

자습서
정답친해

／
고등
미적분
／





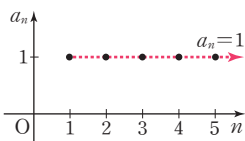
I 수열의 극한

Plus 연습

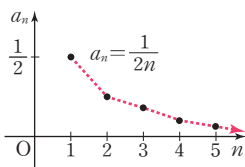
1 수열의 극한

01 수열의 극한 09~14쪽

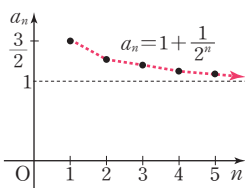
01 (1) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커져도 각 항의 값은 항상 1이다. 따라서 주어진 수열의 극한값은 1이다.



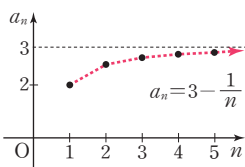
(2) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{1}{2n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워진다. 따라서 주어진 수열의 극한값은 0이다.



(3) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $1 + \frac{1}{2^n}$ 의 값은 1에 한없이 가까워진다. 따라서 주어진 수열의 극한값은 1이다.



(4) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $3 - \frac{1}{n}$ 의 값은 3에 한없이 가까워진다. 따라서 주어진 수열의 극한값은 3이다.

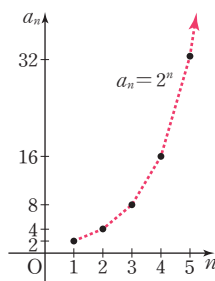


02 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = a_1 \times \frac{1}{2}$, $a_3 = a_2 \times \frac{1}{2}$, ...이므로

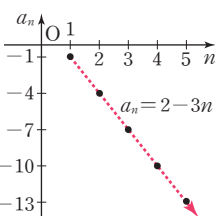
$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

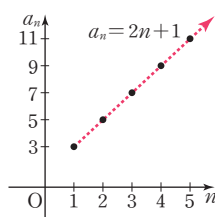
03 (1) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 2^n 의 값은 한없이 커진다. 따라서 주어진 수열은 발산(∞)한다.



(2) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $2 - 3n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다. 따라서 주어진 수열은 발산($-\infty$)한다.

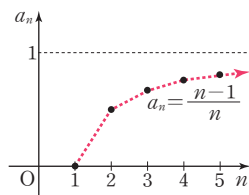


04 (1) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $2n + 1$ 의 값은 한없이 커진다.



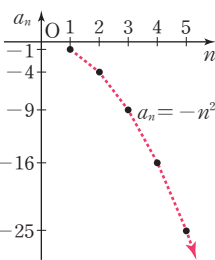
따라서 주어진 수열은 발산(∞)한다.

(2) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{n-1}{n}$ 의 값은 1에 한없이 가까워진다.



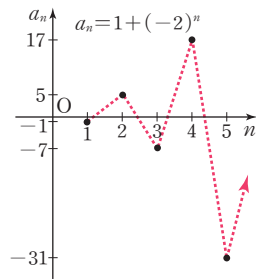
따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

(3) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $-n^2$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.



따라서 주어진 수열은 발산($-\infty$)한다.

(4) n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 $1+(-2)^n$ 의 값은 진동한다.



따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다.

02 수열의 극한값의 계산 15~21쪽

01 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{10}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n}$
 $= 2 - 0 = 2$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{4}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}$
 $= 0 + 0 = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n}\right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$
 $= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) \times \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}\right)$
 $= (5 + 0) \times (1 - 0) = 5$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}$
 $= \frac{1 + 0}{4 - 0}$
 $= \frac{1}{4}$

02 (1) 분자, 분모를 각각 분모의 최고차항인 n^2 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2 + 0}{1 - 0 + 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(2) 분자, 분모를 각각 분모의 최고차항인 n^2 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n^2+n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{0 - 0}{3 + 0 - 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

03 (1) 분자, 분모를 각각 분모의 최고차항인 n 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \text{이}$$

므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{n + 1} = \infty$$

따라서 수열 $\left\{\frac{n^2 - 2n + 3}{n + 1}\right\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2 + 3n + 5) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$$

여기서 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2 + 3n + 5) = -\infty$$

따라서 수열 $\{-2n^2 + 3n + 5\}$ 는 음의 무한대로 발산한다.

04 $a \neq 0$ 이면 주어진 수열은 발산하므로

$$a = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 3}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 3}{n - 1} = b \text{이므로}$$

$$b = 2$$

05 주어진 부등식의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{n-1}{n} \leq a_n \leq \frac{n+1}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계를 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

06 $4n < a_n < 4n+1$ 에서

$$\sum_{k=1}^n 4k < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (4k+1)$$

$$2n(n+1) < \sum_{k=1}^n a_k < 2n(n+1) + n$$

$$2n^2 + 2n < \sum_{k=1}^n a_k < 2n^2 + 3n$$

위의 부등식의 각 변을 $5n^2 + 11n$ 으로 나누면

$$\frac{2n^2 + 2n}{5n^2 + 11n} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{5n^2 + 11n} < \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 + 11n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n}{5n^2 + 11n} = \frac{2}{5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 + 11n} = \frac{2}{5}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계를 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{5n^2 + 11n} = \frac{2}{5}$$

03 등비수열의 극한 22~25쪽

01 (1) $-1 < -\frac{9}{10} < 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{9}{10}\right)^n = 0$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

(2) $-1.01 < -1$ 이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

(3) $-1 < 0.03 < 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0.03^n = 0$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

(4) $\frac{5}{4} > 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty$$

따라서 주어진 수열은 발산한다.

02 수열 $\{(2-x)^n\}$ 이 수렴하므로

$$-1 < 2-x \leq 1$$

따라서 $1 \leq x < 3$

03 $a_n = 0.2^n$ 이고, $-1 < 0.2 < 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

04 (1) 분자, 분모를 각각 3^n 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \infty \end{aligned}$$

따라서 주어진 수열은 발산한다.

(2) 분자, 분모를 각각 3^n 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n}{2^{n-1} + 3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} \\ &= \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} \\ &= \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

2 급수

01 급수 34~39쪽

01 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{(n+1)(n+3)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \text{이므로} \\ S_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{5}{12}$ 이다.

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \text{이므로} \\ S_n &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) \\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}) \\ &= \infty \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

02 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+4} = 1 \neq 0$ 이므로 이 급수는 발산한다.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n \neq 0$ 이므로 이 급수는 발산한다.

03 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= -1 + 2 \times 3 = 5$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2a_n + 3b_n) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= (-2) \times (-1) + 3 \times 3 = 11$$

04 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합을 각각 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = 5, \alpha - \beta = 3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$\alpha = 4, \beta = 1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$

02 등비급수 40~46쪽

01 (1) 주어진 등비급수의 공비는 $-\frac{1}{2}$ 이다,

이때 $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴하고,

$$\text{그 합은 } \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

(2) 주어진 등비급수의 공비는 $\sqrt{3}$ 이다,

이때 $|\sqrt{3}| > 1$ 이므로 이 등비급수는 발산한다.

02 (1) $\frac{2^n + 3^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$ 이고 두 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ 이 각각 수렴하므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

(2) $\frac{2^n + 1}{(-3)^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 이고 두 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 이 각각 수렴하므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{(-3)^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} + \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= -\frac{13}{20} \end{aligned}$$

03 $\{a_n\}: -\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, -\frac{27}{64}, \dots$ 이므로

$$a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

$$= \frac{-\frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{3}{7}$$

04 원 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 의 넓이를 차례로 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이라고 하면

$$a_1 = \pi, a_2 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

$$a_3 = \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 π 이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로 구하는 넓이의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4^2} + \dots \\ &= \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

05 (1) $0.0\dot{1}\dot{3} = 0.013 + 0.00013 + 0.0000013 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{13}{10^3} + \frac{13}{10^5} + \frac{13}{10^7} + \dots \\ &= \frac{\frac{13}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{990} \end{aligned}$$

(2) $1.\dot{2}1\dot{4} = 1 + 0.214 + 0.000214 + 0.000000214 + \dots$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{214}{10^3} + \frac{214}{10^6} + \frac{214}{10^9} + \dots \\ &= 1 + \frac{\frac{214}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = 1 + \frac{214}{999} = \frac{1213}{999} \end{aligned}$$

시험 대비 대단원 TEST

..... 64~66쪽

1 ④	2 2	3 $a=0, b=3$	4 3
5 ③	6 1	7 1	8 3
9 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{4}{3}$	11 $\frac{1}{3} < x < 1$	12 $\frac{\pi}{6}$
13 $\frac{5}{8}\pi$	14 $\frac{1}{2}$	15 6	16 5
17 $\frac{2}{3}$	18 $\frac{9}{5}$	19 $\frac{54}{25}$	

1 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-3) = \infty$

② 0, 2, 0, 2, ...이므로 발산(진동)한다.

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n+2} = \infty$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^n = 0$

⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = \infty$

따라서 ④이다.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n+1}{(n-1)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2+2n-3}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}} = 2$

3 $a \neq 0$ 이면 주어진 수열의 극한값은 0이 되므로
 $a=0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn-2}{an^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn-2}{n+1} = b$ 이므로
 $b=3$

4 $\frac{3n^2-2n+1}{n^2} \leq a_n \leq \frac{3n^2+2n+1}{n^2}$ 이고
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^2} = 3$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

5 수열 $\{(x^2-8)^{n-1}\}$ 이 수렴하려면

$-1 < x^2-8 \leq 1, 7 < x^2 \leq 9$

$-3 \leq x < -\sqrt{7}, \sqrt{7} < x \leq 3$

따라서 x 의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

6 $a_n + b_n = 4^{n+1} \dots\dots ①$

$a_n - b_n = 3^{n-1} \dots\dots ②$

①, ②를 연립하여 풀면

$a_n = \frac{4^{n+1}+3^{n-1}}{2}, b_n = \frac{4^{n+1}-3^{n-1}}{2}$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n+1}+3^{n-1}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{4+\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1$

7 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{2^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} = 1$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = 1$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{(b_n - a_n) + a_n\}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $= 1 + 2 = 3$

9 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = n+1$

$a_1 = S_1 = 2$ 이므로

$a_n = n+1$

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$
 이므로

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$

10 $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n - 2) = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 2$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - \frac{2}{n}}{a_n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3na_n - 2}{na_n + 1}$
 $= \frac{3 \times 2 - 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$

11 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (3x-2)^{n-1}$ 이 수렴하려면

$-1 < 3x-2 < 1$

따라서 $\frac{1}{3} < x < 1$

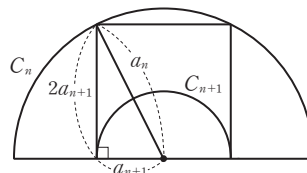
12 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\sin x$ 이므로

$1 + \sin x + \sin^2 x + \dots = \frac{1}{1 - \sin x}$

즉, $\frac{1}{1 - \sin x} = 2$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $x = \frac{\pi}{6}$

13 C_n 의 반지름의 길이를 a_n 이라고 하면 다음이 성립함을 알 수 있다.



$(2a_{n+1})^2 + a_{n+1}^2 = a_n^2, 5(a_{n+1})^2 = a_n^2$

$$a_n > 0, a_{n+1} > 0 \text{이므로 } a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} a_n$$

$$\text{이때 반원 } C_n \text{의 넓이가 } S_n \text{이므로 } S_{n+1} = \frac{1}{5} S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$ 이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{8} \pi$$

$$14 \quad 1+3+5+\cdots+2n-1=n^2 \text{이므로} \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{2n^2+n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 60\%$$

$$\begin{aligned} 15 \quad (i) \quad f(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 2^{n+1} + 2}{2^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \frac{4+0}{1+0} = 4 \end{aligned} \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad f(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 1^{n+1} + 1}{1^n + 1} \\ &= \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} \\ &= \frac{0 + \frac{1}{2}}{0 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\begin{aligned} (i) \sim (iii) \text{에서} \\ f(2) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 6 \end{aligned} \quad \blacktriangleright 10\%$$

$$\begin{aligned} 16 \quad \text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a_n}{n} - \alpha\right) \text{가 수렴하므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2a_n}{n} - \alpha\right) = 0 \text{에서} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{n} = \alpha \end{aligned} \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2a_n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{2a_n}{n}+\frac{3}{n}} = \frac{1}{\alpha} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 } \alpha = 5 \quad \blacktriangleright 60\%$$

$$17 \quad \text{이차방정식 } x^2 - 2^n(1+2^n)x + 8^n = 0 \text{의 두 근 } \alpha_n, \beta_n \text{에서 } \alpha_n < \beta_n \text{이므로}$$

$$\alpha_n = 2^n, \beta_n = 4^n \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\text{이때 } \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_n \beta_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 60\%$$

$$18 \quad a_1 = 1, \text{ 공비를 } r \text{ } (-1 < r < 1) \text{라고 하면 } a_n = r^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \text{에서}$$

$$\frac{1}{1-r} = 3, r = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \blacktriangleright 50\%$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 50\%$$

$$19 \quad \text{점 } P_n \text{의 } x \text{좌표 } x_n \text{에 대하여}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\text{점 } P_n \text{의 } y \text{좌표 } y_n \text{에 대하여}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \cdots \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{6}{5} \end{aligned} \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \frac{9}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{54}{25} \quad \blacktriangleright 20\%$$

II 미분법

Plus 연습

1 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 극한 69~78쪽

01 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$

02 (1) 분자, 분모를 각각 4^x 으로 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x}{4^x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

따라서 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x = 2^0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2^x - 1) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

그런데 $x < 0$ 인 범위에서 $2^x < 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x}{2^x - 1} = -\infty$$

따라서 발산한다.

03 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_4 x = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x = \infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{5}} x = \infty$

04 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2 (x-1) - \log_2 x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{x-1}{x}$
 $= \log_2 1 = 0$

따라서 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_2 (2x+2) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} \log_3 (2x-1) = 0$

그런데 $x < 1$ 인 범위에서 $\log_3 (2x-1) < 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log_2 (2x+2)}{\log_3 (2x-1)} = -\infty$$

따라서 발산한다.

05 (1) $t = 3x$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{-\frac{2}{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{6}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-6} \\ &= e^{-6} = \frac{1}{e^6} \end{aligned}$$

(2) $t = -\frac{1}{x}$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{3}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-3} \\ &= e^{-3} = \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

06 (1) $\ln \sqrt[3]{e} = \ln e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln e = \frac{1}{3}$

(2) $\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2 \ln e = -2$

07 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1+2x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x} \ln (1+2x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln (1+2x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \ln (1+2x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \frac{2}{3} \ln e = \frac{2}{3}$$

(2) $t = e^{4x} - 1$ 로 놓으면 $e^{4x} = 1+t$ 이므로

$$x = \frac{1}{4} \ln (1+t) \text{이고, } x \rightarrow 0 \text{일 때, } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{4x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln (1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

08 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (3x+a)}{2x} = b$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln (3x+a) = 0$$

$$\ln a = 0$$

즉, $a = 1$

따라서 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (3x+1)}{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln (1+3x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left\{ (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \ln (1+3x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$= \frac{3}{2} \ln e = \frac{3}{2}$$

02 지수함수와 로그함수의 미분 79~82쪽

01 (1) $y=e^{x+2}=e^2 \times e^x$ 이므로
 $y'=e^2(e^x)'=e^2 \times e^x=e^{x+2}$
 (2) $y'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'$
 $=3x^2e^x+x^3e^x$
 $= (3x^2+x^3)e^x$

02 (1) $y=\ln 7x=\ln 7+\ln x$ 이므로
 $y'=(\ln 7)' + (\ln x)' = \frac{1}{x}$
 (2) $y'=2(\log_3 x)' = \frac{2}{x \ln 3}$

03 $\{x \ln x\}'$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \ln(x+h) - x \ln x}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+h) - x \ln x}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \ln(x+h)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) + \lim_{h \rightarrow 0} \ln(x+h)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} + \lim_{h \rightarrow 0} \ln(x+h)$
 $= \ln e + \ln x$
 $= \boxed{\ln x + 1}$

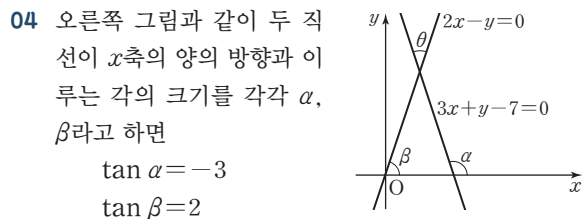
03 삼각함수의 덧셈정리 83~89쪽

01 (1) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$
 $= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
 (2) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$
 $= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
 (3) $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$
 $= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$
 $= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$

02 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos \alpha > 0$ 이므로
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 또 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 이면 $\cos \beta < 0$ 이므로
 $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = -\frac{4}{5}$ 이므로
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}, \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{3}{4}$
 (1) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 $= \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3}{5}$
 $= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 (2) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
 $= \frac{\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right)}$
 $= -\frac{2}{11}$

03 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$
 $= \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha}$
 $= \frac{1}{2 \tan \alpha} - \frac{\tan \alpha}{2}$



두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라고 하면
 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로
 $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
 $= \frac{-3 - 2}{1 + (-3) \times 2} = 1$

따라서 구하는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

04 삼각함수의 극한 90~94쪽

01 (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} = 0$
 (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sqrt{3}) = \sin \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sqrt{3} \tan x + 5) = \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6} + 5 = 6$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos 0}{1 - \sin 0} = 1$

02 (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x - \cos x}{3 \cos^2 x - \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (2 \cos x - 1)}{4 \cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (2 \cos x - 1)}{(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{2 \cos x + 1} = \frac{1}{4}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\sqrt{3} + \tan x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} \frac{\cos x (\sqrt{3} + \tan x)}{\sqrt{3} + \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} \cos x = -\frac{1}{2}$$

03 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2}$

$$= 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{\cos 2x}{2}$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

04 (1) $t = x - 1$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(t+1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{t} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

(2) $t = x - 3$ 으로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sin \pi x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \pi(t+3)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{\sin \pi t} \right) = -\frac{1}{\pi}$$

05 삼각함수의 미분 95-96쪽

01 (1) $y' = 3(\sin x)' + (\cos x)'$

$$= 3 \cos x - \sin x$$

(2) $y' = (\cos x)'(1 - \sin x) + \cos x(1 - \sin x)'$

$$= -\sin x(1 - \sin x) + \cos x(-\cos x)$$

$$= -\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

02 $f'(x) = 2\sqrt{2} \cos x - 1$ 이므로 $f'(a) = 1$ 에서

$$2\sqrt{2} \cos a - 1 = 1, \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } a = \frac{\pi}{4}$$

2 여러 가지 미분법

01 함수의 몫의 미분법 105-109쪽

01 (1) $y' = -\frac{(x^4+3)'}{(x^4+3)^2}$

$$= -\frac{4x^3}{(x^4+3)^2}$$

(2) $y' = \frac{(x^2-2x+2)'(x+1) - (x^2-2x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

02 $\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)'$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{2}{1 + 2 \sin x \cos x}$$

03 (1) $y' = \sec x \tan x + \sec^2 x$

$$= \sec x (\tan x + \sec x)$$

(2) $y' = (x)' \csc x + x(\csc x)'$

$$= \csc x - x \csc x \cot x$$

$$= \csc x (1 - x \cot x)$$

04 $f'(x) = \frac{(\cos x)'(e^x+1) - \cos x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{-\sin x(e^x+1) - \cos x e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= -\frac{e^x(\cos x + \sin x) + \sin x}{(e^x+1)^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{2h} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2}}{(e^{\frac{\pi}{2}}+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+1}$$

02 합성함수의 미분법 110-116쪽

01 (1) $u = 2x^3 + 2x - 1$ 로 놓으면 $y = u^2$ 에서

$$\frac{dy}{du} = 2u, \frac{du}{dx} = 6x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 2u \times (6x^2 + 2) \\ &= 4(3x^2 + 1)(2x^3 + 2x - 1)\end{aligned}$$

(2) $u = 2x + 5$ 로 놓으면 $y = \log u$ 에서

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u \ln 10}, \quad \frac{du}{dx} = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u \ln 10} \times 2 \\ &= \frac{2}{(2x+5) \ln 10}\end{aligned}$$

(3) $u = 3x - 2$ 로 놓으면 $y = e^u$ 에서

$$\frac{dy}{du} = e^u, \quad \frac{du}{dx} = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times 3 = 3e^{3x-2}$$

(4) $u = 3x + 1$ 로 놓으면 $y = \cot u$ 에서

$$\frac{dy}{du} = -\csc^2 u, \quad \frac{du}{dx} = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= (-\csc^2 u) \times 3 \\ &= -3 \csc^2 (3x+1)\end{aligned}$$

다른 풀이 (1) $y' = 2(2x^3 + 2x - 1)(2x^3 + 2x - 1)'$
 $= 4(3x^2 + 1)(2x^2 + 2x - 1)'$

$$\begin{aligned}(2) y' &= \frac{1}{(2x+5) \ln 10} \times (2x+5)' \\ &= \frac{2}{(2x+5) \ln 10}\end{aligned}$$

$$(3) y' = e^{3x-2} \times (3x-2)' = 3e^{3x-2}$$

$$\begin{aligned}(4) y' &= -\csc^2 (3x+1) \times (3x+1)' \\ &= -3 \csc^2 (3x+1)\end{aligned}$$

02 (1) $y' = 3^{4x-1} \times \ln 3 \times (4x-1)'$
 $= 4 \times 3^{4x-1} \ln 3$

$$\begin{aligned}(2) y' &= 5^{2x^2-x} \times \ln 5 \times (2x^2-x)' \\ &= (4x-1)5^{2x^2-x} \ln 5\end{aligned}$$

03 (1) $y' = \frac{(x^2+3x+1)'}{x^2+3x+1} = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$

$$(2) y' = \frac{(2^x-1)'}{(2^x-1) \ln 5} = \frac{2^x \ln 2}{(2^x-1) \ln 5}$$

04 (1) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |y| = 2 \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x^2+3|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+3} = \frac{x^2+x+6}{(x-1)(x^2+3)}$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } y' &= y \times \frac{x^2+x+6}{(x-1)(x^2+3)} \\ &= \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3}} \times \frac{x^2+x+6}{(x-1)(x^2+3)} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+6)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}\end{aligned}$$

(2) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln |y| &= 3 \ln |x+2| + 4 \ln |x+3| \\ &\quad - 2 \ln |x+1|\end{aligned}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}y' &= y \times \frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(x+2)^3(x+3)^4}{(x+1)^2} \times \frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(x+2)^2(x+3)^3(5x^2+14x+5)}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

05 (1) $y = x^{-3}$ 이므로

$$y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

(2) $y = x^{\frac{3}{4}}$ 이므로

$$y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

(3) $y = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}-1} \times (2x-1)' \\ &= (2x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\end{aligned}$$

(4) $y' = 2\pi x^{2\pi-1}$

03 매개변수로 나타난 함수의 미분법 117~119쪽

01 (1) $\frac{dx}{dt} = 2t+1, \frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t+1}$$

(2) $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 4t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{-\frac{1}{t^2}} = -4t^3$$

02 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{(t+1)^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t^2}{(t+1)^2}$$

따라서 $t=1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

04 음함수와 역함수의 미분법 120~123쪽

01 (1) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 1 - 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 1}{6y^2}$ (단, $y \neq 0$)

(2) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 3y^2 \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y}{x - 3y^2}$ (단, $x \neq 3y^2$)

02 (1) 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3^y \ln 3 + 3y^2 + 2$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3^y \ln 3 + 3y^2 + 2}$

(2) 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \tan y$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\tan y} = \cot y$

(단, $0 < y < \frac{\pi}{2}$)

05 이계도함수 124~125쪽

01 (1) $y' = (x^3 + 3x^2)e^x$ 이므로

$$y'' = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x$$

(2) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$ 이므로

$$y'' = -4 \sin x \cos x$$

02 $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ 이므로 $f''(x) = -\csc^2 x$

따라서 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\csc^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

3 도함수의 활용

01 접선의 방정식 133~138쪽

01 (1) $f(x) = \ln \sqrt{3x-2}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{3}{2(3x-2)}$$

점 $(1, 0)$ 에서 접하는 접선의 기울기는

$$f'(1) = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}(x-1)$$

즉, $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

(2) $f(x) = 2e^x + x$ 라고 하면

$$f'(x) = 2e^x + 1$$

점 $(0, 2)$ 에서 접하는 접선의 기울기는

$$f'(0) = 3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = 3x$$

즉, $y = 3x + 2$

02 (1) $f(x) = \ln 3x$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{x}$

점점의 좌표를 $(t, \ln 3t)$ 라고 하면 점점의 기울기

가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f'(t) = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}, t = 2$

즉, 점점의 좌표는 $(2, \ln 6)$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - \ln 6 = \frac{1}{2}(x-2)$$

즉, $y = \frac{1}{2}x - 1 + \ln 6$

(2) $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$ 라고 하면 $f'(x) = -\sin 2x$

점점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2} \cos 2t\right)$ 라고 하면 점점의 기

울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f'(t) = \frac{1}{2}$ 에서

$$-\sin 2t = \frac{1}{2}, \sin 2t = -\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$ 에서 $\pi \leq 2t \leq \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$2t = \frac{7}{6}\pi, t = \frac{7}{12}\pi$$

즉, 점점의 좌표는 $\left(\frac{7}{12}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

따라서 구하는 방정식은

$$y - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{12}\pi\right)$$

즉, $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

03 (1) $f(x)=2\sqrt{x+1}$ 이라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

접점의 좌표를 $(t, 2\sqrt{t+1})$ 이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2\sqrt{t+1}=\frac{1}{\sqrt{t+1}}(x-t)$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{t+1}}x+\frac{t+2}{\sqrt{t+1}} \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0=\frac{t}{\sqrt{t+1}}, t=0$$

따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=x+2$$

(2) $f(x)=e^{3x}$ 이라고 하면 $f'(x)=3e^{3x}$

접점의 좌표를 (t, e^{3t}) 이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3e^{3t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{3t}=3e^{3t}(x-t)$$

$$y=3e^{3t}x+e^{3t}(1-3t) \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(\frac{1}{3}, 0)$ 을 지나므로

$$0=e^{3t}(2-3t), t=\frac{2}{3}$$

따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=3e^2x-e^2$$

02 함수의 그래프 139~145쪽

01 $f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+5}$ 이므로 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x=-2$$

$$f''(x)=-\frac{2(x+1)(x+3)}{(x^2+4x+5)^2} \text{이므로 } f''(-2)>0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극소이고 극솟값은 0이다.

02 (1) $f(x)=2x^4-4x^2+3$ 이라고 하면

$$f'(x)=8x^3-8x, f''(x)=24x^2-8$$

$f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x)<0$, $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$

또는 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x)>0$ 이다.

따라서 곡선 $y=2x^4-4x^2+3$ 은 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

에서 위로 볼록, $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 아래

로 볼록하며, 변곡점의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{17}{9})$,

$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{17}{9})$ 이다.

(2) $f(x)=2x^2+\ln x$ 라고 하면

$$f'(x)=4x+\frac{1}{x}, f''(x)=4-\frac{1}{x^2}$$

$f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

이때 $x>0$ 이므로 $0<x<\frac{1}{2}$ 에서 $f''(x)<0$,

$x>\frac{1}{2}$ 에서 $f''(x)>0$ 이다.

따라서 곡선 $y=2x^2+\ln x$ 는 $0<x<\frac{1}{2}$ 에서 위로

볼록, $x>\frac{1}{2}$ 에서 아래로 볼록하며, 변곡점의 좌표

는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\ln 2)$ 이다.

03 $f(x)=\ln(x^2+1)$ 이라고 하면 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 원점을 지난다.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1} \text{이므로 } f'(x)=0 \text{을 만족시키는 } x \text{의}$$

값은 $x=0$

$$f''(x)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \text{이므로 } f''(x)=0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$f(-x)=f(x)$ 이므로 이 함수의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

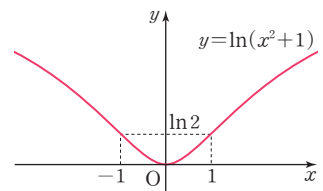
이때 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 $x\geq 0$ 인 경우만 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	0	↗	ln 2 변곡점	↘

또 $\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=\infty$ 이다.

따라서 함수

$y=\ln(x^2+1)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



03 방정식과 부등식에의 활용 146~150쪽

01 방정식 $2x - \ln x - 1 = 0$ 을 $2x - \ln x = 1$ 로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = 2x - \ln x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = 2x - \ln x \text{라고 하면 } f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$1 + \ln 2$	/

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$$

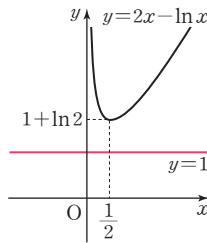
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{이므로}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = 1$ 과 만나지 않으

므로 방정식 $2x - \ln x - 1 = 0$

의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.



02 방정식 $\ln x = kx$ 를 $\ln x - kx = 0$ 으로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = \ln x - kx$ 의 그래프와 직선 $y = 0$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = \ln x - kx \text{라고 하면 } f'(x) = \frac{1}{x} - k$$

$$f'(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{k}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{k}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	$-1 - \ln k$	\

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{이므로}$$

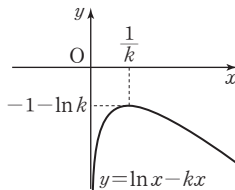
함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

$y = 0$ 과 만나지 않아야 하므로

$$-1 - \ln k < 0$$

$$\text{따라서 } k > \frac{1}{e}$$



03 $f(x) = x - \ln(x+1)$ 이라고 하면

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은}$$

$$x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고 이를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	0	/

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최소이고 최솟값은 0이므로

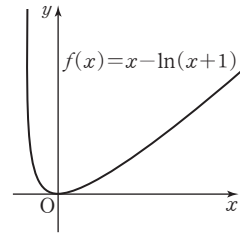
$x > -1$ 인 모든 x 에 대하여

$$x - \ln(x+1) \geq 0$$

따라서 $x > -1$ 일 때, 부등

식 $x \geq \ln(x+1)$ 이 성립

한다.



04 $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ 라고 하면

$$f'(x) = -\sin x \sin x + (1 + \cos x) \cos x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x$$

$$= 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

$$= (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은 } \cos x = \frac{1}{2} \text{ 또는}$$

$$\cos x = -1 \text{에서 } 0 < x < \pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고 이를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\	

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에

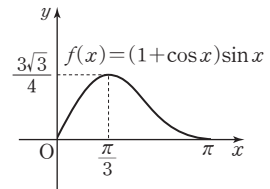
서 최대이고 최댓값은

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{이므로 } 0 < x < \pi \text{인}$$

모든 실수 x 에 대하여

$$(1 + \cos x) \sin x \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{따라서 } a \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



04 속도와 가속도 151~154쪽

01 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sin t + 1, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$$

따라서 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서 점 P의 속도와 가속도는

$$v = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

02 (1) $\frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로 $t=1$ 에서 점 P의 속도는 $(6, 3)$, 속력은 $\sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ 이다.

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} = 6, \frac{d^2y}{dt^2} = 6t$ 이므로 $t=1$ 에서 점 P의 가속도는 $(6, 6)$, 가속도의 크기는 $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ 이다.

시험 대비 대단원 TEST 172~174쪽

- 1 $\frac{1}{\ln 2}$ 2 $\frac{63}{16}$ 3 ① 4 $\frac{1}{2}$ 5 0
 6 $\frac{e}{\ln 3}$ 7 $-\frac{3}{2}$ 8 $y' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$
 9 $\frac{8}{3}$ 10 $-e < x < e$ 11 $\frac{1}{7}$ 12 ④
 13 2 14 $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 15 4
 16 $a = -2, b = 2$ 17 (1) 0 (2) $0 < k < \frac{4}{e^2}$
 18 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{\log_2(1+x)}{x} = 1 \times \log_2 e = \frac{1}{\ln 2}$

2 $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{5}{13}$ 이므로
 $\tan \alpha = \frac{4}{3}, \tan \beta = -\frac{5}{12}$
 따라서 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{63}{16}$

3 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 4h) - f(\pi)}{h} = 4f'(\pi)$ 이고,
 $f'(x) = -2 \sin x + \cos x - 1$ 이므로
 $4f'(\pi) = -8$
 따라서 ①이다.

4 $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$ 이므로 $f'(1) = \frac{1}{2}$

5 $f'(x) = \sec^2 x$ 이므로
 $f'(a) + f'(b) + f'(c)$
 $= \sec^2 a + \sec^2 b + \sec^2 c$
 $= (1 + \tan^2 a) + (1 + \tan^2 b) + (1 + \tan^2 c)$
 $= 3$

즉, $\tan^2 a + \tan^2 b + \tan^2 c = 0$ 이므로

$$\tan a = 0, \tan b = 0, \tan c = 0$$

따라서 $f(a) + f(b) + f(c) = 0$

6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ 이고,
 $f'(x) = e^x \left(\log_3 x + \frac{1}{x \ln 3} \right)$ 이므로
 $f'(1) = \frac{e}{\ln 3}$

7 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$$

따라서 $f'\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{2}$

8 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면
 $\ln |y| = 3 \ln |x+3| - 2 \ln |x+2|$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x+3)}$$

따라서 $y' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$

9 $f(x) = \sqrt{ax+b}$ 라고 하면 접점 $(2, \sqrt{2a+b})$ 는 접선 위의 점이므로

$$2 = \sqrt{2a+b} \quad \dots\dots ①$$

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \text{이므로}$$

$$f'(2) = \frac{a}{2\sqrt{2a+b}} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{4}{3}$

따라서 $a+b = \frac{8}{3}$

10 $f(x) = \ln(x^2 + e^2)$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+e)(x-e)}{(x^2 + e^2)^2}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-e$ 또는 $x=e$
 $-e < x < e$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 곡선
 $y = \ln(x^2 + e^2)$ 이 아래로 볼록한 부분의 x 의 값의 범
 위는
 $-e < x < e$

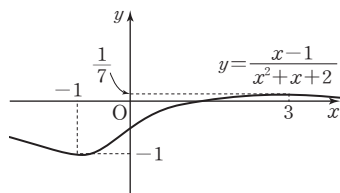
- 11 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+2}$ 이라고 하면

$$f'(x) = -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$$

 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{7}$	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이다.
 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으
 로 $x=3$ 에서 최댓값 $\frac{1}{7}$ 을 갖는다.



- 12 $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$
 $f''(x) = -\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$ 이므로 $f''(x)=0$ 에서
 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$		$\frac{3}{4}$ 변곡점	\	$\frac{2}{3}$ 극소	/	$\frac{3}{4}$ 변곡점	/

ㄱ. $x=0$ 에서 극소이고 극솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.
 ㄴ. 변곡점의 좌표는 $(-1, \frac{3}{4})$, $(1, \frac{3}{4})$ 이다.
 ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2}{x^2+3} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2+3} = 1$ 이므로 점근선
 은 직선 $y=1$ 이다.
 즉, $\frac{2}{3} \leq y \leq 1$ 이므로 직선 $y = \frac{3}{4}$ 과 서로 다른 두
 점에서 만난다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이므로 ④이다.

- 13 $f(n)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(\tan x + \tan 2x + \dots + \tan nx)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\tan nx}{nx} \times n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$$
 ▶ 60 %
 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2+1)f(n) = \frac{2n^2+1}{n^2+n}$

$$= 2$$
 ▶ 40 %

- 14 다항식 $\{f(x)\}^2$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때, 몫을
 $Q(x)$ 라 하고, 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었
 을 때, 몫을 $P(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라
 고 하면

$$\{f(x)\}^2 = (x-1)^2 Q(x) + 3x+1 \quad \dots\dots ①$$

$$f(x) = (x-1)^2 P(x) + ax+b \quad \dots\dots ②$$
 ▶ 30 %

①에서 $\{f(1)\}^2 = 4$ 이고 $f(1) > 0$ 이므로
 $f(1) = 2$
 ②에서 $f(1) = a+b$ 이므로 $a+b=2$ ▶ 20 %
 ①, ②를 각각 x 에 대하여 미분하면
 $2f(x)f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + 3$
 $f'(x) = 2(x-1)P(x) + (x-1)^2 P'(x) + a$
 $x=1$ 을 대입하면
 $2f(1)f'(1) = 3$, $f'(1) = a$
 즉, $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{4}$ ▶ 40 %
 따라서 구하는 나머지는 $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ ▶ 10 %

- 15 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \frac{1}{4}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 3 = 0$
 즉, $f(2) = 3$ 이므로 $g(3) = 2$ ▶ 30 %
 또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = f'(2)$ 이므로
 $f'(2) = \frac{1}{4}$ ▶ 30 %
 따라서 $g'(3) = \frac{1}{f'(2)} = 4$ ▶ 40 %

- 16 $f(x) = \ln(x^2+ax+b)$ 라고 하면
 $f'(x) = \frac{2x+a}{x^2+ax+b}$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서
 극솟값을 가지므로 $f'(1) = 0$

$$\frac{2+a}{1+a+b} = 0, a = -2$$
 ▶ 50 %

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2ax + 2b - a^2}{(x^2 + ax + b)^2} \text{이고, 곡선 } y=f(x) \text{의 한 변곡점의 } x \text{좌표가 } 0 \text{이므로 } f''(0)=0 \text{에서}$$

$$\frac{2b-a^2}{b^2}=0, b=2 \quad \blacktriangleright 50\%$$

17 (1) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 이라고 하면

$$f'(x) = -xe^{-x}(x-2)$$

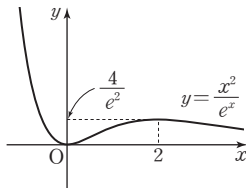
$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2 \quad \blacktriangleright 10\%$$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		0 극소		$\frac{4}{e^2}$ 극대	

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$ 에서 최소이고 최솟값은 0이다. $\blacktriangleright 50\%$



(2) 함수 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 은 $x=0$ 에

서 최소이고 최솟값은 0, $x=2$ 에서 극대이고 극댓값이 $\frac{4}{e^2}$ 이므로 방정식 $ke^x = x^2$ 이 서로 다른 세 실

근을 가지려면 함수 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. $\blacktriangleright 30\%$

따라서 구하는 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{4}{e^2} \quad \blacktriangleright 20\%$$

18 $\frac{dx}{dt} = -1 - \sin t$, $\frac{dy}{dt} = -2 \cos t$ 이므로 시각 t 에서의 속도는

$$(-1 - \sin t, -2 \cos t)$$

이때 속력은 $\sqrt{-3\left(\sin t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}}$ 이므로

$\sin t = \frac{1}{3}$ 일 때 속력이 최대이다. $\blacktriangleright 50\%$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 2 \sin t$ 이므로 시각 t 에서의 가속도는

$$(-\cos t, 2 \sin t)$$

따라서 가속도의 크기는 $\sqrt{1+3\sin^2 t}$ 이므로 속력이

최대일 때 가속도의 크기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. $\blacktriangleright 50\%$

III 적분법

Plus 연습

1 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 부정적분 177~186쪽

01 (1) $\int 3x^{-4} dx = \frac{3}{-4+1} x^{-4+1} + C$

$$= -\frac{1}{x^3} + C$$

(2) $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \int \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} dx$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

(3) $\int \frac{5}{x} dx = 5 \int \frac{1}{x} dx = 5 \ln |x| + C$

02 (1) $\int \frac{2x^4 - 5x + 3}{x^2} dx$

$$= \int \left(2x^2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx$$

$$= \int 2x^2 dx - \int \frac{5}{x} dx + \int 3x^{-2} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^3 - 5 \ln |x| - \frac{3}{x} + C$$

(2) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{x+4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 4 + 4x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int 4 dx + \int 4x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 4x + 8\sqrt{x} + C$$

03 $f(x) = \int \frac{1-2x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2x \right) dx$

$$= \ln |x| - x^2 + C$$

$f(1) = -2$ 이므로 $0 - 1 + C = -2$, $C = -1$

따라서 $f(x) = \ln |x| - x^2 - 1$ 이므로

$$f(e) = 1 - e^2 - 1 = -e^2$$

04 (1) $\int 3e^{x-2} dx = \int 3e^x \times e^{-2} dx = \frac{3}{e^2} \int e^x dx$

$$= \frac{3}{e^2} \times e^x + C = 3e^{x-2} + C$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int (3^{2x} - 4^{-x}) dx &= \int (3^2)^x dx - \int (4^{-1})^x dx \\
 &= \int 9^x dx - \int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx \\
 &= \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln \frac{1}{4}} + C \\
 &= \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{4^{-x}}{\ln 4} + C
 \end{aligned}$$

- 05** 박테리아의 무게의 변화율 $f'(t)$ 는 $f'(t) = 0.06e^{0.2t}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int 0.06e^{0.2t} dt = 0.06 \int (e^{0.2})^t dt \\
 &= \frac{0.06(e^{0.2})^t}{\ln e^{0.2}} + C = \frac{0.06e^{0.2t}}{0.2} + C \\
 &= 0.3e^{0.2t} + C
 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 10$ 이므로

$$0.3 + C = 10, C = 9.7$$

즉, $f(t) = 0.3e^{0.2t} + 9.7$ 이므로

$$f(5) = 0.3e + 9.7$$

따라서 5시간 후 박테리아의 무게는 $(0.3e + 9.7)$ g 이다.

06 (1) $\int \left(4 \sin x + \frac{\cos x}{3}\right) dx$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int \sin x dx + \frac{1}{3} \int \cos x dx \\
 &= -4 \cos x + \frac{1}{3} \sin x + C
 \end{aligned}$$

(2) $\int \frac{3+2 \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int (3 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x) dx \\
 &= 3 \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx \\
 &= 3 \tan x + 2 \sec x + C
 \end{aligned}$$

- 07** 해수면의 높이의 변화율 $f'(t)$ 는 $f'(t) = \frac{1}{2} \sin t$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int \frac{1}{2} \sin t dt = \frac{1}{2} \int \sin t dt \\
 &= -\frac{1}{2} \cos t + C
 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $-\frac{1}{2} + C = 3, C = \frac{7}{2}$

즉, $f(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{7}{2}$ 이므로

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cos 2 + \frac{7}{2} = 0.2 + 3.5 = 3.7$$

따라서 측정한 지 2시간 후 해수면의 높이는 3.7 m 이다.

08 (1) $\int \frac{4 \cos^2 x}{1 + \sin x} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{4(1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} dx \\
 &= \int \frac{4(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 + \sin x} dx \\
 &= \int (4 - 4 \sin x) dx \\
 &= 4x + 4 \cos x + C
 \end{aligned}$$

- (2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누면
- $$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

따라서 $\int (3 - 2 \tan^2 x) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \{3 - 2(\sec^2 x - 1)\} dx \\
 &= \int (5 - 2 \sec^2 x) dx \\
 &= 5x - 2 \tan x + C
 \end{aligned}$$

02 치환적분법 187~194쪽

- 01** (1) $3 - 5x = t$, 즉 $x = \frac{3-t}{5}$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{5}$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int (3 - 5x)^4 dx &= \int t^4 \times \left(-\frac{1}{5}\right) dt \\
 &= -\frac{1}{5} \int t^4 dt \\
 &= -\frac{1}{25} t^5 + C \\
 &= -\frac{1}{25} (3 - 5x)^5 + C
 \end{aligned}$$

- (2) $4x - 3 = t$, 즉 $x = \frac{t+3}{4}$ 으로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2}{\sqrt{4x-3}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{4} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \sqrt{t} + C = \sqrt{4x-3} + C
 \end{aligned}$$

- (3) $4 - 3x = t$, 즉 $x = \frac{4-t}{3}$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int e^{4-3x} dx &= \int e^t \times \left(-\frac{1}{3}\right) dt \\
 &= -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C \\
 &= -\frac{1}{3} e^{4-3x} + C
 \end{aligned}$$

(4) $6x+1=t$, 즉 $x=\frac{t-1}{6}$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{6}$

이므로

$$\begin{aligned} & \int \sin(6x+1) dx \\ &= \int \sin t \times \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \int \sin t dt \\ &= -\frac{1}{6} \cos t + C = -\frac{1}{6} \cos(6x+1) + C \end{aligned}$$

02 $ax-2=t$, $x=\frac{t+2}{a}$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int (ax-2)^7 dx &= \int t^7 \times \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int t^7 dt \\ &= \frac{1}{8a} t^8 + C = \frac{1}{8a} (ax-2)^8 + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 16이므로

$$\frac{1}{8a} \times a^8 = 16, \quad a^7 = 128$$

따라서 $a=2$

다른 풀이 $f(x) = \int (ax-2)^7 dx$ 는 8차식이고, 최고차항의

계수가 160이므로 $f'(x) = (ax-2)^7$ 의 최고차항의 계수는 $8 \times 16 = 1280$ 이다.

즉, $a^7 = 1280$ 이므로 $a=2$

03 (1) $t=x^3+5$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2}{(x^3+5)^3} dx &= \int \frac{2}{(x^3+5)^3} \times 3x^2 dx \\ &= \int \frac{2}{t^3} dt \\ &= 2 \int t^{-3} dt \\ &= -t^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{(x^3+5)^2} + C \end{aligned}$$

(2) $t=\ln x$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{5(\ln x)^4}{x} dx &= \int 5(\ln x)^4 \times \frac{1}{x} dx \\ &= \int 5t^4 dt \\ &= t^5 + C \\ &= (\ln x)^5 + C \end{aligned}$$

04 (1) $\int \frac{5(e^x - 2e^{-x})}{e^x + 2e^{-x}} dx = 5 \int \frac{(e^x + 2e^{-x})'}{e^x + 2e^{-x}} dx$
 $= 5 \ln(e^x + 2e^{-x}) + C$

(2) $\int \frac{3 \cos x}{\sin x + 4} dx = 3 \int \frac{(\sin x + 4)'}{\sin x + 4} dx$
 $= 3 \ln(\sin x + 4) + C$

05 (1) $\frac{2x^2+4x-3}{x+2} = \frac{2x(x+2)-3}{x+2} = 2x - \frac{3}{x+2}$

이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+4x-3}{x+2} dx &= \int \left(2x - \frac{3}{x+2} \right) dx \\ &= x^2 - 3 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

(2) $\frac{4}{x^2-16} = \frac{4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4} \right)$

이므로

$$\begin{aligned} & \int \frac{4}{x^2-16} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x-4| - \ln|x+4|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C \end{aligned}$$

03 부분적분법 195~200쪽

01 (1) $f(x)=6x$, $g'(x)=\cos 3x$ 로 놓으면

$f'(x)=6$, $g(x)=\frac{1}{3} \sin 3x$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int 6x \cos 3x dx \\ &= 2x \sin 3x - \int 2 \sin 3x dx \\ &= 2x \sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x + C \end{aligned}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=4x$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int 4x \ln x dx &= 2x^2 \ln x - \int 2x dx \\ &= 2x^2 \ln x - x^2 + C \end{aligned}$$

02 (1) $f(x)=e^{2x}$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g(x)=\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int e^{2x} \cos x dx \\ &= e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x dx \\ &= e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int e^{2x} \sin x dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용하자.

$u(x)=e^{2x}$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$u'(x)=2e^{2x}$, $v(x)=-\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int e^{2x} \sin x \, dx \\ &= -e^{2x} \cos x - \int (-2e^{2x} \cos x) \, dx \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \int e^{2x} \cos x \, dx \\ &= e^{2x} \sin x - 2 \left(-e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx \right) \\ &= e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx \\ & 5 \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) \end{aligned}$$

따라서

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + C$$

(2) $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$f'(x) = 2x$, $g(x) = -e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} \, dx &= -x^2 e^{-x} - \int (-2xe^{-x}) \, dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} \, dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int xe^{-x} \, dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용하자.

$u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int xe^{-x} \, dx &= -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) \, dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} \, dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx \right) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C \end{aligned}$$

03 $f(x) = (\ln x)^2$, $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, $g(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} h(x) &= \int (\ln x)^2 \, dx \\ &= x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x \, dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int \ln x \, dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용하자.

$u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$ 이므로

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx \quad \dots\dots ②$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} h(x) &= x(\ln x)^2 - 2 \left(x \ln x - \int dx \right) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

$h(e) = 0$ 이므로

$$e - 2e + 2e + C = 0, \quad C = -e$$

따라서 $h(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - e$ 이므로

$$h(1) = 2 - e$$

04 여러 가지 함수의 정적분 201-207쪽

01 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

(2) $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{x} \, dx = \int_1^3 \left(2x + \frac{1}{x} \right) \, dx$
 $= \left[x^2 + \ln |x| \right]_1^3 = 8 + \ln 3$

02 (1) $8x+1=t$, 즉 $x = \frac{t-1}{8}$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{8}$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=9$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{8x+1}} \, dx &= \int_1^9 \frac{1}{8\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{8} \int_1^9 t^{-\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \left[\frac{1}{4} \sqrt{t} \right]_1^9 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $t = \cos x$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx &= \int_1^0 -t^2 \, dt = \int_0^1 t^2 \, dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

03 (1) $x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4-4 \sin^2 \theta} \times 2 \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos \theta \times 2 \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(1 + \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= \left[2\theta + \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} + 1 \end{aligned}$$

(2) $x=3 \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = 3 \sec^2 \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=3\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{9 \tan^2 \theta + 9} \times 3 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{9 \sec^2 \theta} \times 3 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3} d\theta = \left[\frac{1}{3} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

04 (1) $f(x)=5x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5, g(x) = e^x \text{이므로} \\ \int_0^1 5xe^x dx &= \left[5xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 5e^x dx \\ &= 5e - \left[5e^x \right]_0^1 = 5 \end{aligned}$$

(2) $f(x)=4x$, $g'(x)=\sin 2x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4, g(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \text{이므로} \\ \int_0^{\pi} 4x \sin 2x dx &= \left[-2x \cos 2x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-2 \cos 2x) dx \\ &= -2\pi + \left[\sin 2x \right]_0^{\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

05 $f(x)=2x^2$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x, g(x) = \sin x \text{이므로} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x^2 \cos x dx &= \left[2x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용하자.

$u(x)=4x$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= 4, v(x) = -\cos x \text{이므로} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx &= \left[-4x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos x dx \\ &= 0 + \left[4 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

2 정적분의 활용

01 정적분과 급수 216~220쪽

01 닫힌구간 $[0, 1]$ 을 n 등분 할 때, 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례로

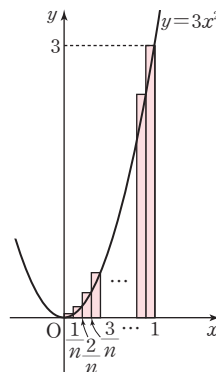
$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

이므로 오른쪽 그림에서 색 칠한 직사각형의 넓이의 합 U_n 은

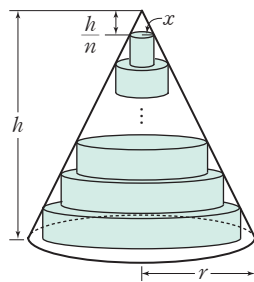
$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \times 3 \left(\frac{1}{n} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n} \times 3 \left(\frac{2}{n} \right)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n} \times 3 \left(\frac{n}{n} \right)^2 \\ &= \frac{3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &= \frac{3}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

따라서 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 1$$



02 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n 등분 하고, 각 분점을 지나며 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자른 다음 $(n-1)$ 개의 원기둥을 만든다. 이때 위에서부터 첫 번째 원기둥의 밑면의 반



지름의 길이를 x 라고 하면 각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$ 이

$$\text{므로 } x:r = \frac{h}{n}:h, x = \frac{r}{n}$$

같은 방법으로 각 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하면 위에서부터 차례로

$$\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \dots, \frac{(n-1)r}{n}$$

이므로 $(n-1)$ 개의 원기둥의 부피의 합을 V_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \left(\frac{r}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \pi \left(\frac{2r}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \dots \\ &\quad + \pi \left\{ \frac{(n-1)r}{n} \right\}^2 \frac{h}{n} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \{ 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \pi r^2 h \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

따라서 $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi r^2 h \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

03 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \dots + e^{\frac{2n}{n}})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{1}{n}$$

이때 $f(x) = e^{2x}$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, x_k = a + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 따라

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \dots + e^{\frac{2n}{n}}) \\ = \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

다른 풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n} = 0$ 이므로

$f(x) = e^x$, $a=0$, $b=2$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}, x_k = a + k\Delta x = \frac{2k}{n}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \dots + e^{\frac{2n}{n}})$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 e^x dx = \frac{1}{2} [e^x]_0^2 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

04 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + f\left(\frac{6}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{2n}{n}\right) \right\}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 - 9x^2 + 2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^4 - 3x^3 + 2x \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

02 넓이 221~225쪽

01 (1) 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서

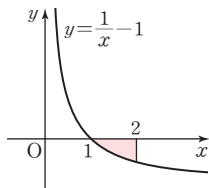
$$\frac{1}{x} - 1 \leq 0 \text{ 이므로 구하는}$$

넓이 S 는

$$S = \int_1^2 \left| \frac{1}{x} - 1 \right| dx$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[x - \ln |x| \right]_1^2 = 1 - \ln 2$$



(2) $y = \sqrt{x-1}$ 에서

$x = y^2 + 1$ 이고, 닫

힌구간 $[0, 3]$ 에서

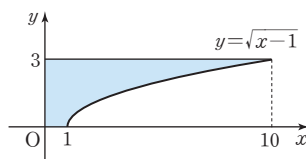
$y^2 + 1 \geq 0$ 이므로

구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^3 (y^2 + 1) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^3$$

$$= 12$$



02 (1) 두 곡선의 교점의 x 좌표

는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$x^2 \leq \sqrt{x}$ 이고, 닫힌구간

$[1, 2]$ 에서 $x^2 \geq \sqrt{x}$ 이므로

로 구하는 넓이 S 는

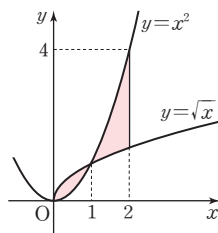
$$S = \int_0^2 |x^2 - \sqrt{x}| dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x}) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}$$



(2) 두 곡선의 교점의 x 좌표

는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$\sin \frac{\pi}{2} x \geq 2x^2 - 1$ 이고,

닫힌구간 $[1, 2]$ 에서

$\sin \frac{\pi}{2} x \leq 2x^2 - 1$ 이므로

구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 \left| (2x^2 - 1) - \sin \frac{\pi}{2} x \right| dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} x - 2x^2 + 1 \right) dx$$

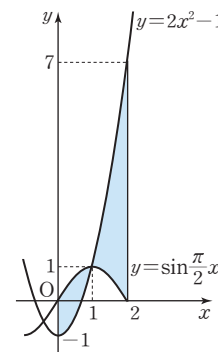
$$+ \int_1^2 \left(2x^2 - 1 - \sin \frac{\pi}{2} x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^1$$

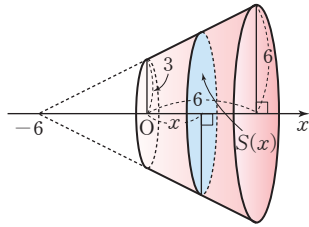
$$+ \left[\frac{2}{3} x^3 - x + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \right) + \left(\frac{11}{3} - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$= 4$$



- 01 다음 그림과 같이 원뿔대의 반지름의 길이가 3인 밑면의 중심을 원점 O, 그 점에서 반지름의 길이가 6인 밑면에 내린 수선을 x 축으로 정하자.



이때 x 좌표가 x ($0 \leq x \leq 6$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면 단면과 반지름의 길이가 3인 밑면의 반지름의 길이의 비가 $x+6 : 6$ 이므로 넓이의 비는

$$S(x) : 9\pi = (x+6)^2 : 6^2, \text{ 즉 } S(x) = \left(\frac{x+6}{2}\right)^2 \pi$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \left(\frac{x+6}{2}\right)^2 \pi dx \\ &= \left[\frac{2\pi}{3} \left(\frac{x+6}{2}\right)^3 \right]_0^6 = \frac{2\pi}{3} (6^3 - 3^3) = 126\pi \end{aligned}$$

- 02 입체도형의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \pi \left(3 + \sin \frac{x}{2}\right)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^\pi S(x) dx &= \int_0^\pi \pi \left(3 + \sin \frac{x}{2}\right)^2 dx \\ &= \pi \left[3x - 2 \cos \frac{x}{2} \right]_0^\pi \\ &= \pi(3\pi + 2) \end{aligned}$$

04 속도와 거리 230~235쪽

- 01 (1) $2 + \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{t+1}\right) dt = 2 + \left[2t - 3 \ln |t+1|\right]_0^1$

$$= 4 - 3 \ln 2$$

- (2) 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{t+1}\right) dt &= \left[2t - 3 \ln |t+1|\right]_0^1 \\ &= 2 - 3 \ln 2 \end{aligned}$$

점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left|2 - \frac{3}{t+1}\right| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{t+1} - 2\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{3}{t+1}\right) dt \\ &= \left[3 \ln |t+1| - 2t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[2t - 3 \ln |t+1|\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 6 \ln 3 - 9 \ln 2 \end{aligned}$$

- 02 $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = t^2 - 1$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt \\ &= \int_0^2 (t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^2 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

- 03 (1) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}$ 이므로 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{1 + (-\sqrt{x})^2} dx &= \int_0^3 \sqrt{1+x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

- (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$ 이므로 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right]_1^2 = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

시험 대비 대단원 TEST

..... 254~256쪽

1 ① 2 $3 + \frac{\pi}{4}$ 3 ④ 4 $\frac{1}{2}$ 5 ②

6 ④ 7 ① 8 ③ 9 $\frac{e}{2} - 1$

10 $3\pi^2 + 8\pi$ 11 ⑤ 12 ② 13 $\frac{3}{2}$

14 $\frac{3}{4}\pi$ 15 $\frac{8}{9}$ 16 $\frac{10}{3}$ 17 $\frac{3}{\pi}$

18 (1) $a = -1, b = -1, c = 1, d = 1$ (2) 4

1 $F(x) = \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx = \int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} dx$
 $= \int (\sqrt{x}-2) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + C$

따라서

$$\begin{aligned} F(4) - F(1) &= \left(-\frac{8}{3} + C\right) - \left(-\frac{4}{3} + C\right) \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

그러므로 ①이다.

$$\begin{aligned}
 2 \quad f(x) &= \int (\tan^2 x + 2 \sec^2 x) dx \\
 &= \int \{(\sec^2 x - 1) + 2 \sec^2 x\} dx \\
 &= \int (3 \sec^2 x - 1) dx \\
 &= 3 \tan x - x + C \\
 f(0) &= \frac{\pi}{2} \text{에서 } C = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 3 \tan x - x + \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 3 + \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad f'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \text{이므로} \\
 f(x) &= \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 t &= 1-x^2 \text{으로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -2x \text{이므로} \\
 f(x) &= \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int -\frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
 &= \int -t^{-\frac{1}{2}} dt \\
 &= -2\sqrt{t} + C \\
 &= -2\sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $-2+C=1, C=3$
 즉, $f(x) = -2\sqrt{1-x^2} + 3$
 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, a)$ 를 지나므로 $a=3$
 따라서 ④이다.

$$\begin{aligned}
 4 \quad t &= 2 + \ln x \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \\
 x=1 \text{일 때 } t &= 2, x=e \text{일 때 } t=3 \text{이므로} \\
 \int_1^e \frac{3}{x(2+\ln x)^2} dx &= \int_2^3 \frac{3}{t^2} dt \\
 &= \int_2^3 3t^{-2} dt \\
 &= \left[-\frac{3}{t}\right]_2^3 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \int_0^1 (3x+1)e^x dx &= \left[(3x+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 3e^x dx \\
 &= (4e-1) - \left[3e^x\right]_0^1 \\
 &= (4e-1) - (3e-3) \\
 &= e+2 \\
 &\text{따라서 ②이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad \int_2^x f(t) dt &= x-1+a \sin x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여} \\
 &\text{미분하면}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + a \cos x$$

$$\int_2^x f(t) dt = x-1+a \sin x \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입}$$

$$\text{하면 } 0 = 1 + a \sin 2, a = -\frac{1}{\sin 2}$$

$$\text{즉, } f(x) = 1 - \frac{\cos x}{\sin 2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{따라서 } \int_{-2}^2 f(t) dt &= \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{\cos t}{\sin 2}\right) dt \\
 &= \left[t - \frac{\sin t}{\sin 2}\right]_{-2}^2 \\
 &= 1 - (-1) = 2
 \end{aligned}$$

그러므로 ④이다.

$$7 \quad f(x) = \sin x, a=0, b=\frac{\pi}{6} \text{로 놓으면}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{6n}, x_k = a + k\Delta x = \frac{k\pi}{6n}$$

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 따라

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{6n} &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx \\
 &= 6 \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= 6 - 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=6, b=-3$ 이므로

$$a+b=3$$

그러므로 ①이다.

$$8 \quad \text{곡선 } x = \frac{1}{3}y^2 \text{과 직선}$$

$y=x-6$ 의 교점의 좌표
 는 $(12, 6)$

닫힌구간 $[0, 6]$ 에서

$$y+6 \geq \frac{1}{3}y^2 \text{이므로}$$

구하는 도형의 넓이는

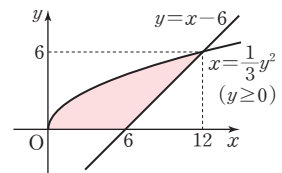
$$\begin{aligned}
 \int_0^6 \left(y+6 - \frac{1}{3}y^2\right) dy &= \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{9}y^3\right]_0^6 \\
 &= 18 + 36 - 24 = 30
 \end{aligned}$$

따라서 ③이다.

다른 풀이 $x = \frac{1}{3}y^2 (y \geq 0)$ 에서 $y = \sqrt{3x}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^{12} \sqrt{3x} dx - \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \\
 = \left[\frac{2}{9}(3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12} - 18 \\
 = 48 - 18 = 30
 \end{aligned}$$

따라서 ③이다.



9 $y' = e^x$ 이므로

$$e^x = e, x = 1$$

즉, 접점의 좌표는

$(1, e-1)$ 이므로 접선의

방정식은 $y = ex - 1$

단한구간 $[0, 1]$ 에서

$e^x - 1 \geq ex - 1$ 이므로 구

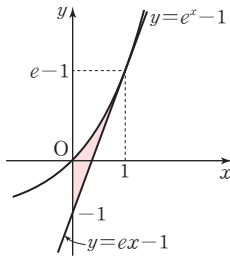
하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(e^x - 1) - (ex - 1)\} dx$$

$$= \int_0^1 (e^x - ex) dx$$

$$= \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{e}{2} - 1$$



10 저수조의 수면의 넓이는 $\pi(1 + 2 \sin x)^2$

따라서 저수조에 담을 수 있는 물의 최대 부피는

$$\int_0^\pi \pi(1 + 2 \sin x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^\pi (1 + 4 \sin x + 4 \sin^2 x) dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \{1 + 4 \sin x + 2(1 - \cos 2x)\} dx$$

$$= \pi \int_0^\pi (3 + 4 \sin x - 2 \cos 2x) dx$$

$$= \pi \left[3x - 4 \cos x - \sin 2x \right]_0^\pi$$

$$= 3\pi^2 + 8\pi$$

11 $\frac{dx}{dt} = t \cos t, \frac{dy}{dt} = -t \sin t$ 이므로

$t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{t^2} dt$$

$$= \int_0^a t dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^a = \frac{1}{2}a^2$$

즉, $\frac{1}{2}a^2 = 8\pi^2$ 에서 $a^2 = 16\pi^2$ 이고, $a > 0$ 이므로

$$a = 4\pi$$

따라서 ⑤이다.

12 $\frac{4x^4 + 24x + 3}{12x} = \frac{x^3}{3} + 2 + \frac{1}{4x}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

따라서 $x=1$ 에서 $x=3$ 까지의 곡선의 길이는

$$\int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4x^2}} dx$$

$$= \int_1^3 x^2 + \frac{1}{4x^2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x} \right]_1^3$$

$$= \frac{53}{6}$$

그러므로 ②이다.

13 $\int f(x) dx = xf(x) - x \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \ln x - 1$$

$$xf'(x) = \ln x + 1$$

$x > 0$ 에서 $f'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

▶ 30 %

$t = \ln x$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\text{즉, } f(x) = \int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} + \ln x + C$$

▶ 40 %

한편 $f(1) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + \ln x$ 이므로

$$f(e) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

▶ 30 %

14 $2x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sec^2 \theta}{2}$$

▶ 30 %

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{4x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6}{\tan^2 \theta + 1} \times \frac{\sec^2 \theta}{2} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 d\theta$$

$$= \left[3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}\pi$$

▶ 70 %

15 $y = \sqrt{4-ax}$ 에서
 $4-ax=y^2$
 즉, $x = \frac{4-y^2}{a}$ ▶ 30 %

단한구간 $[0, 2]$ 에서 $\frac{4-y^2}{a} \geq 0$ 이므로 구하는 도형의

넓이는

$$\int_0^2 \frac{4-y^2}{a} dy = \frac{1}{a} \left[4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3a}$$

▶ 50 %

즉, $\frac{16}{3a} = 6$ 에서 $a = \frac{8}{9}$ ▶ 20 %

16 $\overline{PQ} = \sqrt{-x^2+3x}$ 이므로 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \overline{PQ}^2 = -x^2 + 3x$$

▶ 40 %

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

▶ 60 %

17 $v(t) = \cos \pi t = 0$ 에서
 $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ▶ 20 %

즉, 출발 후 2번째로 운동 방향을 바꾼 시각은

$$t = \frac{3}{2}$$

▶ 30 %

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=\frac{3}{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{3}{2}} |v(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} |\cos \pi t| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi t dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-\cos \pi t) dt \\ &= \left[\frac{\sin \pi t}{\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{\sin \pi t}{\pi} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) = \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

▶ 50 %

18 (1) $x = \cos t + \cos^2 t$, $y = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin t - 2 \sin t \cos t \\ &= -\sin t - \sin 2t \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t + \cos 2t$$

▶ 30 %

따라서 $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$ ▶ 20 %

$$\begin{aligned} (2) & \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t - \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \sin t \sin 2t + 2 \cos t \cos 2t} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos t} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^\pi 2 \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \left[4 \sin \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

▶ 50 %

