}\overline{CE} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 EPA에서 선분 PR가 $\angle APE$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AR} : \overline{ER} = \overline{PA} : \overline{PE} = \frac{2\sqrt{14}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{7} : 1$$

$$\text{즉, } \overline{AR} : \overline{ER} = 2\sqrt{7} : 1 \text{이므로 } \triangle ARP : \triangle REP = 2\sqrt{7} : 1$$

이때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 AEP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$S_1 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1} = \frac{2\sqrt{21}-\sqrt{3}}{81}$$

또 삼각형 CPD에서 선분 PQ가 $\angle DPC$ 의 이등분선이므로

$$\overline{DQ} : \overline{CQ} = \overline{PD} : \overline{PC} = \frac{\sqrt{14}}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{7} : 2$$

$$\text{즉, } \overline{DQ} : \overline{CQ} = \sqrt{7} : 2 \text{이므로 } \triangle PDQ : \triangle PQC = \sqrt{7} : 2$$

따라서 삼각형 PDC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$S_2 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2} = \frac{2\sqrt{21}-4\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore S_2 - S_1 = \frac{2\sqrt{21}-4\sqrt{3}}{9} - \frac{2\sqrt{21}-\sqrt{3}}{81} = \frac{16\sqrt{21}-35\sqrt{3}}{81}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{16}{81}, b = -\frac{35}{81} \text{이므로 } a - b = \frac{17}{27}$$

04 답 ③

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-8}{32-0} = -\frac{1}{4}$ 이므로 직선 AB와 수직인 직선의

기울기는 4이고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0+32}{2}, \frac{8+0}{2}\right), \text{ 즉 } (16, 4) \text{이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정}$$

식은

$$y-4=4(x-16) \quad \therefore y=4x-60$$

이때 점 C(a, b)가 이 직선 위의 점이므로

$$b=4a-60 \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 CAB의 무게중심을 G'이라 하면 $\overline{CP} : \overline{CA} = 3 : 4$ 이므로

$$\overline{CG} : \overline{CG'} = 3 : 4 \quad \therefore \overline{CG'} = \frac{4}{3}\overline{CG} = \frac{4\sqrt{17}}{3}$$

$$\overline{CG'} : \overline{CM} = 2 : 3 \text{이므로 } \overline{CM} = \frac{3}{2}\overline{CG'} = 2\sqrt{17}$$

$$\text{즉, } \overline{CM}^2 = 68 \text{이므로 } (a-16)^2 + (b-4)^2 = 68$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 32a - 8b + 204 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2 + (4a-60)^2 - 32a - 8(4a-60) + 204 = 0$$

$$17a^2 - 544a + 4284 = 0$$

$$a^2 - 32a + 252 = 0$$

$$(a-14)(a-18) = 0$$

$$\therefore a=14 \text{ 또는 } a=18$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$$a=14 \text{일 때 } b=-4, a=18 \text{일 때 } b=12$$

이때 점 C는 제1사분면 위의 점이므로

$$a=18, b=12 \quad \therefore a+b=30$$

05 답 $\frac{120}{119}$

원점에서 직선 l에 내린 수선의

발을 H라 하자.

$$\text{이때 } \overline{OP} = \sqrt{41},$$

$$\overline{OA} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{이고,}$$

$\overline{OH} = a, \overline{HP} = b$ 라 하면 두 삼

각형 OHP, OHA는 모두 직각

삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = 41 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a^2 + (b+8)^2 = 169 \quad \therefore a^2 + b^2 + 16b = 105 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉡ - ㉠ \text{을 하면 } 16b = 64 \quad \therefore b = 4$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=5$ ($\because a>0$)

직선 l의 기울기를 m ($m>0$)이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y-5=m(x-12)$$

$$\therefore mx-y-12m+5=0$$

원의 중심 (0, 0)과 직선 $mx-y-12m+5=0$ 사이의 거리가 5이므로

$$\frac{|-12m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 5, \quad |-12m+5| = 5\sqrt{m^2+1}$$

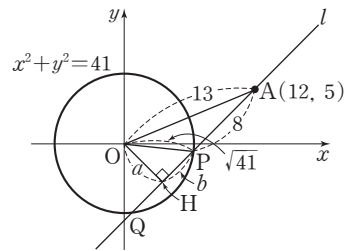
양변을 제곱하면

$$144m^2 - 120m + 25 = 25(m^2 + 1)$$

$$119m^2 - 120m = 0$$

$$m(119m - 120) = 0$$

$$\therefore m = \frac{120}{119} \quad (\because m>0)$$



06 답 60

원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 원의 중심과 두 직선 $x-2y=0$,

$2x-y=0$ 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$a-2b = \pm(2a-b) \quad \therefore b = -a \text{ 또는 } b=a$$

즉, 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

원의 중심 (a, a)와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리는 3이므로

$$\frac{|2a-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 3, \quad \frac{|a|}{\sqrt{5}} = 3$$

$$|a| = 3\sqrt{5} \quad \therefore a = \pm 3\sqrt{5}$$

$$\therefore A(3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}), C(-3\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

원의 중심 (a, -a)와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리는 3이므로

$$\frac{|2a+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 3, \quad \frac{|3a|}{\sqrt{5}} = 3$$

$$|a| = \sqrt{5} \quad \therefore a = \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore B(-\sqrt{5}, \sqrt{5}), D(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$$

이때 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 두 선분 AC, BD를 대각선으로 하는 마름모이다.

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3\sqrt{5}-3\sqrt{5})^2 + (-3\sqrt{5}-3\sqrt{5})^2} = 6\sqrt{10}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(\sqrt{5}-(-\sqrt{5}))^2 + (-\sqrt{5}-\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{10}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

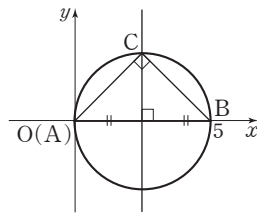
$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 60$$

07 답 34

(i) $a=0$ 일 때,

$\overline{AC}=\overline{BC}$ 이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있고, 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 점 C는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$$\therefore \overline{OC}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$



(ii) $a \neq 0$ 일 때,

$\angle AOB = \angle ACB = 90^\circ$ 이므로 네 점 A, O, B, C가 한 원 위에 있고 선분 AB는 이 원의 지름이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 $(\frac{5}{2}, \frac{a}{2})$

이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2+25}{4}} \text{이므로 원의 방정식은}$$

$$(x-\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2+25}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB의 수직이등분선을 l 이라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 이므로 점 C는 직선 l 과 원이 만나는 점이다.

이때 직선 AB의 기울기는 $-\frac{a}{5}$ 이므로 직선 l 의 기울기는 $\frac{5}{a}$ 이다.

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y-\frac{a}{2}=\frac{5}{a}(x-\frac{5}{2}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{25}{a^2}(x-\frac{5}{2})^2 = \frac{a^2+25}{4}$$

$$(x-\frac{5}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{a}{2}$$

$$\therefore x=\frac{a+5}{2} \text{ 또는 } x=\frac{5-a}{2}$$

이를 ②에 대입하여 풀면

$$x=\frac{a+5}{2} \text{ 일 때 } y=\frac{a+5}{2}, x=\frac{5-a}{2} \text{ 일 때 } y=\frac{a-5}{2}$$

즉, 점 C의 좌표는

$$(\frac{a+5}{2}, \frac{a+5}{2}) \text{ 또는 } (\frac{5-a}{2}, \frac{a-5}{2})$$

① $C(\frac{a+5}{2}, \frac{a+5}{2})$ 일 때,

$$\overline{OC}=\sqrt{(\frac{a+5}{2})^2 + (\frac{a+5}{2})^2}=\sqrt{2}|\frac{a+5}{2}|$$

이때 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 3$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq \overline{OC} < \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \frac{5\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq 4\sqrt{2}$$

② $C(\frac{5-a}{2}, \frac{a-5}{2})$ 일 때,

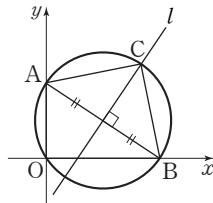
$$\overline{OC}=\sqrt{(\frac{5-a}{2})^2 + (\frac{a-5}{2})^2}=\sqrt{2}|\frac{a-5}{2}|$$

이때 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 3$ 이므로

$$\sqrt{2} \leq \overline{OC} < \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \frac{5\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

(i), (ii)에서 $M=4\sqrt{2}$, $m=\sqrt{2}$ 이므로

$$M^2+m^2=32+2=34$$



08 답 ③

두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 C의 방정식은 $x^2+y^2=4$

선분 AP의 중점을 S라 하면 $\angle PSO=90^\circ$ 이

고 점 Q는 선분 AP를 3:1로 외분하므로

$$\overline{AS}=\overline{SP}=\overline{PQ}$$

이때 $\angle APB=90^\circ$ 이므로 두 삼각형 QSO,

QPR는 닮음이고 닮음비는 2:1이다.

즉, 점 R는 선분 OQ의 중점이므로 점 R의

y 좌표를 a 라 하면 삼각형 OBR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times a = \frac{6}{5} \quad \therefore a = \frac{6}{5}$$

점 R의 y 좌표가 $\frac{6}{5}$ 이므로 점 Q의 y 좌표는 $\frac{12}{5}$

이때 점 P는 선분 AQ를 2:1로 내분하는 점이므로 점 P의 y 좌표는

$$\frac{2 \times \frac{12}{5} + 1 \times 0}{2+1} = \frac{8}{5}$$

점 P의 좌표를 $(b, \frac{8}{5})$ ($b>0$)이라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점

이므로 $b^2 + (\frac{8}{5})^2 = 4, b^2 = \frac{36}{25}$

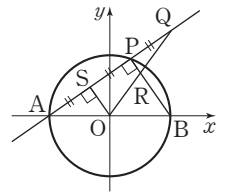
$$\therefore b = \frac{6}{5} (\because b>0)$$

$$\therefore P(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$$

$$\therefore P(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$$

따라서 두 점 $A(-2, 0)$, $P(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{8}{5}-0}{\frac{6}{5}-(-2)} = \frac{1}{2} \quad \therefore m = \frac{1}{2}$$



09 답 36

직선 $y=x+9$ 에 평행하고 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}$ 의 그래프에 접하는

직선을 l , 직선 $y=x+9$ 와 직선 l 사이의 거리를 d 라 하자.

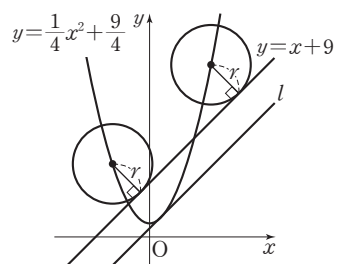
(i) $r>d$ 일 때,

그림과 같이 직선 $y=x+9$ 의

위쪽에서 접하는 원이 2개이

다.

$$\therefore m=2$$



(ii) $r=d$ 일 때,

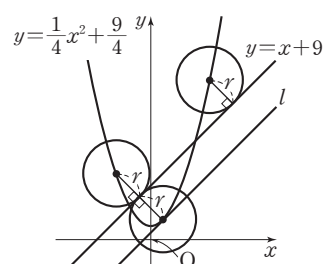
그림과 같이 직선 $y=x+9$ 의

위쪽에서 접하는 원이 2개, 아

래쪽에서 접하는 원이 1개이

다.

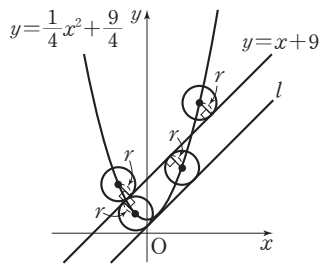
$$\therefore m=3$$



(iii) $r < d$ 일 때,

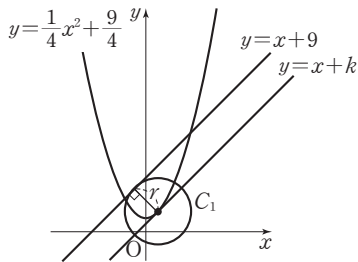
그림과 같이 직선 $y = x + 9$ 의
위쪽에서 접하는 원이 2개, 아
래쪽에서 접하는 원이 2개이
다.

$$\therefore m = 4$$



(i), (ii), (iii)에서 m 이 홀수인 경우는 $m = 3$

직선 $y = x + 9$ 에 접하는 원 중 직선 $y = x + 9$ 의 아래쪽에 위치한 원을 C_1 이라 하면 원 C_1 의 반지름의 길이 r 는 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y = x + 9$ 사이의 거리와 같다.



이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식

을 $y = x + k$ 라 하면 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} = x + k$ 에서

$$x^2 - 4x + 9 - 4k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (9 - 4k) = 0$$

$$\therefore k = \frac{5}{4}$$

두 직선 $y = x + 9$ 와 $y = x + \frac{5}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y = x + 9$ 위의 점

$(0, 9)$ 와 직선 $y = x + \frac{5}{4}$, 즉 $x - y + \frac{5}{4} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

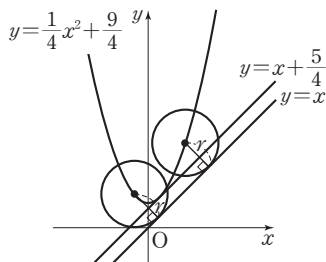
$$\frac{\left| -9 + \frac{5}{4} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{31\sqrt{2}}{8}$$

$$\therefore r = \frac{31\sqrt{2}}{8}$$

직선 $y = x$ 와 직선 $y = x + \frac{5}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y = x$ 위의 점 $(0, 0)$

과 직선 $y = x + \frac{5}{4}$, 즉 $x - y + \frac{5}{4} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left| \frac{5}{4} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$



따라서 $\frac{31\sqrt{2}}{8} > \frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이므로 $n = 2$ — 원의 반지름의 길이가 두 직선 사이의 거리보다 크므로 직선 $y = x$ 에 접하는 원은 두 개이다.
 $\therefore m + n + 4\sqrt{2}r = 3 + 2 + 31 = 36$

10 답 23

원 C 의 중심의 좌표는 $(3, 4)$ 이므로 원 C_1 의 중심의 좌표는 $(3 + m, 4)$ 이고 반지름의 길이는 4이다.

(가)에서 원 C_1 이 직선 l 과 적어도 한 점에서 만나려면 원 C_1 의 중심 $(3 + m, 4)$ 와 직선 $12x - 5y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 4보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|12(3+m) - 20|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \leq 4$$

$$|12m + 16| \leq 52$$

$$-52 \leq 12m + 16 \leq 52, -68 \leq 12m \leq 36$$

$$\therefore -\frac{17}{3} \leq m \leq 3$$

따라서 자연수 m 의 값은 1, 2, 3이다.

원 C_2 의 중심의 좌표는 $(3 + m, 4 + n)$ 이고 반지름의 길이는 4이다.

(나)에서 원 C_2 가 직선 l 과 적어도 한 점에서 만나려면 원 C_2 의 중심 $(3 + m, 4 + n)$ 과 직선 $12x - 5y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 4보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|12(3+m) - 5(4+n)|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \leq 4$$

$$|12m - 5n + 16| \leq 52, -52 \leq 12m - 5n + 16 \leq 52$$

$$\therefore -68 \leq 12m - 5n \leq 36$$

(i) $m = 1$ 일 때,

$$-68 \leq 12m - 5n \leq 36 \text{에서 } -68 \leq 12 - 5n \leq 36$$

$$-80 \leq -5n \leq 24 \quad \therefore -\frac{24}{5} \leq n \leq 16$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, ..., 16이므로 $m + n$ 의 최댓값은 $1 + 16 = 17$

(ii) $m = 2$ 일 때,

$$-68 \leq 12m - 5n \leq 36 \text{에서 } -68 \leq 24 - 5n \leq 36$$

$$-92 \leq -5n \leq 12 \quad \therefore -\frac{12}{5} \leq n \leq \frac{92}{5}$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, ..., 18이므로 $m + n$ 의 최댓값은 $2 + 18 = 20$

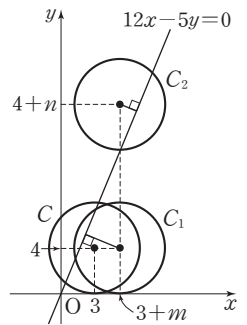
(iii) $m = 3$ 일 때,

$$-68 \leq 12m - 5n \leq 36 \text{에서 } -68 \leq 36 - 5n \leq 36$$

$$-104 \leq -5n \leq 0 \quad \therefore 0 \leq n \leq \frac{104}{5}$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, ..., 20이므로 $m + n$ 의 최댓값은 $3 + 20 = 23$

(i), (ii), (iii)에서 $m + n$ 의 최댓값은 23이다.



11 답 64

두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y = x$ 의 교점을 F라 하자.

직선 AB의 방정식은

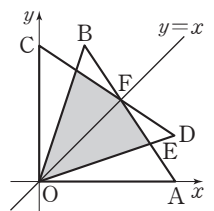
$$y = \frac{4-0}{2-4}(x-4)$$

$$\therefore y = -2x + 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 B(2, 4)를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한

점 D의 좌표는 (4, 2)이므로 직선 OD의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



㉠, ㉡에서

$$-2x+8=\frac{1}{2}x \quad \therefore x=\frac{16}{5}$$

이를 ㉢에 대입하면

$$y=\frac{8}{5} \quad \therefore E\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

㉠에 $y=x$ 를 대입하면

$$x=-2x+8 \quad \therefore x=\frac{8}{3}$$

이를 $y=x$ 에 대입하면

$$y=\frac{8}{3} \quad \therefore F\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\therefore \triangle OEF = \triangle OAF - \triangle OAE$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{5} = \frac{32}{15}$$

$$\text{따라서 } S = 2\triangle OEF = 2 \times \frac{32}{15} = \frac{64}{15} \text{ 이므로}$$

$$15S = 15 \times \frac{64}{15} = 64$$

12 답 ③

제1사분면 위의 점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면 직사각형의 두 대각선의 교점이 원점이고, 각 변은 x 축 또는 y 축에 평행하므로

$$A(-a, b), B(-a, -b), C(a, -b)$$

이때 네 점 A, B, C, D를 y 축의 방향으로 3

만큼 평행이동한 네 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1 이라 하면 $\overline{AD} > \overline{AB} > 3$ 이므로 두 직사각형 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$ 은 그림과 같다.

$$\overline{AD} = 2a, \overline{AB_1} = \overline{AB} - \overline{B_1B} = 2b - 3$$

이고 ㉠에서 공통부분, 즉 직사각형 AB_1C_1D 의 넓이는 22이므로

$$\overline{AD} \times \overline{AB_1} = 22, 2a(2b-3) = 22$$

$$\therefore a(2b-3) = 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 네 점 A, B, C, D를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2 라 하면 두 직사각형 ABCD와 $A_2B_2C_2D_2$ 는 그림과 같다.

$\overline{A_2B_2} = \overline{AB} = 2b$ 이고 ㉡에서 공통부분의 넓이는 25이므로

$$2b \times 2b = 25, b^2 = \frac{25}{4}$$

$$\therefore b = \frac{5}{2} (\because b > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a = \frac{11}{2}$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AD} \times \overline{AB} = 2a \times 2b = 2 \times \frac{11}{2} \times 2 \times \frac{5}{2} = 55$$

13 답 ②

세 점 $O(0, 0), A(0, 2), B(-2, 0)$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 세 점을 각각 O_1, A', B' 이라 하면

$$O_1(t, 0), A'(t, 2), B'(-2+t, 0)$$

세 점 $O(0, 0), C(0, -2), D(2, 0)$ 을 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 세 점을 각각 O_2, C', D' 이라 하면

$$O_2(0, 3t), C'(0, -2+3t), D'(2, 3t)$$

두 삼각형 T_1, T_2 의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 $A'B'$ 이 두 선분 O_2C', O_2D' 과 A', B' 이 아닌 두 점에서 만나야 한다. 또 선분 $C'D'$ 이 두 선분 O_1B', O_1A' 과 C', D' 이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

선분 $A'B'$ 이 두 선분 O_2C', O_2D' 과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 $C'D'$ 이 두 선분 O_1B', O_1A' 과 만나는 점을 각각 R, S라 하자.

두 점 $A'(t, 2), B'(-2+t, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{0-2}{-2+t-t}(x-t) \quad \therefore y = x-t+2$$

직선 $y = x-t+2$ 의 y 절편은 $2-t$ 이므로 점 P의 좌표는 $(0, 2-t)$

두 점 $O_2(0, 3t), D'(2, 3t)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = 3t$ 이므로 두 점 A', B' 을 지나는 직선과 두 점 O_2, D' 을 지나는 직선의 교점 Q의 x 좌표를 구하면

$$x-t+2=3t \quad \therefore x=4t-2$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(4t-2, 3t)$

두 점 $C'(0, -2+3t), D'(2, 3t)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3t = \frac{3t-(-2+3t)}{2-0}(x-2) \quad \therefore y = x+3t-2$$

직선 $y = x+3t-2$ 의 x 절편은 $2-3t$ 이므로 점 R의 좌표는 $(2-3t, 0)$

두 점 $O_1(t, 0), A'(t, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $x=t$ 이므로 두 점 C', D' 을 지나는 직선과 두 점 O_1, A' 을 지나는 직선의 교점 S의 y 좌표를 구하면

$$y=t+3t-2 \quad \therefore y=4t-2$$

따라서 점 S의 좌표는 $(t, 4t-2)$

이때 조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P의 y 좌표) < (점 O_2 의 y 좌표) < (점 A' 의 y 좌표)이어야 하므로

$$2-t < 3t < 2$$

$$2-t < 3t \text{에서 } t > \frac{1}{2}, 3t < 2 \text{에서 } t < \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 (점 C' 의 y 좌표) < (점 O_1 의 y 좌표) < (점 S의 y 좌표)이어야 하므로

$$-2+3t < 0 < 4t-2$$

$$-2+3t < 0 \text{에서 } t < \frac{2}{3}, 0 < 4t-2 \text{에서 } t > \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 t 의 값의 범위는 $\frac{1}{2} < t < \frac{2}{3}$ 이므로 $a = \frac{2}{3}$

이때 두 선분 $A'O_1, O_2D'$ 의 교점을 T라 하고, 육각형의 넓이를 S라 하면 $S = (\text{직사각형 } OO_1TO_2 \text{의 넓이}) - (\text{삼각형 } O_1SR \text{의 넓이})$

$-(\text{삼각형 } O_2PQ \text{의 넓이})$

$$= t \times 3t - \frac{1}{2}(4t-2)^2 - \frac{1}{2}(4t-2)^2$$

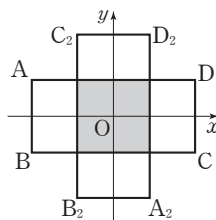
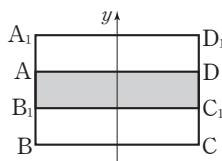
$$= -13t^2 + 16t - 4$$

$$= -13\left(t - \frac{8}{13}\right)^2 + \frac{12}{13}$$

따라서 $\frac{1}{2} < t < \frac{2}{3}$ 에서 $t = \frac{8}{13}$ 일 때, S는 최댓값 $M = \frac{12}{13}$ 를 갖는다.

$$\therefore M - a = \frac{12}{13} - \frac{2}{3} = \frac{10}{39}$$

따라서 $p=39, q=10$ 이므로 $p+q=49$



memo*

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.