



정답과 해설

고등 수학(상)

001 답 $4x^3+x-1$

$$\begin{aligned}
 & 2A-B-3(A-C) \\
 &= 2A-B-3A+3C \\
 &= -A-B+3C \\
 &= -(2x^3-3x+4)-(-3x^2+2x)+3(2x^3-x^2+1) \\
 &= -2x^3+3x-4+3x^2-2x+6x^3-3x^2+3 \\
 &= 4x^3+x-1
 \end{aligned}$$

002 답 ③

$(x^2+3x-2)(2x^2-x+6)$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $x^2 \times 6 + 3x \times (-x) + (-2) \times 2x^2 = 6x^2 - 3x^2 - 4x^2 = -x^2$
 따라서 x^2 의 계수는 -1 이다.

003 답 ④

$$\textcircled{4} (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = a^3 - (2b)^3 = a^3 - 8b^3$$

004 답 $x^4+4x^3+3x^2-2x-2$

$$\begin{aligned}
 x^2+2x &= X \text{로 놓으면} \\
 (x^2+2x+1)(x^2+2x-2) &= (X+1)(X-2) = X^2 - X - 2 \\
 &= (x^2+2x)^2 - (x^2+2x) - 2 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2
 \end{aligned}$$

005 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 x^2+y^2 &= (x-y)^2 + 2xy \text{에서 } 20 = 2^2 + 2xy \quad \therefore xy = 8 \\
 \therefore x^3-y^3 &= (x-y)^3 + 3xy(x-y) = 2^3 + 3 \times 8 \times 2 = 56
 \end{aligned}$$

006 답 ②

$$\begin{aligned}
 x^2+3x+1 &= 0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\
 x+3+\frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x+\frac{1}{x} = -3 \\
 \therefore x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = (-3)^3 - 3 \times (-3) = -18
 \end{aligned}$$

007 답 $\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned}
 a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서} \\
 14 &= 2^2 - 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = -5 \\
 \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

008 답 ③

$$\begin{aligned}
 & (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\
 &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\
 &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\
 &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1) = (2^8-1)(2^8+1) = 2^{16}-1
 \end{aligned}$$

009 답 22

직육면체의 가로 길이를 a , 세로 길이를 b , 높이를 c 라 하면
 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$$\begin{aligned}
 4(a+b+c) &= 24 \\
 \therefore a+b+c &= 6 \\
 \text{또 대각선의 길이가 } \sqrt{14} \text{이므로} \\
 \sqrt{a^2+b^2+c^2} &= \sqrt{14} \\
 \therefore a^2+b^2+c^2 &= 14 \\
 \text{이때 } a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서} \\
 14 &= 6^2 - 2(ab+bc+ca) \\
 \therefore ab+bc+ca &= 11
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$2(ab+bc+ca) = 2 \times 11 = 22$$

010 답 ④

다항식 $2x^3-3x^2+2x-15$ 를 x^2+2x+3 으로 나누면

$$\begin{array}{r}
 2x-7 \\
 x^2+2x+3 \overline{) 2x^3-3x^2+2x-15} \\
 \underline{2x^3+4x^2+6x} \\
 -7x^2-4x-15 \\
 \underline{-7x^2-14x-21} \\
 10x+6
 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x-7$, 나머지는 $10x+6$ 이다.

011 답 $x-4$

다항식 x^3-2x^2+5x-3 을 다항식 A 로 나누었을 때의 몫이

$$\begin{aligned}
 x^2+2x+13 \text{이고 나머지가 } 49 \text{이므로} \\
 x^3-2x^2+5x-3 &= A(x^2+2x+13) + 49 \\
 A(x^2+2x+13) &= x^3-2x^2+5x-52 \\
 \therefore A &= (x^3-2x^2+5x-52) \div (x^2+2x+13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 x-4 \\
 x^2+2x+13 \overline{) x^3-2x^2+5x-52} \\
 \underline{x^3+2x^2+13x} \\
 -4x^2-8x-52 \\
 \underline{-4x^2-8x-52} \\
 0
 \end{array}$$

$$\therefore A = x-4$$

012 답 ①

다항식 $f(x)$ 를 $x-\frac{3}{2}$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(x-\frac{3}{2}\right)Q(x) + R \\
 &= (2x-3) \times \frac{1}{2}Q(x) + R
 \end{aligned}$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x-3$ 으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

013 답 $a=-2, b=3, c=0, d=4, e=1$

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+3x^2-1 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}$$

$\therefore a=-2, b=3, c=0, d=4, e=1$

014 답 ④

$$\begin{aligned} 3(A-B)+2(B+C) \\ &= 3A-3B+2B+2C=3A-B+2C \\ &= 3(2x^3-x^2-x+6)-(x^3-2x)+2(3x^3-x^2) \\ &= 6x^3-3x^2-3x+18-x^3+2x+6x^3-2x^2 \\ &= 11x^3-5x^2-x+18 \end{aligned}$$

015 답 $-10x^2+9xy-13y^2$

$$\begin{aligned} 2X-A &= 3(X-2B) \text{에서 } 2X-A=3X-6B \\ \therefore X &= -A+6B \\ &= -(4x^2-3xy+y^2)+6(-x^2+xy-2y^2) \\ &= -4x^2+3xy-y^2-6x^2+6xy-12y^2 \\ &= -10x^2+9xy-13y^2 \end{aligned}$$

016 답 ②

$$\begin{aligned} \langle x+2y-1, 3x-4y+1 \rangle &= 2(x+2y-1)-(3x-4y+1)+3 \\ &= 2x+4y-2-3x+4y-1+3 \\ &= -x+8y \end{aligned}$$

017 답 $2x^3+x^2-2x+1$

$$\begin{aligned} A+2B &= x^3+6x^2-5x+3 \quad \text{..... ㉠} \\ A-B &= 4x^3-9x^2+4x-3 \quad \text{..... ㉡} \end{aligned}$$

㉠-㉡을 하면

$$3B = -3x^3+15x^2-9x+6$$

$$\therefore B = -x^3+5x^2-3x+2$$

따라서 ㉡에서

$$\begin{aligned} A &= B+(4x^3-9x^2+4x-3) \\ &= (-x^3+5x^2-3x+2)+(4x^3-9x^2+4x-3) \\ &= 3x^3-4x^2+x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A+B &= (3x^3-4x^2+x-1)+(-x^3+5x^2-3x+2) \\ &= 2x^3+x^2-2x+1 \end{aligned}$$

018 답 $8x^2+3x-1$

$2x^2-3x+5$	㉠	$6x^2-x+3$
	㉡	
	$3x^2-4x+6$	A

위의 표에서 가로에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$ 이므로

$$(2x^2-3x+5)+\text{㉠}+(6x^2-x+3)=15x^2+6$$

$$\therefore \text{㉠}=7x^2+4x-2$$

또 세로에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$ 이므로

$$(7x^2+4x-2)+\text{㉡}+(3x^2-4x+6)=15x^2+6$$

$$\therefore \text{㉡}=5x^2+2$$

따라서 대각선에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$ 이므로

$$(2x^2-3x+5)+(5x^2+2)+A=15x^2+6$$

$$\therefore A=8x^2+3x-1$$

019 답 11

$(x^3+4x-1)(2x^2-x+3)$ 의 전개식에서 x^3 항은

$$x^3 \times 3 + 4x \times 2x^2 = 3x^3 + 8x^3 = 11x^3$$

따라서 x^3 의 계수는 11이다.

020 답 ①

$(x-2y-3)(4x+5y-6)$ 의 전개식에서 xy 항은

$$x \times 5y + (-2y) \times 4x = 5xy - 8xy = -3xy$$

따라서 xy 의 계수는 -3이다.

021 답 ③

$(2x^2+x-3)(x^2-5x+k)$ 의 전개식에서 x^2 항은

$$2x^2 \times k + x \times (-5x) + (-3) \times x^2$$

$$= 2kx^2 - 5x^2 - 3x^2 = (2k-8)x^2$$

$$\text{따라서 } x^2 \text{의 계수는 } 2k-8 \text{이므로 } 2k-8=-6 \quad \therefore k=1$$

022 답 -2

두 다항식 A, B 에서 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 하면 $A-2B$ 에서 x^3 의 계수는 $a-2b$ 이다.

$(x-1)(x^3-3x^2+1)$ 의 전개식에서 x^3 항은

$$x \times (-3x^2) + (-1) \times x^3 = -3x^3 - x^3 = -4x^3$$

즉, 다항식 A 에서 x^3 의 계수는 -4이므로 $a=-4$

$(2x^2-x+1)(x^3-x-2)$ 의 전개식에서 x^3 항은

$$2x^2 \times (-x) + 1 \times x^3 = -2x^3 + x^3 = -x^3$$

즉, 다항식 B 에서 x^3 의 계수는 -1이므로 $b=-1$

따라서 다항식 $A-2B$ 의 x^3 의 계수는

$$a-2b = -4-2 \times (-1) = -2$$

023 답 -1

$$(1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+x^{50})^2$$

$$= (1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+x^{50})(1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+x^{50})$$

이므로 주어진 다항식의 전개식에서 x^4 항은

$$1 \times x^4 + (-x) \times (-x^3) + x^2 \times x^2 + (-x^3) \times (-x) + x^4 \times 1$$

$$= x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 = 5x^4$$

$$\therefore a=5$$

또 주어진 다항식의 전개식에서 x^5 항은

$$1 \times (-x^5) + (-x) \times x^4 + x^2 \times (-x^3) + (-x^3) \times x^2$$

$$+ x^4 \times (-x) + (-x^5) \times 1$$

$$= -x^5 - x^5 - x^5 - x^5 - x^5 - x^5 = -6x^5$$

$$\therefore b=-6$$

$$\therefore a+b=-1$$

024 답 ④

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ 중 임의의 4개의 일차식에서 x 만 뽑아 곱하면 x^4 이 되고, 여기에 남은 일차식의 상수항을 곱하면 x^4 의 계수가 되므로

$$x^4 + 2x^4 + 3x^4 + 4x^4 + 5x^4 = 15x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 15이다.

025 답 ⑤

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (a-b-1)^2 &= a^2 + (-b)^2 + (-1)^2 + 2 \times a \times (-b) + 2 \times (-b) \times (-1) \\ &\quad + 2 \times (-1) \times a \\ &= a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (a+2b)^3 &= a^3 + 3 \times a^2 \times 2b + 3 \times a \times (2b)^2 + (2b)^3 \\ &= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x^2-x \times 1 + 1^2) = x^3 + 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) &= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \\ &= (x^4-y^4)(x^4+y^4) = x^8 - y^8 \end{aligned}$$

026 답 $x^4 + 4x^2 + 16$

$$\begin{aligned} (x^2+2x+4)(x^2-2x+4) &= (x^2+x \times 2 + 2^2)(x^2-x \times 2 + 2^2) \\ &= x^4 + x^2 \times 2^2 + 2^4 \\ &= x^4 + 4x^2 + 16 \end{aligned}$$

027 답 ①

$$\begin{aligned} (2x-3)^3 &= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times 2x \times 3^2 - 3^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \end{aligned}$$

따라서 $a = -36$, $b = 54$, $c = -27$ 이므로

$$a+b+c = -9$$

028 답 $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$

$$\begin{aligned} (x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx) &= \{x+(-y)+z\} \\ &\quad \times \{x^2+(-y)^2+z^2-x \times (-y) - (-y) \times z - z \times x\} \\ &= x^3 + (-y)^3 + z^3 - 3 \times x \times (-y) \times z \\ &= x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz \end{aligned}$$

029 답 ⑤

$$\begin{aligned} (a+b-2c)^2 &= a^2 + b^2 + (-2c)^2 + 2 \times a \times b + 2 \times b \times (-2c) + 2 \times (-2c) \times a \\ &= a^2 + b^2 + 4c^2 + 2(ab - 2bc - 2ca) \\ &= 41 + 2 \times (-16) = 9 \end{aligned}$$

030 답 ②

$$\begin{aligned} (x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9) &= \{(x+3)(x^2-3x+9)\} \{(x-3)(x^2+3x+9)\} \\ &= (x^3+27)(x^3-27) \\ &= x^6 - 729 \end{aligned}$$

031 답 ②

$$x+y+z=2 \text{에서}$$

$$x+y=2-z, y+z=2-x, z+x=2-y$$

$$\begin{aligned} \therefore (x+y)(y+z)(z+x) &= (2-z)(2-x)(2-y) \\ &= 2^3 - 2^2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz \\ &= 8 - 4 \times 2 + 2 \times (-1) - (-2) = 0 \end{aligned}$$

032 답 -4

$$(x^2+x-3)(x^2-4x-3) = (x^2-3+x)(x^2-3-4x) \text{에서}$$

$$x^2-3=X \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned} (x^2-3+x)(x^2-3-4x) &= (X+x)(X-4x) \\ &= X^2 - 3xX - 4x^2 \\ &= (x^2-3)^2 - 3x(x^2-3) - 4x^2 \\ &= x^4 - 6x^2 + 9 - 3x^3 + 9x - 4x^2 \\ &= x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 9x + 9 \end{aligned}$$

따라서 $a = -3$, $b = -10$, $c = 9$ 이므로

$$a+b+c = -4$$

033 답 ④

$$x+y=X \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned} (x+y+z)(x+y-z) &= (X+z)(X-z) \\ &= X^2 - z^2 \\ &= (x+y)^2 - z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

034 답 $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15$

$$\begin{aligned} (x-1)(x+1)(x+3)(x+5) &= \{(x-1)(x+5)\} \{(x+1)(x+3)\} \\ &= (x^2+4x-5)(x^2+4x+3) \\ x^2+4x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2+4x-5)(x^2+4x+3) &= (X-5)(X+3) = X^2 - 2X - 15 \\ &= (x^2+4x)^2 - 2(x^2+4x) - 15 \\ &= x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 2x^2 - 8x - 15 \\ &= x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15 \end{aligned}$$

035 답 ①

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-3x^2+1) &= (x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1) \\ x^4+1 &= X \text{로 놓으면} \\ (x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1) &= (X+x^2)(X-3x^2) \\ &= X^2 - 2x^2X - 3x^4 \\ &= (x^4+1)^2 - 2x^2(x^4+1) - 3x^4 \\ &= x^8 + 2x^4 + 1 - 2x^6 - 2x^2 - 3x^4 \\ &= x^8 - 2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

따라서 $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$, $d = -2$ 이므로

$$abcd = -4$$

036 답 7

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\text{에서}$$

$$5=1^2-2xy \quad \therefore xy=-2$$

$$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\times(-2)\times 1=7$$

037 답 ①

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} \\ &= \frac{4^2-2\times(-2)}{-2} = -10 \end{aligned}$$

038 답 ④

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)\text{에서}$$

$$-9=(-3)^3+3xy\times(-3) \quad \therefore xy=-2$$

$$\therefore x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy=(-3)^2+(-2)=7$$

039 답 $10\sqrt{13}$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\text{에서}$$

$$11=3^2-2ab \quad \therefore ab=-1$$

$$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\times(-1)=13$$

$$\text{그런데 } a>b\text{이므로 } a-b=\sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3-b^3 &= (a-b)^3+3ab(a-b) \\ &= (\sqrt{13})^3+3\times(-1)\times\sqrt{13} \\ &= 13\sqrt{13}-3\sqrt{13}=10\sqrt{13} \end{aligned}$$

040 답 -14

$$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$$

$$xy=(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=-1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{2^3-3\times(-1)\times 2}{-1} = -14 \end{aligned}$$

041 답 ④

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -2\text{에서 } \frac{x-y}{xy} = 2$$

$$\frac{2}{xy} = 2 \quad \therefore xy=1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\ &= \{(x-y)^2+2xy\}^2-2(xy)^2 \\ &= (2^2+2\times 1)^2-2\times 1^2=34 \end{aligned}$$

042 답 31

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\text{에서}$$

$$7=1^3-3xy\times 1 \quad \therefore xy=-2$$

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\times(-2)=5$$

$$(x^3+y^3)(x^2+y^2)=x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times 5-(-2)^2\times 1=31 \end{aligned}$$

043 답 ④

$$x^2-x-1=0\text{에서 } x\neq 0\text{이므로 양변을 } x\text{로 나누면}$$

$$x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3-\frac{1}{x^3} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= 1^3+3\times 1=4 \end{aligned}$$

044 답 11

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$$

045 답 ②

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\text{에서}$$

$$7=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \quad \therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$$

$$\text{그런데 } x>0\text{이므로 } x+\frac{1}{x}=3$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3-3\times 3=18 \end{aligned}$$

046 답 14

$$x^2-4x+1=0\text{에서 } x\neq 0\text{이므로 양변을 } x\text{로 나누면}$$

$$x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4$$

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \\ &= 4^2-2=14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 4^3-3\times 4=52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3-2x^2-10-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3} &= x^3+\frac{1}{x^3}-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10 \\ &= 52-2\times 14-10=14 \end{aligned}$$

047 답 ④

$$\begin{aligned} \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 &= \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4 \\ &= (-2\sqrt{3})^2+4=16 \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } x^2>0\text{이므로 } x^2+\frac{1}{x^2}=4$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\text{에서}$$

$$4=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \quad \therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=6$$

$$\text{그런데 } x>0\text{이므로 } x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3} &= x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} \\ &= \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= (\sqrt{6})^3-3\times\sqrt{6}+\sqrt{6}=4\sqrt{6} \end{aligned}$$

048 [답] 3

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 4^2 - 2 \times 5 = 6 \\ \therefore \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

049 [답] ①

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서} \\ 21 &= (-1)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ \therefore ab+bc+ca &= -10 \\ \therefore a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc \\ &= (-1) \times \{21 - (-10)\} + 3 \times (-8) = -55 \end{aligned}$$

050 [답] 9

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{에서} \\ 6 &= 2^2 - 2(xy+yz+zx) \\ \therefore xy+yz+zx &= -1 \\ x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \text{에서} \\ 8 &= 2 \times \{6 - (-1)\} + 3xyz \\ \therefore xyz &= -2 \\ \therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \\ &= (xy+yz+zx)^2 - 2(xy^2z+yz^2x+zx^2y) \\ &= (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) \\ &= (-1)^2 - 2 \times (-2) \times 2 = 9 \end{aligned}$$

051 [답] ②

$$\begin{aligned} a-b=5, b-c=-2 \text{를 변끼리 더하면 } a-c &= 3 \\ \therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\} \\ &= \frac{1}{2} \times \{5^2+(-2)^2+3^2\} = 19 \end{aligned}$$

052 [답] ④

$$\begin{aligned} (3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4) &= (3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4) \\ &= (3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4) \\ &= (3^4-2^4)(3^4+2^4) \\ &= 3^8-2^8 \end{aligned}$$

053 [답] ②

$$\begin{aligned} 2018 &= a \text{로 놓으면} \\ \frac{2018^2}{2017(2018^2+2019)+1} &= \frac{a^2}{(a-1)(a^2+a+1)+1} \\ &= \frac{a^2}{a^3-1+1} \\ &= \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{2018} \end{aligned}$$

054 [답] 8

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 놓으면} \\ 99^3+101^3 &= (a-1)^3 + (a+1)^3 \\ &= (a^3-3a^2+3a-1) + (a^3+3a^2+3a+1) \\ &= 2a^3+6a = 2 \times 100^3 + 6 \times 100 = 2000600 \end{aligned}$$

따라서 구하는 각 자리의 숫자의 합은 $2+6=8$

055 [답] ③

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 5 \times 17 \times 257 + 1}{32} &= \frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2^8-1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{2^{16}-1+1}{2^5} = \frac{2^{16}}{2^5} = 2^{11} \end{aligned}$$

056 [답] $5\sqrt{2}$

직육면체의 가로 길이 a , 세로 길이 b , 높이 c 라 하면
 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로
 $4(a+b+c)=48 \quad \therefore a+b+c=12$
 또 겉넓이가 94이므로
 $2(ab+bc+ca)=94 \quad \therefore ab+bc+ca=47$
 $\therefore a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
 $= 12^2 - 2 \times 47 = 50$
 따라서 구하는 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

057 [답] ②

직사각형의 가로 길이 x , 세로 길이 y 라 하면 직사각형의
 둘레의 길이가 16이므로
 $2(x+y)=16 \quad \therefore x+y=8$
 또 직사각형이 반지름의 길이가 3인 원에 내접하므로 대각선의 길
 이는 원의 지름의 길이인 6이다.
 이때 피타고라스 정리에 의하여
 $x^2+y^2=6^2 \quad \therefore x^2+y^2=36$
 $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 에서
 $36=8^2-2xy \quad \therefore xy=14$
 따라서 구하는 직사각형의 넓이는 14이다.

058 [답] 270

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y 라 하면
 $x+y=9, x^3+y^3=243$
 $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ 에서
 $243=9^3-3xy \times 9 \quad \therefore xy=18$
 따라서 구하는 두 정육면체의 겉넓이의 합은
 $6(x^2+y^2) = 6\{(x+y)^2 - 2xy\}$
 $= 6 \times (9^2 - 2 \times 18) = 270$

059 답 1

다항식 $3x^3-2x^2+10$ 을 x^2-x+5 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ x^2-x+5 \overline{) 3x^3-2x^2+10} \\ \underline{3x^3-3x^2+15x} \\ x^2-15x+10 \\ \underline{x^2-x+5} \\ -14x+5 \end{array}$$

따라서 몫은 $3x+1$, 나머지는 $-14x+5$ 이므로

$$a=3, b=1, c=-14, d=5$$

$$\therefore ad+bc=15-14=1$$

060 답 7

$a=2, b=2, c=2, d=1$ 이므로

$$a+b+c+d=7$$

061 답 2

다항식 $x^4-x^3+6x^2+2x+11$ 을 x^2+1 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2-x+5 \\ x^2+1 \overline{) x^4-x^3+6x^2+2x+11} \\ \underline{x^4 + x^2} \\ -x^3+5x^2+2x \\ \underline{-x^3 - x} \\ 5x^2+3x+11 \\ \underline{5x^2 + 5} \\ 3x+6 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-x+5, R(x)=3x+6$ 이므로

$$Q(1)-R(-1)=5-3=2$$

062 답 -3

다항식 x^3-4x^2+ax-5 를 x^2+x+b 로 나누면

$$\begin{array}{r} x-5 \\ x^2+x+b \overline{) x^3-4x^2+ax-5} \\ \underline{x^3+x^2+bx} \\ -5x^2+(a-b)x-5 \\ \underline{-5x^2-5x-5b} \\ (a-b+5)x-5+5b \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$$(a-b+5)x-5+5b=0$$

따라서 $a-b+5=0, -5+5b=0$ 이므로

$$a=-4, b=1 \quad \therefore a+b=-3$$

063 답 ④

다항식 $2x^3+3x^2-x+2$ 를 다항식 A 로 나누었을 때의 몫이 $2x+1$

이고 나머지가 3이므로

$$2x^3+3x^2-x+2=A(2x+1)+3$$

$$A(2x+1)=2x^3+3x^2-x-1$$

$$A=(2x^3+3x^2-x-1) \div (2x+1)$$

$2x^3+3x^2-x-1$ 을 $2x+1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \\ 2x+1 \overline{) 2x^3+3x^2-x-1} \\ \underline{2x^3+x^2} \\ 2x^2-x \\ \underline{2x^2+x} \\ -2x-1 \\ \underline{-2x-1} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A=x^2+x-1$$

064 답 몫: $3x+7$, 나머지: 7

다항식 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x-5$ 이고 나머지가

3이므로 $f(x)=(x+2)(3x-5)+3=3x^2+x-7$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+7 \\ x-2 \overline{) 3x^2+x-7} \\ \underline{3x^2-6x} \\ 7x-7 \\ \underline{7x-14} \\ 7 \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $3x+7$, 나머지는 7이다.

065 답 ①

$$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{에서 } 2x-1=\sqrt{3}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4x^2-4x+1=3 \quad \therefore 2x^2-2x-1=0$$

이때 다항식 $2x^4-8x^3+11x^2-5x+3$ 을 $2x^2-2x-1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2-3x+3 \\ 2x^2-2x-1 \overline{) 2x^4-8x^3+11x^2-5x+3} \\ \underline{2x^4-2x^3-x^2} \\ -6x^3+12x^2-5x \\ \underline{-6x^3+6x^2+3x} \\ 6x^2-8x+3 \\ \underline{6x^2-6x-3} \\ -2x+6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^4-8x^3+11x^2-5x+3 &= (2x^2-2x-1)(x^2-3x+3)-2x+6 \\ &= (2x^2-2x-1)(x^2-3x+3)-2x+6 \end{aligned}$$

이때 $2x^2-2x-1=0$ 이므로

$$2x^4-8x^3+11x^2-5x+3=-2x+6=-2 \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}+6=5-\sqrt{3}$$

066 답 ①

다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R

이므로

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x+1) \times \frac{1}{2}Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

067 답 ⑤

다항식 $f(x)$ 를 $3x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로 $f(x)=(3x-2)Q(x)+R$

이 식의 양변에 x 를 곱하면

$$\begin{aligned} xf(x) &= x(3x-2)Q(x)+Rx \\ &= 3x\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}R \\ &=\left(x-\frac{2}{3}\right)\{3xQ(x)+R\}+\frac{2}{3}R \end{aligned}$$

따라서 다항식 $xf(x)$ 를 $x-\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은

$3xQ(x)+R$, 나머지는 $\frac{2}{3}R$ 이다.

068 답 -3

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+2x-3 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -6 \end{array}$$

$\therefore a=-1, b=0, c=1, d=3, e=-6$

$\therefore a+b+c+d+e=-3$

069 답 $x-4$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면

다항식 x^3-3x^2-6x+9 를 $x+2$ 로 나

누었을 때의 몫은 x^2-5x+4 이므로

$Q(x)=x^2-5x+4$

따라서 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때

의 몫은 $x-4$ 이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 9 \\ & & -2 & 10 & -8 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 4 & 1 \\ & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

070 답 몫: x^2-x+3 , 나머지: 5

다항식 $f(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫이 $2x^2-2x+6$, 나머지가 5이므로

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+6)+5=(2x-1)(x^2-x+3)+5$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+3 , 나머지는 5이다.

071 답 137

주어진 조립제법은 다항식 $6x^3+2ax^2+2bx+6$ 을 $x-\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다.

□ 안에 들어갈 수를 각각 p, q 라

하면 $\frac{2}{3}p=8, \frac{2}{3}q=-4$ 에서

$p=12, q=-6$

또 $2a+4=p, 2b+8=q$ 에서 $a=4, b=-7$

$$\begin{aligned} \therefore 6x^3+8x^2-14x+6 &= \left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2+12x-6)+2 \\ &= (3x-2)(2x^2+4x-2)+2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 6 & 2a & 2b & 6 \\ & & 4 & 8 & -4 \\ \hline & 6 & p & q & 2 \end{array}$$

$6x^3+8x^2-14x+6=(3x-2)(2x^2+4x-2)+2$ 의 양변을 2로 나누면 $3x^3+4x^2-7x+3=(3x-2)(x^2+2x-1)+1$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-1, R=1$ 이므로

$$aQ(b)+R=4Q(-7)+1=4 \times 34+1=137$$

072 답 $-x^2-5xy+7y^2$

$2X-A=3A-2B$ 에서 $2X=4A-2B$

$$\begin{aligned} \therefore X &= 2A-B=2(x^2-2xy+3y^2)-(3x^2+xy-y^2) \\ &= 2x^2-4xy+6y^2-3x^2-xy+y^2=-x^2-5xy+7y^2 \end{aligned}$$

073 답 ③

$$A+B=2x^3-x^2+4x+6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$B+C=x^3-2x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$C+A=3x^3-x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}$ 을 하면 $2(A+B+C)=6x^3-2x^2+2x+6$

$$\therefore A+B+C=3x^3-x^2+x+3$$

074 답 ②

$(x^2-2x+1)(2x^3-x+3)$ 의 전개식에서

$$x^3\text{항은 } x^2 \times (-x) + 1 \times 2x^3 = x^3 \quad \therefore a=1$$

$$x^2\text{항은 } x^2 \times 3 + (-2x) \times (-x) = 5x^2 \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+b=6$$

075 답 ③

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

$$=x^3+y^3+x^3-8y^3=2x^3-7y^3$$

076 답 ④

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\text{에서 } \frac{-ab+bc+ca}{abc}=0$$

$$\therefore ab-bc-ca=0$$

$$\therefore (a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ca)=9+2 \times 0=9$$

077 답 ③

$$(x+y+z)(x-y-z)=\{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\}$$

$y+z=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\} &= (x+X)(x-X)=x^2-X^2 \\ &= x^2-(y+z)^2=x^2-y^2-z^2-2yz \end{aligned}$$

078 답 ④

$$(x-4y)(x-2y)(x-y)(x+y)$$

$$=\{(x-4y)(x+y)\}\{(x-2y)(x-y)\}$$

$$=(x^2-3xy-4y^2)(x^2-3xy+2y^2)$$

$x^2-3xy=X$ 로 놓으면

$$(x^2-3xy-4y^2)(x^2-3xy+2y^2)$$

$$=(X-4y^2)(X+2y^2)=X^2-2y^2X-8y^4$$

$$=(x^2-3xy)^2-2y^2(x^2-3xy)-8y^4$$

$$=x^4-6x^3y+9x^2y^2-2x^2y^2+6xy^3-8y^4$$

$$=x^4-6x^3y+7x^2y^2+6xy^3-8y^4$$

079 답 ①

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \text{에서} \\ 6 &= (-2)^2 - 2xy \quad \therefore xy = -1 \\ \therefore x^3+y^3-2xy &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 2xy \\ &= (-2)^3 - 3 \times (-1) \times (-2) - 2 \times (-1) = -12 \end{aligned}$$

080 답 ③

$$\begin{aligned} (x-1)^3 + (y-1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ &= x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 3(x + y) - 2 \\ &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3\{(x+y)^2 - 2xy\} + 3(x+y) - 2 \\ &= 4^3 - 3 \times (-2) \times 4 - 3 \times \{4^2 - 2 \times (-2)\} + 3 \times 4 - 2 = 38 \end{aligned}$$

081 답 ②

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 1 &= 0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ x - 3 - \frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 3 \\ \therefore \frac{x^4+1}{x^2} - \frac{x^6-1}{x^3} &= x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)\right\} \\ &= 3^2 + 2 - (3^3 + 3 \times 3) = -25 \end{aligned}$$

082 답 ②

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서} \\ 12 &= 2^2 - 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = -4 \\ a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc \text{에서} \\ 8 &= 2 \times \{12 - (-4)\} + 3abc \quad \therefore abc = -8 \end{aligned}$$

083 답 ③

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 놓으면} \\ 99 \times (100^2 + 101) &= 99 \times (100^2 + 100 + 1) \\ &= (a-1)(a^2+a+1) \\ &= a^3 - 1 = 100^3 - 1 = 10^6 - 1 \\ \therefore n &= 6 \end{aligned}$$

084 답 48

$$\begin{aligned} \text{직사각형의 가로의 길이를 } x, \text{ 세로의 길이를 } y \text{라 하면 직사각형의} \\ \text{둘레의 길이가 28이므로 } 2(x+y) &= 28 \quad \therefore x+y = 14 \\ \text{직사각형의 대각선의 길이는 반지름의 길이 10과 같으므로 피타고} \\ \text{라스 정리에 의하여 } x^2+y^2 &= 10^2 \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \text{에서 } 100 = 14^2 - 2xy \quad \therefore xy = 48 \\ \text{따라서 구하는 직사각형의 넓이는 48이다.} \end{aligned}$$

085 답 56

$$\begin{aligned} \text{직육면체 ABCD-EFGH에서 } \overline{BC} &= a, \overline{CD} = b, \overline{CG} = c \text{라 하면} \\ \text{직육면체의 겉넓이가 136이므로} \\ 2(ab+bc+ca) &= 136 \quad \therefore ab+bc+ca = 68 \quad \cdots \cdots ㉠ \\ \text{삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 120이므로} \\ \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{BG}^2 &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2+b^2) + (b^2+c^2) + (c^2+a^2) &= 120 \\ 2(a^2+b^2+c^2) &= 120 \quad \therefore a^2+b^2+c^2 = 60 \quad \cdots \cdots ㉡ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{㉠, ㉡에 의하여} \\ (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ &= 60 + 2 \times 68 = 196 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a+b+c &= 14 \quad (\because a+b+c > 0) \\ \text{따라서 주어진 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은} \\ 4(a+b+c) &= 4 \times 14 = 56 \end{aligned}$$

086 답 ④

다항식 $2x^3 - x^2 - 4x + 5$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2+x-1 \overline{) 2x^3-x^2-4x+5} \\ \underline{2x^3+2x^2-2x} \\ -3x^2-2x+5 \\ \underline{-3x^2-3x+3} \\ x+2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } Q(x) &= 2x-3, R(x) = x+2 \text{이므로} \\ Q(3) + R(2) &= 3+4 = 7 \end{aligned}$$

087 답 ①

다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 x^2-3 이고 나머지가 -1 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x^2-3) - 1 = x^3 - 2x^2 - 3x + 5 \\ f(x) \text{를 } x^2-1 \text{로 나누면} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2-1 \overline{) x^3-2x^2-3x+5} \\ \underline{x^3-2x^2-x} \\ -2x+5 \\ \underline{-2x^2+2} \\ -2x+3 \end{array}$$

따라서 나머지가 $-2x+3$ 이므로 $a = -2$

088 답 몫: $3Q(x)$, 나머지: R

다항식 $f(x)$ 를 $3x+9$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$f(x) = (3x+9)Q(x) + R = (x+3) \times 3Q(x) + R$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R 이다.

089 답 ①

조립제법을 이용하여 다항식 $x^3 - 3x + a$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & a \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & a-2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= 1, c = 0, d = 1, e = -2 \\ \text{이때 } a-2 &= -1 \text{이므로 } a = 1 \end{aligned}$$



001 답 ①

주어진 등식에서 좌변을 정리하면

$$x^3 + (a-9)x + 3a = x^3 + bx - 18$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-9=b, 3a=-18$$

따라서 $a=-6, b=-15$ 이므로

$$a+b=-21$$

002 답 -2

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2=-2c \quad \therefore c=-1$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a+3=0 \quad \therefore a=-3$$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$6-2a=6b, 12=6b$$

$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b+c=-2$$

003 답 -12

 $x-y=-1$ 에서 $x=y-1$ 을 주어진 등식에 대입하면

$$(y-1)^2 - 2(y-1) = ay^2 + by + c$$

$$y^2 - 4y + 3 = ay^2 + by + c$$

이 등식이 y 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=-4, c=3$$

$$\therefore abc=-12$$

004 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \quad \cdots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 2^9 = 512$$

005 답 20

다항식 $x^3 + ax^2 + b$ 를 $x^2 - x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면

$$x^3 + ax^2 + b = (x^2 - x + 2)(x+c) - 6x + 4$$

$$= x^3 + (c-1)x^2 - (c+4)x + 2c + 4$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-1, 0=c+4, b=2c+4$$

$$\therefore a=-5, b=-4, c=-4$$

$$\therefore ab=20$$

006 답 ⑤

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ & & 2 & 6 & 10 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 5 & 14 \\ & & 2 & 10 & \\ \hline 2 & 1 & 5 & 15 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & 7 \end{array}$$

따라서 $a=1, b=7, c=15, d=14$ 이므로

$$a+b-c+d=7$$

007 답 ④

 $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$ 라 하면 나머지정리에 의하여

$$f(1)=2, f(-2)=-1$$

$$f(1)=2 \text{에서 } 1+a+b-5=2$$

$$a+b=6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2)=-1 \text{에서 } -8+4a-2b-5=-1$$

$$2a-b=6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

$$\therefore ab=8$$

008 답 $-x+2$

나머지정리에 의하여

$$f(-2)=4, f(3)=-1$$

 $f(x)$ 를 x^2-x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x^2 - x - 6)Q(x) + ax + b$$

$$= (x+2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

$$f(-2)=4 \text{에서 } -2a+b=4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3)=-1 \text{에서 } 3a+b=-1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$ 따라서 구하는 나머지는 $-x+2$

009 답 34

 $x^{15}+x^{10}+x^5-1$ 을 x^3-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$x^{15}+x^{10}+x^5-1 = (x^3-x)Q(x) + R(x)$$

$$= x(x+1)(x-1)Q(x) + ax^2+bx+c$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=-1$ 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $-2=a-b+c$

$$-2=a-b-1, a-b=-1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $2=a+b+c$

$$2=a+b-1, a+b=3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$ 따라서 $R(x)=x^2+2x-1$ 이므로

$$R(5)=5^2+2 \times 5-1=34$$

010 답 4

$f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x+2)(x-1)Q(x) + x+3$$

$$\therefore f(1) = 4$$

따라서 $f(3x-5)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3 \times 2 - 5) = f(1) = 4$$

011 답 1

$f(x) = x^{21} - 3x^{16} + 6$ 이라 하면 $f(1) = 4$ 이므로

$$f(x) = (x-1)Q(x) + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $f(-1) = 2$ 이고 $Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-1)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 = -2Q(-1) + 4 \quad \therefore Q(-1) = 1$$

012 답 ①

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{100} = (x+1)Q(x) + R$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $R = 1$

$x^{100} = (x+1)Q(x) + 1$ 의 양변에 $x = 19$ 를 대입하면

$$19^{100} = 20Q(19) + 1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

013 답 2

$f(x) = ax^3 - 5x^2 + bx + 2$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1$, $x-2$ 로 각각 나누어떨어지므로 $f(1) = 0$, $f(2) = 0$

$$f(1) = 0 \text{에서 } a - 5 + b + 2 = 0, a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 0 \text{에서 } 8a - 20 + 2b + 2 = 0, 4a + b = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$

$$\therefore ab = 2$$

014 답 ④

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x^2 - x - 6$, 즉

$(x+2)(x-3)$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(-2) = 0, f(3) = 0$$

$$f(-2) = 0 \text{에서 } -16 - 20 - 2a + b = 0$$

$$2a - b = -36 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3) = 0 \text{에서 } 54 - 45 + 3a + b = 0$$

$$3a + b = -9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -9$, $b = 18$

$$\therefore a + b = 9$$

015 답 3

주어진 등식에서 우변을 정리하면

$$x^3 - 2x^2 + ax - 32 = x^3 + (b+c)x^2 + (bc-16)x - 16b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2 = b + c, a = bc - 16, -32 = -16b$$

$$\therefore a = -24, b = 2, c = -4$$

$$\therefore \frac{a}{bc} = \frac{-24}{2 \times (-4)} = 3$$

016 답 2

주어진 등식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+y-3)k + 2x - 3y + 4 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x+y-3=0, 2x-3y+4=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

$$\therefore xy = 2$$

017 답 6

주어진 등식에서 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x + (a-2b)y + c = 4x + y + 2$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a+b=4, a-2b=1, c=2$$

$a+b=4$, $a-2b=1$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, b=1$$

$$\therefore abc = 6$$

018 답 ②

주어진 식의 일정한 값을 k 라 하면

$$\frac{6x+3a}{x+2} = k \quad \therefore 6x+3a = kx+2k$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$k=6, 3a=2k$$

$$\therefore a=4$$

019 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2b = -4 \quad \therefore b=2$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$3c = -3 \quad \therefore c = -1$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$6a = 6 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a+b+c = 2$$

020 답 -4

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-28 = -24 + b \quad \therefore b = -4$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 4a + b, 0 = 4a - 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore ab = -4$$

021 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + b, a + b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$ 를 대입하면

$$0 = 4 + 2a + b, 2a + b = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = 2$

$$\therefore ab = -6$$

022 답 ④

$x+y=2$ 에서 $y=2-x$ 를 주어진 등식에 대입하면
 $ax^2+bx(2-x)+c(2-x)^2=4$
 $(a-b+c)x^2+2(b-2c)x+4c-4=0$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a-b+c=0, b-2c=0, 4c-4=0 \quad \therefore a=1, b=2, c=1$
 $\therefore a+b+c=4$

023 답 ①

주어진 이차방정식에 $x=1$ 을 대입하면
 $1-(k+1)+(k-3)a-b+1=0$
 $\therefore (a-1)k-3a-b+1=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $a-1=0, -3a-b+1=0 \quad \therefore a=1, b=-2$
 $\therefore a^2+b^2=1+4=5$

024 답 -1

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $-1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{14} \quad \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{14} \quad \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}$ 을 하면 $-2=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})$
 $\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13}=-1$

025 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $-1=a_0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5 \quad \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}-\textcircled{㉠}$ 을 하면
 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$

026 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $3^{20}+1=a_{20}+a_{19}+\cdots+a_1+a_0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $2=a_{20}-a_{19}+\cdots-a_1+a_0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면 $3^{20}+3=2(a_{20}+a_{18}+\cdots+a_2+a_0)$
 $\therefore a_{20}+a_{18}+\cdots+a_2+a_0=\frac{3^{20}+3}{2}=\frac{3(3^{19}+1)}{2}$

027 답 ②

$(3x-5)^5(x^3-4x^2+3x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{23}x^{23}$
 $(a_0, a_1, \cdots, a_{23}$ 은 상수)
 이라 하고 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $-32=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{23}$
 따라서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 -32 이다.

028 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2+b 를 x^2-x+3 으로 나누었을 때의 몫을
 $x+c$ (c 는 상수)라 하면
 $x^3+ax^2+b=(x^2-x+3)(x+c)+2$
 $=x^3+(c-1)x^2+(-c+3)x+3c+2$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a=c-1, 0=-c+3, b=3c+2$
 $\therefore a=2, b=11, c=3$
 $\therefore a+b=13$

029 답 ②

다항식 $x^4+2x^3+4x^2+4$ 를 x^2+ax+b 로 나누었을 때의 몫이
 x^2+1 이고 나머지가 $-2x+1$ 이므로
 $x^4+2x^3+4x^2+4=(x^2+ax+b)(x^2+1)-2x+1$
 $=x^4+ax^3+(b+1)x^2+(a-2)x+b+1$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $2=a, 4=b+1, 0=a-2, 4=b+1$
 따라서 $a=2, b=3$ 이므로 $a-b=-1$

030 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2+bx+6 을 x^2-4x+2 로 나누었을 때의 몫을
 $x+c$ (c 는 상수)라 하면
 $x^3+ax^2+bx+6=(x^2-4x+2)(x+c)$
 $=x^3+(c-4)x^2+(-4c+2)x+2c$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a=c-4, b=-4c+2, 6=2c$
 $\therefore a=-1, b=-10, c=3$
 $\therefore ab=10$

031 답 ③

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ & & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 5 & 7 & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & 6 & & \end{array}$$

따라서 $a=6, b=7, c=3$ 이므로
 $a-b+c=2$

032 답 -3

$p-1=2$ 에서 $p=3$
 $q-2=-1$ 에서 $q=1$
 주어진 조립제법에서 $a=1, b=1, c=-1$ 이므로
 $abc pq=-3$

033 답 ③

$x^3+8x^2+21x+21=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$ 이므로
다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 8 & 21 & 21 \\ & & -2 & -12 & -18 \\ \hline -2 & 1 & 6 & 9 & 3 \\ & & -2 & -8 & \\ \hline -2 & 1 & 4 & 1 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

따라서 $a=2, b=1, c=3$ 이므로

$$f(x)=(x+2)^3+2(x+2)^2+(x+2)+3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(98) &= 100^3 + 2 \times 100^2 + 100 + 3 \\ &= 1000000 + 20000 + 100 + 3 \\ &= 1020103 \end{aligned}$$

이때 각 자리의 숫자의 합은

$$1+2+1+3=7$$

034 답 -6

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ 라 하면 나머지정리에 의하여

$$f(-1)=1, f(-3)=-3$$

$f(-1)=1$ 에서

$$-1+2-a+b=1$$

$$a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(-3)=-3$ 에서

$$-27+18-3a+b=-3$$

$$3a-b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=-3$

$$\therefore a+b=-6$$

035 답 12

나머지정리에 의하여 $f(2)=4$

따라서 $(x+1)f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$(2+1)f(2)=3 \times 4=12$$

036 답 14

나머지정리에 의하여 $f(-1)=2$ 이므로

$$-1+a+5=2 \quad \therefore a=-2$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=14$$

037 답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-ax+1$ 이라 하면 나머지정리에 의하여

$$f(-2)=f(3)$$
이므로

$$2a+1=-3a+46 \quad \therefore a=9$$

038 답 ⑤

나머지정리에 의하여

$$f(4)+g(4)=3, f(4)g(4)=2$$

따라서 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$ 을 $x-4$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} \{f(4)\}^3+\{g(4)\}^3 &= \{f(4)+g(4)\}^3-3f(4)g(4)\{f(4)+g(4)\} \\ &= 3^3-3 \times 2 \times 3=9 \end{aligned}$$

039 답 $2x-3$

나머지정리에 의하여

$$f(1)=-1, f(3)=3$$

$f(x)$ 를 x^2-4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-3)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3)=3 \text{에서 } 3a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$

040 답 ④

나머지정리에 의하여

$$f(-2)=1, f(2)=5$$

$x^2f(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} x^2f(x) &= (x^2-4)Q(x)+R(x) \\ &= (x+2)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$$\text{양변에 } x=-2 \text{를 대입하면 } 4 \times 1 = -2a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } 4 \times 5 = 2a+b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=12$

따라서 $R(x)=4x+12$ 이므로 $R(1)=16$

041 답 $2x$

$f(x)$ 를 x^2+x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x-6)Q_1(x)+4 \\ &= (x+3)(x-2)Q_1(x)+4 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2)=4$$

$f(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-2x-3)Q_2(x)+x-1 \\ &= (x+1)(x-3)Q_2(x)+x-1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1)=-2$$

$f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x-2)Q(x)+ax+b \\ &= (x+1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$$f(-1)=-2 \text{에서 } -a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(2)=4 \text{에서 } 2a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=0$

따라서 구하는 나머지는 $2x$

042 답 $-2x+6$

(나)의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 ㉞에 의하여

$$f(1)=f(0)=4$$

(나)의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(2)=f(1)-2=4-2=2$$

$f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax+b \end{aligned}$$

$$f(1)=4 \text{에서 } a+b=4 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

$$f(2)=2 \text{에서 } 2a+b=2 \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

㉞, ㉟을 연립하여 풀면 $a=-2, b=6$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+6$

043 답 ④

$x^{10}+x^7+x^5+x^2$ 을 x^3-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} x^{10}+x^7+x^5+x^2 &= (x^3-x)Q(x) + ax^2+bx+c \\ &= x(x+1)(x-1)Q(x) + ax^2+bx+c \end{aligned}$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=0$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $0=a-b+c$

$$a-b=0 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $4=a+b+c$

$$a+b=4 \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

㉞, ㉟을 연립하여 풀면 $a=2, b=2$

따라서 구하는 나머지는 $2x^2+2x$

044 답 $-x^2+2x-1$

$f(x)$ 를 $x(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면

$$f(x)=x(x+1)Q_1(x)+3x-1$$

$$\therefore f(0)=-1, f(-1)=-4$$

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$f(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+x-3 \quad \therefore f(2)=-1$$

$f(x)$ 를 $x(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$f(0)=-1 \text{에서 } c=-1$$

$$f(-1)=-4 \text{에서 } a-b+c=-4$$

$$a-b-1=-4, a-b=-3 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

$$f(2)=-1 \text{에서 } 4a+2b+c=-1$$

$$4a+2b-1=-1, 2a+b=0 \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

㉞, ㉟을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

따라서 구하는 나머지는 $-x^2+2x-1$

045 답 $2x^2+5x+1$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이므로 ㉞에서 ax^2+bx+c 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이다.

$$\therefore ax^2+bx+c=a(x+1)^2+x-1$$

이를 ㉞에 대입하면

$$f(x)=(x+1)^2(x+2)Q(x)+a(x+1)^2+x-1$$

한편 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -1 이므로

$$f(-2)=-1 \text{에서}$$

$$a-3=-1 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 나머지는

$$2(x+1)^2+x-1=2x^2+5x+1$$

046 답 -5

$f(x)$ 를 $2x^2+x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2+x-1)Q(x) + 3x-2 \\ &= (2x-1)(x+1)Q(x) + 3x-2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1)=-5$$

따라서 $f(2x+3)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2 \times (-2) + 3) = f(-1) = -5$$

047 답 ①

나머지정리에 의하여

$$f(-1)=-2$$

따라서 $f(x+6)$ 을 $x+7$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-7+6)=f(-1)=-2$$

048 답 8

$f(x)$ 를 x^2+5x+6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+5x+6)Q(x) + 3x+7 \\ &= (x+3)(x+2)Q(x) + 3x+7 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-2)=1$$

따라서 $(4x^2-1)f(2x-5)$ 를 $2x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} \left(4 \times \frac{9}{4} - 1\right) f\left(2 \times \frac{3}{2} - 5\right) &= 8f(-2) \\ &= 8 \times 1 = 8 \end{aligned}$$

049 답 1

$f(x)=x^{100}-x^{60}+x-5$ 라 하면 $f(-1)=-6$ 이므로

$$x^{100}-x^{60}+x-5=(x+1)Q(x)-6 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

이때 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 ㉞의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-4=2Q(1)-6 \quad \therefore Q(1)=1$$

050 답 ②

$$f(x)=(x+3)Q(x)+2 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

이때 나머지정리에 의하여 $f(2)=-3$ 이고 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$ 이므로 ㉞의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$-3=5Q(2)+2 \quad \therefore Q(2)=-1$$

051 답 -12

$$f(x)=(x-1)Q(x)+3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 나머지정리에 의하여 $Q(-2)=5$ 이고 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $f(-2)=-3Q(-2)+3=-3 \times 5+3=-12$

052 답 6

$$f(x)=(x^2-2x+4)Q(x)+3x+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면

$$Q(x)=(x+2)Q'(x)+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-2x+4)\{(x+2)Q'(x)+1\}+3x+2 \\ &= (x^3+8)Q'(x)+x^2+x+6 \end{aligned}$$

따라서 $R(x)=x^2+x+6$ 이므로

$$R(-1)=6$$

053 답 ①

x^{50} 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{50}=(x-1)Q(x)+R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=1$

$$x^{50}=(x-1)Q(x)+1 \text{의 양변에 } x=9 \text{를 대입하면}$$

$$9^{50}=8Q(9)+1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

054 답 2

$2x^{50}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$2x^{50}=(x+1)Q(x)+R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=2$

$$2x^{50}=(x+1)Q(x)+2 \text{의 양변에 } x=3 \text{을 대입하면}$$

$$2 \times 3^{50}=4Q(3)+2$$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

055 답 ⑤

$$2^{2023}=(2^5)^{404} \times 2^3=8 \times 32^{404}$$

$8x^{404}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$8x^{404}=(x-1)Q(x)+R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=8$

$$8x^{404}=(x-1)Q(x)+8 \text{의 양변에 } x=32 \text{를 대입하면}$$

$$8 \times 32^{404}=31Q(32)+8$$

$$\therefore 2^{2023}=31Q(32)+8$$

따라서 구하는 나머지는 8이다.

056 답 -10

$f(x)=x^3+ax^2+bx-15$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x+1$, $x-3$ 으로 각각 나누어떨어지므로

$$f(-1)=0, f(3)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -1+a-b-15=0$$

$$a-b=16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 27+9a+3b-15=0$$

$$3a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-13$

$$\therefore a+b=-10$$

057 답 ③

$f(x)=2x^4-3x^3+kx^2-x+7$ 이라 하면 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로 $f(1)=0$ 에서

$$2-3+k-1+7=0 \quad \therefore k=-5$$

058 답 -2

$f(x+1)$ 이 $x+2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-2+1)=f(-1)=0$$

$$-2+a+3+1=0 \quad \therefore a=-2$$

059 답 ③

$$f(-1)=-1, f(1)=1, f(2)=2 \text{에서}$$

$$f(-1)+1=0, f(1)-1=0, f(2)-2=0$$

즉, $f(x)-x$ 는 $x+1$, $x-1$, $x-2$ 로 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차식이므로

$$f(x)-x=(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=(3+1)(3-1)(3-2)+3=11$$

060 답 ⑤

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 x^2-x-2 , 즉

$(x+1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1)=0, f(2)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -1+1-a+b=0$$

$$a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=0 \text{에서 } 8+4+2a+b=0$$

$$2a+b=-12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-4$

$$\therefore ab=16$$

061 답 ②

$f(x)=2x^3-11x^2+ax+b$ 가 x^2-5x+6 , 즉 $(x-2)(x-3)$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(2)=0, f(3)=0$$

$$f(2)=0 \text{에서 } 16-44+2a+b=0$$

$$2a+b=28 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 54-99+3a+b=0$$

$$3a+b=45 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=17$, $b=-6$

$$\therefore f(x)=2x^3-11x^2+17x-6$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(1)=2-11+17-6=2$$

062 답 3

$f(x)-3$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로
 $f(-1)-3=0$, $f(1)-3=0$
 $\therefore f(-1)=3$, $f(1)=3$
 $f(x+2)$ 를 x^2+4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x+2)=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b$
 $= (x+3)(x+1)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=-3$ 을 대입하면 $f(-1)=-3a+b$
 $-3a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(1)=-a+b$
 $-a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$
따라서 구하는 나머지는 3이다.

063 답 ③

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca \\ = a^2+b^2+(-c)^2+2 \times a \times b+2 \times b \times (-c)+2 \times (-c) \times a \\ = (a+b-c)^2 \end{aligned}$$

064 답 ④

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6 \\ = \{(x-1)(x+3)\} \{(x-2)(x+4)\}+6 \\ = (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6 \\ x^2+2x=X \text{로 놓으면} \\ (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6 \\ = (X-3)(X-8)+6 \\ = X^2-11X+30 \\ = (X-5)(X-6) \\ = (x^2+2x-5)(x^2+2x-6) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

065 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^2=X \text{로 놓으면} \\ x^4-10x^2+9=X^2-10X+9 \\ = (X-1)(X-9) \\ = (x^2-1)(x^2-9) \\ = (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \\ \therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+(-1)^2+3^2+(-3)^2=20 \end{aligned}$$

066 답 ③

x 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2-xy-2y^2+2x+5y-3 \\ = x^2+(-y+2)x-2y^2+5y-3 \\ = x^2+(-y+2)x-(2y-3)(y-1) \\ = \{x+(y-1)\} \{x-(2y-3)\} \\ = (x+y-1)(x-2y+3) \end{aligned}$$

067 답 ④

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$ 라 할 때, $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
	1	3	2	0

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= (x-1)(x^2+3x+2) = (x-1)(x+1)(x+2) \\ \text{이때 } a < b < c \text{이므로 } a &= -1, b=1, c=2 \\ \therefore a+b-c &= -2 \end{aligned}$$

068 답 ④

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-x^2+2x+1 &= x^2 \left(x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ x^2+\frac{1}{x^2}+2 \left(x+\frac{1}{x} \right)-1 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x+\frac{1}{x} \right)^2+2 \left(x+\frac{1}{x} \right)-3 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x+\frac{1}{x} \right)+3 \right\} \left\{ \left(x+\frac{1}{x} \right)-1 \right\} \\ &= (x^2+3x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

069 답 ③

주어진 등식의 좌변을 a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^2b+ab^2+b^2c-bc^2-c^2a-ca^2 \\ = (b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2 \\ = (b-c)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(b-c) \\ = (b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\ = (b-c)(a+b)(a+c) \\ \therefore (b-c)(a+b)(a+c)=0 \end{aligned}$$

그런데 $a+b \neq 0$, $a+c \neq 0$ 이므로
 $b-c=0 \quad \therefore b=c$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

070 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\ &= \{(x-y)^2+3xy\} \{(x-y)^2+xy\} \\ &= (4+3)(4+1)=35 \end{aligned}$$

071 답 ①

2030= a 로 놓으면

$$\frac{2030^3-1}{2030 \times 2031+1} = \frac{a^3-1}{a(a+1)+1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} = a-1=2029$$

072 답 ④

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca \\ = a^2+(-b)^2+(2c)^2+2 \times a \times (-b)+2 \times (-b) \times 2c \\ \quad \quad \quad + 2 \times 2c \times a \\ = (a-b+2c)^2 \end{aligned}$$

073 답 ⑤

$$\begin{aligned}x^2 - x + xy - y &= x(x-1) + y(x-1) \\&= (x+y)(x-1)\end{aligned}$$

074 답 $(3a+2b-1)(3a-2b-1)$

$$\begin{aligned}9a^2 - 4b^2 - 6a + 1 &= (9a^2 - 6a + 1) - 4b^2 \\&= (3a-1)^2 - (2b)^2 \\&= (3a-1+2b)(3a-1-2b) \\&= (3a+2b-1)(3a-2b-1)\end{aligned}$$

075 답 ②

$$\begin{aligned}x^6 - 64 &= (x^3)^2 - (2^3)^2 = (x^3+2^3)(x^3-2^3) \\&= (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

076 답 $x(x-3y)^3$

$$\begin{aligned}x^4 - 9x^3y + 27x^2y^2 - 27xy^3 &= x(x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3) \\&= x(x-3y)^3\end{aligned}$$

077 답 $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$\begin{aligned}(x-y)(x^4+y^4) + x^3y^2 - x^2y^3 \\&= (x-y)(x^4+y^4) + x^2y^2(x-y) \\&= (x-y)(x^4+y^4+x^2y^2) \\&= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\end{aligned}$$

078 답 ③

$$\begin{aligned}x^3 - 8y^3 - 7xy(x-2y) \\&= (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) - 7xy(x-2y) \\&= (x-2y)(x^2-5xy+4y^2) \\&= (x-2y)(x-y)(x-4y)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

079 답 ⑤

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)^2(x+3) - 6 &= \{(x+1)(x+3)\}(x+2)^2 - 6 \\&= (x^2+4x+3)(x^2+4x+4) - 6\end{aligned}$$

$x^2+4x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+4x+3)(x^2+4x+4) - 6 &= (X+3)(X+4) - 6 \\&= X^2+7X+6 \\&= (X+1)(X+6) \\&= (x^2+4x+1)(x^2+4x+6)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

080 답 $(a+b-1)(a+b-2)$

$$\begin{aligned}a+b &= X \text{로 놓으면} \\(a+b+1)(a+b-4) + 6 &= (X+1)(X-4) + 6 \\&= X^2-3X+2 \\&= (X-1)(X-2) \\&= (a+b-1)(a+b-2)\end{aligned}$$

081 답 ①

$x^2-2x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 &= (x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x) - 3 \\&= X^2 - 2X - 3 \\&= (X+1)(X-3) \\&= (x^2-2x+1)(x^2-2x-3) \\&= (x-1)^2(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

$$\therefore a+bc = -1+1 \times (-3) = -4$$

082 답 ②

$$\begin{aligned}(x-3)(x-2)(x+1)(x+2) + k \\&= \{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\} + k \\&= (x^2-x-6)(x^2-x-2) + k\end{aligned}$$

$x^2-x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-x-6)(x^2-x-2) + k &= (X-6)(X-2) + k \\&= X^2-8X+12+k \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

주어진 식이 x 에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면

㉠이 X 에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$$12+k=4^2 \quad \therefore k=4$$

083 답 -13

$$\begin{aligned}(x^2-4x+3)(x^2+6x+8) + 21 \\&= (x-1)(x-3)(x+4)(x+2) + 21 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\} + 21 \\&= (x^2+x-2)(x^2+x-12) + 21\end{aligned}$$

$x^2+x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+x-2)(x^2+x-12) + 21 &= (X-2)(X-12) + 21 \\&= X^2-14X+45 \\&= (X-5)(X-9) \\&= (x^2+x-5)(x^2+x-9)\end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c = 1+(-5)+(-9) = -13$$

084 답 ②

$x^2=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4 - 13x^2 + 36 &= X^2 - 13X + 36 \\&= (X-4)(X-9) \\&= (x^2-4)(x^2-9) \\&= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

이때 $a < b < c < d$ 이므로 $a = -3, b = -2, c = 2, d = 3$

$$\therefore ab - cd = 6 - 6 = 0$$

085 답 ③

$x^2=X, y^2=Y$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2y^2 - 8y^4 &= X^2 - 2XY - 8Y^2 \\&= (X+2Y)(X-4Y) \\&= (x^2+2y^2)(x^2-4y^2) \\&= (x+2y)(x-2y)(x^2+2y^2)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

086 답 ⑤

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 25 &= (x^4 + 10x^2 + 25) - 9x^2 \\&= (x^2 + 5)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 5)\end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=5, c=5$ 이므로

$$a+b-c=3$$

087 답 ②

$$\begin{aligned}x^4 + 64 &= (x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2 \\&= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \\&= (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)\end{aligned}$$

따라서 $Q(x) = x^2 - 4x + 8$ 이므로

$$Q(2) = 4 - 8 + 8 = 4$$

088 답 ③

x 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2 &= x^2 + (3y-1)x + 2y^2 - 3y - 2 \\&= x^2 + (3y-1)x + (y-2)(2y+1) \\&= \{x + (y-2)\}\{x + (2y+1)\} \\&= (x+y-2)(x+2y+1)\end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=4$$

089 답 ④

차수가 가장 낮은 c 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^2 - abc + ab - b^2c &= -(ab + b^2)c + a^2 + ab \\&= -(a+b)bc + a(a+b) \\&= (a+b)(a-bc)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

090 답 ⑤

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}x^2 + xy - 2y^2 + ax + 7y - 3 &= x^2 + (y+a)x - (2y^2 - 7y + 3) \\&= x^2 + (y+a)x - (2y-1)(y-3)\end{aligned}$$

이 식이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$$y+a = (2y-1) - (y-3)$$

$$\therefore a=2$$

091 답 ④

a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}ab(a-b) - bc(b+c) + ca(a+c) \\&= a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 + ca^2 + c^2a \\&= (b+c)a^2 - (b^2-c^2)a - b^2c - bc^2 \\&= (b+c)a^2 - (b+c)(b-c)a - bc(b+c) \\&= (b+c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\&= (b+c)(a-b)(a+c) \\&= (a-b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

092 답 ㄴ, ㄷ

a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^2(b-c) - b^2(c+a) - c^2(a-b) + 2abc \\&= a^2(b-c) - b^2c - b^2a - c^2a + c^2b + 2abc \\&= (b-c)a^2 - (b^2-2bc+c^2)a - b^2c + bc^2 \\&= (b-c)a^2 - (b-c)^2a - bc(b-c) \\&= (b-c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\&= (b-c)(a-b)(a+c)\end{aligned}$$

따라서 보기 중 주어진 식의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

093 답 14

$$\begin{array}{r|rrrr}f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \text{이라 할 때,} & -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\f(-1) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용} & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline \text{하여 인수분해하면} & & 1 & 1 & -6 & 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x+1)(x^2 + x - 6) \\&= (x+1)(x+3)(x-2)\end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 3^2 + (-2)^2 = 14$$

094 답 $(x+1)(x+2)(x-3)$

다항식 $f(x) = x^3 + ax - 6$ 이 $x+1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) = 0 \text{에서 } -1 - a - 6 = 0 \quad \therefore a = -7$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{따라서 } f(x) = x^3 - 7x - 6 \text{이므로 조립} & -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \text{제법을 이용하여 인수분해하면} & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6) & & 1 & -1 & -6 & 0\end{array}$$

$$= (x+1)(x+2)(x-3)$$

095 답 ⑤

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ 라 할 때, $f(-1) = 0, f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ & & -1 & 3 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ & & 2 & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x-2)(x^2 - x - 1)$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

096 답 2

$f(x) = x^3 - (a+1)x^2 - a(2a-1)x + 2a^2$ 이라 할 때, $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a-1 & -2a^2+a & 2a^2 \\ & & 1 & -a & -2a^2 \\ \hline & 1 & -a & -2a^2 & 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3 - (a+1)x^2 - a(2a-1)x + 2a^2 &= (x-1)(x^2 - ax - 2a^2) \\&= (x-1)(x+a)(x-2a)\end{aligned}$$

이때 세 일차식의 상수항의 합이 -3 이므로

$$-1 + a - 2a = -3 \quad \therefore a = 2$$

097 답 ②

$f(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+2$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1$, $x+2$ 를 인수
로 가지므로

$$f(1)=0, f(-2)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1+3+a+b+2=0$$

$$a+b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(-2)=0 \text{에서 } 16-24+4a-2b+2=0$$

$$2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-5$

$f(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+2$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분
해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -1 & -5 & 2 \\ & & 1 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ & & -2 & -4 & 2 & \\ & 1 & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4+3x^3-x^2-5x+2=(x-1)(x+2)(x^2+2x-1)$$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-1$ 이므로

$$Q(-2)=-1$$

098 답 3

$f(x)=x^3+8x^2+13x+6$ 이라 할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법
을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 8 & 13 & 6 \\ & & -1 & -7 & -6 \\ & 1 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3+8x^2+13x+6 &= (x+1)(x^2+7x+6) \\ &= (x+1)^2(x+6) \end{aligned}$$

즉, 주어진 원기둥의 부피는 $(x+1)^2(x+6)\pi$ 이고, 이 원기둥의
밑면의 반지름의 길이와 높이가 각각 x 의 계수가 1인 일차식이므
로 밑면의 반지름의 길이는 $x+1$, 높이는 $x+6$ 이다.

즉, 이 원기둥의 겉넓이는

$$\begin{aligned} \pi(x+1)^2 \times 2 + 2\pi(x+1)(x+6) \\ = 2\pi(x+1)(x+1+x+6) \\ = 2\pi(x+1)(2x+7) \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=2$ 이므로 $a+b=3$

099 답 ②

$$\begin{aligned} x^4-5x^3+6x^2-5x+1 &= x^2\left(x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\} \\ &= (x^2-x+1)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=1$ 이므로

$$a+b+c=-2$$

100 답 ④

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+5x^2-4x+1 &= x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &= (x^2-x+1)(x^2-3x+1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

101 답 ③

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 a 에 대하여 내림차순으로
정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} b^2+c^2+ab-2bc-ac &= (b-c)a+b^2+c^2-2bc \\ &= (b-c)a+(b-c)^2 \\ &= (b-c)(a+b-c) \end{aligned}$$

$$\therefore (b-c)(a+b-c)=0$$

$$\text{그런데 } a+b-c \neq 0 \text{이므로 } b-c=0 \quad \therefore b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$ 인 이등변삼각형
이다.

102 답 정삼각형

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

$$\therefore (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

그런데 $a+b+c \neq 0$ 이므로

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

$$\text{즉, } a-b=0, b-c=0, c-a=0 \text{이므로 } a=b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

103 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 b 에 대하여 내림차순으로
정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^3-ab^2+ac^2+a^2c-b^2c+c^3 \\ = -(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3 \\ = -(a+c)b^2+a^2(a+c)+c^2(a+c) \\ = (a+c)(a^2-b^2+c^2) \\ \therefore (a+c)(a^2-b^2+c^2)=0 \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } a+c \neq 0 \text{이므로 } a^2-b^2+c^2=0 \quad \therefore a^2+c^2=b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직
각삼각형이다.

104 답 ③

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \\ &= \{(a+b)^2-ab\}\{(a+b)^2-3ab\} \\ &= (4+2)(4+6)=60 \end{aligned}$$

105 답 ④

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{에서} \\ a+b+c &= 0 \text{이므로} \\ a^3+b^3+c^3-3abc &= 0 \\ \therefore a^3+b^3+c^3 &= 3abc \\ \therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} &= \frac{3abc}{abc} = 3 \end{aligned}$$

106 답 ②

$$\begin{aligned} a-b &= 2-\sqrt{3}, c-a=2+\sqrt{3} \text{을 변끼리 더하면} \\ c-b &= 4 \quad \therefore b-c = -4 \\ \therefore ab^2-a^2b+bc^2-b^2c-ac^2+a^2c \\ &= -(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c \\ &= -(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c) \\ &= -(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ &= -(b-c)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \\ &= (2-\sqrt{3}) \times (-4) \times (2+\sqrt{3}) \\ &= -4 \end{aligned}$$

107 답 2000

$$\begin{aligned} 1999 &= a \text{로 놓으면} \\ \frac{1999^3+1}{1999^2-1999+1} &= \frac{a^3+1}{a^2-a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} \\ &= a+1 = 2000 \end{aligned}$$

108 답 ④

$$\begin{aligned} 386 &= a, 14 = b \text{로 놓으면} \\ \frac{386^3+14^3}{386 \times 372+14^2} &= \frac{a^3+b^3}{a(a-b)+b^2} \\ &= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} \\ &= a+b = 400 \end{aligned}$$

109 답 ①

$$\begin{aligned} 20 &= a \text{로 놓으면} \\ 18 \times 19 \times 20 \times 21 + 1 &= (a-2)(a-1)a(a+1) + 1 \\ &= \{(a-2)(a+1)\} \{a(a-1)\} + 1 \\ &= (a^2-a-2)(a^2-a) + 1 \\ a^2-a &= X \text{로 놓으면} \\ (a^2-a-2)(a^2-a) + 1 &= (X-2)X + 1 \\ &= X^2-2X+1 \\ &= (X-1)^2 \\ &= (400-20-1)^2 \\ &= 379^2 \\ \therefore \sqrt{18 \times 19 \times 20 \times 21 + 1} &= \sqrt{379^2} = 379 \end{aligned}$$

110 답 ③

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면} \\ 1 &\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \end{array} \\ f(x) &= (x-1)(x^2+6x+9) = (x-1)(x+3)^2 \\ \therefore f(97) &= 96 \times 100^2 = 960000 \end{aligned}$$

111 답 ③

$$\begin{aligned} \text{주어진 등식을 } k \text{에 대하여 정리하면} \\ (x+2y+5)k+2x-3y-4 &= 0 \\ \text{이 등식이 } k \text{에 대한 항등식이므로} \\ x+2y+5 &= 0, 2x-3y-4 = 0 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } x &= -1, y = -2 \\ \therefore xy &= 2 \end{aligned}$$

112 답 4

$$\begin{aligned} \text{주어진 등식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ 0 &= -6c \quad \therefore c = 0 \\ \text{주어진 등식의 양변에 } x=-2 \text{를 대입하면} \\ 15 &= 15b \quad \therefore b = 1 \\ \text{주어진 등식의 양변에 } x=3 \text{을 대입하면} \\ 30 &= 10a \quad \therefore a = 3 \\ \therefore a+b+c &= 4 \end{aligned}$$

113 답 4

$$\begin{aligned} \text{주어진 이차방정식에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ a-b(k+2)+a(k-1) &= 4 \\ \therefore (a-b)k-2b-4 &= 0 \\ \text{이 등식이 } k \text{에 대한 항등식이므로} \\ a-b &= 0, -2b-4 = 0 \\ \therefore a &= -2, b = -2 \\ \therefore ab &= 4 \end{aligned}$$

114 답 64

$$\begin{aligned} \text{주어진 등식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ 2^6 &= a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \text{주어진 등식의 양변에 } x=-1 \text{을 대입하면} \\ 2^6 &= a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면} \\ 2 \times 2^6 &= 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12}) \\ \therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12} &= 2^6 = 64 \end{aligned}$$

115 답 ③

$$\begin{aligned} \text{다항식 } x^3+ax^2+bx+1 \text{을 } x^2+x-2 \text{로 나누었을 때의 몫을 } Q(x) \\ \text{라 하면} \\ x^3+ax^2+bx+1 &= (x^2+x-2)Q(x)+2x+3 \\ &= (x+2)(x-1)Q(x)+2x+3 \end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b+1=5, a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-8+4a-2b+1=-1, 2a-b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore a-b=1$$

116 답 11

$f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ 라 하면 나머지정리에 의하여

$$f(1)=3, f(3)=-1$$

$$f(1)=3 \text{에서 } 1-3+a+b=3$$

$$a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(3)=-1 \text{에서 } 27-27+3a+b=-1$$

$$3a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=8$

$$\therefore b-a=11$$

117 답 $4x-5$

$$f(x+2)-f(x)=2x^2+6x \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$\textcircled{㉑}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(1)-f(-1)=-4$$

$$\therefore f(1)=f(-1)-4=3-4=-1$$

$\textcircled{㉑}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(3)-f(1)=8$$

$$\therefore f(3)=f(1)+8=-1+8=7$$

$f(x)$ 를 x^2-4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-3)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(3)=7 \text{에서 } 3a+b=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=-5$

따라서 구하는 나머지는 $4x-5$

118 답 7

나머지정리에 의하여 $f(0)=1, f(1)=3, f(-2)=3$

$f(x)$ 를 x^3+x^2-2x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+x^2-2x)Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= x(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{에서 } c=1$$

$$f(1)=3 \text{에서 } a+b+c=3$$

$$a+b+1=3, a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(-2)=3 \text{에서 } 4a-2b+c=3$$

$$4a-2b+1=3, 2a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 $R(x)=x^2+x+1$ 이므로 $R(2)=7$

119 답 15

$f(x)-5x$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x)-5x=(x^2-2x-3)Q(x)$$

$$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+5x$$

$$\therefore f(3)=15$$

따라서 $f(3x+2)$ 를 $3x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f\left(3 \times \frac{1}{3} + 2\right) = f(3) = 15$$

120 답 ⑤

$$x^3+ax^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a-11+7=-1 \quad \therefore a=2$$

$x^3+2x^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8+8-22+7=Q(2)-1 \quad \therefore Q(2)=2$$

따라서 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

121 답 ⑤

x^{15} 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{15}=(x+1)Q(x)+R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-1$

$x^{15}=(x+1)Q(x)-1$ 의 양변에 $x=46$ 을 대입하면

$$46^{15}=47Q(46)-1$$

이때 46^{15} 을 47로 나누었을 때의 나머지를 r 라 하면 $0 \leq r < 47$ 이

므로

$$\begin{aligned} 46^{15} &= 47Q(46) - 1 \\ &= 47\{Q(46) - 1\} + 47 - 1 \\ &= 47\{Q(46) - 1\} + 46 \end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 46이다.

122 답 12

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1, x+2$ 를 인수로 가지므로

$$f(1)=0, f(-2)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1-2+a+b=0, a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(-2)=0 \text{에서 } -8-8-2a+b=0, 2a-b=-16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면 $a=-5, b=6$

따라서 $g(x)=x^2-5x+6$ 이라 하면 $g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때

의 나머지는 $g(-1)=12$

123 답 24

$f(x+2)$ 가 x^2+2x-3 , 즉 $(x+3)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-3+2)=0, f(1+2)=0$$

$$\therefore f(-1)=0, f(3)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -2-3-a+b=0, a-b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 54-27+3a+b=0, 3a+b=-27 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면 $a=-8, b=-3$

$$\therefore ab=24$$

124 답 ④

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

125 답 ④

$$\begin{aligned} a^3 + 1 - a(a+1) &= (a+1)(a^2 - a + 1) - a(a+1) \\ &= (a+1)(a^2 - a + 1 - a) \\ &= (a+1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= (a+1)(a-1)^2 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

126 답 $2x^2 + 10x - 6$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2 + 5x - 1)(x^2 + 5x - 5) + 3 &= (X - 1)(X - 5) + 3 \\ &= X^2 - 6X + 8 \\ &= (X - 2)(X - 4) \\ &= (x^2 + 5x - 2)(x^2 + 5x - 4) \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$(x^2 + 5x - 2) + (x^2 + 5x - 4) = 2x^2 + 10x - 6$$

127 답 ③

$$\begin{aligned} x^2 &= X \text{로 놓으면} \\ x^4 - 8x^2 + 16 &= X^2 - 8X + 16 \\ &= (X - 4)^2 \\ &= (x^2 - 4)^2 \\ &= (x + 2)^2(x - 2)^2 \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-2$ 이므로 $a-b=4$

128 답 ④

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 + xy + 2y^2)(x^2 - xy + 2y^2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

129 답 $(x-y-z)(x+y-z-1)$

$$\begin{aligned} x \text{에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면} \\ x^2 - y^2 + z^2 - 2xz - x + y + z \\ &= x^2 - (2z+1)x - y^2 + z^2 + y + z \\ &= x^2 - (2z+1)x - (y+z)(y-z) + (y+z) \\ &= x^2 - (2z+1)x - (y+z)(y-z-1) \\ &= \{x - (y+z)\}\{x + (y-z-1)\} \\ &= (x-y-z)(x+y-z-1) \end{aligned}$$

130 답 2

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + ax - 4 \text{라 하면 } f(x) \text{가 } x-1 \text{을 인수로 가지므로} \\ f(1) &= 0 \text{에서} \\ 1 + 2 + a - 4 &= 0 \quad \therefore a = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + x - 4 \text{이므로 조립제법} \\ &\text{을 이용하여 인수분해하면} \\ x^3 + 2x^2 + x - 4 &= (x-1)(x^2 + 3x + 4) \\ \text{따라서 } Q(x) &= x^2 + 3x + 4 \text{이므로} \\ Q(-1) &= 2 \end{aligned}$$

131 답 -5

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 2x - 5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 5 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x - 1) \end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-3$, $c=-1$ 이므로
 $a+b+c=-5$

132 답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{주어진 등식의 좌변을 인수분해하면} \\ a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2b^2 &= (a^2 + b^2)^2 - (c^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) \\ \therefore (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ \text{그런데 } a^2 + b^2 + c^2 &\neq 0 \text{이므로} \\ a^2 + b^2 - c^2 &= 0 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 } c \text{인 직} \\ &\text{각삼각형이다.} \end{aligned}$$

133 답 12

$$\begin{aligned} x + y &= (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \\ xy &= (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1 \\ \therefore x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= x^2(x+y) + y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2 + y^2) \\ &= (x+y)\{(x+y)^2 - 2xy\} \\ &= 2 \times \{2^2 - 2 \times (-1)\} = 12 \end{aligned}$$

134 답 ②

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, f(2) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분} \\ &\text{해하면} \\ -1 \quad &\begin{array}{r|rrrr} 1 & -5 & 6 & 4 & -8 \\ & -1 & 6 & -12 & 8 \\ \hline 2 \quad & 1 & -6 & 12 & -8 & 0 \\ & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \\ f(x) &= (x+1)(x-2)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x+1)(x-2)^3 \\ \therefore f(2.1) &= (2.1+1)(2.1-2)^3 \\ &= 3.1 \times 0.1^3 = 0.0031 \end{aligned}$$

001 답 ⑤

⑤ $\sqrt{2}-i$ 의 실수부분은 $\sqrt{2}$, 허수부분은 -1 이다.

002 답 $5+6i$

$$\begin{aligned}(3-i)(1+2i) - \frac{1-i}{1+i} &= 3+6i-i-2i^2 - \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= 3+5i+2 - \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} \\ &= 5+5i - \frac{1-2i-1}{1+1} \\ &= 5+5i+i \\ &= 5+6i\end{aligned}$$

003 답 ⑤

$$\begin{aligned}z &= x(1-2i) + 3(i-4) \\ &= (x-12) + (-2x+3)i \\ z^2 \text{이 음의 실수가 되려면 } z \text{의 실수부분은 } 0 \text{이고 허수부분은 } 0 \text{이} \\ &\text{아니어야 하므로} \\ x-12=0, -2x+3 \neq 0 \quad \therefore x=12\end{aligned}$$

004 답 -3

$$\begin{aligned}x(5+i) - y(4+3i) &= 3+5i \text{에서} \\ (5x-4y) + (x-3y)i &= 3+5i \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 5x-4y=3, x-3y=5 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-1, y=-2 \\ \therefore x+y &= -3\end{aligned}$$

005 답 ①

$$\begin{aligned}x &= 2 + \sqrt{6}i \text{에서 } x-2 = \sqrt{6}i \\ \text{양변을 제곱하면 } x^2-4x+4 &= -6, x^2-4x = -10 \\ \therefore x^2-4x+5 &= -10+5 = -5\end{aligned}$$

006 답 3

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 1-i \text{이므로} \\ \frac{z+1}{z} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}} &= \frac{2+i}{1+i} + \frac{2-i}{1-i} \\ &= \frac{(2+i)(1-i) + (2-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(2-2i+i+1) + (2+2i-i+1)}{1+1} \\ &= \frac{(3-i) + (3+i)}{2} = 3\end{aligned}$$

007 답 $\neg, \subset$

$$\begin{aligned}z &= a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a-bi \\ \neg. zz &= (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \text{ (실수)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} \\ &= \frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{2a}{a^2+b^2} \text{ (실수)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\subset. z = -\bar{z} \text{이면 } a+bi &= -a-bi \text{에서 } a = -a \\ \text{따라서 } a &= 0 \text{이므로 } z = bi \text{ (} b \neq 0 \text{)는 순허수이다.} \\ \text{따라서 보기 중 옳은 것은 } \neg, \subset \text{이다.}\end{aligned}$$

008 답 ⑤

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \beta(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\ \text{이때 } \alpha + \beta &= (2-5i) + (-1+2i) = 1-3i \text{이므로} \\ \alpha + \beta &= 1+3i \\ \therefore \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\ &= (1-3i)(1+3i) \\ &= 1+9=10\end{aligned}$$

009 답 $6+8i$

$$\begin{aligned}z &= a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a-bi \\ (2i-3)z + 5i\bar{z} &= 6+18i \text{에서} \\ (2i-3)(a+bi) + 5i(a-bi) &= 6+18i \\ (-3a+3b) + (7a-3b)i &= 6+18i \\ -3a+3b=6, 7a-3b &= 18 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } a=6, b=8 \\ \therefore z &= 6+8i\end{aligned}$$

010 답 ③

$$\begin{aligned}i+i^2+i^3+i^4 &= i-1-i+1=0 \text{이므로} \\ 1+i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{200} \\ &= 1+(i+i^2+i^3+i^4) + (i^5+i^6+i^7+i^8) \\ &\quad + \dots + (i^{197}+i^{198}+i^{199}+i^{200}) \\ &= 1+(i+i^2+i^3+i^4) + i^4(i+i^2+i^3+i^4) + \dots + i^{196}(i+i^2+i^3+i^4) \\ &= 1+0+0+\dots+0=1\end{aligned}$$

011 답 ②

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 2i, (1-i)^2 = -2i \text{이므로} \\ (1+i)^{120} - (1-i)^{120} &= \{(1+i)^2\}^{60} - \{(1-i)^2\}^{60} \\ &= (2i)^{60} - (-2i)^{60} \\ &= 2^{60}i^{60} - 2^{60}i^{60} = 0\end{aligned}$$

012 답 -4

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\sqrt{-8} + \sqrt{-6}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-2}} &= \sqrt{2}i\sqrt{8}i + \sqrt{6}i\sqrt{2} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}i} \\ &= -4 + 2\sqrt{3}i + \frac{\sqrt{12}i}{i^2} \\ &= -4 + 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i \\ &= -4\end{aligned}$$

013 답 -b

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, b < 0 \text{이므로 } a+b < 0$$

$$\therefore \sqrt{(a+b)^2} - |a| = -(a+b) - (-a)$$

$$= -a - b + a = -b$$

014 답 ③

- ① 0은 실수인 복소수이다.
 ② $b=0$ 이어도 a 가 허수이면 $a+bi$ 는 허수이다.
 ④ $\frac{2-5i}{3}$ 의 허수부분은 $-\frac{5}{3}$ 이다.
 ⑤ $\sqrt{3}i$ 의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{3}$ 이다.

015 답 ②

$$\frac{5i-1}{2} \text{의 실수부분은 } -\frac{1}{2}, 2-i \text{의 허수부분은 } -1 \text{이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = -1$$

$$\therefore a+b = -\frac{3}{2}$$

016 답 3

허수는 $8+\sqrt{-1}$, $-i$, $\sqrt{5}-9i$ 의 3개이다.

017 답 $4+i$

$$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i) - \frac{1-2i}{2+i} = 3+1 - \frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$= 4 - \frac{2-i-4i-2}{4+1}$$

$$= 4 - \frac{-5i}{5}$$

$$= 4+i$$

018 답 ④

$$④ (5-i)^2 = 25-10i-1 = 24-10i$$

019 답 ①

$$(2+3i) \odot (3+2i) = (2+3i)(3+2i) - (2+3i) - (3+2i)$$

$$= 6+4i+9i-6-2-3i-3-2i$$

$$= -5+8i$$

020 답 ④

$$z_1 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i} = \frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}$$

$$= \frac{2+4\sqrt{2}i-4}{2+4} = \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$$

$$\therefore z_1 z_2 = 2i \times \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3} = -\frac{4\sqrt{2}+2i}{3}$$

따라서 실수부분은 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 허수부분은 $-\frac{2}{3}$ 이므로

$$a = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore a^2+b^2 = \frac{32}{9} + \frac{4}{9} = 4$$

021 답 $-32-24i$

$$f(1, 3) + f(2, 6) + f(3, 9) + \dots + f(40, 120)$$

$$= \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{2-6i}{2+6i} + \frac{3-9i}{3+9i} + \dots + \frac{40-120i}{40+120i}$$

$$= \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{1-3i}{1+3i} + \dots + \frac{1-3i}{1+3i}$$

$$= 40 \times \frac{1-3i}{1+3i} = 40 \times \frac{(1-3i)^2}{(1+3i)(1-3i)}$$

$$= 40 \times \frac{-8-6i}{10} = -32-24i$$

022 답 ①

$$z = 2(3+5i) - x(4i-1) = (x+6) + (-4x+10)i$$

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$$x+6=0, -4x+10 \neq 0 \quad \therefore x = -6$$

023 답 2

$$x(i-x) + 1-2i = (-x^2+1) + (x-2)i$$

이 복소수가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 하므로

$$x-2=0 \quad \therefore x=2$$

024 답 ③

$$(1+i)(1-i)a^2 + (2i-3)a + 1-2i = (2a^2-3a+1) + (2a-2)i$$

이 복소수가 순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$$2a^2-3a+1=0, 2a-2 \neq 0$$

$$2a^2-3a+1=0 \text{에서 } (2a-1)(a-1)=0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a=1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2a-2 \neq 0 \text{에서 } a \neq 1 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a = \frac{1}{2}$

025 답 ②

$$z = x(x+4+i) - 5(1-i) = (x^2+4x-5) + (x+5)i$$

z^2 이 실수가 되려면 z 의 실수부분이 0이거나 허수부분이 0이어야 하므로

$$x^2+4x-5=0 \text{ 또는 } x+5=0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 x 의 값의 합은 $-5+1 = -4$

026 답 0

$$z = (a+4i)(a-3i) + a^2(i-2) - 11 = (-a^2+1) + (a^2+a)i$$

z^2 이 양의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이 아니고 허수부분은 0이어야 하므로 $-a^2+1 \neq 0, a^2+a=0$

$$-a^2+1 \neq 0 \text{에서 } (1-a)(1+a) \neq 0$$

$$\therefore a \neq -1 \text{이고 } a \neq 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a^2+a=0 \text{에서 } a(a+1)=0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a=0 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a=0$

027 답 7

$x(1+i)-2y(3-i)=1+9i$ 에서
 $(x-6y)+(x+2y)i=1+9i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x-6y=1, x+2y=9$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=7, y=1$
 $\therefore xy=7$

028 답 ⑤

복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x-2=0, 3x+y-5=0$
 따라서 $x=2, y=-1$ 이므로 $x-y=3$

029 답 -3

$x(2-i)^2-y(3+i)=3y+(5-2x)i$ 에서
 $3(x-y)-(4x+y)i=3y-(2x-5)i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x-y=y, 4x+y=2x-5 \quad \therefore x-2y=0, 2x+y=-5$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2, y=-1$
 $\therefore x+y=-3$

030 답 0

$\frac{x}{1+3i}+\frac{y}{1-3i}=\frac{6}{1-i}$ 에서
 $\frac{x(1-3i)+y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{6(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
 $\frac{(x+y)-3(x-y)i}{10}=3+3i$
 $(x+y)-3(x-y)i=30+30i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x+y=30, x-y=-10$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=10, y=20$
 $\therefore 2x-y=20-20=0$

031 답 ①

$x=3-4i$ 에서 $x-3=-4i$
 양변을 제곱하면
 $x^2-6x+9=-16, x^2-6x=-25$
 $\therefore x^2-6x+10=-25+10=-15$

032 답 -1

$a+b=(2+2\sqrt{3}i)+(2-2\sqrt{3}i)=4$
 $ab=(2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i)=16$
 $\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$
 $=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$
 $=\frac{4^2-2 \times 16}{16}=-1$

033 답 -6

$a=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i,$
 $b=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$ 이므로
 $a+b=(1-i)+(1+i)=2$
 $ab=(1-i)(1+i)=2$
 $\therefore a^3+b^3-ab=(a+b)^3-3ab(a+b)-ab$
 $=2^3-3 \times 2 \times 2-2=-6$

034 답 ④

$x=\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{5}$
 $x=\frac{2-i}{5}$ 에서 $5x-2=-i$
 양변을 제곱하면
 $25x^2-20x+4=-1, 5x^2-4x+1=0$
 $\therefore 5x^3-4x^2+6x-2=x(5x^2-4x+1)+5x-2$
 $=5x-2=5 \times \frac{2-i}{5}-2=-i$

035 답 16

$z=\frac{10}{3-i}=\frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)}=3+i$
 따라서 $\bar{z}=3-i$ 이므로
 $z+\bar{z}+z\bar{z}=(3+i)+(3-i)+(3+i)(3-i)=6+10=16$

036 답 $-\frac{2}{5}$

$\bar{z}=4-2i$ 이므로
 $\frac{1-\bar{z}}{z}=\frac{1-(4-2i)}{4+2i}=\frac{-3+2i}{4+2i}$
 $=\frac{(-3+2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=-\frac{2}{5}+\frac{7}{10}i$
 따라서 구하는 실수부분은 $-\frac{2}{5}$ 이다.

037 답 10

$\bar{\alpha}=2-i, \bar{\beta}=3+4i$ 이므로
 $(\bar{\alpha}-\beta)(\alpha-\bar{\beta})=\{(2-i)-(3-4i)\}\{(2+i)-(3+4i)\}$
 $=(-1+3i)(-1-3i)=10$

038 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$
 ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)
 ㄴ. $z\bar{z}=0$ 이면 $(a+bi)(a-bi)=0$
 $a^2+b^2=0 \quad \therefore a=0, b=0 \quad \therefore z=0$
 ㄷ. $z=\bar{z}$ 이면 $a+bi=a-bi$ 에서
 $b=-b \quad \therefore b=0 \quad \therefore z=a$ (실수)
 ㄹ. $z^2+\bar{z}^2=0$ 이면 $(a+bi)^2+(a-bi)^2=0$
 $2a^2-2b^2=0, a^2=b^2 \quad \therefore b=\pm a \quad \therefore z=a \pm ai$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

039 답 ⑤

$z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이므로 ⑤이다.

040 답 ②

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

$$\neg. z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \text{ (실수)}$$

$$\sqcup. z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

$$\sqcap. z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

$$\sqcup. \frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)^2}{(a - bi)(a + bi)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

$$\sqcap. \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a + bi} + \frac{1}{a - bi} = \frac{2a}{a^2 + b^2} \text{ (실수)}$$

따라서 보기 중 실수인 것은 $\neg, \sqcap, \sqcap$ 이다.

041 답 3

$$z = 2(1 + 2i)x^2 - 7x + 3 - i = (2x^2 - 7x + 3) + (4x^2 - 1)i$$

이때 $z \neq 0$ 이고, $z = -\bar{z}$ 이면 z 는 순허수이므로

$$2x^2 - 7x + 3 = 0, 4x^2 - 1 \neq 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \text{에서 } (2x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$4x^2 - 1 \neq 0 \text{에서 } (2x + 1)(2x - 1) \neq 0$$

$$\therefore x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $x = 3$

042 답 25

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \end{aligned}$$

이때 $\alpha - \beta = (4 + i) - (7 - 3i) = -3 + 4i$ 이므로

$$\overline{\alpha - \beta} = -3 - 4i$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \\ &= (-3 + 4i)(-3 - 4i) = 25 \end{aligned}$$

043 답 3-9i

$$\overline{z_2 - z_1} = \overline{z_2} - \overline{z_1} = -1 - 4i \text{이므로 } z_2 - z_1 = -1 + 4i$$

$$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2} = 5 + i \text{이므로 } z_1 z_2 = 5 - i$$

$$\begin{aligned} \therefore (z_1 - 2)(z_2 + 2) &= z_1 z_2 - 2(z_2 - z_1) - 4 \\ &= (5 - i) - 2(-1 + 4i) - 4 \\ &= 3 - 9i \end{aligned}$$

044 답 -2i

$$\bar{\alpha}\beta = 1 \text{에서 } \frac{1}{\beta} = \bar{\alpha} \text{이므로}$$

$$\bar{\beta} + \frac{1}{\beta} = \bar{\beta} + \bar{\alpha} = \overline{\alpha + \beta} = 2i$$

$$\therefore \alpha + \beta = -2i$$

$$\text{또 } \bar{\alpha}\beta = 1 \text{에서 } \frac{1}{\alpha} = \beta \text{이므로}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \beta = -2i$$

045 답 ④

$$\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{이므로}$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$\alpha\bar{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore z\bar{z} &= \frac{\alpha + 2}{\alpha - 1} \times \overline{\left(\frac{\alpha + 2}{\alpha - 1}\right)} \\ &= \frac{\alpha + 2}{\alpha - 1} \times \frac{\bar{\alpha} + 2}{\bar{\alpha} - 1} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 4}{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{1 + 2 + 4}{1 - 1 + 1} = 7 \end{aligned}$$

046 답 ②

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

$$2z - (i + 2)\bar{z} = 9i - 2 \text{에서}$$

$$2(a + bi) - (i + 2)(a - bi) = 9i - 2$$

$$(-a + 4b)i - b = 9i - 2$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a + 4b = 9, -b = -2 \quad \therefore a = -1, b = 2$$

$$\therefore z = -1 + 2i$$

047 답 $1 \pm \sqrt{2}i$

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

$$z + \bar{z} = 2 \text{에서 } (a + bi) + (a - bi) = 2$$

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$z\bar{z} = 3 \text{에서 } (a + bi)(a - bi) = 3$$

$$a^2 + b^2 = 3, b^2 = 2 \quad \therefore b = \pm\sqrt{2}$$

$$\therefore z = 1 \pm \sqrt{2}i$$

048 답 3

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

이때 z 는 실수가 아닌 복소수이므로 $b \neq 0$

$$z^2 = \bar{z} \text{에서 } (a + bi)^2 = a - bi$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = a - bi, (a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$$

$$2ab = -b \text{에서 } b \neq 0 \text{이므로 } a = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 - b^2 = a \text{에서 } \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$$

$$b^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore (1 - z)(1 - \bar{z}) = 1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z}$$

$$= 1 - (a + bi + a - bi) + (a + bi)(a - bi)$$

$$= 1 - 2a + a^2 + b^2$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

049 답 ③

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

이때 z 는 실수가 아닌 복소수이므로 $b \neq 0$

$$\begin{aligned}\bar{z} - \frac{1}{z} &= (a-bi) - \frac{1}{a+bi} \\ &= (a-bi) - \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= a\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) - b\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right)i\end{aligned}$$

$\bar{z} - \frac{1}{z}$ 이 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$$b\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) = 0$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\frac{1}{a^2+b^2} = 1 \quad \therefore a^2+b^2=1$

$$\therefore z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2=1$$

050 답 ③

$-i+i^2-i^3+i^4=-i-1+i+1=0$ 이므로

$$1-i+i^2-i^3+i^4-\dots+i^{120}$$

$$\begin{aligned}&= 1 + (-i+i^2-i^3+i^4) + i^4(-i+i^2-i^3+i^4) \\ &\quad + \dots + i^{116}(-i+i^2-i^3+i^4) \\ &= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1\end{aligned}$$

051 답 0

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{100}} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0\end{aligned}$$

052 답 60

$$\begin{aligned}&i+2i^2+3i^3+4i^4+\dots+59i^{59}+60i^{60} \\ &= (i-2-3i+4) + (5i-6-7i+8) + \dots + (57i-58-59i+60) \\ &= (2-2i) + (2-2i) + \dots + (2-2i) \\ &= 15(2-2i) = 30-30i \\ &\text{따라서 } a=30, b=-30 \text{이므로 } a-b=60\end{aligned}$$

053 답 12

$$\begin{aligned}f(1) &= i + (-i) = 0 \\ f(2) &= i^2 + (-i)^2 = -1 - 1 = -2 \\ f(3) &= i^3 + (-i)^3 = -i + i = 0 \\ f(4) &= i^4 + (-i)^4 = 1 + 1 = 2 \\ f(5) &= i^5 + (-i)^5 = i - i = 0 \\ f(6) &= i^6 + (-i)^6 = -1 - 1 = -2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

따라서 $f(n)=2$ 를 만족시키는 자연수 n 은 $4k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 꼴
이므로 50 이하의 자연수 n 은 4, 8, 12, 16, ..., 48의 12개이다.

054 답 -2

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i, \\ \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \text{이므로} \\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} &= (-i)^{50} + i^{50} \\ &= i^{4 \times 12 + 2} + i^{4 \times 12 + 2} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

055 답 ①

$$\begin{aligned}z^2 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i \text{이므로} \\ z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{100} &= -i + (-i)^2 + (-i)^3 + \dots + (-i)^{50} \\ &= -i + i^2 - i^3 + \dots + i^{50} \\ \text{이때 } -i + i^2 - i^3 + i^4 &= -i - 1 + i + 1 = 0 \text{이므로} \\ z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{100} &= -i + i^2 - i^3 + \dots + i^{50} \\ &= (-i + i^2 - i^3 + i^4) + i^4(-i + i^2 - i^3 + i^4) \\ &\quad + \dots + i^{44}(-i + i^2 - i^3 + i^4) - i^{49} + i^{50} \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 - i^{4 \times 12 + 1} + i^{4 \times 12 + 2} \\ &= -1 - i\end{aligned}$$

056 답 i

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \text{이므로 } f(n) = i^n \\ \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(25) &= i + i^2 + i^3 + \dots + i^{25} \\ \text{이때 } i + i^2 + i^3 + i^4 &= i - 1 - i + 1 = 0 \text{이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(25) &= i + i^2 + i^3 + \dots + i^{25} \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + \dots + i^{20}(i + i^2 + i^3 + i^4) + i^{25} \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + i^{4 \times 6 + 1} \\ &= i\end{aligned}$$

057 답 ㄱ, ㄷ

$$\begin{aligned}\text{ㄱ. } z^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}i}{1-i}\right)^2 \\ &= \frac{2i^2}{(1-i)^2} = \frac{-2}{-2i} \\ &= \frac{i}{i^2} = -i \\ \text{ㄴ. } \text{ㄱ에서 } z^2 &= -i \text{이므로} \\ z^6 &= (z^2)^3 = (-i)^3 = -i^3 = i \\ \therefore z^6 &\neq z^2 \\ \text{ㄷ. } z^8 &= z^6 \times z^2 = i \times (-i) = 1 \text{이므로} \\ z^{n+8} &= z^n \times z^8 = z^n\end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

058 답 $-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-7}}&=\sqrt{2}i\sqrt{6}i-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{7}i} \\&=-2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}i}{i^2}+\sqrt{3} \\&=-2\sqrt{3}+\sqrt{5}i+\sqrt{3} \\&=-\sqrt{3}+\sqrt{5}i\end{aligned}$$

059 답 ⑤

① $\sqrt{2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}\sqrt{5}i=\sqrt{10}i=\sqrt{-10}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$

③ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}i=\sqrt{-\frac{2}{5}}$

④ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i^2}=-\sqrt{\frac{2}{5}}i=-\sqrt{-\frac{2}{5}}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

060 답 ⑤

$$z=\frac{3+\sqrt{-9}}{3-\sqrt{-9}}=\frac{3+3i}{3-3i}=\frac{1+i}{1-i}$$

$$=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\therefore z+\frac{1}{z}=i+\frac{1}{-i}=i-\frac{i}{i^2}=i+i=2i$$

061 답 $x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{8x}{1+\sqrt{-3}}+\frac{4y}{1-\sqrt{-3}}&=\frac{8x}{1+\sqrt{3}i}+\frac{4y}{1-\sqrt{3}i} \\&=\frac{8x(1-\sqrt{3}i)+4y(1+\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\&=(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i\end{aligned}$$

이때 -3 의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}i$ 이므로

(i) $(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i=\sqrt{3}i$ 일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=0, -2x+y=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$

(ii) $(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i=-\sqrt{3}i$ 일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=0, -2x+y=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$

그런데 $x>y$ 이므로 $x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$

062 답 $2a+2b$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}\text{이므로 }a>0, b<0$$

이때 $a>b$ 이므로 $a-b>0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(a-b)^2}+|a|-3\sqrt{b^2}&=(a-b)+a-3(-b) \\&=a-b+a+3b \\&=2a+2b\end{aligned}$$

063 답 ④

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}\text{이므로 }a<0, b<0$$

① $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}\sqrt{-bi}=\sqrt{abi}=\sqrt{-ab}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{-ab^2i}=-b\sqrt{-ai}=-b\sqrt{a}$

③ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{-bi}}{\sqrt{-ai}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

④ $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-ai}}=-\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}i=-\sqrt{\frac{b}{a}}i=-\sqrt{-\frac{b}{a}}$

⑤ $|a+b|=-|(a+b)=-a-b=|a|+|b|$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

064 답 ①

(가)에서 $a<0, b>0$ 이므로 $a<b$

(나)에서 $a+c=0, 2a+3b=0$

$$a+c=0\text{에서 }c=-a>0$$

$$2a+3b=0\text{에서 }-a=\frac{3}{2}b\text{이므로 }c=-a=\frac{3}{2}b$$

$$\text{이때 }b>0, c>0\text{이고 }c=\frac{3}{2}b\text{이므로 }b<c$$

$$\therefore a<b<c$$

065 답 ⑤

⑤ $1+\sqrt{3}$ 의 허수부분은 0이다.

066 답 ⑤

① $(5+3i)+(2-11i)=7-8i$

② $(6-i)-(3-2i)=6-i-3+2i=3+i$

③ $(2-i)(3+2i)=6+4i-3i+2=8+i$

④ $(2-7i)+(2-3i)-(i-4)=2-7i+2-3i-i+4=8-11i$

⑤ $\frac{1}{1+2i}-\frac{1}{1-2i}=\frac{1-2i-(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{4}{5}i$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

067 답 4

$$z=x^2+(i-4)x+i-5=(x^2-4x-5)+(x+1)i$$

$$z\text{가 실수가 되려면 }x+1=0 \quad \therefore x=-1$$

$$\therefore a=-1$$

$$z^2\text{이 음의 실수가 되려면 }z\text{가 순허수이어야 하므로}$$

$$x^2-4x-5=0, x+1\neq 0$$

$$x^2-4x-5=0\text{에서 } (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1\text{ 또는 }x=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x+1\neq 0\text{에서 }x\neq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}\text{에 의하여 }x=5 \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+b=4$$

068 답 5

$$(2+i)x - 2(1-i)y = \overline{2-7i} \text{에서}$$

$$2(x-y) + (x+2y)i = 2+7i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=1, x+2y=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=2$

$$\therefore x+y=5$$

069 답 -13

$$a+b = (\sqrt{3}+\sqrt{2}i) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}i) = 2\sqrt{3}$$

$$ab = (\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i) = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2-3ab &= (a+b)^2-5ab \\ &= (2\sqrt{3})^2-5 \times 5 = -13 \end{aligned}$$

070 답 ④

$$x = \frac{1-3i}{1+i} = \frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$$

$x+1 = -2i$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2+2x+1 = -4, x^2+2x+5=0$$

$$\therefore x^3+2x^2+5x+2 = x(x^2+2x+5)+2=2$$

071 답 ①

$$\bar{z} = 1-\sqrt{3}i \text{이므로 } z+\bar{z}=2, z\bar{z}=4$$

$$\begin{aligned} \therefore z^3+\bar{z}^3 &= (z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z}) \\ &= 2^3-3 \times 4 \times 2 = -16 \end{aligned}$$

072 답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\neg, z\bar{z}=0 \text{이므로 } (a+bi)(a-bi)=0$$

$$a^2+b^2=0 \quad \therefore a=0, b=0$$

$$\therefore z=\bar{z}=0$$

$$\neg, \overline{z\bar{z}} = \overline{(a+bi)(a-bi)}$$

$$= \overline{a^2+b^2} = a^2+b^2 \text{ (실수)}$$

$$\vdash, z^2 = (a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$$

$$z^2 \text{이 허수이므로 } ab \neq 0$$

즉, $a \neq 0, b \neq 0$ 이므로 z 는 허수이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \vdash$ 이다.

073 답 ②

$$\begin{aligned} a\bar{a}+2a\bar{\beta}+2\bar{a}\beta+4\beta\bar{\beta} &= a(\bar{a}+2\bar{\beta})+2\beta(\bar{a}+2\bar{\beta}) \\ &= (a+2\beta)(\bar{a}+2\bar{\beta}) \\ &= (a+2\beta)\overline{(a+2\beta)} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } a+2\beta = (1+3i)+2(3-2i) = 7-i \text{이므로}$$

$$\overline{a+2\beta} = 7+i$$

$$\begin{aligned} \therefore a\bar{a}+2a\bar{\beta}+2\bar{a}\beta+4\beta\bar{\beta} &= (a+2\beta)\overline{(a+2\beta)} \\ &= (7-i)(7+i) = 50 \end{aligned}$$

074 답 $4-2i$

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\frac{z}{3+i} + \frac{\bar{z}}{2} = 3 \text{에서 } \frac{a+bi}{3+i} + \frac{a-bi}{2} = 3$$

$$2(a+bi) + (a-bi)(3+i) = 6(3+i)$$

$$(5a+b) + (a-b)i = 18+6i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$5a+b=18, a-b=6$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=-2$

$$\therefore z=4-2i$$

075 답 ③

$$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0 \text{이므로}$$

$$i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{102}$$

$$\begin{aligned} &= (i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4) \\ &\quad +\dots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{101}+i^{102} \end{aligned}$$

$$= 0+0+\dots+0+i^{4 \times 25+1}+i^{4 \times 25+2} = -1+i$$

따라서 $a=-1, b=1$ 이므로 $a+b=0$

076 답 1

$$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i \text{이므로}$$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \dots + \frac{1}{z^{30}} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{15}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{i} - 1 = 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \dots + \frac{1}{z^{30}}$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{15}}$$

$$= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right)$$

$$+ \frac{1}{i^8} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^{12}} - \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{15}}$$

$$= 0+0+0+\frac{1}{i^{4 \times 3+1}} - \frac{1}{i^{4 \times 3+2}} + \frac{1}{i^{4 \times 3+3}}$$

$$= \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{i} = 1$$

077 답 24

$$\sqrt{-27}\sqrt{-9} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-6}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{27}i\sqrt{9}i + \frac{\sqrt{18}i}{\sqrt{6}i} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}i}$$

$$= -9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}i}{i^2}$$

$$= -8\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

따라서 $a=-8\sqrt{3}, b=-\sqrt{3}$ 이므로 $ab=24$

078 답 $b+c$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{에서 } b < 0, c > 0$$

따라서 $a+b < 0$ 이므로

$$\sqrt{a^2} - |a+b| + \sqrt{c^2} = -a + (a+b) + c = b+c$$

001 답 ②

$x^2+3x+5=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

따라서 $a=-3$, $b=11i$ 이므로 $a+b=8$

002 답 -3

이차방정식 $x^2+kx+6=0$ 의 한 근이 -2 이므로 $x=-2$ 를 대입하면

$$4-2k+6=0 \quad \therefore k=5$$

$k=5$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+5x+6=0, (x+3)(x+2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-2$$

따라서 다른 한 근은 -3 이다.

003 답 ③

(i) $x < -3$ 일 때

$$|x+3| = -(x+3) \text{이므로}$$

$$x^2 - (x+3) - 9 = 0, x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x < -3$ 이므로 이를 만족시키는 해는 없다.

(ii) $x \geq -3$ 일 때

$$|x+3| = x+3 \text{이므로}$$

$$x^2 + (x+3) - 9 = 0, x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

(i), (ii)에 의하여 $x = -3$ 또는 $x = 2$

따라서 방정식의 모든 근의 곱은 $-3 \times 2 = -6$

004 답 ⑤

$$x^2 - 2kx + k^2 = -4x + 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 - 5) < 0$$

$$-4k + 9 < 0 \quad \therefore k > \frac{9}{4}$$

005 답 서로 다른 두 실근

$$b-ac=2 \text{에서 } ac=b-2$$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 - 4ac = b^2 - 4(b-2)$$

$$= b^2 - 4b + 8 = (b-2)^2 + 4 > 0$$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

006 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2ax+b^2+c^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (b^2 + c^2) = 0$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

007 답 $\frac{5}{4}$

$x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k - 1$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$$x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k - 1 = 0 \text{이 중근을 가져야 한다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D = (2k+1)^2 - 4(k^2 + 2k - 1) = 0$$

$$-4k + 5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

008 답 ④

$x^2+4x+7=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} = -2 \pm \sqrt{3}i$$

따라서 $a=-2$, $b=3i$ 이므로

$$a+b=1$$

009 답 ②

$$x(x+3) = 3(x^2-1) - 2x \text{에서}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0, (2x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

010 답 5

$$\{x \odot (x+2)\} + \{(x-1) \odot 2\} = 7 \text{에서}$$

$$\{x(x+2) - x + (x+2)\} + \{(x-1) \times 2 - (x-1) + 2\} - 7 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 2) + (x + 1) - 7 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 $\alpha = -4$, $\beta = 1$ 또는 $\alpha = 1$, $\beta = -4$ 이므로

$$|\alpha| + |\beta| = |-4| + |1| = 5$$

011 답 1

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2 - (\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})x + (\sqrt{2}+1) \times 3 = 0$$

$$x^2 - (4+3\sqrt{2})x + 3+3\sqrt{2} = 0$$

$$(x-1)(x-3-3\sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3+3\sqrt{2}$$

따라서 유리수인 근은 1이다.

012 답 ①

이차방정식 $4x^2+8x+k=0$ 의 한 근이 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $x=-\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$1-4+k=0 \quad \therefore k=3$$

$k=3$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$4x^2+8x+3=0, (2x+3)(2x+1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=-\frac{1}{2}$$

따라서 다른 한 근은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

013 답 ①

이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k+3=0$ 의 한 근이 -1 이므로

$x=-1$ 을 대입하면

$$1-(2k+1)+k+3=0$$

$$-k+3=0 \quad \therefore k=3$$

$k=3$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+7x+6=0, (x+6)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 $a=-6$ 이므로

$$\frac{a}{k}=\frac{-6}{3}=-2$$

014 답 ②

$x^2+x-a=0$ 의 한 근이 1 이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+1-a=0 \quad \therefore a=2$$

$3x^2+bx+a=0$ 의 한 근이 1 이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$3+b+a=0, b+5=0 \quad \therefore b=-5$$

$$\therefore ab=-10$$

015 답 $x=1$ 또는 $x=4$

이차방정식 $kx^2+(m+1)x-n(k-2)=0$ 의 한 근이 2 이므로

$x=2$ 를 대입하면

$$4k+2(m+1)-n(k-2)=0$$

$$(4-n)k+2m+2n+2=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$4-n=0, 2m+2n+2=0$$

$$\therefore m=-5, n=4$$

이를 방정식 $x^2+mx+n=0$ 에 대입하면

$$x^2-5x+4=0, (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

016 답 ①

(i) $x < -1$ 일 때

$$|x+1|=-(x+1) \text{이므로}$$

$$x^2+(x+1)-1=0$$

$$x^2+x=0, x(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

그런데 $x < -1$ 이므로 이를 만족시키는 해는 없다.

(ii) $x \geq -1$ 일 때

$$|x+1|=x+1 \text{이므로}$$

$$x^2-(x+1)-1=0$$

$$x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 합은 $-1+2=1$

017 답 $x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x=-3$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2-x-6=0, (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x=3$

(i), (ii)에 의하여 $x=-3$ 또는 $x=3$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$ 이므로

$$|x|^2-|x|-6=0$$

$$(|x|+2)(|x|-3)=0$$

$$\therefore |x|=-2 \text{ 또는 } |x|=3$$

그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x|=3$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

018 답 ⑤

$$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1| \text{이므로}$$

$$x^2-8|x|+4\sqrt{x^2-2x+1}=0 \text{에서}$$

$$x^2-8|x|+4|x-1|=0$$

(i) $x < 0$ 일 때

$$|x|=-x, |x-1|=-(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2+8x-4(x-1)=0, x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$|x|=x, |x-1|=-(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2-8x-4(x-1)=0, x^2-12x+4=0$$

$$\therefore x=6 \pm 4\sqrt{2}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 $x=6-4\sqrt{2}$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x|=x, |x-1|=x-1 \text{이므로}$$

$$x^2-8x+4(x-1)=0, x^2-4x-4=0$$

$$\therefore x=2 \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x=2+2\sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$x=-2 \text{ 또는 } x=6-4\sqrt{2} \text{ 또는 } x=2+2\sqrt{2}$$

따라서 유리수가 아닌 모든 근의 합은

$$(6-4\sqrt{2})+(2+2\sqrt{2})=8-2\sqrt{2}$$

즉, $a=8, b=-2$ 이므로 $a+b=6$

019 [답] $k < -4$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 2x - 9 \text{에서}$$

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 + 9) > 0$$

$$-2k - 8 > 0 \quad \therefore k < -4$$

020 [답] ②

ㄱ. $x^2 + x + 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17 > 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$$\frac{D_3}{4} = (-2)^2 - 1 \times 5 = -1 < 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄹ. $x^2 + 6x + 9 = 0$ 의 판별식을 D_4 라 하면

$$\frac{D_4}{4} = 3^2 - 1 \times 9 = 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

따라서 보기 중 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

021 [답] ②

$$x^2 + 4kx + 3k = 2kx - 4 \text{에서}$$

$$x^2 + 2kx + 3k + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (3k + 4) = 0$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0, (k+1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-1 + 4 = 3$$

022 [답] ②

$$x^2 + 4x + k^2 = 2kx + 8 \text{에서}$$

$$x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 - 8)$$

$$-4k + 12 \geq 0 \quad \therefore k \leq 3$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 3이다.

023 [답] 1

$x^2 - x - 2k = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 \geq 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2k) \geq 0$$

$$1 + 8k \geq 0 \quad \therefore k \geq -\frac{1}{8} \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이어야 하므로

$$D_2 = (k+1)^2 - 4 = 0$$

$$k^2 + 2k - 3, (k+3)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $k = 1$

024 [답] 8

$x^2 + 2(k-a)x + k^2 - 4k + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 - 4k + b) = 0$$

$$2(2-a)k + a^2 - b = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2-a=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=2, b=4$$

$$\therefore ab=8$$

025 [답] ①

$$2a = bc + 1 \text{에서 } bc = 2a - 1$$

이차방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - bc = a^2 - (2a - 1) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$ 은 실근을 갖는다.

026 [답] 서로 다른 두 허근

이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k^2 - k + 3) = k - 3$$

이때 $k < 3$ 이므로 $k - 3 < 0$

따라서 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 3 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

027 [답] 서로 다른 두 실근

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 > 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = a^2 - 4b > 0$$

이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + 2(a+2b) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (a+1)^2 - 2(a+2b) = a^2 - 4b + 1$$

이때 $a^2 - 4b > 0$ 이므로 $a^2 - 4b + 1 > 1$

따라서 이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + 2(a+2b) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

028 [답] 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

이차방정식 $x^2 + 2cx + a^2 - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a^2 - b^2) = 0$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

029 답 ③

이차방정식 $x^2+2(a+b)x+2ab+c^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-(2ab+c^2)<0$$

$$a^2+b^2-c^2<0 \quad \therefore a^2+b^2<c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 c 인 둔각삼각형이다.

030 답 ②

이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)>0$$

$$b^2-a^2+c^2>0 \quad \therefore b^2+c^2>a^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다.

031 답 ①

$x^2-2kx+k^2-3k+1$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2kx+k^2-3k+1=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-3k+1)=0$$

$$3k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

032 답 ⑤

$x^2-2(a+2k)x+4k^2+k+b$ 가 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2(a+2k)x+4k^2+k+b=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a+2k)^2-(4k^2+k+b)=0$$

$$(4a-1)k+a^2-b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$4a-1=0, a^2-b=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{16} \quad \therefore a+b=\frac{5}{16}$$

033 답 2

$kx^2+(3k+1)x+a(k+1)$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$kx^2+(3k+1)x+a(k+1)=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(3k+1)^2-4 \times k \times a(k+1)$$

$$(9-4a)k^2+2(3-2a)k+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $9-4a \neq 0$ 일 때

k 의 값이 오직 한 개뿐이라면 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,

$D_1=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4}=(3-2a)^2-(9-4a)=0$$

$$4a^2-8a=0, 4a(a-2)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 a 는 자연수이므로 $a=2$

(ii) $9-4a=0$ 일 때

$$9-4a=0 \text{에서 } a=\frac{9}{4}$$

그런데 a 는 자연수이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수 a 의 값은 2이다.

034 답 20

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{4^3 - 3 \times 2 \times 4}{2} = 20 \end{aligned}$$

035 답 -3

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2+3\alpha-3=0, \beta^2+3\beta-3=0$$

$$\therefore \alpha^2+2\alpha-3=-\alpha, \beta^2+2\beta-3=-\beta$$

$x^2+3x-3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^2+2\alpha-3)(\beta^2+2\beta-3) &= (-\alpha) \times (-\beta) \\ &= \alpha\beta = -3 \end{aligned}$$

036 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha=-4k \quad \therefore \alpha=-k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha \times 3\alpha = -2k+1 \quad \therefore 3\alpha^2+2k-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$3k^2+2k-1=0$$

$$(k+1)(3k-1)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{3}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k=-1$

037 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2k, \alpha\beta=4k-1$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (2k)^2 - 2(4k-1) \\ &= 4k^2 - 8k + 2 \end{aligned}$$

이때 $\alpha^2+\beta^2=34$ 이므로

$$4k^2-8k+2=34$$

$$k^2-2k-8=0$$

$$(k+2)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=4$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=4$

038 [답] 17

$x^2-5x+a=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=5, \alpha\beta=a$ ㉠

$x^2+bx+30=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b, (\alpha+\beta)\times\alpha\beta=30$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$5+a=-b, 5a=30 \quad \therefore a=6, b=-11$$

$$\therefore a-b=17$$

039 [답] $x^2-x-4=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=-2$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\alpha+2, \beta+2$ 이므로

$$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=-3+4=1$$

$$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$$

$$=-2+2\times(-3)+4=-4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-x-4=0$

040 [답] $x^2+4x-8=0$

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ 이라 하자.

상윤이는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $-2\times 4=b \quad \therefore b=-8$

상효는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $(-2-2i)+(-2+2i)=-a \quad \therefore a=4$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2+4x-8=0$

041 [답] ④

이차방정식 $x^2-4x+5=0$ 을 풀면 $x=2\pm i$

$$\begin{aligned} \therefore x^2-4x+5 &= \{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\} \\ &= (x-2-i)(x-2+i) \end{aligned}$$

042 [답] 5

$f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=4$

$f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x-3)=0$ 이라면

$$2x-3=\alpha \text{ 또는 } 2x-3=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+3}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x-3)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+3}{2} + \frac{\beta+3}{2} = \frac{(\alpha+\beta)+6}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$$

043 [답] ①

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-i$ 가 근이면 $2+i$ 도 근이다.

$$\text{두 근의 합은 } (2-i)+(2+i)=-a \quad \therefore a=-4$$

$$\text{두 근의 곱은 } (2-i)(2+i)=b \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+b=1$$

044 [답] 22

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=5$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= (-2)^3-3\times 5\times (-2)=22 \end{aligned}$$

045 [답] $\sqrt{5}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$$

이때 $\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$ 에서 $\alpha>0, \beta>0$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 &= \alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta \\ &= \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= 3+2\times 1=5 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$$

046 [답] ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= 3^2-4\times \frac{3}{2}=3 \end{aligned}$$

그런데 $\alpha>\beta$ 이므로 $\alpha-\beta=\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2-\beta^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \\ &= 3\times \sqrt{3}=3\sqrt{3} \end{aligned}$$

047 [답] ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=-1$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (\alpha-1)(\beta-1) &= \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1 \\ &= -1-4+1=-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta \\ &= 4^2-(-1)=17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} &= \frac{(1+\alpha)(1-\beta)+(1+\beta)(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)} \\ &= \frac{2(1-\alpha\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} \\ &= \frac{2\times(1+1)}{1-4-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \frac{\beta}{\alpha-3} + \frac{\alpha}{\beta-3} &= \frac{\beta(\beta-3)+\alpha(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\beta-3)} \\ &= \frac{\alpha^2+\beta^2-3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9} \\ &= \frac{4^2-2\times(-1)-3\times 4}{-1-3\times 4+9} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

048 답 ④

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 3\beta + 4 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha + 1 = 2\alpha - 3, \beta^2 - \beta + 1 = 2\beta - 3$$

$x^2 - 3x + 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^2 - \alpha + 1)(\beta^2 - \beta + 1) &= (2\alpha - 3)(2\beta - 3) \\ &= 4\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 9 \\ &= 4 \times 4 - 6 \times 3 + 9 = 7 \end{aligned}$$

049 답 9

β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\beta^2 - 2\beta - 5 = 0 \quad \therefore \beta^2 = 2\beta + 5$$

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\alpha + \beta^2 &= 2\alpha + (2\beta + 5) = 2(\alpha + \beta) + 5 \\ &= 2 \times 2 + 5 = 9 \end{aligned}$$

050 답 ②

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0, \beta^2 + 2\beta + 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha + 3 = -\alpha, \beta^2 + \beta + 3 = -\beta$$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha + 3} + \frac{\alpha}{\beta^2 + \beta + 3} &= \frac{\beta}{-\alpha} + \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(-2)^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

051 답 $\frac{1}{3}$

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha - 6 = 0, \beta^2 + 2\beta - 6 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 3\alpha = \alpha + 6, \beta^2 + 3\beta = \beta + 6$$

$x^2 + 2x - 6 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -6$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 6} + \frac{1}{\beta^3 + 3\beta^2 - 3\beta - 6} \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + 3\alpha) - 3\alpha - 6} + \frac{1}{\beta(\beta^2 + 3\beta) - 3\beta - 6} \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha + 6) - 3\alpha - 6} + \frac{1}{\beta(\beta + 6) - 3\beta - 6} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha - 6} + \frac{1}{\beta^2 + 3\beta - 6} \\ &= \frac{1}{(\alpha + 6) - 6} + \frac{1}{(\beta + 6) - 6} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

052 답 $\frac{1}{2}$

주어진 이차방정식의 두 근을 $2\alpha, 3\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\alpha + 3\alpha = 5k \quad \therefore \alpha = k \quad \dots\dots ㉠$$

$$2\alpha \times 3\alpha = -k + 2 \quad \therefore 6\alpha^2 + k - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$6k^2 + k - 2 = 0$$

$$(3k + 2)(2k - 1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } k = \frac{1}{2}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$

053 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, 2\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha = 6k \quad \therefore \alpha = 2k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha \times 2\alpha = 7k + 1 \quad \therefore 2\alpha^2 - 7k - 1 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$8k^2 - 7k - 1 = 0$$

$$(8k + 1)(k - 1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{8} \text{ 또는 } k = 1$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 1$

054 답 ①

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 1$ 이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 1) = 2k + 1 \quad \therefore \alpha = k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha + 1) = 3k \quad \therefore \alpha^2 + \alpha - 3k = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$k^2 + k - 3k = 0, k^2 - 2k = 0$$

$$k(k - 2) = 0 \quad \therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

055 답 2

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 3$ 이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 3) = 2k + 5 \quad \therefore \alpha = k + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha + 3) = -k - 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(k + 1)(k + 4) = -k - 5$$

$$k^2 + 6k + 9 = 0, (k + 3)^2 = 0$$

$$\therefore k = -3$$

$k = -3$ 을 $x^2 + (k + 1)x + 2k = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 2이다.

056 [답] 3

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, -\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (-\alpha) = -(m^2 - 2m - 3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha \times (-\alpha) = -4m + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } m^2 - 2m - 3 = 0, (m+1)(m-3) = 0$$

$$\therefore m = -1 \text{ 또는 } m = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$m = -1 \text{ 일 때, } \alpha^2 = -6$$

$$m = 3 \text{ 일 때, } \alpha^2 = 10$$

그런데 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로 $\alpha^2 = 10$

$$\therefore m = 3$$

057 [답] -3

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3k, \alpha\beta = k^2 - 3k$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (3k)^2 - 4(k^2 - 3k) = 5k^2 + 12k$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = 9$ 이므로

$$5k^2 + 12k = 9, 5k^2 + 12k - 9 = 0$$

$$(k+3)(5k-3) = 0 \quad \therefore k = -3 \text{ 또는 } k = \frac{3}{5}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = -3$

058 [답] ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -k + 1, \alpha\beta = k - 3$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$$

$$= (-k+1)^2 - 3(k-3) = k^2 - 5k + 10$$

이때 $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 4$ 이므로

$$k^2 - 5k + 10 = 4, k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$(k-2)(k-3) = 0 \quad \therefore k = 2 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 곱은 $2 \times 3 = 6$

059 [답] ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$

$$\alpha + \beta - 2\alpha\beta - 7 = 0 \text{에서}$$

$$a - 2b - 7 = 0 \quad \therefore a - 2b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) = 8 \text{에서}$$

$$\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 4 \quad \therefore 2a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 3, b = -2 \quad \therefore a + b = 1$$

060 [답] 10

$x^2 + ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + bx + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = -b, (\alpha - 1)(\beta - 1) = a$$

$$\therefore (\alpha + \beta) - 2 = -b, \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-a - 2 = -b, b + a + 1 = a \quad \therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$$

061 [답] ②

$x^2 - ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 2 = a, -1 \times 2 = b \quad \therefore a = 1, b = -2$$

따라서 이차방정식 $2ax^2 + (a+b)x + b = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = -1$$

062 [답] 10

$x^2 - x + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + bx + 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2 + \beta^2 = -b, \alpha^2\beta^2 = 4$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -b, (\alpha\beta)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$1 - 2a = -b, a^2 = 4$$

이때 $a < 0$ 이므로 $a = -2, b = -5$

$$\therefore ab = 10$$

063 [답] 3

$x^2 - ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x^2 + ax + a + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{b} = \frac{a+b}{2}$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 $a = 1, b = -2$

$$\therefore a - b = 3$$

064 [답] $x^2 + x + 4 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 4$$

구하는 이차방정식의 근이 $\alpha - 1, \beta - 1$ 이므로

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2$$

$$= 1 - 2 = -1$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= 4 - 1 + 1 = 4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 + x + 4 = 0$

065 [답] ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-i) + (2+i) = -a, (2-i)(2+i) = b$$

$$\therefore a = -4, b = 5 \quad \therefore a + b = 1$$

066 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 2$$

구하는 이차방정식의 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2}, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore 2x^2 + 5x + 1 = 0$$

067 답 $5x^2 - 7x + 1 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -5$$

구하는 이차방정식의 근이 $1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta}$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) &= 2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= 2 + \frac{3}{-5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) &= \frac{\alpha + 1}{\alpha} \times \frac{\beta + 1}{\beta} = \frac{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{-5 + 3 + 1}{-5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$5\left(x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{1}{5}\right) = 0 \quad \therefore 5x^2 - 7x + 1 = 0$$

068 답 ②

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 를 그으면

$\angle ACB$ 는 지름에 대한 원주각이므로 삼

각형 ABC는 $\angle ACB = 90^\circ$ 인 직각삼각

형이다.

$\overline{AD} = a, \overline{DB} = b$ 라 하면 직각삼각형 ACD와 직각삼각형 CBD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC}^2 = a^2 + 3^2, \overline{BC}^2 = b^2 + 3^2$$

또 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

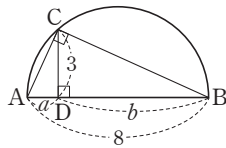
$$(a^2 + 3^2) + (b^2 + 3^2) = 8^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 46 \quad \cdots \cdots ①$$

한편 $\overline{AB} = 8$ 에서 $a + b = 8$ 이므로 ①을 변형하면

$$(a + b)^2 - 2ab = 46, 8^2 - 2ab = 46 \quad \therefore ab = 9$$

따라서 $a + b = 8, ab = 9$ 이므로 구하는 이차방정식은

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$



069 답 ③

원래의 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0$ 이라 하자.

가민이는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$3 \times 4 = b \quad \therefore b = 12$$

예지는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$(1 - \sqrt{5}) + (1 + \sqrt{5}) = -a \quad \therefore a = -2$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2 - 2x + 12 = 0$

070 답 1

준희는 a 와 c 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \quad \therefore c = -\frac{3}{2}a \quad \cdots \cdots ㉠$$

서진은 a 와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{1}{2}a \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면 $ax^2 + \frac{1}{2}ax - \frac{3}{2}a = 0$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0, 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 이 이차방정식의 두 근 중 양수인 근은 1이다.

071 답 17

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 근의 공식을 $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 로

잘못 알고 풀어서 얻은 두 근이 $-1, 2$ 이므로

$$\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -1 + 2$$

$$\frac{2b}{2a} = 1 \quad \therefore b = a \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -1 \times 2$$

$$\frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = -2, \frac{c}{4a} = -2 \quad \therefore c = -8a \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면 $ax^2 + ax - 8a = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{a}{a} = -1, \alpha\beta = \frac{-8a}{a} = -8$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times (-8) = 17$$

072 답 ④

이차방정식 $x^2 + 2x + 5 = 0$ 의 근이 $x = -1 \pm 2i$ 이므로

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= \{x - (-1 + 2i)\} \{x - (-1 - 2i)\} \\ &= (x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i) \end{aligned}$$

073 답 ②

이차방정식 $4x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 근이 $x = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 3 &= 4\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}i}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}i}{2}\right) \\ &= (2x - 1 - \sqrt{2}i)(2x - 1 + \sqrt{2}i) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

074 답 ②

$f(x) = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$

$f(3x - 5) = 0$ 이라면 $3x - 5 = \alpha$ 또는 $3x - 5 = \beta$

$$\therefore x = \frac{\alpha + 5}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\beta + 5}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x - 5) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha + 5}{3} + \frac{\beta + 5}{3} = \frac{(\alpha + \beta) + 10}{3} = \frac{-1 + 10}{3} = 3$$

075 답 ②

$f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=4$
 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x+1)=0$ 이라면
 $2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-1}{2} \times \frac{\beta-1}{2} &= \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4} = \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4} \\ &= \frac{4+1+1}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

076 답 ①

$f(3-4x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(3-4\alpha)=0, f(3-4\beta)=0$$

$f(2x)=0$ 이라면 $2x=3-4\alpha$ 또는 $2x=3-4\beta$

$$\therefore x=\frac{3-4\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3-4\beta}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{3-4\alpha}{2} \times \frac{3-4\beta}{2} &= \frac{(3-4\alpha)(3-4\beta)}{4} \\ &= \frac{9-12(\alpha+\beta)+16\alpha\beta}{4} \\ &= \frac{9-12 \times \left(-\frac{1}{4}\right)+16 \times (-2)}{4} = -5 \end{aligned}$$

077 답 ⑤

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $-2+\sqrt{3}i$ 가 근이면
 $-2-\sqrt{3}i$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=-a \quad \therefore a=4$$

두 근의 곱은

$$(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)=b \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=11$$

078 답 ②

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $a-2i$ 가 근이면 $a+2i$ 도
 근이다.

두 근의 합은

$$(a-2i)+(a+2i)=-2, 2a=-2 \quad \therefore a=-1$$

두 근의 곱은

$$(a-2i)(a+2i)=b, a^2+4=b \quad \therefore b=5$$

$$\therefore ab=-5$$

079 답 ⑤

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}i$ 가 근이
 면 $2+\sqrt{3}i$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)=-a \quad \therefore a=-4$$

두 근의 곱은

$$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=b \quad \therefore b=1$$

즉, $x^2+2abx+a+b=0$ 에서 $x^2-8x-3=0$ 이므로

$$\alpha+\beta=8, \alpha\beta=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= 8^2-4 \times (-3)=76 \end{aligned}$$

080 답 ④

$x^2+5x+8=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4 \times 1 \times 8}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{7}i}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=-5, b=7$ 이므로

$$a+b=2$$

081 답 ①

이차방정식 $x^2+3kx+2=0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x=-1$ 을 대입
 하면

$$1-3k+2=0 \quad \therefore k=1$$

$k=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+3x+2=0, (x+2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 다른 한 근은 -2 이다.

082 답 ③

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2+3(x-1)-1=0, x^2+3x-4=0$$

$$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x=-4$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2-3(x-1)-1=0, x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 $x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 합은

$$-4+1+2=-1$$

083 답 ③

이차방정식 $kx^2+2(k+2)x+k+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+2)^2-k(k+3)<0$$

$$k+4<0 \quad \therefore k<-4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -5 이다.

084 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+6k-3b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+6k-3b)=0$$

$$2(a-3)k+a^2+3b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-3=0, a^2+3b=0 \quad \therefore a=3, b=-3$$

$$\therefore a+b=0$$

085 답 ③

ㄱ. a 와 c 의 부호가 서로 다르면 $ac < 0$

이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = b^2 - ac > 0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $b = a + c$ 를 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면

$$ax^2 + (a+c)x + c = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 + (a+c)x + c = 0$ 은 실근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D_1}{4} = b^2 - ac < 0$$

이때 $b^2 > 0$ 이므로 $0 < b^2 < ac \quad \therefore ac > 0$

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$$D_3 = b^2 - 4ac < b^2 - ac < 0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 도 허근을 갖는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

086 답 ③

이차방정식 $x^2 + 2ax + b^2 + c^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (b^2 + c^2) > 0$$

$$a^2 - b^2 - c^2 > 0 \quad \therefore a^2 > b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 a 인 둔각삼각형이다.

087 답 1

이차방정식 $x^2 + 2ax - b(a-2b) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \times \{-b(a-2b)\} = 0$$

$$a^2 + ab - 2b^2 = 0, (a+2b)(a-b) = 0$$

$$\therefore a = -2b \text{ 또는 } a = b$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 $a = b$

$$\therefore \frac{b}{a} = 1$$

088 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{6}{3} = 2, \alpha\beta = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3\alpha\beta \\ &= 2^3 - 3 \times \frac{2}{3} \times 2 - 3 \times \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

089 답 ①

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0, \beta^2 + \beta + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha + 2 = \alpha, \beta^2 + 2\beta + 2 = \beta$$

$x^2 + x + 2 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 + 2\beta + 2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}$$

090 답 ③

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 2) = -2(k-1) \quad \therefore \alpha = -k \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha + 2) = -k + 6 \quad \therefore \alpha^2 + 2\alpha + k - 6 = 0 \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$㉠을 ㉡에 대입하면 k^2 - k - 6 = 0$$

$$(k+2)(k-3) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 3$

091 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k + 2, \alpha\beta = 4k + 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = (2k+2)^2 - (4k+3) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

이때 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 9$ 이므로 $4k^2 + 4k + 1 = 9$

$$k^2 + k - 2 = 0, (k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-2 + 1 = -1$

092 답 ④

$x^2 + ax + 3 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 3 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$x^2 + 2x + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = -2, (\alpha + 1)(\beta + 1) = b$$

$$\therefore \alpha + \beta = -4, \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = b \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$㉠을 ㉡에 대입하면 -a = -4, 3 - a + 1 = b$$

$$\therefore a = 4, b = 0 \quad \therefore a - b = 4$$

093 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -1$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} &= \frac{(\beta+1) + (\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{(\alpha+\beta) + 2}{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1} \\ &= \frac{3+2}{-1+3+1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1} &= \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{1}{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1} \\ &= \frac{1}{-1+3+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \quad \therefore 3x^2 - 5x + 1 = 0$$



094 답 $x=2\pm\sqrt{2}i$

민지는 a 와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a} = -1+5$$

$$\therefore b = -4a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

선영이는 a 와 c 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a} = (1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)$$

$$\therefore c = 6a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입하면

$$ax^2-4ax+6a=0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2-4x+6=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{2}i$$

095 답 ④

이차방정식 $5x^2-4x+4=0$ 의 근이 $x=\frac{2\pm 4i}{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} 5x^2-4x+4 &= 5\left(x-\frac{2+4i}{5}\right)\left(x-\frac{2-4i}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5}(5x-2-4i)(5x-2+4i) \end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=4$ 이므로

$$a+b=2$$

096 답 ③

$f(2x+1)=0$ 의 두 근이 α , β 이므로

$$f(2\alpha+1)=0, f(2\beta+1)=0$$

$$f(x-2)=0 \text{ 이려면}$$

$$x-2=2\alpha+1 \text{ 또는 } x-2=2\beta+1$$

$$\therefore x=2\alpha+3 \text{ 또는 } x=2\beta+3$$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} (2\alpha+3)(2\beta+3) &= 4\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+9 \\ &= 4 \times (-5) + 6 \times 4 + 9 = 13 \end{aligned}$$

097 답 $6x^2+x-1=0$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$ 가 근이면 $1-\sqrt{2}i$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a \quad \therefore a=-2$$

두 근의 곱은

$$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3$$

이때 구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ 이므로

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$6\left(x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$\therefore 6x^2+x-1=0$$

001 답 ①

이차함수 $y=x^2-ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -3 , 1 이므로 -3 , 1 은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1=a, -3 \times 1=b \quad \therefore a=-2, b=-3$$

$$\therefore a+b=-5$$

002 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k^2+3k-1) < 0$$

$$-3k+1 < 0 \quad \therefore k > \frac{1}{3}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 1 이다.

003 답 0

이차함수 $y=x^2+ax-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+b$ 의 교점의 x 좌표가 -2 , 4 이므로 -2 , 4 는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x+b$, 즉 $x^2+(a-2)x-b-1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+4=-(a-2), -2 \times 4 = -b-1$$

$$\therefore a=0, b=7 \quad \therefore ab=0$$

004 답 3

$$x^2+4x+3k=-x+k \text{ 에서 } x^2+5x+2k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=5^2-4 \times 1 \times 2k > 0$$

$$25-8k > 0 \quad \therefore k < \frac{25}{8}$$

따라서 자연수 k 는 $1, 2, 3$ 의 3개이다.

005 답 ①

기울기가 2 인 직선의 방정식을 $y=2x+b$ 라 하면

$$x^2+3x-1=2x+b \text{ 에서 } x^2+x-b-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4(-b-1)=0$$

$$4b+5=0 \quad \therefore b=-\frac{5}{4}$$

따라서 직선의 방정식은 $y=2x-\frac{5}{4}$ 이므로 y 절편은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

006 답 ①

$$y=2x^2+8kx-3=2(x+2k)^2-8k^2-3$$

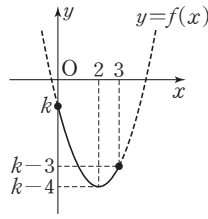
이 이차함수는 $x=-2k$ 에서 최솟값 $-8k^2-3$ 을 가지므로

$$-8k^2-3=-11, k^2=1 \quad \therefore k=\pm 1$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k=1$

007 답 ②

$f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$ 이므로
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 $x=2$ 에서 최솟값 $k-4$ 를 가지므로
 $k-4 = -5 \quad \therefore k = -1$
 따라서 $f(x) = (x-2)^2 - 5$ 의 최댓값은
 $f(0) = 4 - 5 = -1$



008 답 ①

$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면 $t = (x-1)^2 - 1$
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값은 3, $x=1$ 일 때 최솟값은 -1이므로 $-1 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는
 $y = -2t^2 + 4t - 5 = -2(t-1)^2 - 3$
 따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 $t=1$ 일 때 최댓값은 -3이고, $t=-1$ 또는 $t=3$ 일 때 최솟값은 -11이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
 $-3 + (-11) = -14$

009 답 -12

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 12$
 $= (x-2)^2 + (y+3)^2 - 12$
 이때 x, y 가 실수이므로 $(x-2)^2 \geq 0, (y+3)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 \geq -12$
 따라서 구하는 최솟값은 -12이다.

010 답 ⑤

$x+y=1$ 에서 $y=1-x$ 이므로 이를 $4x^2 + y^2$ 에 대입하면
 $4x^2 + y^2 = 4x^2 + (1-x)^2 = 5x^2 - 2x + 1$
 $= 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$
 따라서 $x = \frac{1}{5}$ 일 때 최솟값은 $\frac{4}{5}$ 이다.

011 답 4

점 P의 좌표를 $(a, -a+4)$ 라 하면
 $\overline{OQ} = a, \overline{PQ} = -a+4$
 사각형 ROQP의 넓이를 S라 하면
 $S = a(-a+4) = -a^2 + 4a = -(a-2)^2 + 4$
 이때 $0 < a < 4$ 이므로 $a=2$ 일 때 사각형 ROQP의 넓이의 최댓값은 4이다.

012 답 ①

이차함수 $y = 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식 $2x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-2+3 = -\frac{a}{2}, -2 \times 3 = \frac{b}{2} \quad \therefore a = -2, b = -12$
 $\therefore ab = 24$

013 답 ④

이차함수 $y = x^2 - ax + a + 5$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 2, b 이므로 2, b 는 이차방정식 $x^2 - ax + a + 5 = 0$ 의 두 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2+b = a, 2 \times b = a+5 \quad \therefore a-b=2, a-2b=-5$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=9, b=7$
 $\therefore a+b=16$

014 답 $\frac{1}{2}$

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이다.
 즉, $f(-1) = 0, f(4) = 0$ 이므로 $f(2x+1) = 0$ 이려면
 $2x+1 = -1$ 또는 $2x+1 = 4$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = \frac{3}{2}$
 따라서 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합은
 $-1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

015 답 2

이차방정식 $x^2 - (k+1)x - 2k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = k+1, \alpha\beta = -2k$
 이때 주어진 이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 5이므로 $|\alpha - \beta| = 5$
 양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = 25$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 25, (k+1)^2 + 8k = 25$
 $k^2 + 10k - 24 = 0, (k+12)(k-2) = 0$
 $\therefore k = -12$ 또는 $k = 2$
 그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

016 답 1

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로
 $c = -2 \quad \therefore y = ax^2 + bx - 2$
 이때 이차방정식 $ax^2 + bx - 2 = 0$ 의 계수가 유리수이고 한 근이 $-1 + \sqrt{3}$ 이므로 $-1 - \sqrt{3}$ 도 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(-1 + \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3}) = -\frac{b}{a}$
 $(-1 + \sqrt{3}) \times (-1 - \sqrt{3}) = -\frac{2}{a}$
 $\therefore a = 1, b = 2 \quad \therefore a+b+c = 1$

017 답 ⑤

이차방정식 $x^2 + 2(k+1)x + k^2 + k + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (k+1)^2 - (k^2 + k + 4) > 0$
 $k-3 > 0 \quad \therefore k > 3$
 따라서 정수 k 의 최솟값은 4이다.

018 [답] 4

이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4 \times 1 \times k=0, \quad k^2-4k=0$$

$$k(k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=4$

019 [답] $k \leq \frac{5}{8}$

이차방정식 $x^2-(2k+1)x+k^2+3k-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2k+1)^2-4(k^2+3k-1) \geq 0$$

$$-8k+5 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{5}{8}$$

020 [답] ③

이차방정식 $x^2+4x-3k+5=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=2^2-(-3k+5)<0$$

$$3k-1<0 \quad \therefore k<\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $2x^2+2kx-k+4=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=k^2-2(-k+4)=0$$

$$k^2+2k-8=0, \quad (k+4)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여 $k=-4$

021 [답] 8

이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2-4k+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-4k+b)=0$$

$$-2(a-2)k+a^2-b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-2=0, \quad a^2-b=0 \quad \therefore a=2, \quad b=4$$

$$\therefore ab=8$$

022 [답] 2

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=b^2-4ac<0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $bx^2+2(a+c)x+b=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(a+c)^2-b \times b=a^2+c^2+2ac-b^2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -b^2>-4ac \text{이므로}$$

$$\frac{D_2}{4}=a^2+c^2+2ac-b^2>a^2+c^2+2ac-4ac=(a-c)^2$$

$$\text{이때 } (a-c)^2 \geq 0 \text{이므로 } \frac{D_2}{4} > 0$$

따라서 구하는 교점의 개수는 2이다.

023 [답] -3

이차함수 $y=x^2+3x+a$ 의 그래프와 직선 $y=bx-1$ 의 두 교점의 x 좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2+3x+a=bx-1$, 즉 $x^2-(b-3)x+a+1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1=b-3, \quad -3 \times 1=a+1 \quad \therefore a=-4, \quad b=1$$

$$\therefore a+b=-3$$

024 [답] ②

이차방정식 $-x^2+ax+3=-2x+b$, 즉 $x^2-(a+2)x+b-3=0$

의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{5}$ 이므로 $2-\sqrt{5}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=a+2, \quad (2+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5})=b-3$$

$$\therefore a=2, \quad b=2 \quad \therefore ab=4$$

025 [답] 4

이차함수 $y=x^2+ax-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x-5$ 의 두 교점의 x 좌표를 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x-5$, 즉

$$x^2+(a-2)x+4=0 \text{의 두 근이다.}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-(a-2), \quad \alpha\beta=4$$

이때 이차함수의 그래프와 직선의 두 교점의 x 좌표의 차가 3이므로

$$|\alpha-\beta|=3$$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\alpha-\beta)^2=9$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9, \quad (a-2)^2-16=9$$

$$a^2-4a-21=0, \quad (a+3)(a-7)=0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $-3+7=4$

026 [답] $\sqrt{2}$

$\overline{OA} : \overline{OB}=2 : 1$ 이므로 두 점 A, B의 x 좌표를 각각

$$-2a, \quad a(a>0) \text{라 하면 } -2a, \quad a \text{는 이차방정식 } -x^2+4=kx,$$

$$\text{즉 } x^2+kx-4=0 \text{의 두 근이다.}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2a+a=-k, \quad -2a \times a=-4$$

$$k=a, \quad a^2=2$$

$$\text{그런데 } a>0 \text{이므로 } a=\sqrt{2} \quad \therefore k=\sqrt{2}$$

027 [답] ④

$$-x^2+kx-k^2=-kx+k-3 \text{에서}$$

$$x^2-2kx+k^2+k-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+k-3)>0$$

$$-k+3>0 \quad \therefore k<3$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

028 [답] $k>5$

$$x^2+2kx+k^2-1=4x+3k \text{에서 } x^2+2(k-2)x+k^2-3k-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-3k-1)<0$$

$$-k+5<0 \quad \therefore k>5$$

029 답 ④

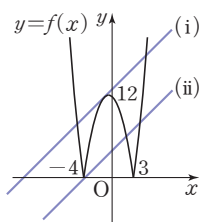
$-x^2 - (k-3)x + k + 1 = k(x+k)$ 에서
 $x^2 + (2k-3)x + k^2 - k - 1 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (2k-3)^2 - 4(k^2 - k - 1) \geq 0$
 $-8k + 13 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{13}{8}$
 따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다.

030 답 ⑤

$y = x^2 - 3x + 4$ 의 그래프가 직선 $y = -x + b$ 에 접하므로
 $x^2 - 3x + 4 = -x + b$ 에서 $x^2 - 2x + 4 - b = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4} = (-1)^2 - (4-b) = 0, b-3=0 \quad \therefore b=3$
 $y = -2x^2 + 3x + a$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 3$ 에 접하므로
 $-2x^2 + 3x + a = -x + 3$ 에서 $2x^2 - 4x + 3 - a = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4} = (-2)^2 - 2(3-a) = 0, 2a-2=0 \quad \therefore a=1$
 $\therefore ab=3$

031 답 ③

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프가 직선 $y=x+k$ 와 서로 다른 네 점에서 만나려면 직선 $y=x+k$ 는 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=x+k$ 가 $y=-x^2-x+12$ 의 그래프에 접할 때
 $-x^2-x+12=x+k$ 에서
 $x^2+2x+k-12=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 1^2 - (k-12) = 0$
 $13-k=0 \quad \therefore k=13$
 (ii) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때
 $0 = -4 + k \quad \therefore k=4$
 (i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는
 $4 < k < 13$
 따라서 정수 k 는 5, 6, 7, ..., 12의 8개이다.

032 답 ②

직선 $y=-x+7$ 에 평행한 직선의 기울기는 -1 이다.
 기울기가 -1 인 직선의 방정식을 $y=-x+b$ 라 하면
 $x^2-5x-3=-x+b$ 에서 $x^2-4x-b-3=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - (-b-3) = 0$
 $b+7=0 \quad \therefore b=-7$
 따라서 직선의 방정식은 $y=-x-7$ 이므로 y 절편은 -7 이다.

033 답 ①

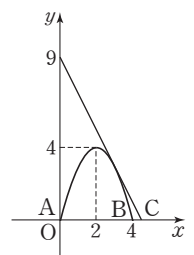
점 $(-3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x+3)+1$ 이라 하면
 $-x^2+2x+3=m(x+3)+1$ 에서
 $x^2+(m-2)x+3m-2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(m-2)^2-4(3m-2)=0$
 $m^2-16m+12=0$
 따라서 이차방정식 $m^2-16m+12=0$ 의 근이 직선의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 직선의 기울기의 합은 16이다.

034 답 ①

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$ 라 하면
 $x^2=2x+b$ 에서 $x^2-2x-b=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4} = (-1)^2 - (-b) = 0$
 $b+1=0 \quad \therefore b=-1$
 $\therefore y=2x-1$
 $-2x^2+kx+k-3=2x-1$ 에서
 $2x^2-(k-2)x-k+2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2=(k-2)^2-8(-k+2)=0$
 $k^2+4k-12=0, (k+6)(k-2)=0$
 $\therefore k=-6$ 또는 $k=2$
 그런데 $k>0$ 이므로 $k=2$

035 답 $\frac{9}{2}$ m

오른쪽 그림과 같이 A 지점을 원점, 지면을 x 축, 가로등을 y 축으로 하여 좌표평면 위에 나타내자.



이때 포물선의 방정식을
 $y=ax(x-4) \quad (a<0)$
 라 하면 이 포물선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
 $4=2a(2-4) \quad \therefore a=-1$
 즉, 포물선의 방정식은
 $y=-x(x-4)=-x^2+4x$
 한편 포물선의 접선의 y 절편이 9이므로 직선의 방정식을
 $y=bx+9 \quad (b<0)$ 라 하면 $-x^2+4x=bx+9$ 에서
 $x^2+(b-4)x+9=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(b-4)^2-4 \times 9=0, b^2-8b-20=0$
 $(b+2)(b-10)=0 \quad \therefore b=-2$ 또는 $b=10$
 그런데 $b<0$ 이므로 $b=-2$
 즉, 직선의 방정식은 $y=-2x+9$
 이 직선의 x 절편은 $\frac{9}{2}$ 이므로 $AC=\frac{9}{2}$
 따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $\frac{9}{2}$ m이다.

036 답 2

$y = -x^2 + 2kx + k = -(x-k)^2 + k^2 + k$
 이 이차함수는 $x=k$ 에서 최댓값 k^2+k 를 가지므로
 $k^2+k=6, k^2+k-6=0$
 $(k+3)(k-2)=0$
 $\therefore k=-3$ 또는 $k=2$
 그런데 $k>0$ 이므로 $k=2$

037 답 4

$y = -2x^2 + 8x + 5$
 $= -2(x-2)^2 + 13$
 따라서 $x=2$ 에서 최댓값 13을 갖는다.

038 답 5

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x=-1$ 에서 최솟값 -5 를 가지므로
 $f(x) = a(x+1)^2 - 5$
 $f(1) = 7$ 에서
 $4a - 5 = 7 \quad \therefore a = 3$
 $\therefore f(x) = 3(x+1)^2 - 5 = 3x^2 + 6x - 2$
 따라서 $a=3, b=6, c=-2$ 이므로
 $a+b-c=11$

039 답 2

$y = 2x^2 + kx - k = 2\left(x + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{8} - k$
 이 이차함수는 $x = -\frac{k}{4}$ 에서 최솟값 $-\frac{k^2}{8} - k$ 를 가지므로
 $f(k) = -\frac{k^2}{8} - k = -\frac{1}{8}(k+4)^2 + 2$
 따라서 $f(k)$ 는 $k=-4$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

040 답 2

$f(x) = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$
 이 이차함수는 $x=2$ 에서 최댓값 $k+4$ 를 가지므로 함수 $f(x)$ 가
 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 2$ 를 만족시키려면
 $k+4 \leq 2 \quad \therefore k \leq -2$
 따라서 상수 k 의 최댓값은 -2 이다.

041 답 1

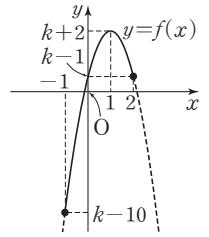
$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면 주어진 방정식은
 $x^2 + ax + b + 4x - 3 = 0$
 $\therefore x^2 + (a+4)x + b - 3 = 0$
 이 이차방정식의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -4$ 이므로
 $-(a+4) = 2, b-3 = -4$
 $\therefore a = -6, b = -1$
 $\therefore f(x) = x^2 - 6x - 1 = (x-3)^2 - 10$
 따라서 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 -10 을 갖는다.

042 답 40

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 두 점의 x
 좌표가 3, 7이므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=0$ 의 두 근은 3,
 7이다.
 이때 $h(x)$ 는 x^2 의 계수가 -2 인 이차함수이므로
 $h(x) = -2(x-3)(x-7)$
 $= -2(x^2 - 10x + 21)$
 $= -2(x-5)^2 + 8$
 따라서 $h(x)$ 는 $x=5$ 에서 최댓값 8을 가지므로
 $a=5, b=8 \quad \therefore ab=40$

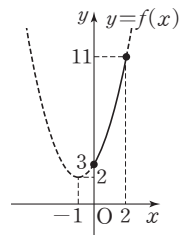
043 답 2

$f(x) = -3x^2 + 6x + k - 1$
 $= -3(x-1)^2 + k + 2$
 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같다.
 $x=1$ 에서 최댓값 $k+2$ 를 가지므로
 $k+2=4 \quad \therefore k=2$
 따라서 $f(x) = -3(x-1)^2 + 4$ 의 최솟값은
 $f(-1) = -12 + 4 = -8$



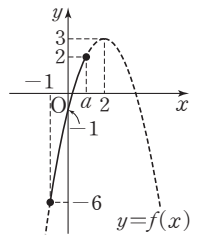
044 답 14

$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ 라 하면
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같다.
 따라서 $x=2$ 에서 최댓값 11을 갖고, $x=0$ 에
 서 최솟값 3을 가지므로 최댓값과 최솟값의
 합은
 $11+3=14$



045 답 7

$f(x) = -x^2 + 4x - 1 = -(x-2)^2 + 3$ 이라
 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
 같고, $f(2)=3$ 이므로 $a < 2$
 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최솟값을 가지므로
 $f(-1) = -9 + 3 = -6$
 $\therefore b = -6$
 또 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최댓값 2를 가지므로
 $f(a) = 2$ 에서 $-a^2 + 4a - 1 = 2$
 $a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=3$
 그런데 $a < 2$ 이므로 $a=1$
 $\therefore a-b=7$



046 답 5

$y = x^2 - 2kx - 4 = (x-k)^2 - k^2 - 4$
 (i) $k < 0$ 일 때
 $x=0$ 에서 최솟값 -4 를 가지므로 주어진 조건을 만족시키지
 않는다.

(ii) $0 \leq k < 4$ 일 때

$x=k$ 에서 최솟값 $-k^2-4$ 를 가지므로

$$-k^2-4=-8, k^2=4$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $0 \leq k < 4$ 이므로 $k=2$

(iii) $k \geq 4$ 에서

$x=4$ 에서 최솟값 $-8k+12$ 를 가지므로

$$-8k+12=-8 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

그런데 $k \geq 4$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 k 의 값은 없다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $k=2$

047 답 -3

(㉠)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 $f(x)=a(x-2)^2+b$ 라 하자.

(i) $a > 0$ 일 때

(㉡)에 의하여 $f(5)=21, f(2)=-6$

$$9a+b=21, b=-6 \quad \therefore a=3, b=-6$$

$$\therefore f(x)=3(x-2)^2-6=3x^2-12x+6$$

이때 (㉡)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 이 접해야 한다.

$$3x^2-12x+6=-6x+3 \text{에서 } x^2-2x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1=0$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 은 접한다.

(ii) $a < 0$ 일 때

(㉡)에서 $f(2)=21, f(5)=-6$

$$b=21, 9a+b=-6 \quad \therefore a=-3, b=21$$

$$\therefore f(x)=-3(x-2)^2+21=-3x^2+12x+9$$

이때 (㉡)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 이 접해야 한다.

$$-3x^2+12x+9=-6x+3 \text{에서 } x^2-6x-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(-2)=11 > 0$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=3x^2-12x+6$ 이므로

$$f(1)=3-12+6=-3$$

048 답 9

$x^2+4x=t$ 로 놓으면 $t=(x+2)^2-4$

$-3 \leq x \leq 0$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값은 0이고, $x=-2$ 일 때 최솟값은 -4 이므로 $-4 \leq t \leq 0$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2+2(t+2)-3=(t+1)^2$$

따라서 $-4 \leq t \leq 0$ 에서 $t=-4$ 일 때 최댓값은 9이고, $t=-1$ 일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$9+0=9$$

049 답 ④

$x^2+2x+3=t$ 로 놓으면

$$t=(x+1)^2+2 \quad \therefore t \geq 2$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$$

따라서 $t \geq 2$ 에서 $t=2$ 일 때 최솟값은 5이다.

050 답 5

$x^2+4x+1=t$ 로 놓으면

$$t=(x+2)^2-3 \quad \therefore t \geq -3$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2+4(t-1)+k$$

$$=(t+2)^2+k-8$$

따라서 $t \geq -3$ 에서 $t=-2$ 일 때 최솟값은 $k-8$ 이므로

$$k-8=-3 \quad \therefore k=5$$

051 답 ⑤

$$-x^2-y^2+2x-8y+3$$

$$=-(x^2-2x+1)-(y^2+8y+16)+20$$

$$=-(x-1)^2-(y+4)^2+20$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$-(x-1)^2 \leq 0, -(y+4)^2 \leq 0$$

$$\therefore -x^2-y^2+2x-8y+3 \leq 20$$

따라서 구하는 최댓값은 20이다.

052 답 4

$$x^2+5y^2+z^2+4xy-4y+2z+9$$

$$=(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-4y+4)+(z^2+2z+1)+4$$

$$=(x+2y)^2+(y-2)^2+(z+1)^2+4$$

이때 x, y, z 가 실수이므로

$$(x+2y)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0, (z+1)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2+5y^2+z^2+4xy-4y+2z+9 \geq 4$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

053 답 1

$x-y=3$ 에서 $x=y+3$ 이므로 이를 x^2+y^2+2y 에 대입하면

$$x^2+y^2+2y=(y+3)^2+y^2+2y$$

$$=2y^2+8y+9$$

$$=2(y+2)^2+1$$

따라서 $y=-2$ 일 때 최솟값은 1이다.

054 답 ②

$2x+y=8$ 에서 $y=-2x+8$ 이므로 이를 xy 에 대입하면

$$xy=x(-2x+8)=-2x^2+8x$$

$$=-2(x-2)^2+8$$

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값은 8이고, $x=4$ 일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$8+0=8$$

055 답 $\frac{9}{2}$

점 (a, b) 가 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로 $b=a-3$

이를 a^2+b^2 에 대입하면

$$a^2+b^2=a^2+(a-3)^2=2a^2-6a+9$$

$$=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{9}{2}$ 이다.

056 답 1

$$x+y^2=1 \text{에서 } y^2=1-x$$

이때 $y^2 \geq 0$ 이므로 $1-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1$

$y^2=1-x$ 를 x^2+4y^2 에 대입하면

$$x^2+4y^2=x^2+4(1-x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$$

따라서 $x \leq 1$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값은 1이다.

057 답 20

점 A의 좌표를 (a, a^2-6a) ($0 < a < 3$)라 하면

$$\overline{AD} = -a^2+6a, \overline{CD} = 6-2a$$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l 이라 하면

$$l=2\{(-a^2+6a)+(6-2a)\}$$

$$=-2a^2+8a+12$$

$$=-2(a-2)^2+20$$

따라서 $0 < a < 3$ 에서 $a=2$ 일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

058 답 21 m

$h=-5t^2+20t+1=-5(t-2)^2+21$ 이므로 $t=2$ 일 때 최댓값은 21이다.

따라서 공이 가장 높은 곳에 도달했을 때의 지면으로부터의 높이는 21 m이다.

059 답 ③

핫도그 한 개의 가격을 $100x$ 원 올릴 때, 핫도그 한 개의 가격은 $(1000+100x)$ 원이고, 하루 판매량은 $(200-10x)$ 개이므로 하루 판매액을 y 원이라 하면

$$y=(1000+100x)(200-10x)=-1000(x-5)^2+225000$$

따라서 $x=5$ 일 때 하루 판매액이 최대가 되므로 그때의 핫도그 한 개의 가격은

$$1000+100 \times 5=1500(\text{원})$$

060 답 ⑤

꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$$x+2y=16 \quad \therefore x=16-2y$$

이때 꽃밭의 넓이는

$$xy=(16-2y) \times y=-2y^2+16y=-2(y-4)^2+32$$

따라서 $0 < y < 8$ 이므로 $y=4$ 일 때 꽃밭의 넓이의 최댓값은 32 m^2 이다.

061 답 225

$$t \text{ 초 후 } \overline{AP}=\overline{CR}=t, \overline{AS}=\overline{CQ}=2t$$

이므로

$$\overline{BP}=\overline{DR}=20-t$$

$$\overline{BQ}=\overline{DS}=20-2t$$

이때 직각삼각형 APS, CRQ의 넓

$$\text{이는 } \frac{1}{2} \times t \times 2t = t^2$$

또 직각삼각형 BPQ, DRS의 넓이는

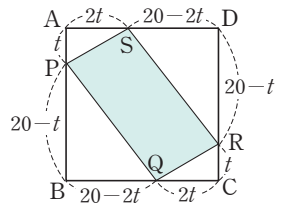
$$\frac{1}{2} \times (20-t) \times (20-2t) = t^2 - 30t + 200$$

이때 사각형 PQRS의 넓이를 S 라 하면

$$S=20^2-2\{t^2+(t^2-30t+200)\}$$

$$=-4t^2+60t=-4\left(t-\frac{15}{2}\right)^2+225$$

따라서 $0 < t \leq 10$ 이므로 $t=\frac{15}{2}$ 일 때 사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 225이다.



062 답 ④

이차함수 $y=-2x^2+ax+3$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 1, b 이므로 1, b 는 이차방정식 $-2x^2+ax+3=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+b=\frac{a}{2}, 1 \times b=-\frac{3}{2} \quad \therefore a=-1, b=-\frac{3}{2} \quad \therefore ab=\frac{3}{2}$$

063 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=b^2-4ac > 0$$

ㄴ. $-3, 1$ 은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1=-\frac{b}{a}, -3 \times 1=\frac{c}{a} \quad \therefore b=2a, c=-3a$$

$$\therefore \frac{bc}{a^2}=\frac{2a \times (-3a)}{a^2}=-6$$

ㄷ. 이차방정식 $bx^2+cx+a=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 ㄴ에서

$$b=2a, c=-3a \text{이므로}$$

$$D_2=c^2-4ab=(-3a)^2-4a \times (2a)=a^2$$

$$\text{이때 } a \neq 0 \text{이므로 } a^2 > 0 \quad \therefore D_2 > 0$$

즉, 이차함수 $y=bx^2+cx+a$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

064 답 -21

이차방정식 $2x^2+(2k+1)x+k=-x+k^2$, 즉

$$2x^2+2(k+1)x-k^2+k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 두 근이 α, β 이고, $\alpha+\beta=5$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2(k+1)}{2}=5 \quad \therefore k=-6$$

이를 ①에 대입하여 정리하면 $x^2-5x-21=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=-21$$

065 답 1

$x^2 - 2kx + k + 3 = 2x - k^2$ 에서 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + k + 3 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - (k^2 + k + 3) < 0$$

$$k - 2 < 0 \quad \therefore k < 2$$

따라서 자연수 k 는 1의 1개이다.

066 답 ⑤

$x^2 + 2kx + a = 2bx - k^2 + 4k$ 에서 $x^2 + 2(k-b)x + k^2 - 4k + a = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-b)^2 - (k^2 - 4k + a) = 0$$

$$-2(b-2)k + b^2 - a = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$b-2=0, \quad b^2-a=0 \quad \therefore a=4, \quad b=2$$

$$\therefore a+b=6$$

067 답 1

점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-1)$ 이라 하면

$$-x^2 + 4x - 3 = m(x-1) \text{에서 } x^2 + (m-4)x - m + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (m-4)^2 - 4(-m+3) = 0$$

$$(m-2)^2 = 0 \quad \therefore m=2$$

$$\therefore y=2x-2$$

$$x^2 + ax + b = 2x - 2 \text{에서 } x^2 + (a-2)x + b + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (a-2)^2 - 4(b+2) = 0$$

$$a^2 - 4a - 4b - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 점 $(1, 0)$ 은 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프 위의 점이므로

$$0 = 1 + a + b \quad \therefore b = -a - 1$$

이를 ①에 대입하여 정리하면 $a^2 = 0$

따라서 $a=0, b=-1$ 이므로 $a^2+b^2=1$

068 답 -4

$y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x-1)^2 - 3$ 이므로 $x=1$ 에서 최댓값 -3 을 갖는다.

$y = -x^2 - 6x + 3k = -(x+3)^2 + 3k + 9$ 이므로 $x=-3$ 에서 최댓값 $3k+9$ 를 갖는다.

이때 두 이차함수의 최댓값이 서로 같으므로

$$3k+9=-3 \quad \therefore k=-4$$

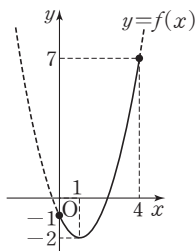
069 답 ①

$f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ 라 하면

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=4$ 일 때 최댓값은 7이고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -2 이므로

$$M=7, \quad m=-2 \quad \therefore Mm=-14$$



070 답 ③

$x^2 - 4x = t$ 로 놓으면 $t = (x-2)^2 - 4$

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $x=-2$ 일 때 최댓값은 12이고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -3 이므로 $-3 \leq t \leq 12$

$$\text{이때 주어진 함수는 } y = \frac{1}{2}t^2 + t + k = \frac{1}{2}(t+1)^2 + k - \frac{1}{2}$$

따라서 $-3 \leq t \leq 12$ 에서 $t=-1$ 일 때 최솟값은 $k - \frac{1}{2}$ 이므로

$$k - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \therefore k=3$$

071 답 ③

$$x^2 + 6y^2 - 4xy - 8y + 10$$

$$= (x^2 - 4xy + 4y^2) + 2(y^2 - 4y + 4) + 2$$

$$= (x-2y)^2 + 2(y-2)^2 + 2$$

이때 x, y 가 실수이므로 $(x-2y)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0$

$$\therefore x^2 + 6y^2 - 4xy - 8y + 10 \geq 2$$

따라서 $x=4, y=2$ 일 때 최솟값은 2이므로

$$p=4, \quad q=2, \quad m=2 \quad \therefore p+q+m=8$$

072 답 ①

$$x+y=4 \text{에서 } y=4-x$$

$$y \geq 0 \text{이므로 } 4-x \geq 0, \quad x \leq 4$$

이때 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 4$

$y=4-x$ 를 $2x^2 - y^2$ 에 대입하면

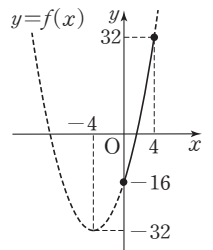
$$2x^2 - y^2 = 2x^2 - (4-x)^2 = x^2 + 8x - 16 \\ = (x+4)^2 - 32$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=4$ 일 때 최댓값은 32이고, $x=0$ 일 때 최솟값은 -16 이므로

$$M=32, \quad m=-16$$

$$\therefore M+m=16$$



073 답 ③

t 초 후 밑면의 넓이는 $(t+4)\pi$ 이고 높이는 $8-t$ 이므로 원뿔의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \times (t+4)\pi \times (8-t) = \frac{\pi}{3}(-t^2 + 4t + 32) \\ = \frac{\pi}{3}\{-(t-2)^2 + 36\} = -\frac{\pi}{3}(t-2)^2 + 12\pi$$

따라서 $0 < t < 8$ 이므로 $t=2$ 일 때 원뿔의 부피의 최댓값은 12π 이다.

074 답 12

$\overline{BF}=a, \overline{EB}=b$ 라 하면 $\triangle ABC \sim \triangle DFC$ 이므로

$$8:6 = (8-a):b \quad \therefore b = -\frac{3}{4}a + 6$$

이때 직사각형 $EBFD$ 의 넓이는

$$ab = a\left(-\frac{3}{4}a + 6\right) = -\frac{3}{4}a^2 + 6a = -\frac{3}{4}(a-4)^2 + 12$$

따라서 $0 < a < 8$ 이므로 $a=4$ 일 때 직사각형 $EBFD$ 의 넓이의 최댓값은 12이다.



001 답 ②

$f(x)=x^3-4x^2+8$ 이라 할 때,

$f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-2x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{5}$$

따라서 $\alpha=1+\sqrt{5}$, $\beta=1-\sqrt{5}$ 이므로

$$\alpha-\beta=1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

002 답 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$x^2+x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-1)(t-7)+5=0$$

$$t^2-8t+12=0, (t-2)(t-6)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=6$$

(i) $t=2$ 일 때

$$x^2+x=2 \text{에서 } x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

(ii) $t=6$ 일 때

$$x^2+x=6 \text{에서 } x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는

$$x=-3 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

003 답 ⑤

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-13t+36=0, (t-4)(t-9)=0$$

$$\therefore t=4 \text{ 또는 } t=9$$

즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$ 이므로

$$x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 3$$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 곱은

$$2 \times 3 = 6$$

004 답 -5

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2+4t-5=0, (t+5)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-5 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-5$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}=-5 \text{에서 } x^2+5x+1=0$$

$$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

(ii) $t=1$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}=1 \text{에서 } x^2-x+1=0$$

$$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$\frac{-5-\sqrt{21}}{2}+\frac{-5+\sqrt{21}}{2}=-5$$

005 답 -1

주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$8+4k+2(k-2)+2=0$$

$$\therefore k=-1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3-x^2-3x+2=0$$

$f(x)=x^3-x^2-3x+2$ 라 할 때,

$f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2+x-1)=0$$

이때 2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+x-1=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -1이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

006 답 ③

$f(x)=x^3+3x^2+(k+2)x+k$ 라

할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법

을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2+2x+k)=0$$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식

$x^2+2x+k=0$ 이 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-k<0 \quad \therefore k>1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & k+2 & k \\ & & -1 & -2 & -k \\ \hline & 1 & 2 & k & 0 \end{array}$$

007 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2, \alpha\beta\gamma=1$$

$$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$

$$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$$

$$=1+3+2+1$$

$$=7$$

008 답 $x^3-8x^2-12x+16=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=4, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-2$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ 이므로

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=2\times 4=8$$

$$2\alpha\times 2\beta+2\beta\times 2\gamma+2\gamma\times 2\alpha=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ =4\times (-3)=-12$$

$$2\alpha\times 2\beta\times 2\gamma=8\alpha\beta\gamma=8\times (-2)=-16$$

따라서 구하는 방정식은

$$x^3-8x^2-12x+16=0$$

009 답 ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $\sqrt{2}$ 이면 $-\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 a 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})+a=-2$$

$$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})\times a+a\times\sqrt{2}=a$$

$$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})\times a=-b$$

$$\therefore a=-2, a=-2, b=-4$$

$$\therefore ab=8$$

010 답 ②

$$x^3-1=0\text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\therefore \omega^{1010}+\frac{1}{\omega^{1010}}=(\omega^3)^{336}\times\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{336}\times\omega^2} \\ =\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2} \\ =\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$

011 답 3 cm

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$$(x-1)(x-2)(x+3)=12, x^3-7x-6=0$$

$$f(x)=x^3-7x-6\text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$f(-1)=0\text{이므로 조립제법을 이용}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-x-6)$$

$$=(x+1)(x+2)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+2)(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2\text{ 또는 }x=-1\text{ 또는 }x=3$$

그런데 $x>2$ 이므로 $x=3$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

012 답 2

$f(x)=x^4-7x^3+16x^2-14x+4$ 라 할 때, $f(1)=0, f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -7 & 16 & -14 & 4 \\ & & 1 & -6 & 10 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -6 & 10 & -4 & 0 \\ & & 2 & -8 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-4x+2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x^2-4x+2)=0$

$$\therefore x=1\text{ 또는 }x=2\text{ 또는 }x=2\pm\sqrt{2}$$

따라서 $\alpha=2+\sqrt{2}, \beta=2-\sqrt{2}$ 이므로

$$\alpha\beta=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2$$

013 답 -4

$$f(x)=x^3-2x^2-2x+1\text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ & & -1 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$f(-1)=0\text{이므로 조립제법을 이용}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-3x+1)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2-3x+1)=0$

$$\therefore x=-1\text{ 또는 }x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha=-1, \beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \gamma=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\text{이므로}$$

$$\alpha-\beta-\gamma=-1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=-4$$

014 답 ①

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$ 이라 할 때, $f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$$\therefore x=-1\text{ 또는 }x=2\text{ 또는 }x=-1\pm\sqrt{2}i$$

따라서 방정식의 모든 실근의 합은 $-1+2=1$

015 답 ②

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+6\text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ & & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(-1)=0\text{이므로 조립제법을 이용}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-4x+6)$$

따라서 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2-4x+6)=0$

이때 방정식의 두 허근 α, β 는 이차방정식 $x^2-4x+6=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=6$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=4^2-2\times 6=4$$

016 답 ②

$x^2+2x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-3t=0, t(t-3)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=3$$

(i) $t=0$ 일 때

$$x^2+2x=0 \text{에서 } x(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

(ii) $t=3$ 일 때

$$x^2+2x=3 \text{에서 } x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=1, \beta=-3$ 이므로

$$\alpha+\beta=-2$$

017 답 ⑤

$$(x^2-2x)^2=2x^2-4x+8 \text{에서}$$

$$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-8=0$$

$$x^2-2x=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t-8=0, (t+2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=4$$

(i) $t=-2$ 일 때

$$x^2-2x=-2 \text{에서 } x^2-2x+2=0$$

$$\therefore x=1 \pm i$$

(ii) $t=4$ 일 때

$$x^2-2x=4 \text{에서 } x^2-2x-4=0$$

$$\therefore x=1 \pm \sqrt{5}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=2$$

018 답 ③

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-14=0 \text{에서}$$

$$\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-14=0$$

$$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-14=0$$

$$x^2+2x=t \text{로 놓으면}$$

$$(t-3)(t-8)-14=0$$

$$t^2-11t+10=0, (t-1)(t-10)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=10$$

(i) $t=1$ 일 때

$$x^2+2x=1 \text{에서 } x^2+2x-1=0$$

근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $x^2+2x-1=0$ 의 두 근의 곱은 -1 이다.

(ii) $t=10$ 일 때

$$x^2+2x=10 \text{에서 } x^2+2x-10=0$$

근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $x^2+2x-10=0$ 의 두 근의 곱은 -10 이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$$-1 \times (-10) = 10$$

019 답 ①

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2+3t-18=0, (t+6)(t-3)=0$$

$$\therefore t=-6 \text{ 또는 } t=3$$

즉, $x^2=-6$ 또는 $x^2=3$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{6}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{3}$$

따라서 방정식의 모든 실근의 곱은

$$-\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$$

020 답 ②

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-10t+9=0, (t-1)(t-9)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=9$$

즉, $x^2=1$ 또는 $x^2=9$ 이므로

$$x=\pm 1 \text{ 또는 } x=\pm 3$$

따라서 $\alpha=-3, \beta=-1, \gamma=1, \delta=3$ 이므로

$$\alpha\beta+\gamma\delta=-3 \times (-1)+1 \times 3=6$$

021 답 ③

$$x^4-3x^2+1=0 \text{에서 } (x^4-2x^2+1)-x^2=0$$

$$(x^2-1)^2-x^2=0, (x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 모든 양의 근의 합은

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

022 답 ①

$$x^4+2x^2+9=0 \text{에서 } (x^4+6x^2+9)-4x^2=0$$

$$(x^2+3)^2-(2x)^2=0, (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$$

이때 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근을 α, β , 이차방정식

$x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관

계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3, \gamma+\delta=2, \gamma\delta=3$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

023 답 ②

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면 } t^2+5t+4=0$$

$$(t+4)(t+1)=0 \quad \therefore t=-4 \text{ 또는 } t=-1$$

(i) $t=-4$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}=-4 \text{에서 } x^2+4x+1=0 \quad \therefore x=-2 \pm \sqrt{3}$$

(ii) $t = -1$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{에서 } x^2 + x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$(-2 - \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3}) = -4$$

024 답 ②

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 3x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$(t+1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

(i) $t = -1$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{에서 } x^2 + x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

즉, 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t = 4$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = 4 \text{에서 } x^2 - 4x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-2)^2 - 1 \times 1 = 3 > 0$$

즉, 방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 a 는 방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a \neq 0 \text{이므로 양변을 } a \text{로 나누면 } a - 4 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 4$$

025 답 ④

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 + k + 3 + 1 = 0 \quad \therefore k = -5$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 3 & 1 \\ & & 1 & -4 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 4x - 1)$$

$$\text{즉, 주어진 방정식은 } (x-1)(x^2 - 4x - 1) = 0$$

이때 1이 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 4이다.

026 답 1

주어진 방정식의 두 근이 $-2, 3$ 이므로 $x = -2, x = 3$ 을 각각 대입하면

$$-8 + 4a - 2(2a - b) + 6b = 0, 27 + 9a + 3(2a - b) + 6b = 0$$

$$\therefore b = 1, 5a + b = -9 \quad \therefore a = -2, b = 1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline 3 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ & & 3 & -3 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+2)(x-3)(x-1)$$

$$\text{즉, 주어진 방정식은}$$

$$(x+2)(x-3)(x-1) = 0$$

따라서 방정식의 나머지 한 근은 1이다.

027 답 ①

주어진 방정식의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 $x = -1, x = 2$ 를 각각 대입하면

$$2 + a + b - 3 + a + 4 = 0, 32 - 8a + 4b + 6 + a + 4 = 0$$

$$\therefore 2a + b = -3, 7a - 4b = 42$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = 2, b = -7$$

$$\text{이를 주어진 방정식에 대입하면 } 2x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x + 6 \text{이라 할 때, } f(-1) = 0, f(2) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -2 & -7 & 3 & 6 \\ & & -2 & 4 & 3 & -6 \\ \hline 2 & 2 & -4 & -3 & 6 & 0 \\ & & 4 & 0 & -6 & \\ \hline & 2 & 0 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - 3)$$

$$\text{즉, 주어진 방정식은 } (x+1)(x-2)(2x^2 - 3) = 0$$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $2x^2 - 3 = 0$ 의 근이

므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

028 답 ②

주어진 방정식의 한 근이 $\sqrt{3}$ 이므로 $x = \sqrt{3}$ 을 대입하면

$$9 + 3a\sqrt{3} + 3b + 3\sqrt{3} + 6 = 0, 3(b+5) + 3(a+1)\sqrt{3} = 0$$

이때 a, b 가 유리수이므로

$$b + 5 = 0, a + 1 = 0 \quad \therefore a = -1, b = -5$$

$$\text{이를 주어진 방정식에 대입하면 } x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 \text{이라 할 때, } f(-1) = 0, f(2) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & 3 & 6 \\ & & -1 & 2 & 3 & -6 \\ \hline 2 & 1 & -2 & -3 & 6 & 0 \\ & & 2 & 0 & -6 & \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 3)$$

$$= (x+1)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$$

따라서 유리수인 두 근은 $-1, 2$ 이므로 두 근의 곱은

$$-1 \times 2 = -2$$

029 답 ⑤

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k+2+k^2-4-5=0$$

$$k^2+k-6=0, (k+3)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=2$$

(i) $k=-3$ 일 때

주어진 방정식에 대입하면 $x^3-x^2+5x-5=0$

$$f(x)=x^3-x^2+5x-5 \text{라 할 때, } \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 5 & -5 \\ & & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2+5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}i$$

따라서 실근 1개와 허근 2개를 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$ 일 때

주어진 방정식에 대입하면 $x^3+4x^2-5=0$

$$g(x)=x^3+4x^2-5 \text{라 할 때, } \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 4 & 0 & -5 \\ & & 1 & 5 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$g(x)=(x-1)(x^2+5x+5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5x+5)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서 세 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여

$$k=2, \alpha+\beta=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}+\frac{-5+\sqrt{5}}{2}=-5$$

$$\therefore k-\alpha-\beta=k-(\alpha+\beta)=2-(-5)=7$$

030 답 ①

$$f(x)=x^3-x^2-(k+2)x+2k \text{라 할 때, } \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -k-2 & 2k \\ & & 2 & 2 & -2k \\ \hline & 1 & 1 & -k & 0 \end{array}$$

하면

$$f(x)=(x-2)(x^2+x-k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+x-k)=0$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식

$x^2+x-k=0$ 이 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4(-k)<0, 1+4k<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{4}$$

031 답 ③

$$f(x)=x^3-4x^2+(4-k)x+2k \text{라 할 때, } \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 4-k & 2k \\ & & 2 & -4 & -2k \\ \hline & 1 & -2 & -k & 0 \end{array}$$

이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x-k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-2x-k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x-k=0$

이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k)\geq 0$$

$$1+k\geq 0 \quad \therefore k\geq -1$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -1 이다.

032 답 ①

$$f(x)=x^3+(k+1)x^2+2kx+k^2 \text{라 할 때, } \begin{array}{c|cccc} -k & 1 & k+1 & 2k & k^2 \\ & & -k & -k & -k^2 \\ \hline & 1 & 1 & k & 0 \end{array}$$

이차방정식을 이용하여 $f(x)$ 를 인수

$$f(x)=(x+k)(x^2+x+k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+k)(x^2+x+k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+k=0$ 이 중근을

갖거나 $x=-k$ 를 근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+x+k=0$ 이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$$

(ii) 방정식 $x^2+x+k=0$ 이 $x=-k$ 를 근으로 가질 때

$$k^2-k+k=0, k^2=0 \quad \therefore k=0$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은

$$\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

033 답 ②

$$f(x)=x^3-(k+1)x+k \text{라 할 때, } \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -k-1 & k \\ & & 1 & 1 & -k \\ \hline & 1 & 1 & -k & 0 \end{array}$$

하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2+x-k)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2+x-k)=0$$

이 방정식의 서로 다른 실근이 한 개뿐이라면 이차방정식

$x^2+x-k=0$ 이 허근을 갖거나 $x=1$ 을 중근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+x-k=0$ 이 허근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4(-k)<0 \quad 1+4k<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{4}$$

(ii) 방정식 $x^2+x-k=0$ 이 $x=1$ 을 중근으로 가질 때

$$1+1-k=0 \quad \therefore k=2$$

즉, $x^2+x-2=0$ 이므로

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 서로 다른 실근이 한 개뿐이라는 조건을 만족시키지

않는다.

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } k<-\frac{1}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

034 답 0

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 7, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 10, \alpha\beta\gamma = -6$$

$$\begin{aligned} \therefore (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma) \\ = 3^3 - (\alpha + \beta + \gamma) \times 3^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \times 3 - \alpha\beta\gamma \\ = 27 - 7 \times 9 + 10 \times 3 - (-6) = 0 \end{aligned}$$

035 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= (-2)^2 - 2 \times 3 = -2 \end{aligned}$$

036 답 84

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = -8$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{3}{4} \text{에서 } \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{-8} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = -6$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= (-6)^2 - 2 \times (-8) \times 3 = 84 \end{aligned}$$

037 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6, \alpha\beta\gamma = -3$$

이때 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 에서

$$\beta + \gamma = -\alpha, \gamma + \alpha = -\beta, \alpha + \beta = -\gamma$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} &= \frac{-\alpha}{\alpha^2} + \frac{-\beta}{\beta^2} + \frac{-\gamma}{\gamma^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \\ &= -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= -\frac{-6}{-3} = -2 \end{aligned}$$

038 답 ③

이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a \quad \dots\dots ㉠$$

이때 α, β 가 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + bx + 2 = 0$ 의 근이므로 나머지 한 근을 γ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = -2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + \gamma = 3 \quad \therefore \gamma = 1$$

$$\alpha\beta\gamma = a\gamma = -2 \quad \therefore a = -2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = a + 2 = b \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a - b = -2$$

039 답 ③

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1$ 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha - 1) + \alpha + (\alpha + 1) = 6 \quad \therefore \alpha = 2$$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = a, 1 \times 2 \times 3 = -b$$

$$\therefore a = 11, b = -6 \quad \therefore a + b = 5$$

040 답 ①

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 3 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

따라서 세 근이 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = a, \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{2} = -b$$

$$\therefore a = \frac{11}{4}, b = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore a + b = 2$$

041 답 $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ 이므로

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma\alpha + \gamma\alpha \times \alpha\beta &= \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma \times \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^2 = 1^2 = 1$$

따라서 구하는 방정식은

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

042 답 ①

삼차방정식 $x^3 - 7x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7, \alpha\beta\gamma = -3$$

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + 9 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + (\gamma + 1) = -\frac{b}{a} \quad \dots\dots ㉠$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1) + (\gamma + 1)(\alpha + 1) = \frac{c}{a} \quad \dots\dots ㉡$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = -\frac{9}{a} \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉢에서 } \alpha\beta\gamma + (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 1 = -\frac{9}{a}$$

$$-3 + (-7) + 1 = -\frac{9}{a} \quad \therefore a = 1$$

$$\text{㉠에서 } (\alpha + \beta + \gamma) + 3 = -\frac{b}{a}$$

$$3 = -b \quad \therefore b = -3$$

$$\text{㉡에서 } (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3 = \frac{c}{a}$$

$$-7 + 3 = c \quad \therefore c = -4$$

$$\therefore a + b + c = -6$$

043 답 ④

$$f(1)=f(2)=f(3)=4\text{에서}$$

$$f(1)-4=0, f(2)-4=0, f(3)-4=0$$

즉, 방정식 $f(x)-4=0$ 의 근은 1, 2, 3이다.

$f(x)-4=a(x-1)(x-2)(x-3)$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+4$$

이때 $f(4)=10$ 이므로

$$a \times 3 \times 2 \times 1 + 4 = 10$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+4$$

$$=x^3-6x^2+11x-2$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-6x^2+11x-2=0$ 의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 6이다.

044 답 ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이면 $1-\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+\alpha=a+2$$

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\alpha+\alpha(1+\sqrt{2})=b$$

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\alpha=-4$$

$$\therefore \alpha=4, a=4, b=7$$

$$\therefore a+b=11$$

045 답 -2

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 $1-2i$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+2i)(1-2i)\alpha=-10$$

$$\therefore \alpha=-2$$

따라서 구하는 실근은 -2이다.

046 답 ③

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $3+\sqrt{3}$ 이면 $3-\sqrt{3}$ 도 근이다.

따라서 세 근이 1, $3+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=-a$$

$$1 \times (3+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3}) \times (3-\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3}) \times 1 = b$$

$$1 \times (3+\sqrt{3}) \times (3-\sqrt{3}) = -c$$

$$\therefore a=-7, b=12, c=-6$$

$$\therefore \frac{ab}{c} = \frac{-7 \times 12}{-6} = 14$$

047 답 4

(가)에서 $f(2)=0$ 이므로 $x=2$ 는 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 근이다.

삼차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 실수이고 (나)에서 한 근이 $-4i$ 이므로 $4i$ 도 근이다.

삼차방정식 $f(2x)=0$ 에서

$$2x=2 \text{ 또는 } 2x=-4i \text{ 또는 } 2x=4i$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-2i \text{ 또는 } x=2i$$

따라서 구하는 세 근의 곱은

$$1 \times (-2i) \times 2i = 4$$

048 답 ②

$$x^3+1=0\text{에서 } (x+1)(x^2-x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2-x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

$$\therefore \omega^{1000} + \frac{1}{\omega^{1000}} = (\omega^3)^{333} \times \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{333} \times \omega}$$

$$= -\omega - \frac{1}{\omega} = -\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$$

$$= -\frac{\omega^2+1}{\omega}$$

$$= -\frac{\omega}{\omega} = -1$$

049 답 ①

$$x^3-1=0\text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$\omega \neq 0$ 이므로 양변을 ω 로 나누면

$$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^4 + \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^3 + \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2 + \omega + \frac{1}{\omega} \\ = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

050 답 1

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$$

$$\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{120}$$

$$= (1+\omega+\omega^2) + \omega^3(1+\omega+\omega^2) + \cdots + \omega^{117}(1+\omega+\omega^2) + \omega^{120}$$

$$= 0+0+\cdots+(\omega^3)^{40}=1$$

051 답 ②

$$x^3+1=0\text{에서 } (x+1)(x^2-x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\therefore \frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\bar{\omega}-1} = \frac{\bar{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\bar{\omega}-1)}$$

$$= \frac{(\omega+\bar{\omega})-2}{\omega\bar{\omega}-(\omega+\bar{\omega})+1}$$

$$= \frac{1-2}{1-1+1} = -1$$

052 답 ③

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

또 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\neg. \omega\bar{\omega}=1$$

$$\neg. \omega^2+\omega+1=0 \text{에서 } \omega^2=-\omega-1$$

$$\omega+\bar{\omega}=-1 \text{에서 } \bar{\omega}=-\omega-1$$

$$\therefore \omega^2=\bar{\omega}$$

$$\begin{aligned} \square. \frac{1}{\omega+1} + \frac{1}{\omega^2+1} + \frac{1}{\omega^3+1} &= \frac{1}{-\omega^2} + \frac{1}{-\omega} + \frac{1}{1+1} \\ &= -\frac{1+\omega}{\omega^2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{-\omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\square$ 이다.

053 답 13

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$$

$$f(1)=\frac{1+\omega}{1+\omega}=1$$

$$f(2)=\frac{1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2}=0$$

$$f(3)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(4)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4}{1+\omega^4}=\frac{0+1+\omega}{1+\omega}=f(1)$$

$$f(5)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^5}=\frac{0+1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2}=f(2)$$

$$\begin{aligned} f(6) &= \frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega^6} \\ &= \frac{0+1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3}=f(3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

이므로

$$f(1)=f(4)=f(7)=\dots=f(22)=f(25)=1,$$

$$f(2)=f(5)=f(8)=\dots=f(23)=0,$$

$$f(3)=f(6)=f(9)=\dots=f(24)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(25)$$

$$\begin{aligned} &= \left(1+0+\frac{1}{2}\right) \times 8 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

054 답 ③

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면

$$(x-1)(x+2)^2=108$$

$$x^3+3x^2-112=0$$

$$f(x)=x^3+3x^2-112 \text{라 할 때,}$$

$$f(4)=0 \text{이므로 조립제법을 이용}$$

하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-4)(x^2+7x+28)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-4)(x^2+7x+28)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=\frac{-7 \pm 3\sqrt{7}i}{2}$$

그런데 $x>1$ 이므로 $x=4$

따라서 처음 정육면체의 부피는

$$4^3=64$$

055 답 ③

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라 하면

$$4(a+b+c)=32 \quad \therefore a+b+c=8$$

$$2(ab+bc+ca)=34 \quad \therefore ab+bc+ca=17$$

$$abc=10$$

이때 a, b, c 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은

$$x^3-8x^2+17x-10=0$$

$$f(x)=x^3-8x^2+17x-10 \text{이라 할 때,}$$

$$f(1)=0 \text{이므로 조립제법을 이}$$

용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2-7x+10)$$

$$=(x-1)(x-2)(x-5)$$

즉, $(x-1)(x-2)(x-5)=0$ 이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 세 모서리의 길이는 1 cm, 2 cm, 5 cm이므로 가장 긴 모

서리의 길이와 가장 짧은 모서리의 길이의 차는

$$5-1=4 \text{ (cm)}$$

056 답 2

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x 라 하면 원기둥의 높이는

$$4-x \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2(4-x) = \frac{40}{3}\pi$$

$$x^3-12x^2+40=0$$

$$f(x)=x^3-12x^2+40 \text{이라 할 때,}$$

$$f(2)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하}$$

여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-10x-20)$$

즉, $(x-2)(x^2-10x-20)=0$ 이므로

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=5 \pm 3\sqrt{5}$$

그런데 $0 < x < 4$ 이므로 $x=2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 2이다.

057 답 ②

$$x-y=1 \text{에서 } y=x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+y^2=25$ 에 대입하면

$$x^2+(x-1)^2=25, x^2-x-12=0$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-3, y=-4 \text{ 또는 } x=4, y=3$$

$$\therefore xy=12$$

058 답 ④

$$2x^2-3xy+y^2=0 \text{에서 } (x-y)(2x-y)=0$$

$$\therefore y=x \text{ 또는 } y=2x$$

(i) $y=x$ 를 $5x^2-y^2=9$ 에 대입하면

$$5x^2-x^2=9, 4x^2=9 \quad \therefore x=\pm\frac{3}{2}$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2} \text{일 때 } y=-\frac{3}{2}, x=\frac{3}{2} \text{일 때 } y=\frac{3}{2}$$

(ii) $y=2x$ 를 $5x^2-y^2=9$ 에 대입하면

$$5x^2-4x^2=9, x^2=9 \quad \therefore x=\pm 3$$

$$\therefore x=-3 \text{일 때 } y=-6, x=3 \text{일 때 } y=6$$

(i), (ii)에 의하여 자연수 x, y 는 $x=3, y=6$ 이므로

$$x+y=9$$

059 답 ④

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ x+y-xy=1 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=10 & \dots\dots \textcircled{1} \\ u-v=1 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②에서 $v=u-1$ 을 ①에 대입하면

$$u^2-2(u-1)=10, u^2-2u-8=0$$

$$(u+2)(u-4)=0$$

$$\therefore u=-2 \text{ 또는 } u=4$$

이를 각각 ②에 대입하면

$$u=-2, v=-3 \text{ 또는 } u=4, v=3$$

(i) $u=-2, v=-3$, 즉 $x+y=-2, xy=-3$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore x=-3, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-3$$

(ii) $u=4, v=3$, 즉 $x+y=4, xy=3$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-4t+3=0, (t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore x=1, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=1$$

(i), (ii)에 의하여 $2x+y$ 의 최댓값은

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

060 답 ③

$2x-y=a$ 에서 $y=2x-a$ 이므로 이를 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2+(2x-a)^2=5, 5x^2-4ax+a^2-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5(a^2-5)=0$$

$$-a^2+25=0, a^2=25$$

$$\therefore a=\pm 5$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=5$

061 답 ③

마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로

마름모의 두 대각선의 길이를 각각 $2x,$

$2y$ ($x>y>0$)라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 2x-2y=4 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } y=x-2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

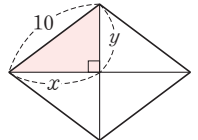
$$x^2+(x-2)^2=100, x^2-2x-48=0$$

$$(x+6)(x-8)=0 \quad \therefore x=-6 \text{ 또는 } x=8$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=8, y=6$

따라서 구하는 마름모의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2x \times 2y = 2xy = 2 \times 8 \times 6 = 96$$



062 답 ②

[방법 1] $x^2+y^2-4x-2y+5=0$ 에서

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=0, (x-2)^2+(y-1)^2=0$$

x, y 가 실수이므로

$$x-2=0, y-1=0 \quad \therefore x=2, y=1$$

$$\therefore xy=2$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-4x+y^2-2y+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(y^2-2y+5) \geq 0$$

$$-y^2+2y-1 \geq 0 \quad \therefore (y-1)^2 \leq 0$$

이때 y 는 실수이므로

$$y-1=0 \quad \therefore y=1$$

이를 ①에 대입하면 $x^2-4x+4=0$

$$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$$

$$\therefore xy=2$$

063 답 $2\sqrt{2}$

$$x-y=2 \text{에서 } y=x-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+4xy+y^2=10$ 에 대입하면

$$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=10$$

$$x^2-2x-1=0 \quad \therefore x=1 \pm \sqrt{2}$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=1-\sqrt{2}, y=-1-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=1+\sqrt{2}, y=-1+\sqrt{2}$$

$$\therefore |x+y|=2\sqrt{2}$$

064 답 -1

$$2x+y=1 \text{에서 } y=-2x+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+y^2=13$ 에 대입하면

$$x^2+(-2x+1)^2=13, 5x^2-4x-12=0$$

$$(5x+6)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{6}{5} \text{ 또는 } x=2$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-\frac{6}{5}, y=\frac{17}{5} \text{ 또는 } x=2, y=-3$$

따라서 $\alpha=2, \beta=-3$ 이므로 $\alpha+\beta=-1$

065 답 3

$$x+2y=5 \text{에서 } x=-2y+5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $2x^2+y^2=19$ 에 대입하면

$$2(-2y+5)^2+y^2=19, 9y^2-40y+31=0$$

$$(y-1)(9y-31)=0 \quad \therefore y=1 \text{ 또는 } y=\frac{31}{9}$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=3, y=1 \text{ 또는 } x=-\frac{17}{9}, y=\frac{31}{9}$$

그런데 $\alpha\beta>0$ 이므로 $\alpha=3, \beta=1 \quad \therefore \alpha\beta=3$

066 답 ④

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2-y^2=-45 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$$2x+y=3 \text{에서 } y=-2x+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2-y^2=-45$ 에 대입하면

$$x^2-(-2x+3)^2=-45, x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

이를 각각 ①에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$$x=-2, y=7 \text{ 또는 } x=6, y=-9$$

(i) $x=-2, y=7$ 을 $ax^2-y^2=-1, x+y=b$ 에 각각 대입하면

$$4a-49=-1, -2+7=b \quad \therefore a=12, b=5$$

(ii) $x=6, y=-9$ 를 $ax^2-y^2=-1, x+y=b$ 에 각각 대입하면

$$36a-81=-1, 6-9=b \quad \therefore a=\frac{20}{9}, b=-3$$

(i), (ii)에 의하여 정수 a, b 는 $a=12, b=5$ 이므로 $a+b=17$

067 답 1

$$(i) x \geq 2y \text{일 때, } \begin{cases} 2x+3y-1=x \\ x^2-y=x \end{cases}$$

$$2x+3y-1=x \text{에서 } y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2-y=x$ 에 대입하면

$$x^2-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=x, 3x^2-2x-1=0$$

$$(3x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

이를 각각 ①에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$$x=-\frac{1}{3}, y=\frac{4}{9} \text{ 또는 } x=1, y=0$$

그런데 $x \geq 2y$ 이므로 $\alpha=1, \beta=0$

$$(ii) x < 2y \text{일 때, } \begin{cases} 2x+3y-1=2y \\ x^2-y=2y \end{cases}$$

$$2x+3y-1=2y \text{에서 } y=-2x+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2-y=2y$ 에 대입하면

$$x^2-(-2x+1)=2(-2x+1)$$

$$x^2+6x-3=0$$

$$\therefore x=-3 \pm 2\sqrt{3}$$

이를 각각 ①에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$$x=-3-2\sqrt{3}, y=7+4\sqrt{3} \text{ 또는 } x=-3+2\sqrt{3}, y=7-4\sqrt{3}$$

그런데 x, y 는 유리수이므로 조건을 만족시키는 해가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=1, \beta=0$ 이므로 $\alpha+\beta=1$

068 답 ①

$$x^2+xy-2y^2=0 \text{에서 } (x+2y)(x-y)=0$$

$$\therefore x=-2y \text{ 또는 } x=y$$

(i) $x=-2y$ 를 $x^2+y^2=20$ 에 대입하면

$$4y^2+y^2=20, y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$$

$$\therefore y=-2 \text{일 때 } x=4, y=2 \text{일 때 } x=-4$$

(ii) $x=y$ 를 $x^2+y^2=20$ 에 대입하면

$$y^2+y^2=20, y^2=10 \quad \therefore y=\pm\sqrt{10}$$

$$\therefore y=-\sqrt{10} \text{일 때 } x=-\sqrt{10}, y=\sqrt{10} \text{일 때 } x=\sqrt{10}$$

(i), (ii)에 의하여 정수 x, y 는 $x=4, y=-2$ 또는 $x=-4, y=2$

이므로 $xy=-8$

$$069 \text{ 답 } \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2-y^2=0 \text{에서 } (x+y)(x-y)=0$$

$$\therefore y=-x \text{ 또는 } y=x$$

(i) $y=-x$ 를 $x^2-xy+y^2=12$ 에 대입하면

$$x^2+x^2+x^2=12, x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$$

$$\therefore x=-2 \text{일 때 } y=2, x=2 \text{일 때 } y=-2$$

(ii) $y=x$ 를 $x^2-xy+y^2=12$ 에 대입하면

$$x^2-x^2+x^2=12, x^2=12 \quad \therefore x=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x=-2\sqrt{3} \text{일 때 } y=-2\sqrt{3}, x=2\sqrt{3} \text{일 때 } y=2\sqrt{3}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$$

070 답 ③

$$x^2+3xy-10^2=0 \text{에서 } (x+5y)(x-2y)=0$$

$$\therefore x=-5y \text{ 또는 } x=2y$$

이때 x, y 가 모두 양수이려면 $x=2y$

이를 $x^2+2xy-y^2=28$ 에 대입하면

$$4y^2+4y^2-y^2=28, y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$$

그런데 x, y 는 양수이므로 $x=4, y=2$

$$\therefore x+y=6$$

071 답 ④

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} xy+(x+y)=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+v=11 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ uv=30 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $v=-u+11$ 을 ②에 대입하면

$$u(-u+11)=30, u^2-11u+30=0$$

$$(u-5)(u-6)=0 \quad \therefore u=5 \text{ 또는 } u=6$$

이를 각각 ①에 대입하면

$$u=5, v=6 \text{ 또는 } u=6, v=5$$

(i) $u=5, v=6$, 즉 $x+y=5, xy=6$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-5t+6=0, (t-2)(t-3)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore x=2, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=2$$

(ii) $u=6, v=5$, 즉 $x+y=6, xy=5$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-6t+5=0, (t-1)(t-5)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

$$\therefore x=1, y=5 \text{ 또는 } x=5, y=1$$

(i), (ii)에 의하여 $x+2y$ 의 최댓값은

$$1+2 \times 5=11$$

072 답 (-2, 2), (2, -2)

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=8 \\ xy=-4 \end{cases}$$

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=8 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ v=-4 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 ①에 대입하면

$$u^2+8=8, u^2=0 \quad \therefore u=0, v=-4$$

즉, $x+y=0, xy=-4$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-4=0, t^2=4 \quad \therefore t=\pm 2$$

$$\therefore x=-2, y=2 \text{ 또는 } x=2, y=-2$$

따라서 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(-2, 2), (2, -2)$ 이다.

073 답 3

$x+y=a$ 에서 $y=-x+a$ 이므로 이를 $x^2-2xy=-3$ 에 대입하면

$$x^2-2x(-x+a)=-3$$

$$3x^2-2ax+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3 \times 3=0, a^2-9=0$$

$$a^2=9 \quad \therefore a=\pm 3$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

074 답 ④

$x-y=2a$ 에서 $y=x-2a$ 이므로 이를 $2x^2-xy=-a^2-a+1$ 에 대입하면

$$2x^2-x(x-2a)=-a^2-a+1$$

$$x^2+2ax+a^2+a-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^2+a-1)<0$$

$$-a+1<0 \quad \therefore a>1$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이다.

075 답 ③

주어진 연립방정식에서 $x+y=3, xy=a-3$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-3t+a-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-3)^2-4(a-3)\geq 0$$

$$-4a+21\geq 0 \quad \therefore a\leq \frac{21}{4}$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 $\frac{21}{4}$ 이다.

076 답 ④

처음 땅의 가로 길이 x , 세로 길이 y 라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=(3\sqrt{5})^2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (x-1)(y+1)=xy+2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②에서 $xy+x-y-1=xy+2$

$$\therefore y=x-3$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2+(x-3)^2=45, x^2-3x-18=0$$

$$(x+3)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=6$$

그런데 $1<x<3\sqrt{5}$ 이므로

$$x=6, y=3$$

따라서 처음 땅의 넓이는

$$6 \times 3=18$$

077 답 ③

두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면

$$\begin{cases} 2\pi r_1+2\pi r_2=12\pi \\ \pi r_1^2+\pi r_2^2=26\pi \end{cases} \quad \text{즉} \quad \begin{cases} r_1+r_2=6 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ r_1^2+r_2^2=26 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $r_2=-r_1+6$ 을 ②에 대입하면

$$r_1^2+(-r_1+6)^2=26$$

$$r_1^2-6r_1+5=0$$

$$(r_1-1)(r_1-5)=0$$

$$\therefore r_1=1 \text{ 또는 } r_1=5$$

이를 각각 ①에 대입하면

$$r_1=1, r_2=5 \text{ 또는 } r_1=5, r_2=1$$

따라서 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 5이다.

078 답 ②

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10^2 \\ \frac{1}{2}xy = 24 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$$

이 연립방정식을 변형하면 $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 $\begin{cases} u^2 - 2v = 100 \\ v = 48 \end{cases}$ ㉠

㉠을 ㉠에 대입하면

$$u^2 - 96 = 100, u^2 = 196 \quad \therefore u = \pm 14$$

이때 $x+y > 0$ 이므로 $u = 14$

따라서 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은 14 cm이다.

079 답 ①

[방법 1] $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 0, (x+1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x+1=0, y+3=0$

$$\therefore x = -1, y = -3 \quad \therefore x+y = -4$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y + 10 = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (y^2 + 6y + 10) \geq 0$$

$$-y^2 - 6y - 9 \geq 0 \quad \therefore (y+3)^2 \leq 0$$

이때 y 는 실수이므로 $y+3=0 \quad \therefore y = -3$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0$

$$\therefore x = -1 \quad \therefore x+y = -4$$

080 답 5

$5x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서

$$(4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) = 0, (2x-y)^2 + (x-1)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $2x-y=0, x-1=0$

$$\therefore x = 1, y = 2 \quad \therefore x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5$$

081 답 ④

$xy - x - y - 1 = 0$ 에서

$$x(y-1) - (y-1) - 2 = 0 \quad \therefore (x-1)(y-1) = 2$$

(i) $x-1 = -2, y-1 = -1$ 일 때, $x = -1, y = 0$

(ii) $x-1 = -1, y-1 = -2$ 일 때, $x = 0, y = -1$

(iii) $x-1 = 1, y-1 = 2$ 일 때, $x = 2, y = 3$

(iv) $x-1 = 2, y-1 = 1$ 일 때, $x = 3, y = 2$

(i)~(iv)에 의하여 xy 의 최댓값은 $2 \times 3 = 6$

082 답 3

$x^2 - xy + y + 3 = 0$ 에서 $xy - y - x^2 - 3 = 0$

$$y(x-1) - (x-1)(x+1) = 4 \quad \therefore (x-1)(y-x-1) = 4$$

x, y 가 자연수이므로 $x-1 \geq 0$

(i) $x-1=1, y-x-1=4$ 일 때, $x=2, y=7$

(ii) $x-1=2, y-x-1=2$ 일 때, $x=3, y=6$

(iii) $x-1=4, y-x-1=1$ 일 때, $x=5, y=7$

(i), (ii), (iii)에 의하여 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 7),$

$(3, 6), (5, 7)$ 의 3개이다.

083 답 ①

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ 라 할 때,

$f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 4)$$

$$= (x-1)(x+2)(x-2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x-1)(x-2) = 0$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 합은 $1+2=3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

084 답 $-2+3\sqrt{2}$

$x^2 + 4x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-21)(t-5) + 63 = 0, t^2 - 26t + 168 = 0$$

$$(t-12)(t-14) = 0 \quad \therefore t = 12 \text{ 또는 } t = 14$$

(i) $t = 12$ 일 때

$$x^2 + 4x = 12 \text{에서 } x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 2$$

(ii) $t = 14$ 일 때

$$x^2 + 4x = 14 \text{에서 } x^2 + 4x - 14 = 0 \quad \therefore x = -2 \pm 3\sqrt{2}$$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 가장 큰 근은 $-2+3\sqrt{2}$ 이다.

085 답 ①

$x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ 에서 $(x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = 0$

$$(x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = 0, (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2} \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{2}$$

086 답 ②

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$(t+6)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 1$$

(i) $t = -6$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = -6 \text{에서 } x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \therefore x = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

(ii) $t = 1$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{에서 } x^2 - x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$(-3-2\sqrt{2}) + (-3+2\sqrt{2}) = -6$$

087 [답] ④

-1, 1이 주어진 방정식의 근이므로 $x=-1$, $x=1$ 을 각각 대입하면
 $1-a-7-1+b=0$, $1+a-7+1+b=0$

$$\therefore a-b=-7, a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$$

$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ 이라 할 때, $f(-1)=0$, $f(1)=0$ 이므로
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & \\ & & -1 & 2 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & -5 & 6 & 0 & \\ & & 1 & -1 & -6 & & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-x-6) \\ = (x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

이때 -1, 1이 아닌 나머지 두 근은 -2, 3이므로 $ab=-6$

$$\therefore \frac{a\beta}{ab} = \frac{-6}{-1 \times 6} = 1$$

088 [답] ④

$$f(x)=x^3-2kx^2+(k^2+2)x-2k \quad k \begin{array}{r|rrrr} 1 & -2k & k^2+2 & -2k & \\ & & k & -k^2 & 2k \\ \hline 1 & -k & 2 & 0 & \end{array}$$

라 할 때, $f(k)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-k)(x^2-kx+2)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-k)(x^2-kx+2)=0$$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 중근을 갖거나 $x=k$ 를 근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-k)^2-4 \times 1 \times 2=0$$

$$k^2-8=0 \quad k^2=8$$

$$\therefore k=\pm 2\sqrt{2}$$

(ii) 방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 $x=k$ 를 근으로 가질 때

$$k^2-k^2+2 \neq 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii)에 의하여 양수 k 의 값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

089 [답] ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$$

$$=(-2)^3-(\alpha+\beta+\gamma) \times (-2)^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \times (-2)$$

$$-\alpha\beta\gamma$$

$$=-8-(-2) \times 4+(-3) \times (-2)-(-1)=7$$

090 [답] 24

주어진 삼차방정식의 세 근을 α , 2α , β ($\alpha \neq 0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+\beta=3 \quad \therefore \beta=3-3\alpha$$

즉, 세 근이 α , 2α , $3-3\alpha$ 이므로

$$\alpha \times 2\alpha + 2\alpha \times (3-3\alpha) + (3-3\alpha) \times \alpha = -10$$

$$7\alpha^2-9\alpha-10=0, (7\alpha+5)(\alpha-2)=0$$

$$\therefore \alpha=-\frac{5}{7} \text{ 또는 } \alpha=2$$

이때 α 는 정수이므로 $\alpha=2$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근은 2, 4, -3이므로

$$2 \times 4 \times (-3) = -k \quad \therefore k=24$$

091 [답] ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{1} = 1$$

따라서 구하는 방정식은 $x^3-3x^2+2x-1=0$

092 [답] ②

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $-1+\sqrt{3}i$ 이면 $-1-\sqrt{3}i$ 도 근이다.

나머지 한 근이 c 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1+\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)+c=3$$

$$(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)c+c(-1+\sqrt{3}i)=a$$

$$(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)c=-b$$

$$\therefore a=-6, b=-20, c=5$$

$$\therefore a+b+c=-21$$

093 [답] ④

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이고 $\bar{\omega}$ 도 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\bar{\omega}^3=1, \bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\bar{\omega}^2}{1+\omega} + \frac{\omega^2}{1+\bar{\omega}} &= \frac{\bar{\omega}^2}{-\omega^2} + \frac{\omega^2}{-\bar{\omega}^2} \\ &= -\frac{\bar{\omega}^4+\omega^4}{\omega^2\bar{\omega}^2} \\ &= -\frac{\bar{\omega}+\omega}{(\omega\bar{\omega})^2} \\ &= -\frac{-1}{1}=1 \end{aligned}$$

094 답 4

상자 밑면의 가로 길이가 $(20-2x)$ cm, 세로 길이가 $(10-2x)$ cm이므로

$$(20-2x) \times (10-2x) \times x = 96$$

$$x^3 - 15x^2 + 50x - 24 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 50x - 24 \text{ 할 때, } f(4) = 0 \text{ 이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{ 를 인수분해하면}$$

4	1	-15	50	-24
		4	-44	24
1	-11	6	0	

$$f(x) = (x-4)(x^2 - 11x + 6)$$

$$\text{즉, 주어진 방정식은 } (x-4)(x^2 - 11x + 6) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = \frac{11 \pm \sqrt{97}}{2}$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x = 4$

095 답 ③

$$3x - y = 10 \text{ 에서 } y = 3x - 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2 - 2y = 12$ 에 대입하면

$$x^2 - 2(3x - 10) = 12, \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x = 2, y = -4 \text{ 또는 } x = 4, y = 2$$

$$\text{따라서 } \alpha = 4, \beta = 2 \text{ 이므로 } \alpha + \beta = 6$$

096 답 ④

$$2x^2 + xy - y^2 = 0 \text{ 에서 } (x+y)(2x-y) = 0$$

$$\therefore y = -x \text{ 또는 } y = 2x$$

이때 x, y 가 모두 음의 정수이려면 $y = 2x$

이를 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 - 4x^2 + 8x^2 = 5, \quad x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1$$

$$x, y \text{ 는 음의 정수이므로 } x = -1, y = -2$$

$$\therefore x + y = -3$$

097 답 ②

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) - 2xy = 2 \\ (x+y)^2 - xy = 1 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2 + u - 2v = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ u^2 - v = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②에서 $v = u^2 - 1$ 을 ①에 대입하면

$$u^2 + u - 2(u^2 - 1) = 2, \quad u^2 - u = 0$$

$$u(u-1) = 0 \quad \therefore u = 0 \text{ 또는 } u = 1$$

이를 각각 ①에 대입하면

$$u = 0, v = -1 \text{ 또는 } u = 1, v = 0$$

(i) $u = 0, v = -1$, 즉 $x+y=0, xy=-1$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - 1 = 0 \quad \therefore t = \pm 1$$

$$\therefore x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = 1, y = -1$$

(ii) $u = 1, v = 0$, 즉 $x+y=1, xy=0$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - t = 0, \quad t(t-1) = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 1$$

$$\therefore x = 0, y = 1 \text{ 또는 } x = 1, y = 0$$

(i), (ii)에 의하여 $x+2y$ 의 최댓값은

$$0 + 2 \times 1 = 2$$

098 답 ⑤

$2x+y=a$ 에서 $y = -2x+a$ 이므로 이를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x+a)^2 = 4, \quad 5x^2 - 4ax + a^2 - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2a)^2 - 5(a^2 - 4) = 0$$

$$-a^2 + 20 = 0, \quad a^2 = 20$$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{5}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 2\sqrt{5}$

099 답 ④

직사각형의 가로 길이를 x cm, 세로 길이를 y cm 라 하면

$$\begin{cases} 2x+2y=34 \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=169 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 $y = -x + 17$ 을 ②에 대입하면

$$x^2 + (-x+17)^2 = 169, \quad x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$(x-5)(x-12) = 0 \quad \therefore x = 5 \text{ 또는 } x = 12$$

이를 각각 ①에 대입하면

$$x = 5, y = 12 \text{ 또는 } x = 12, y = 5$$

그런데 $x > y$ 이므로 $x = 12, y = 5$

따라서 직사각형의 가로 길이는 12 cm 이다.

100 답 ①

방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y-1)^2 - (2y^2 + 2) \geq 0$$

$$-y^2 - 2y - 1 \geq 0 \quad \therefore (y+1)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{ 는 실수이므로 } y+1=0 \quad \therefore y=-1$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x+2)^2 = 0 \quad \therefore x = -2$$

$$\therefore x + y = -3$$

101 답 ⑤

$$x^2 - xy - 2x + 2y - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x(x-y) - 2(x-y) - 3 = 0 \quad \therefore (x-2)(x-y) = 3$$

(i) $x-2=-3, x-y=-1$ 일 때, $x=-1, y=0$

(ii) $x-2=-1, x-y=-3$ 일 때, $x=1, y=4$

(iii) $x-2=1, x-y=3$ 일 때, $x=3, y=0$

(iv) $x-2=3, x-y=1$ 일 때, $x=5, y=4$

(i)~(iv)에 의하여 xy 의 최댓값은 $5 \times 4 = 20$



001 답 ①

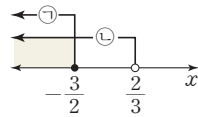
$$3x+2 \leq x-1 \text{에서 } 2x \leq -3 \quad \therefore x \leq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x+1 > 2(2x-1)+1 \text{에서 } x+1 > 4x-2+1$$

$$-3x > -2 \quad \therefore x < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$x \leq -\frac{3}{2}$$



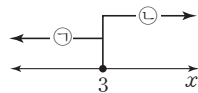
002 답 ③

$$\textcircled{1} \quad x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$x = 3$$

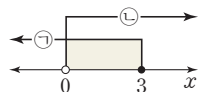


$$\textcircled{2} \quad 15x \leq 5x+30 \text{에서 } 10x \leq 30 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

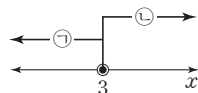
$$0 < x \leq 3$$



$$\textcircled{3} \quad 2(x-1) \leq 4 \text{에서 } x-1 \leq 2 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x+1 > 4 \text{에서 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



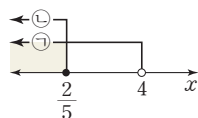
$$\textcircled{4} \quad 2x+5 > 5x-7 \text{에서 } -3x > -12 \quad \therefore x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$6-2(x+2) \geq 3x \text{에서 } 6-2x-4 \geq 3x$$

$$-5x \geq -2 \quad \therefore x \leq \frac{2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$x \leq \frac{2}{5}$$



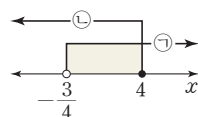
$$\textcircled{5} \quad \frac{2x+5}{4} + \frac{x-3}{2} > -1 \text{에서 } 2x+5+2(x-3) > -4$$

$$2x+5+2x-6 > -4, 4x > -3 \quad \therefore x > -\frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2x-2 \leq 10-x \text{에서 } 3x \leq 12 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$-\frac{3}{4} < x \leq 4$$



따라서 해가 없는 것은 ③이다.

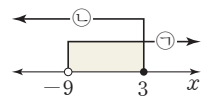
003 답 12

$$2x-30 < 5x-3 \text{에서 } -3x < 27 \quad \therefore x > -9 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$5x-3 \leq 6(5-x) \text{에서 } 5x-3 \leq 30-6x$$

$$11x \leq 33 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-9 < x \leq 3$ 따라서 정수 x 는 $-8, -7, -6, \dots, 3$ 의 12개이다.



004 답 ③

$$2x+5 \leq 3(x+1) \text{에서 } 2x+5 \leq 3x+3 \quad \therefore x \geq 2$$

$$4x \leq 2x+a+1 \text{에서 } 2x \leq a+1 \quad \therefore x \leq \frac{a+1}{2}$$

주어진 연립부등식의 해가 $b \leq x \leq 4$ 이므로

$$\frac{a+1}{2} = 4, b = 2$$

$$\text{따라서 } a=7, b=2 \text{이므로 } a-b=5$$

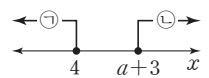
005 답 $a > 1$

$$3x-7 \leq 5 \text{에서 } 3x \leq 12 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x-3 \geq a \text{에서 } x \geq a+3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$$4 < a+3 \quad \therefore a > 1$$

006 답 $-4 < a \leq -1$

$$1-x \geq -3 \text{에서 } -x \geq -4 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$5x+a > 2(x-2) \text{에서 } 5x+a > 2x-4$$

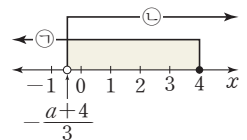
$$3x > -a-4 \quad \therefore x > -\frac{a+4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수

x 가 5개이라면 오른쪽 그림에서

$$-1 \leq -\frac{a+4}{3} < 0, -3 \leq -a-4 < 0$$

$$1 \leq -a < 4 \quad \therefore -4 < a \leq -1$$



007 답 15개

과자를 x 개 사면 사탕은 $(20-x)$ 개 살 수 있으므로

$$\begin{cases} x > 20-x \\ 700x+500(20-x) \leq 13000 \end{cases}$$

$$x > 20-x \text{에서 } 2x > 20$$

$$\therefore x > 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$700x+500(20-x) \leq 13000 \text{에서}$$

$$700x+10000-500x \leq 13000, 200x \leq 3000$$

$$\therefore x \leq 15 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$10 < x \leq 15$$

따라서 과자는 최대 15개까지 살 수 있다.

008 답 ④

$$|2x-3| < 7 \text{에서 } -7 < 2x-3 < 7$$

$$-4 < 2x < 10 \quad \therefore -2 < x < 5$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 4$ 의 6개이다.

009 답 ②

$|2x-1| < x+4$ 에서 $2x-1=0$, 즉 $x=\frac{1}{2}$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때

$$\begin{aligned} -(2x-1) &< x+4, -2x+1 < x+4 \\ -3x &< 3 \quad \therefore x > -1 \end{aligned}$$

그런데 $x < \frac{1}{2}$ 이므로 $-1 < x < \frac{1}{2}$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때

$$2x-1 < x+4 \quad \therefore x < 5$$

그런데 $x \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} \leq x < 5$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-1 < x < 5$
따라서 정수 x 의 최솟값은 0이다.

010 답 ①

$|x-2| + |x+2| < 6$ 에서 $x+2=0$, $x-2=0$, 즉 $x=-2$, $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -2$ 일 때

$$\begin{aligned} -(x-2) - (x+2) &< 6, -2x < 6 \quad \therefore x > -3 \\ \text{그런데 } x < -2 \text{이므로 } -3 < x < -2 \end{aligned}$$

(ii) $-2 \leq x < 2$ 일 때

$$\begin{aligned} -(x-2) + (x+2) &< 6 \text{에서 } 0 < 6 \text{이므로 해는 모든 실수이다.} \\ \text{그런데 } -2 \leq x < 2 \text{이므로 } -2 \leq x < 2 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} (x-2) + (x+2) &< 6, 2x < 6 \quad \therefore x < 3 \\ \text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq x < 3 \end{aligned}$$

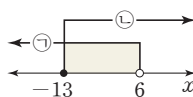
(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-3 < x < 3$
따라서 $a=-3$, $b=3$ 이므로 $ab=-9$

011 답 ⑤

$$\begin{aligned} 3(x-1) &< 2x+3 \text{에서 } 3x-3 < 2x+3 \\ \therefore x &< 6 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2+2(x-2) &\leq 3x+11 \text{에서 } 2+2x-4 \leq 3x+11 \\ -x &\leq 13 \quad \therefore x \geq -13 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $-13 \leq x < 6$



따라서 $a=-13$, $b=6$ 이므로 $b-a=19$

012 답 ①

$$\begin{aligned} 4x - (3x-5) &< 2x \text{에서 } 4x-3x+5 < 2x \\ -x &< -5 \quad \therefore x > 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x+6 &\geq 7(x-2) \text{에서 } 5x+6 \geq 7x-14 \\ -2x &\geq -20 \quad \therefore x \leq 10 \end{aligned}$$

따라서 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 ①과 같다.

013 답 -3

$$1.5x+1 < 0.6x-0.8 \text{에서 } 15x+10 < 6x-8$$

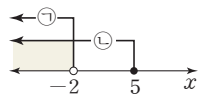
$$9x < -18 \quad \therefore x < -2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{x+3}{4} \geq x + \frac{1-2x}{3} \text{에서 } 3(x+3) \geq 12x+4(1-2x)$$

$$3x+9 \geq 12x+4-8x, -x \geq -5$$

$$\therefore x \leq 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$$x < -2$$

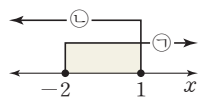
따라서 정수 x 의 최댓값은 -3이다.

014 답 ④

$$\textcircled{1} \quad x \geq -2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2x+1 \leq 3 \text{에서 } 2x \leq 2 \quad \therefore x \leq 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$$-2 \leq x < 1$$

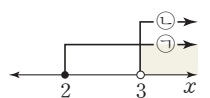
$$\textcircled{2} \quad 1 \leq x-1 \text{에서 } -x \leq -2$$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$3x < 5x-6 \text{에서 } -2x < -6$$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



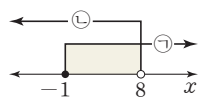
$$x > 3$$

$$\textcircled{3} \quad 3x-2 \geq 2x-3 \text{에서 } x \geq -1 \quad \dots\dots ㉤$$

$$2x+5 > 3(x-1) \text{에서 } 2x+5 > 3x-3$$

$$-x > -8 \quad \therefore x < 8 \quad \dots\dots ㉥$$

㉤, ㉥을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$$-1 \leq x < 8$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{x+1}{4} - 1 \geq \frac{x-2}{3} \text{에서 } 3(x+1) - 12 \geq 4(x-2)$$

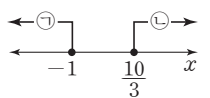
$$3x+3-12 \geq 4x-8, -x \geq 1$$

$$\therefore x \leq -1 \quad \dots\dots ㉦$$

$$10x-20 \geq x+10 \text{에서 } 9x \geq 30$$

$$\therefore x \geq \frac{10}{3} \quad \dots\dots ㉧$$

㉦, ㉧을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



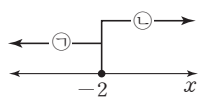
$$\textcircled{5} \quad 4x+10 \leq -2(x+1) \text{에서 } 4x+10 \leq -2x-2$$

$$6x \leq -12 \quad \therefore x \leq -2 \quad \dots\dots ㉨$$

$$0.5x-0.6 \geq 0.4x-0.8 \text{에서 } 5x-6 \geq 4x-8$$

$$\therefore x \geq -2 \quad \dots\dots ㉩$$

㉨, ㉩을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$$x = -2$$

따라서 해가 없는 것은 ④이다.

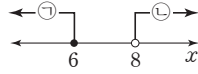
015 **답** 해는 없다.

$$0.2(x-1) \leq 1 \text{에서 } 2(x-1) \leq 10, 2x-2 \leq 10$$

$$2x \leq 12 \quad \therefore x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2x-12 > x-4 \text{에서 } x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



016 **답** $x=3$

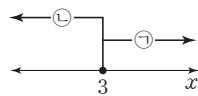
$$\frac{x+1}{4} - \frac{x+2}{5} \geq 0 \text{에서 } 5(x+1) - 4(x+2) \geq 0$$

$$5x+5-4x-8 \geq 0 \quad \therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{5-3x}{2} + x \geq 1 \text{에서 } 5-3x+2x \geq 2$$

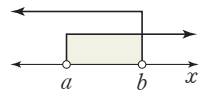
$$-x \geq -3 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $x=3$

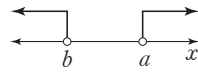


017 **답** ㄱ, ㄷ

ㄱ, ㄷ. $a < b$ 이면 연립부등식의 해는 $a < x < b$



ㄴ, ㄹ. $a > b$ 이면 연립부등식의 해는 없다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



018 **답** $2 < x \leq 10$

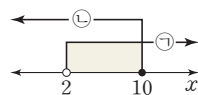
$$2(x+1) < 4x-2 \text{에서 } 2x+2 < 4x-2$$

$$-2x < -4 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$4x-2 \leq 3(x+2)+2 \text{에서 } 4x-2 \leq 3x+6+2$$

$$\therefore x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $2 < x \leq 10$



019 **답** ②

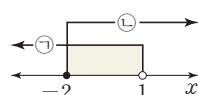
$$0.4x - 0.6 < -\frac{1}{2}x + 0.3 \text{에서 } 4x - 6 < -5x + 3$$

$$9x < 9 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$-\frac{1}{2}x + 0.3 \leq \frac{3}{10}x + 1.9 \text{에서 } -5x + 3 \leq 3x + 19$$

$$-8x \leq 16 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-2 \leq x < 1$



따라서 $a=-2, b=1$ 이므로 $ab=-2$

020 **답** -3

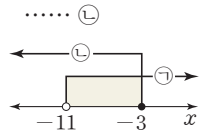
$$\frac{1+2x}{3} < \frac{3x+5}{4} \text{에서 } 4(1+2x) < 3(3x+5)$$

$$4+8x < 9x+15, -x < 11 \quad \therefore x > -11 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{3x+5}{4} \leq \frac{x+1}{2} \text{에서 } 3x+5 \leq 2(x+1)$$

$$3x+5 \leq 2x+2 \quad \therefore x \leq -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-11 < x \leq -3$



따라서 구하는 x 의 최댓값은 -3이다.

021 **답** ①

$$5x-a \leq 4x \text{에서 } x \leq a$$

$$x+1 < 2x+2 \text{에서 } -x < 1 \quad \therefore x > -1$$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 2$ 이므로

$$a=2, b=-1 \quad \therefore ab=-2$$

022 **답** 3

$$2x-1 \leq 5 \text{에서 } 2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$$

$$3x+2a+2 > 5 \text{에서 } 3x > -2a+3 \quad \therefore x > \frac{-2a+3}{3}$$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $-1 < x \leq 3$ 이므로

$$\frac{-2a+3}{3} = -1, -2a = -6 \quad \therefore a=3$$

023 **답** ②

$$2x+b \geq x-1+a \text{에서 } x \geq a-b-1$$

$$3x-a \leq 5+b \text{에서 } 3x \leq a+b+5 \quad \therefore x \leq \frac{a+b+5}{3}$$

주어진 연립부등식의 해가 $x=-4$ 이므로

$$a-b-1=-4, \frac{a+b+5}{3}=-4 \text{에서}$$

$$a-b=-3, a+b=-17$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-10, b=-7$

$$\therefore a-2b=4$$

024 **답** $-4 \leq x < 2$

$$2x-a < x+a \text{에서 } x < 2a$$

$$2x-a \leq 3x-b \text{에서 } x \geq b-a$$

주어진 연립부등식의 해가 $-10 \leq x < 2$ 이므로

$$b-a=-10, 2a=2 \quad \therefore a=1, b=-9$$

즉, 원래의 부등식은 $2x-1 < x+1 \leq 3x+9$ 이므로

$$2x-1 < x+1 \text{에서 } x < 2$$

$$x+1 \leq 3x+9 \text{에서 } -2x \leq 8 \quad \therefore x \geq -4$$

따라서 원래의 부등식의 해는 $-4 \leq x < 2$

025 **답** ⑤

$$3x-a \leq 2x \text{에서 } x \leq a$$

$$2x < bx+2 \text{에서 } (2-b)x < 2$$

이때 주어진 부등식의 해가 $-1 < x \leq 2$ 이므로

$$a=2 \text{이고, } 2-b < 0 \text{이면서 } \frac{2}{2-b} = -1 \text{이다.}$$

따라서 $a=2, b=4$ 이므로 $a+b=6$

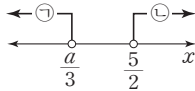
026 답 $a \leq \frac{15}{2}$

$3x - 2a < -a$ 에서 $3x < a \quad \therefore x < \frac{a}{3}$ ㉠

$-2x + 5 < 0$ 에서 $-2x < -5 \quad \therefore x > \frac{5}{2}$ ㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면
오른쪽 그림에서

$\frac{a}{3} \leq \frac{5}{2} \quad \therefore a \leq \frac{15}{2}$



027 답 ⑤

$\frac{3-2x}{2} - a \leq 0$ 에서 $3-2x \leq 2a$

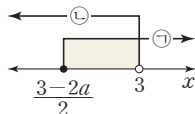
$-2x \leq 2a-3 \quad \therefore x \geq \frac{3-2a}{2}$ ㉠

$3x-4 > 5x-10$ 에서 $-2x > -6 \quad \therefore x < 3$ ㉡

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽
그림에서

$\frac{3-2a}{2} < 3, 3-2a < 6 \quad \therefore a > -\frac{3}{2}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -1 이다.



028 답 $a \leq 6$

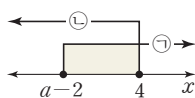
$2x + a - 6 \leq 3x - 4$ 에서

$-x \leq -a + 2 \quad \therefore x \geq a - 2$ ㉠

$3x - 4 \leq 12 - x$ 에서 $4x \leq 16 \quad \therefore x \leq 4$ ㉡

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그
림에서

$a - 2 \leq 4 \quad \therefore a \leq 6$



029 답 $-5 \leq a < -3$

$3(2x+5) \geq 14(x+1)$ 에서 $6x+15 \geq 14x+14$

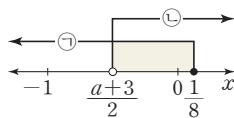
$-8x \geq -1 \quad \therefore x \leq \frac{1}{8}$ ㉠

$2x-5 > a-2$ 에서 $2x > a+3 \quad \therefore x > \frac{a+3}{2}$ ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수
 x 가 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서

$-1 \leq \frac{a+3}{2} < 0, -2 \leq a+3 < 0$

$\therefore -5 \leq a < -3$



030 답 ③

$3x+1 < 2(3-x)$ 에서 $3x+1 < 6-2x$

$5x < 5 \quad \therefore x < 1$ ㉠

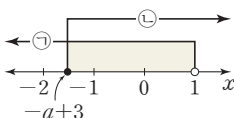
$x-a \leq 2x-3$ 에서 $-x \leq a-3$

$\therefore x \geq -a+3$ ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수
 x 가 -1 과 0 뿐이려면 오른쪽 그림에서

$-2 < -a+3 \leq -1, -5 < -a \leq -4$

$\therefore 4 \leq a < 5$



031 답 ②

$2x-a < \frac{3-x}{3}$ 에서 $6x-3a < 3-x$

$7x < 3a+3 \quad \therefore x < \frac{3a+3}{7}$ ㉠

$\frac{3-x}{3} < \frac{2x+1}{2}$ 에서 $6-2x < 6x+3$

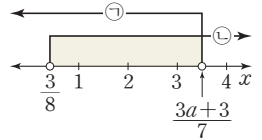
$-8x < -3 \quad \therefore x > \frac{3}{8}$ ㉡

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가
3개이려면 오른쪽 그림에서

$3 < \frac{3a+3}{7} \leq 4, 21 < 3a+3 \leq 28$

$\therefore 6 < a \leq \frac{25}{3}$

따라서 정수 x 는 $7, 8$ 이므로 구하는 합은 $7+8=15$



032 답 $1 \leq x \leq 7$

색연필을 x 자루 사면 연필은 $(13-x)$ 자루 살 수 있으므로

$4100 \leq 500x + 300(13-x) \leq 5300$

$4100 \leq 200x + 3900 \leq 5300, 200 \leq 200x \leq 1400$

$\therefore 1 \leq x \leq 7$

033 답 $9 < x < 18$

세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(36-2x)$ cm이다.

(i) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때

$36-2x \leq x$ 에서 $-3x \leq -36 \quad \therefore x \geq 12$ ㉠

또 $x < x + (36-2x)$ 이어야 하므로

$2x < 36 \quad \therefore x < 18$ ㉡

㉠, ㉡에서 $12 \leq x < 18$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 $(36-2x)$ cm일 때

$x \leq 36-2x$ 에서 $3x \leq 36 \quad \therefore x \leq 12$ ㉢

또 $36-2x < x+x$ 이어야 하므로

$-4x < -36 \quad \therefore x > 9$ ㉣

㉢, ㉣에서 $9 < x \leq 12$

(i), (ii)에 의하여 삼각형을 만들 수 있는 x 의 값의 범위는

$9 < x < 18$

034 답 110 g

식품 A의 섭취량을 x g이라 하면 식품 B의 섭취량은 $(300-x)$ g
이므로

$\begin{cases} \frac{150}{100}x + \frac{200}{100}(300-x) \geq 5000 & \dots\dots ㉠ \\ \frac{23}{100}x + \frac{13}{100}(300-x) \geq 50 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{150}{100}x + \frac{200}{100}(300-x) \geq 5000 & \dots\dots ㉠ \\ \frac{23}{100}x + \frac{13}{100}(300-x) \geq 50 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $15x + 20(300-x) \geq 5000, 15x + 6000 - 20x \geq 5000$

$-5x \geq -1000 \quad \therefore x \leq 200$

㉡에서 $23x + 13(300-x) \geq 5000, 23x + 3900 - 13x \geq 5000$

$10x \geq 1100 \quad \therefore x \geq 110$

즉, 연립부등식의 해는 $110 \leq x \leq 200$

따라서 식품 A의 최소 섭취량은 110 g이다.

035 답 125

5%의 소금물 200g에 들어 있는 소금의 양은

$$200 \times \frac{5}{100} = 10 \text{ (g)}$$

더 넣어야 하는 소금의 양을 x g이라 하면

$$\frac{20}{100} \times (200+x) \leq 10+x \leq \frac{24}{100} \times (200+x)$$

$$\frac{20}{100} \times (200+x) \leq 10+x \text{에서}$$

$$200+x \leq 50+5x, -4x \leq -150 \quad \therefore x \geq \frac{75}{2}$$

$$10+x \leq \frac{24}{100} \times (200+x) \text{에서}$$

$$1000+100x \leq 4800+24x, 76x \leq 3800 \quad \therefore x \leq 50$$

즉, 부등식의 해는 $\frac{75}{2} \leq x \leq 50$

따라서 $a = \frac{75}{2}$, $b = 50$ 이므로 $2a+b=125$

036 답 ③

의자의 개수를 x 라 하면 학생은 $(3x+15)$ 명이므로

$$5(x-2)+1 \leq 3x+15 \leq 5(x-2)+5 \text{에서}$$

$$5x-9 \leq 3x+15 \leq 5x-5$$

$$5x-9 \leq 3x+15 \text{에서 } 2x \leq 24 \quad \therefore x \leq 12$$

$$3x+15 \leq 5x-5 \text{에서 } -2x \leq -20 \quad \therefore x \geq 10$$

즉, 부등식의 해는 $10 \leq x \leq 12$

따라서 의자의 최대 개수는 12이다.

037 답 ④

$$|3x+1| < 8 \text{에서 } -8 < 3x+1 < 8$$

$$-9 < 3x < 7 \quad \therefore -3 < x < \frac{7}{3}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

038 답 5

$$|2x+a| \geq 7 \text{에서 } 2x+a \leq -7 \text{ 또는 } 2x+a \geq 7$$

$$\therefore x \leq \frac{-7-a}{2} \text{ 또는 } x \geq \frac{7-a}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $x \leq -5$ 또는 $x \geq b$ 이므로

$$\frac{-7-a}{2} = -5, \frac{7-a}{2} = b \quad \therefore a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=5$$

039 답 ⑤

$$1 < |x-2| \text{에서 } x-2 < -1 \text{ 또는 } x-2 > 1$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$|x-2| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x-2 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

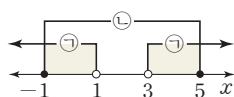
①, ②를 수직선 위에 나타내면 오른쪽

그림과 같으므로 부등식의 해는

$$-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 5$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 4, 5$ 이므로 구하는 합은

$$-1+0+4+5=8$$



040 답 3

$b < 0$ 이면 $|ax-1| < b$ 의 해가 존재하지 않으므로 $b > 0$

이때 $ab < 0$ 이므로 $a < 0$

$$|ax-1| < b \text{에서 } -b < ax-1 < b, -b+1 < ax < b+1$$

$$\therefore \frac{b+1}{a} < x < \frac{-b+1}{a} \quad (\because a < 0)$$

주어진 부등식의 해가 $-5 < x < 3$ 이므로

$$\frac{b+1}{a} = -5, \frac{-b+1}{a} = 3$$

$$\therefore 5a+b=-1, 3a+b=1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=-1, b=4 \quad \therefore a+b=3$$

041 답 ①

$|x-1| < 4x-1$ 에서 $x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-1) < 4x-1, -x+1 < 4x-1$$

$$-5x < -2 \quad \therefore x > \frac{2}{5}$$

$$\text{그런데 } x < 1 \text{이므로 } \frac{2}{5} < x < 1$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x-1 < 4x-1, -3x < 0 \quad \therefore x > 0$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } x \geq 1$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x > \frac{2}{5}$

따라서 정수 x 의 최솟값은 1이다.

042 답 ③

$2|x-2|+2x \geq 7$ 에서 $x-2=0$, 즉 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 2$ 일 때

$$-2(x-2)+2x \geq 7 \text{에서 } 0 \times x \geq 3 \text{이므로 해는 없다.}$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$2(x-2)+2x \geq 7, 4x \geq 11 \quad \therefore x \geq \frac{11}{4}$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } x \geq \frac{11}{4}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x \geq \frac{11}{4}$

$$\therefore a = \frac{11}{4}$$

043 답 ②

$|4-x| \leq 6-x$ 에서 $4-x=0$, 즉 $x=4$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 4$ 일 때

$$4-x \leq 6-x \text{에서 } 0 \times x \leq 2 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } x < 4 \text{이므로 } x < 4$$

(ii) $x \geq 4$ 일 때

$$-(4-x) \leq 6-x, x-4 \leq 6-x$$

$$2x \leq 10 \quad \therefore x \leq 5$$

$$\text{그런데 } x \geq 4 \text{이므로 } 4 \leq x \leq 5$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x \leq 5$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

044 답 ②

$|x+1| \geq 2|x-1|$ 에서 $x+1=0$, $x-1=0$, 즉 $x=-1$, $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때

$$-(x+1) \geq -2(x-1), -x-1 \geq -2x+2$$

$$\therefore x \geq 3$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때

$$x+1 \geq -2(x-1), x+1 \geq -2x+2$$

$$3x \geq 1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{3}$$

그런데 $-1 \leq x < 1$ 이므로 $\frac{1}{3} \leq x < 1$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$x+1 \geq 2(x-1), x+1 \geq 2x-2$$

$$-x \geq -3 \quad \therefore x \leq 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

045 답 ③

$|x-3| + 2|x+1| \geq 5$ 에서 $x+1=0$, $x-3=0$, 즉 $x=-1$, $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때

$$-(x-3) - 2(x+1) \geq 5, -x+3-2x-2 \geq 5$$

$$-3x \geq 4 \quad \therefore x \leq -\frac{4}{3}$$

그런데 $x < -1$ 이므로 $x \leq -\frac{4}{3}$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$-(x-3) + 2(x+1) \geq 5, -x+3+2x+2 \geq 5 \quad \therefore x \geq 0$$

그런데 $-1 \leq x < 3$ 이므로 $0 \leq x < 3$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$x-3 + 2(x+1) \geq 5, x-3+2x+2 \geq 5$$

$$3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $x \geq 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x \leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x \geq 0$

046 답 ④

$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 이므로 주어진 부등식은

$$|x-2| + |x-1| < 4$$

$x-1=0$, $x-2=0$, 즉 $x=1$, $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-2) - (x-1) < 4, -x+2-x+1 < 4$$

$$-2x < 1 \quad \therefore x > -\frac{1}{2}$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-\frac{1}{2} < x < 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때

$$-(x-2) + (x-1) < 4 \text{에서 } 0 < x < 3 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 $1 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x-2) + (x-1) < 4, 2x < 7 \quad \therefore x < \frac{7}{2}$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < \frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

047 답 ①

$$3x-6 \leq 4-x \text{에서 } 4x \leq 10 \quad \therefore x \leq \frac{5}{2}$$

$$3x+1 > 2x-3 \text{에서 } x > -4$$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-4 < x \leq \frac{5}{2}$

따라서 $a = -4$, $b = \frac{5}{2}$ 이므로 $a+b = -\frac{3}{2}$

048 답 ④

$$3(2x-1) \leq 4x+1 \text{에서 } 6x-3 \leq 4x+1$$

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$$

$$1-0.2x \leq x+2.2 \text{에서 } 10-2x \leq 10x+22$$

$$-12x \leq 12 \quad \therefore x \geq -1$$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 2$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$$-1+0+1+2=2$$

049 답 $x = -6$

$$5x-2 \geq 4x-8 \text{에서 } x \geq -6$$

$$\frac{x-2}{3} \leq \frac{x}{4} - \frac{7}{6} \text{에서 } 4(x-2) \leq 3x-14$$

$$4x-8 \leq 3x-14 \quad \therefore x \leq -6$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x = -6$

050 답 해는 없다.

$$x+3 < 5x-1 \text{에서 } -4x < -4 \quad \therefore x > 1$$

$$5x-1 < 4x-3 \text{에서 } x < -2$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

051 답 ④

$$0.2x-1 < 0.4x+\frac{3}{5} \text{에서 } 2x-10 < 4x+6$$

$$-2x < 16 \quad \therefore x > -8$$

$$0.4x+\frac{3}{5} < 2+0.2x \text{에서 } 4x+6 < 20+2x$$

$$2x < 14 \quad \therefore x < 7$$

즉, 주어진 부등식의 해는 $-8 < x < 7$

따라서 정수 x 는 -7, -6, -5, ..., 6의 14개이다.

052 답 -18

$$-3x-7 < 2 \text{에서 } -3x < 9 \quad \therefore x > -3$$

$$4x+2(x-3) < a \text{에서 } 6x < a+6 \quad \therefore x < \frac{a+6}{6}$$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $b < x < 2$ 이므로

$$b = -3, \frac{a+6}{6} = 2$$

따라서 $a=6, b=-3$ 이므로 $ab=-18$

053 답 ④

$$3-5x \leq x+a \text{에서 } -6x \leq a-3 \quad \therefore x \geq \frac{3-a}{6}$$

$$3x+1 \geq 4x+3 \text{에서 } -x \geq 2 \quad \therefore x \leq -2$$

주어진 연립부등식의 해가 $x=b$ 이므로

$$b = -2, \frac{3-a}{6} = -2$$

따라서 $a=15, b=-2$ 이므로 $a+b=13$

054 답 -1

$$x+2 \leq 2x-a \text{에서 } -x \leq -a-2$$

$$\therefore x \geq a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

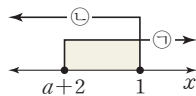
$$3x-2 \leq 5-4x \text{에서 } 7x \leq 7$$

$$\therefore x \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서

$$a+2 \leq 1 \quad \therefore a \leq -1$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 -1 이다.



055 답 ⑤

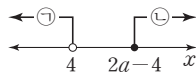
$$0.5x-2 < 0.1x-\frac{2}{5} \text{에서 } 5x-20 < x-4$$

$$4x < 16 \quad \therefore x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3x+4 \geq 2x+2a \text{에서 } x \geq 2a-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서

$$2a-4 \geq 4 \quad \therefore a \geq 4$$



056 답 -1

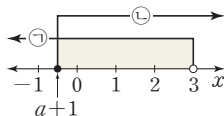
$$3x-2 < x+4 \text{에서 } 2x < 6 \quad \therefore x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2x-1 \geq x+a \text{에서 } x \geq a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 오른쪽 그림에서

$$-1 < a+1 \leq 0 \quad \therefore -2 < a \leq -1$$

따라서 정수 a 의 값은 -1 이다.



057 답 35

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라 하면

$$93 < (x-2) + x + (x+2) < 102$$

$$93 < 3x < 102 \quad \therefore 31 < x < 34$$

이때 x 는 홀수이므로 $x=33$

따라서 연속하는 세 홀수는 31, 33, 35이므로 가장 큰 수는 35이다.

058 답 ①

상자의 개수를 x 라 하면 사과는 $(12x+5)$ 개이므로

$$15(x-3)+1 \leq 12x+5 \leq 15(x-3)+15$$

$$15(x-3)+1 \leq 12x+5 \text{에서 } 3x \leq 49$$

$$\therefore x \leq \frac{49}{3}$$

$$12x+5 \leq 15(x-3)+15 \text{에서 } -3x \leq -35$$

$$\therefore x \geq \frac{35}{3}$$

$$\text{즉, 부등식의 해는 } \frac{35}{3} \leq x \leq \frac{49}{3}$$

따라서 상자의 개수가 될 수 있는 것은 12, 13, 14, 15, 16이다.

059 답 ②

$$|x-a| \geq 2 \text{에서 } x-a \leq -2 \text{ 또는 } x-a \geq 2$$

$$\therefore x \leq a-2 \text{ 또는 } x \geq a+2$$

주어진 부등식의 해가 $x \leq b$ 또는 $x \geq 3$ 이므로

$$a-2=b, a+2=3 \quad \therefore a=1, b=-1$$

$$\therefore ab=-1$$

060 답 ③

$|5-x| \leq 9-x$ 에서 $5-x=0$, 즉 $x=5$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 5$ 일 때

$$5-x \leq 9-x \text{에서 } 0 \leq 4 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $x < 5$ 이므로 $x < 5$

(ii) $x \geq 5$ 일 때

$$-(5-x) \leq 9-x \text{에서 } -5+x \leq 9-x$$

$$2x \leq 14 \quad \therefore x \leq 7$$

그런데 $x \geq 5$ 이므로 $5 \leq x \leq 7$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x \leq 7$

따라서 정수 x 의 최댓값은 7이다.

061 답 ③

$|x| + |x+4| < 5$ 에서 $x+4=0, x=0$, 즉 $x=-4, x=0$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -4$ 일 때

$$-x-(x+4) < 5, -2x < 9 \quad \therefore x > -\frac{9}{2}$$

그런데 $x < -4$ 이므로 $-\frac{9}{2} < x < -4$

(ii) $-4 \leq x < 0$ 일 때

$$-x+(x+4) < 5 \text{에서 } 0 < 1 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $-4 \leq x < 0$ 이므로 $-4 \leq x < 0$

(iii) $x \geq 0$ 일 때

$$x+(x+4) < 5, 2x < 1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x < \frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$

따라서 $a=-\frac{9}{2}, b=\frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=-4$

001 답 $-1 < x < 2$

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=g(x)$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로
 $-1 < x < 2$

002 답 ①

$x^2 - 3x - 3 \geq 1$ 에서 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$
 $(x+1)(x-4) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 4$
 따라서 $\alpha = -1, \beta = 4$ 이므로
 $\alpha - \beta = -5$

003 답 ①

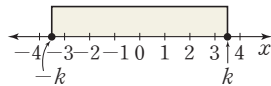
이차부등식 $ax^2 - 2x + b > 0$ 의 해가 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 이므로
 $a > 0$
 해가 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+2)(x-4) > 0 \quad \therefore x^2 - 2x - 8 > 0$
 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - 8a > 0$ ($\because a > 0$)
 이 부등식이 $ax^2 - 2x + b > 0$ 과 같으므로
 $-2a = -2, -8a = b \quad \therefore a = 1, b = -8$
 $\therefore ab = -8$

004 답 $-1 < x < 0$

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이므로
 $f(x) = a(x-1)(x-3)$ ($a > 0$)이라 하면
 $f(2x+3) = a(2x+3-1)(2x+3-3) = 4ax(x+1)$
 따라서 부등식 $f(2x+3) < 0$, 즉 $4ax(x+1) < 0$ 에서
 $x(x+1) < 0$ ($\because a > 0$) $\therefore -1 < x < 0$
다른 풀이 $f(x) < 0$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이므로 $f(2x+3) < 0$ 의 해는
 $1 < 2x+3 < 3, -2 < 2x < 0$
 $\therefore -1 < x < 0$

005 답 3

$x^2 - k^2 \leq 0$ 에서 $(x+k)(x-k) \leq 0$
 $\therefore -k \leq x \leq k$
 주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 7개이려면 오른쪽 그림에서
 $3 \leq k < 4$
 따라서 자연수 k 의 값은 3이다.



006 답 2

이차부등식 $2x^2 + 4x + a \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로 이차방정식
 $2x^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 2^2 - 2a = 0, -2a = -4 \quad \therefore a = 2$

007 답 ③

(i) $a > 0$ 일 때

이차함수 $y = ax^2 - 2ax - 6$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식
 $ax^2 - 2ax - 6 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별
 식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 6a > 0$$

$$a(a+6) > 0 \quad \therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 0$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a < -6$

(i), (ii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는 $a > 0$ 또는 $a < -6$

008 답 ①

이차부등식 $ax^2 + 6x + a - 8 < 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하
 려면 $a < 0$

이차방정식 $ax^2 + 6x + a - 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - a(a-8) < 0$$

$$a^2 - 8a - 9 > 0$$

$$(a+1)(a-9) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 9$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a < -1$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다,

009 답 $-6 \leq k \leq -2$

이차부등식 $x^2 - 2(k+2)x - 4(k+2) < 0$ 이 해를 갖지 않으려면
 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2(k+2)x - 4(k+2) \geq 0$ 이 성립해야
 한다.

즉, 이차방정식 $x^2 - 2(k+2)x - 4(k+2) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+2)^2 + 4(k+2) \leq 0$$

$$k^2 + 8k + 12 \leq 0, (k+6)(k+2) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq k \leq -2$$

010 답 $a < -2$ 또는 $a > 1$

$f(x) = x^2 - 4x + a^2 + a + 2$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)^2 + a^2 + a - 2$$

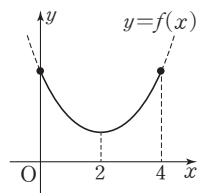
$0 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) > 0$ 이어야 하므로

$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야
 한다.

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이므로
 $f(2) > 0$ 에서

$$a^2 + a - 2 > 0, (a+2)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 1$$



011 답 ④

이차함수 $y=x^2-ax+7$ 의 그래프가 직선 $y=2x-2$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2-ax+7>2x-2, \text{ 즉 } x^2-(a+2)x+9>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

의 해와 같다.

해가 $x<3$ 또는 $x>b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-3)(x-b)>0 \quad \therefore x^2-(3+b)x+3b>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①과 ②이 일치해야 하므로

$$a+2=3+b, 9=3b \quad \therefore a=4, b=3$$

$$\therefore a+b=7$$

012 답 ③ $0<a<8$

이차함수 $y=2x^2+4x-1$ 의 그래프가 직선 $y=ax-3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $2x^2+4x-1>ax-3$, 즉 $2x^2+(4-a)x+2>0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $2x^2+(4-a)x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(4-a)^2-16<0$$

$$a^2-8a<0, a(a-8)<0 \quad \therefore 0<a<8$$

013 답 ②

둘레의 길이가 20인 직사각형의 가로 길이를 x 라 하면 세로 길이는 $10-x$ 이므로 넓이가 24 이상이어야 한다

$$x(10-x)\geq 24, x^2-10x+24\leq 0$$

$$(x-4)(x-6)\leq 0 \quad \therefore 4\leq x\leq 6$$

따라서 직사각형의 가로 길이의 최솟값은 4이다.

014 답 $x\leq \frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{7}{2}$

부등식 $f(x)\geq g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$x\leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } x\geq \frac{7}{2}$$

015 답 ⑤

$$ax^2+(b-m)x+c-n<0 \text{에서 } ax^2+bx+c<mx+n$$

부등식 $ax^2+bx+c<mx+n$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$x<-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x>\frac{5}{2}$$

016 답 $-3<x<-2$ 또는 $1<x<2$

$$f(x)g(x)>0 \text{에서}$$

$$f(x)>0, g(x)>0 \text{ 또는 } f(x)<0, g(x)<0$$

$$(i) f(x)>0, g(x)>0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는 } -3<x<-2$$

$$(ii) f(x)<0, g(x)<0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는 } 1<x<2$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 주어진 부등식의 해는 } -3<x<-2 \text{ 또는 } 1<x<2$$

017 답 ①

$$x^2+3x-13>x+2 \text{에서 } x^2+2x-15>0$$

$$(x+5)(x-3)>0 \quad \therefore x<-5 \text{ 또는 } x>3$$

따라서 $\alpha=-5, \beta=3$ 이므로

$$\alpha-\beta=-8$$

018 답 ③

$$x^2+2x-2\leq 1 \text{에서 } x^2+2x-3\leq 0$$

$$(x+3)(x-1)\leq 0 \quad \therefore -3\leq x\leq 1$$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이므로 구하는 합은

$$-3+(-2)+(-1)+0+1=-5$$

019 답 ④

$$\textcircled{1} -x^2+10x-25\geq 0 \text{에서 } x^2-10x+25\leq 0$$

그런데 $x^2-10x+25=(x-5)^2\geq 0$ 이므로 부등식

$$-x^2+10x-25\geq 0 \text{의 해는}$$

$$x=5$$

$$\textcircled{2} -x^2+x+12<0 \text{에서 } x^2-x-12>0$$

$$(x+3)(x-4)>0$$

$$\therefore x<-3 \text{ 또는 } x>4$$

$$\textcircled{3} \text{ 이차방정식 } x^2-4x+2=0 \text{의 해는 } x=2\pm\sqrt{2} \text{이므로 부등식}$$

$$x^2-4x+2\leq 0 \text{의 해는}$$

$$2-\sqrt{2}\leq x\leq 2+\sqrt{2}$$

$$\textcircled{4} x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq 2 \text{이므로 부등식 } x^2-2x+3<0 \text{의 해는 없다.}$$

$$\textcircled{5} 2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\geq \frac{7}{8} \text{이므로 부등식}$$

$$2x^2-3x+2\geq 0 \text{의 해는 모든 실수이다.}$$

따라서 이차부등식 중 해가 없는 것은 ④이다.

020 답 $x\neq -4$ 인 모든 실수

$$3(x^2+4)>2x^2-8x-4 \text{에서}$$

$$x^2+8x+16>0, (x+4)^2>0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\neq -4$ 인 모든 실수이다.

021 답 ①

$$x^2-5|x|-6<0 \text{에서 } x=0 \text{을 기준으로 구간을 나누면}$$

(i) $x<0$ 일 때

$$x^2+5x-6<0, (x+6)(x-1)<0$$

$$\therefore -6<x<1$$

$$\text{그런데 } x<0 \text{이므로 } -6<x<0$$

(ii) $x\geq 0$ 일 때

$$x^2-5x-6<0, (x+1)(x-6)<0$$

$$\therefore -1<x<6$$

$$\text{그런데 } x\geq 0 \text{이므로 } 0\leq x<6$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-6<x<6$

따라서 $\alpha=-6, \beta=6$ 이므로

$$\alpha+2\beta=6$$

022 답 7

$x^2-3x-4 \leq |x+1|$ 에서 $x+1=0$, 즉 $x=-1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때

$$x^2-3x-4 \leq -(x+1), x^2-2x-3 \leq 0$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -1$ 일 때

$$x^2-3x-4 \leq x+1, x^2-4x-5 \leq 0$$

$$(x+1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 5$$

그런데 $x \geq -1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 5$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 5$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 의 7개이다.

023 답 -4

이차부등식 $ax^2+3x+b > 0$ 의 해가 $-\frac{1}{2} < x < 2$ 이므로 $a < 0$

해가 $-\frac{1}{2} < x < 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2) < 0 \quad \therefore x^2 - \frac{3}{2}x - 1 < 0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - \frac{3}{2}ax - a > 0$ ($\because a < 0$)

이 부등식이 $ax^2+3x+b > 0$ 과 같으므로

$$-\frac{3}{2}a = 3, -a = b \quad \therefore a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

024 답 ①

해가 $-8 < x < b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+8)(x-b) < 0 \quad \therefore x^2 + (8-b)x - 8b < 0$$

이 부등식이 $x^2+6x+a < 0$ 과 같으므로

$$8-b=6, -8b=a \quad \therefore a = -16, b = 2$$

$$\therefore a+b = -14$$

025 답 2

해가 $x=1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)^2 \leq 0 \quad \therefore x^2-2x+1 \leq 0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b \leq 0$ 과 같으므로

$$a = -2, b = 1$$

이를 $ax^2+bx+1 \geq 0$ 에 대입하면 $-2x^2+x+1 \geq 0$

$$2x^2-x-1 \leq 0, (2x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

따라서 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

026 답 $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$

이차부등식 $ax^2+bx+c < 0$ 의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 4$ 이므로 $a < 0$

해가 $x < -3$ 또는 $x > 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+3)(x-4) > 0 \quad \therefore x^2-x-12 > 0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2-ax-12a < 0$ ($\because a < 0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+c < 0$ 과 같으므로

$$b = -a, c = -12a$$

이를 $cx^2+ax-b < 0$ 에 대입하면 $-12ax^2+ax+a < 0$

양변을 $-a$ 로 나누면 $12x^2-x-1 < 0$ ($\because a < 0$)

$$(4x+1)(3x-1) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

027 답 $x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{3}{2}$

이차부등식 $f(x) > 0$ 의 해가 $-1 < x < 2$ 이므로

$f(x) = a(x+1)(x-2)$ ($a < 0$)라 하면

$$f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-2)$$

$$= 2ax(2x-3)$$

따라서 부등식 $f(2x-1) \leq 0$, 즉 $2ax(2x-3) \leq 0$ 에서

$$x(2x-3) \geq 0 \quad (\because a < 0) \quad \therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq \frac{3}{2}$$

028 답 ③

이차부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해가 $-5 \leq x \leq -3$ 이므로

$f(x) = a(x+3)(x+5)$ ($a > 0$)라 하면

$$f(10-2x) = a(10-2x+3)(10-2x+5)$$

$$= a(2x-13)(2x-15)$$

부등식 $f(10-2x) > 0$, 즉 $a(2x-13)(2x-15) > 0$ 에서

$$(2x-13)(2x-15) > 0 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore x < \frac{13}{2} \text{ 또는 } x > \frac{15}{2}$$

따라서 부등식 $f(10-2x) > 0$ 의 해가 아닌 것은 ③이다.

029 답 ③

주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(-1, 0)$,

$(2, 0)$ 에서 만나고 위로 볼록하므로

$f(x) = a(x+1)(x-2)$ ($a < 0$)라 하면

$$f\left(\frac{x+k}{2}\right) = a\left(\frac{x+k}{2}+1\right)\left(\frac{x+k}{2}-2\right)$$

$$= \frac{a}{4}(x+k+2)(x+k-4)$$

따라서 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \geq 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x+k+2)(x+k-4) \geq 0$ 에서

$$(x+k+2)(x+k-4) \leq 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore -k-2 \leq x \leq -k+4$$

이때 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 3$ 이므로

$$-k-2 = -3, -k+4 = 3 \quad \therefore k = 1$$

030 답 ④

$x^2-k < 0$ 에서 $(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) < 0$

$$\therefore -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$$

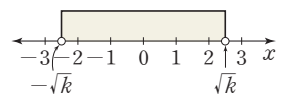
주어진 이차부등식을 만족시키는 정

수 x 가 5개이려면 오른쪽 그림에서

$$2 < \sqrt{k} \leq 3 \quad \therefore 4 < k \leq 9$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$$M=9, m=5 \quad \therefore M+m=14$$



031 답 ①

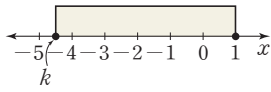
$x^2 - (k+1)x + k \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-k) \leq 0$

(i) $k < 1$ 일 때

$(x-1)(x-k) < 0$ 에서 $k \leq x \leq 1$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 6개이려면 오른쪽 그림에서 $-5 < k \leq -4$

즉, 정수 k 는 -4 이다.



(ii) $k = 1$ 일 때

$(x-1)(x-k) < 0$ 에서 $(x-1)^2 \leq 0$

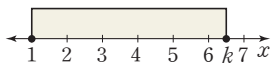
이 이차부등식을 만족시키는 정수 x 는 1뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k > 1$ 일 때

$(x-1)(x-k) < 0$ 에서 $1 \leq x \leq k$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 6개이려면 오른쪽 그림에서 $6 \leq k < 7$

즉, 정수 k 는 6이다.



(i), (ii), (iii)에 의하여 정수 k 는 $-4, 6$ 이므로 구하는 합은 $-4 + 6 = 2$

032 답 ⑤

이차부등식 $2x^2 - (k+3)x + 2k \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로 이차방정식 $2x^2 - (k+3)x + 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+3)^2 - 16k = 0$$

$$k^2 - 10k + 9 = 0, (k-1)(k-9) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 9$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $1 + 9 = 10$

033 답 ①

이차부등식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x - 2 \geq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로 $k+1 < 0 \therefore k < -1$

또 이차방정식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 + 2(k+1) = 0$$

$$k^2 + 4k + 3 = 0, (k+3)(k+1) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = -1$$

그런데 $k < -1$ 이므로 $k = -3$

034 답 ②

이차부등식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 > 0$ 을 만족시키지 않는 x 의 값이 오직 한 개이면 이차부등식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이어야 하므로

$$2-a > 0 \therefore a < 2$$

또 이차방정식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 3(2-a) = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a < 2$ 이므로 $a = -1$

035 답 ③

(i) $a > 0$ 일 때

이차함수 $y = ax^2 + 2ax - 4$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$ax^2 + 2ax - 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 4a > 0$$

$$a(a+4) > 0 \therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 0$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a < -4$

(i), (ii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는 $a > 0$ 또는 $a < -4$

036 답 ③

이차부등식 $3x^2 - 2x - a < 0$ 이 해를 가지려면 이차방정식

$3x^2 - 2x - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 3 \times (-a) > 0$$

$$3a + 1 > 0 \therefore a > -\frac{1}{3}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 0이다.

037 답 ④

(i) $a > 0$ 일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$ax^2 + 2(a-1)x + 6(a-1) = 0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 6a(a-1) \geq 0$$

$$5a^2 - 4a - 1 \leq 0, (5a+1)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{5} \leq a \leq 1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 1$

(ii) $a < 0$ 일 때

이차함수 $y = ax^2 + 2(a-1)x + 6(a-1)$ 의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는

$$a < 0 \text{ 또는 } 0 < a \leq 1$$

038 답 ②

이차부등식 $ax^2 - 4x + a - 3 \leq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a < 0$

이차방정식 $ax^2 - 4x + a - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - a(a-3) \leq 0$$

$$a^2 - 3a - 4 \geq 0, (a+1)(a-4) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 4$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a \leq -1$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

039 답 $-4 < a < -1$

이차부등식 $x^2 + 2(a+2)x - a > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 2(a+2)x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a+2)^2 + a < 0 \\ a^2 + 5a + 4 < 0, (a+4)(a+1) < 0 \\ \therefore -4 < a < -1\end{aligned}$$

040 답 1

부등식 $(a-1)x^2 + 2(a-1)x + 4a + 2 > 0$ 에서

(i) $a=1$ 일 때

$0 \times x^2 + 0 \times x + 6 > 0$ 이므로 주어진 부등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(ii) $a \neq 1$ 일 때

주어진 부등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하려면 이차함수 $y = (a-1)x^2 + 2(a-1)x + 4a + 2$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$a-1 > 0 \text{에서 } a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이차방정식 $(a-1)x^2 + 2(a-1)x + 4a + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a-1)^2 - (a-1)(4a+2) < 0 \\ -3a^2 + 3 < 0, (a+1)(a-1) > 0 \\ \therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}\end{aligned}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a > 1$

(i), (ii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는 $a \geq 1$ 따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

041 답 ①

이차부등식 $x^2 - 4(a+2)x - a - 2 < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 4(a+2)x - a - 2 \geq 0$ 이 성립해야 한다. 이차방정식 $x^2 - 4(a+2)x - a - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 4(a+2)^2 - (-a-2) \leq 0 \\ 4a^2 + 17a + 18 \leq 0, (4a+9)(a+2) \leq 0 \\ \therefore -\frac{9}{4} \leq a \leq -2\end{aligned}$$

따라서 정수 a 의 값은 -2 이다.

042 답 ④

$ax^2 - 2x > -ax + 2$ 에서 $ax^2 + (a-2)x - 2 > 0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + (a-2)x - 2 \leq 0$ 이 성립해야 하므로 $a < 0$ 이어야 한다.

또 이차방정식 $ax^2 + (a-2)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}D &= (a-2)^2 + 8a \leq 0 \\ a^2 + 4a + 4 \leq 0, (a+2)^2 \leq 0 \\ \therefore a &= -2\end{aligned}$$

따라서 실수 a 의 값은 -2 이다.

043 답 ④

이차부등식 $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 \geq 0$ 이 성립해야 하므로 $a > 0$ 이어야 한다.

또 이차방정식 $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a+2)^2 - a(2a+1) \leq 0 \\ -a^2 + 3a + 4 \leq 0, a^2 - 3a - 4 \geq 0 \\ (a+1)(a-4) \geq 0 \quad \therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 4 \\ \text{그런데 } a > 0 \text{이므로 } a \geq 4\end{aligned}$$

044 답 $k \leq -2$

$f(x) = x^2 - 6x + 5 - 2k$ 라 하면

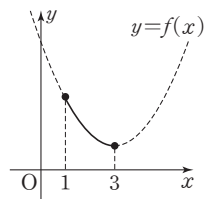
$$f(x) = (x-3)^2 - 2k - 4$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이므로

$$\begin{aligned}f(3) &\geq 0 \text{에서} \\ -2k - 4 &\geq 0, 2k \leq -4 \\ \therefore k &\leq -2\end{aligned}$$



045 답 ④

$f(x) = 2x^2 + 4x + a^2 + 3a - 20$ 이라 하면

$$f(x) = 2(x+1)^2 + a^2 + 3a - 22$$

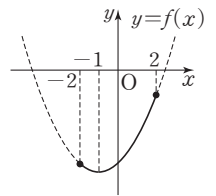
$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) < 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이므로 $f(2) < 0$ 에서

$$\begin{aligned}18 + a^2 + 3a - 22 &< 0 \\ a^2 + 3a - 4 &< 0 \\ (a+4)(a-1) &< 0 \\ \therefore -4 &< a < 1\end{aligned}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 0이다.



046 답 ②

이차함수 $y = x^2 + ax - 3$ 의 그래프가 직선 $y = x - 11$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2 + ax - 3 > x - 11, \text{ 즉 } x^2 + (a-1)x + 8 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

의 해와 같다.

해가 $x < 2$ 또는 $x > b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)(x-b) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\therefore x^2 - (b+2)x + 2b > 0$$

$\textcircled{7}$ 과 $\textcircled{8}$ 이 일치해야 하므로

$$\begin{aligned}a-1 &= -b-2, 8=2b \\ \therefore a &= -5, b=4 \\ \therefore b-a &= 9\end{aligned}$$

047 답 ②

이차함수 $y=x^2-x+4$ 의 그래프가 직선 $y=2x+14$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는 $x^2-x+4<2x+14$ 의 해이므로 $x^2-3x-10<0$, $(x+2)(x-5)<0$
 $\therefore -2<x<5$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 4$ 의 6개이다.

048 답 11

이차함수 $y=x^2-ax-2$ 의 그래프가 직선 $y=b$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는 $x^2-ax-2<b$, 즉 $x^2-ax-b-2<0$ ㉠
 의 해와 같다.
 해가 $1<x<4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-1)(x-4)<0$ $\therefore x^2-5x+4<0$ ㉡
 ㉠과 ㉡이 일치해야 하므로 $a=5, -b-2=4$ $\therefore a=5, b=-6$
 $\therefore a-b=11$

049 답 5

이차함수 $y=2x^2-3x-3$ 의 그래프가 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는 $2x^2-3x-3>x^2+ax+b$, 즉 $x^2-(3+a)x-3-b>0$ ㉠
 의 해와 같다.
 해가 $x<-1$ 또는 $x>2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은 $(x+1)(x-2)>0$
 $\therefore x^2-x-2>0$ ㉡
 ㉠과 ㉡이 일치해야 하므로 $3+a=1, -3-b=-2$ $\therefore a=-2, b=-1$
 $\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-1)^2=5$

050 답 ①

이차함수 $y=x^2+(k+2)x+2$ 의 그래프가 직선 $y=x+1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+(k+2)x+2>x+1$, 즉 $x^2+(k+1)x+1>0$ 이 성립해야 한다.
 이차방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=(k+1)^2-4<0, k^2+2k-3<0$
 $(k+3)(k-1)<0$ $\therefore -3<k<1$
 따라서 $a=-3, b=1$ 이므로 $a+b=-2$

051 답 $-4<k<0$

이차함수 $y=x^2+kx-k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차함수의 그래프가 x 축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+kx-k>0$ 이 성립해야 한다.
 이차방정식 $x^2+kx-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=k^2+4k<0, k(k+4)<0$
 $\therefore -4<k<0$

052 답 7

이차함수 $y=-x^2+(k+1)x-5$ 의 그래프가 직선 $y=x-1$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $-x^2+(k+1)x-5<x-1$, 즉 $x^2-kx+4>0$ 이 성립해야 한다.
 이차방정식 $x^2-kx+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=k^2-16<0, (k+4)(k-4)<0$ $\therefore -4<k<4$
 따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, \dots, 3$ 의 7개이다.

053 답 ②

함수 $y=ax^2-6x+6$ 의 그래프가 이차함수 $y=-3x^2+2ax-2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2-6x+6>-3x^2+2ax-2$, 즉 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8>0$ 이 성립해야 한다.
 (i) $a=-3$ 일 때 $0 \times x^2 - 0 \times x + 8 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.
 (ii) $a>-3$ 일 때 이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4}=(a+3)^2-8(a+3)<0, a^2-2a-15<0$
 $(a+3)(a-5)<0$ $\therefore -3<a<5$
 (i), (ii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는 $-3 \leq a < 5$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 -3 이다.

054 답 ④

직사각형의 가로 길이를 x 라 하면 세로 길이는 $22-x$ 이다.
 이 직사각형의 넓이가 96 이상이라면 $x(22-x) \geq 96, x^2-22x+96 \leq 0$
 $(x-6)(x-16) \leq 0$ $\therefore 6 \leq x \leq 16$
 따라서 직사각형의 가로 길이의 최댓값과 최솟값의 차는 $16-6=10$

055 답 $\frac{2}{5} \leq t \leq 1$

공의 높이가 지면으로부터 3 m 이상이라면 $-5t^2+7t+1 \geq 3, 5t^2-7t+2 \leq 0$
 $(t-1)(5t-2) \leq 0$ $\therefore \frac{2}{5} \leq t \leq 1$

056 답 80

사용료를 올리기 전의 한 달 사용료를 A 원, 회원 수를 B 명이라 하면 $x\%$ 올린 사용료는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원, $0.5x\%$ 줄어든 회원 수는 $B\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 명이므로 $A\left(1+\frac{x}{100}\right) \times B\left(1-\frac{x}{200}\right) \geq AB\left(1+\frac{8}{100}\right)$
 $\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right) \geq 1+\frac{8}{100}$
 $(100+x)(200-x) \geq 21600, x^2-100x+1600 \leq 0$
 $(x-20)(x-80) \leq 0$ $\therefore 20 \leq x \leq 80$
 따라서 x 의 최댓값은 80이다.

057 답 ②

$$3x^2 - 8x - 16 < 0 \text{에서 } (3x+4)(x-4) < 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$-\frac{4}{3} < x \leq 2$$

058 답 5

$$x^2 - 4x > 0 \text{에서 } x(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + (1-a)x - a < 0 \text{에서}$$

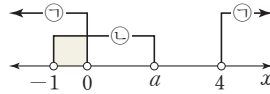
$$(x-a)(x+1) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①과 ②의 해의 공통부분이

$-1 < x < 0$ 이라면 오른쪽 그림에서

$$0 \leq a \leq 4$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.



059 답 $2 < a \leq 3$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

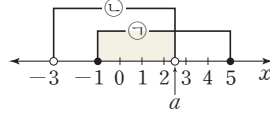
$$x^2 + (3-a)x - 3a < 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x+3) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 동시에 만족시키는 정수 x

가 4개이라면 오른쪽 그림에서

$$2 < a \leq 3$$



060 답 ②

변의 길이는 양수이므로

$$x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+2$ 이므로

$$x+2 < x+(x-2) \quad \therefore x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$$(x+2)^2 > x^2 + (x-2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 > x^2 + x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 8x < 0, x(x-8) < 0 \quad \therefore 0 < x < 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

①, ②, ③의 공통부분을 구하면 $4 < x < 8$

따라서 자연수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.

061 답 ①

이차방정식 $x^2 + (a-2)x - 3a - 2 = 0$ 이 허근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-2)^2 - 4(-3a-2) < 0$$

$$a^2 + 8a + 12 < 0, (a+6)(a+2) < 0$$

$$\therefore -6 < a < -2$$

따라서 정수 a 는 -5, -4, -3의 3개이다.

062 답 ③

이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 양수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = k^2 - (2k+3) \geq 0, k^2 - 2k - 3 \geq 0$$

$$(k+1)(k-3) \geq 0 \quad \therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq 3$$

$$(ii) \alpha + \beta = 2k > 0 \text{에서 } k > 0$$

$$(iii) \alpha\beta = 2k+3 > 0 \text{에서 } k > -\frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $k \geq 3$

063 답 ①

$f(x) = x^2 - 2kx + 9$ 라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 9 \geq 0$$

$$(k+3)(k-3) \geq 0 \quad \therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 3$$

$$(ii) f(2) > 0 \text{이므로 } 4 - 4k + 9 > 0$$

$$4k < 13 \quad \therefore k < \frac{13}{4}$$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로

$$k < 2$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $k \leq -3$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -3이다.

064 답 ①

$$x^2 + 6x - 7 \leq 0 \text{에서 } (x+7)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq x \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + 3x - 10 > 0 \text{에서 } (x+5)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $-7 \leq x < -5$

따라서 $\alpha = -7, \beta = -5$ 이므로 $\alpha - \beta = -2$

065 답 ③

$$3(x-2) \leq 5x-2 \text{에서 } 3x-6 \leq 5x-2, -2x \leq 4$$

$$\therefore x \geq -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$4x^2 - 7x - 15 < 0 \text{에서 } (4x+5)(x-3) < 0$$

$$\therefore -\frac{5}{4} < x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $-\frac{5}{4} < x < 3$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

066 답 ③

$$5x \leq 2x^2 + 2 \text{에서 } 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

$$(2x-1)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2x^2 + 2 < 2x + 6 \text{에서 } x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$

067 답 ②

$$2x^2+3x-14<0 \text{에서 } (2x+7)(x-2)<0$$

$$\therefore -\frac{7}{2}<x<2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2-2x<3 \text{에서 } x^2-2x-3<0$$

$$(x+1)(x-3)<0$$

$$\therefore -1<x<3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x<2$

해가 $-1<x<2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-2)<0 \quad \therefore x^2-x-2<0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b<0$ 과 같으므로

$$a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

068 답 ①

$$|x^2+x-1|<5 \text{에서 } -5<x^2+x-1<5$$

$$-5<x^2+x-1 \text{에서 } x^2+x+4>0$$

그런데 $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geq\frac{15}{4}$ 이므로 부등식의 해는 모든 실수이다. $\dots\dots ㉠$

$$x^2+x-1<5 \text{에서 } x^2+x-6<0$$

$$(x+3)(x-2)<0$$

$$\therefore -3<x<2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<2$

따라서 $\alpha=-3, \beta=2$ 이므로

$$\alpha\beta=-6$$

069 답 ①

$$x^2-2x-15<0 \text{에서 } (x+3)(x-5)<0$$

$$\therefore -3<x<5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2-3|x|-4<0 \text{에서}$$

(i) $x<0$ 일 때

$$x^2+3x-4<0, (x+4)(x-1)<0$$

$$\therefore -4<x<1$$

그런데 $x<0$ 이므로 $-4<x<0$

(ii) $x\geq 0$ 일 때

$$x^2-3x-4<0, (x+1)(x-4)<0$$

$$\therefore -1<x<4$$

그런데 $x\geq 0$ 이므로 $0\leq x<4$

(i), (ii)에 의하여 $x^2-3|x|-4<0$ 의 해는

$$-4<x<4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<4$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+\dots+3=3$$

다른 풀이 $x^2-3|x|-4<0$ 에서

$$|x|^2-3|x|-4<0, (|x|+1)(|x|-4)<0$$

$$\therefore -1<|x|<4$$

그런데 $|x|\geq 0$ 이므로 $0\leq |x|<4$

즉, $|x|<4$ 에서 $-4<x<4$

070 답 ④

$$x^2-4x+3\geq 0 \text{에서 } (x-1)(x-3)\geq 0$$

$$\therefore x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 3 \quad \dots\dots ㉠$$

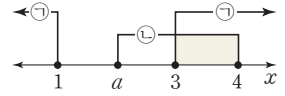
$$(x-4)(x-a)\leq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠과 ㉡의 해의 공통부분이 $3\leq x\leq 4$

이려면 오른쪽 그림에서

$$1<a\leq 3$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 3이다.

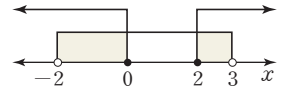


071 답 ③

주어진 연립부등식의 해가

$$-2<x\leq 0 \text{ 또는 } 2\leq x<3 \text{ 이려면}$$

오른쪽 그림과 같아야 한다.



$x^2-x-a<0$ 의 해는 $-2<x<3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로

$$(x+2)(x-3)<0, x^2-x-6<0 \quad \therefore a=6$$

$x^2-2x+b\geq 0$ 의 해는 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로

$$x(x-2)\geq 0, x^2-2x\geq 0 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore a-b=6$$

072 답 $-4\leq a\leq 3$

$$x^2-x-20\geq 0 \text{에서 } (x+4)(x-5)\geq 0$$

$$\therefore x\leq -4 \text{ 또는 } x\geq 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0 \text{에서 } (x-a)(x-a-2)<0$$

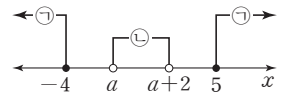
$$\therefore a<x<a+2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오

른쪽 그림에서

$$a\geq -4, a+2\leq 5$$

$$\therefore -4\leq a\leq 3$$



073 답 4

$a<b<c$ 이므로

$$(x-a)(x-b)>0 \text{에서 } x<a \text{ 또는 } x>b \quad \dots\dots ㉠$$

$$(x-b)(x-c)>0 \text{에서 } x<b \text{ 또는 } x>c \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<a$ 또는 $x>c$ 이므로

$$a=-3, c=4$$

즉, 이차부등식 $x^2+ax-c<0$ 은 $x^2-3x-4<0$ 이므로

$$(x+1)(x-4)<0 \quad \therefore -1<x<4$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

074 답 $3\leq a<4$

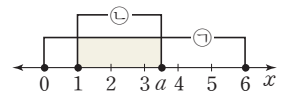
$$x^2-6x\leq 0 \text{에서 } x(x-6)\leq 0 \quad \therefore 0\leq x\leq 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2-(a+1)x+a\leq 0 \text{에서 } (x-a)(x-1)\leq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수

x 가 3개이려면 오른쪽 그림에서

$$3\leq a<4$$



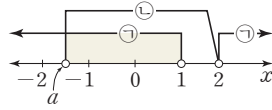
075 답 ①

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-2) < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x 의 값이 -1 과 0 뿐이라면 오른쪽 그림에서 $-2 \leq a < -1$



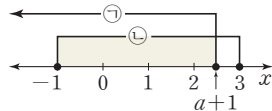
076 답 1

$$x - a \leq 1 \text{에서 } x \leq a + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - 2x \leq 3 \text{에서 } x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합이 2가 되려면 오른쪽 그림에서



$$2 \leq a + 1 < 3 \quad \therefore 1 \leq a < 2$$

따라서 정수 a 의 값은 1이다.

077 답 ⑤

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{에서 } (x-2)(x-3) > 0$$

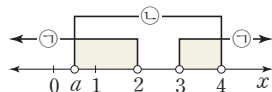
$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - (a+4)x + 4a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-4) < 0$$

(i) $a < 4$ 일 때

$$(x-a)(x-4) < 0 \text{에서 } a < x < 4 \quad \dots\dots ㉡$$

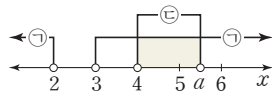
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x 가 오직 한 개뿐이라면 오른쪽 그림에서 $0 \leq a < 1$



(ii) $a > 4$ 일 때

$$(x-a)(x-4) < 0 \text{에서 } 4 < x < a \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x 가 오직 한 개뿐이라면 오른쪽 그림에서 $5 < a \leq 6$



(i), (ii)에 의하여 $0 \leq a < 1$ 또는 $5 < a \leq 6$

따라서 상수 a 의 최댓값은 6이다.

078 답 ⑤

$$\text{변의 길이는 양수이므로 } x - 3 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x + 3$ 이므로

$$x + 3 < x + (x - 3) \quad \therefore x > 6 \quad \dots\dots ㉡$$

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$$(x+3)^2 < x^2 + (x-3)^2, \quad x^2 + 6x + 9 < x^2 + x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 12x > 0, \quad x(x-12) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 12 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $x > 12$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 13이다.

079 답 $1 \leq x \leq 2$

보행자 통로의 넓이는

$$(2x+30)(2x+20) - 30 \times 20 = 4x^2 + 100x \text{ (m}^2\text{)}$$

이 통로의 넓이가 104 m^2 이상 216 m^2 이하이므로

$$104 \leq 4x^2 + 100x \leq 216 \quad \therefore 26 \leq x^2 + 25x \leq 54$$

$$26 \leq x^2 + 25x \text{에서 } x^2 + 25x - 26 \geq 0$$

$$(x+26)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -26 \text{ 또는 } x \geq 1$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 1 \quad \dots\dots ㉠$

$$x^2 + 25x \leq 54 \text{에서 } x^2 + 25x - 54 \leq 0$$

$$(x+27)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -27 \leq x \leq 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 2 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1 \leq x \leq 2$

080 답 $3 \leq x \leq 4$ 또는 $6 \leq x \leq 7$

직사각형의 가로 길이가 x 이므로 세로의 길이는 $10 - x$ 이다.

이때 이 직사각형의 넓이가 21 이상 24 이하이므로

$$21 \leq x(10-x) \leq 24 \quad \therefore 21 \leq -x^2 + 10x \leq 24$$

$$21 \leq -x^2 + 10x \text{에서 } x^2 - 10x + 21 \leq 0$$

$$(x-3)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-x^2 + 10x \leq 24 \text{에서 } x^2 - 10x + 24 \geq 0$$

$$(x-4)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$3 \leq x \leq 4 \text{ 또는 } 6 \leq x \leq 7$$

081 답 ④

이차방정식 $x^2 + 4ax + 3a^2 + 25 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2a)^2 - (3a^2 + 25) \geq 0, \quad a^2 - 25 \geq 0$$

$$(a+5)(a-5) \geq 0 \quad \therefore a \leq -5 \text{ 또는 } a \geq 5$$

082 답 ④

이차방정식 $x^2 + ax - a + 3 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 4(-a+3) > 0, \quad a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$(a+6)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 2 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 2a + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (a+2)^2 - 4(2a+1) < 0$$

$$a^2 - 4a < 0, \quad a(a-4) < 0 \quad \therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 < a < 4$

따라서 정수 a 의 값은 3이다.

083 답 ③

이차방정식 $x^2 - ax + a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-a)^2 - 4a \geq 0, \quad a^2 - 4a \geq 0$$

$$a(a-4) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 - 2x - a^2 + 5 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-1)^2 - (-a^2 + 5) \geq 0, \quad a^2 - 4 \geq 0$$

$$(a+2)(a-2) \geq 0 \quad \therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 가지려면

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 2$$

따라서 정수 a 의 값이 아닌 것은 ③이다.

084 ⑤

이차방정식 $x^2+2(k+1)x-k+5=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α , β 라 하면 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = (k+1)^2 - (-k+5) \geq 0$$

$$k^2+3k-4 \geq 0, (k+4)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 1$$

$$(ii) \alpha + \beta = -2(k+1) < 0$$

$$\therefore k > -1$$

$$(iii) \alpha\beta = -k+5 > 0 \quad \therefore k < 5$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $1 \leq k < 5$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은 $1+2+3+4=10$

085 ⑥ $k < -1$ 또는 $0 < k < 1$

이차방정식 $x^2-k(k+1)x+k-1=0$ 의 두 실근을 α , β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = k-1 < 0$$

$$\therefore k < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로 $\alpha + \beta = k(k+1) > 0$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $k < -1$ 또는 $0 < k < 1$

086 ②

$f(x) = x^2 - 2kx + 4$ 라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 4 \geq 0$$

$$(k+2)(k-2) \geq 0 \quad \therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 2$$

(ii) $f(1) > 0$ 이므로

$$1 - 2k + 4 > 0, 2k < 5 \quad \therefore k < \frac{5}{2}$$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로 $k > 1$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k < \frac{5}{2}$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 2이다.

087 ①

$f(x) = x^2 - 5x + 2k^2$ 이라 하면 $f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$1 - 5 + 2k^2 < 0$$

$$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

따라서 $\alpha = -\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = -2$$

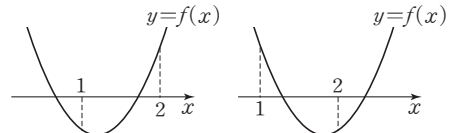
088 ③

$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이차방정식 $ax^2 + ax + 2a - 18 = 0$ 의 한 근만이 1과 2 사이에 있어야 하므로 $f(x) = ax^2 + ax + 2a - 18$ 이라 하면 이차함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(1)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(4a-18)(8a-18) < 0 \quad \therefore \frac{9}{4} < a < \frac{9}{2}$$

따라서 자연수 a 는 3, 4이므로 구하는 합은 $3+4=7$

089 ④

$f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$ 라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+2) > 0$$

$$k^2 - k - 2 > 0, (k+1)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(0) > 0$ 이므로 $k+2 > 0 \quad \therefore k > -2$

(iii) $f(3) > 0$ 이므로 $9 - 6k + k + 2 > 0$

$$5k < 11 \quad \therefore k < \frac{11}{5}$$

(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로 $0 < k < 3$

(i)~(iv)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $2 < k < \frac{11}{5}$

090 ③

부등식 $f(x) < 0 < g(x)$ 의 해는 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있고, $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-2 < x < 2$$

091 ④

$$\neg. 3x^2 - x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} \text{이므로 부등식}$$

$$3x^2 - x + 1 \geq 0 \text{의 해는 모든 실수이다.}$$

$$\neg. 2x^2 - 5x + 6 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq \frac{23}{8} \text{이므로 부등식}$$

$$2x^2 - 5x + 6 < 0 \text{의 해는 없다.}$$

$$\neg. -x^2 + 8x - 16 \geq 0 \text{에서 } x^2 - 8x + 16 \leq 0$$

$$\text{이때 } x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0 \text{이므로 부등식 } x^2 - 8x + 16 \leq 0 \text{의 해는 } x=4$$

$$\neg. 12x - 9 > 4x^2 \text{에서 } 4x^2 - 12x + 9 < 0$$

$$\text{이때 } 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 \geq 0 \text{이므로 부등식}$$

$$4x^2 - 12x + 9 < 0 \text{의 해는 없다.}$$

따라서 보기의 이차부등식 중 해가 없는 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

092 답 $x < -3$ 또는 $x > 5$

$x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 에서 $x - 1 = 0$, 즉 $x = 1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 > -3(x - 1), x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x + 3)(x - 2) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x < -3$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 > 3(x - 1), x^2 - 5x > 0$$

$$x(x - 5) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x > 5$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는
 $x < -3$ 또는 $x > 5$

093 답 ②

해가 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x + 1)(x - 3) \geq 0 \quad \therefore x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

이 부등식이 $x^2 + 2ax - b \geq 0$ 과 같으므로

$$2a = -2, -b = -3 \quad \therefore a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

094 답 $x < -2$ 또는 $x > 0$

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 1$ 이므로

$$f(x) = a(x + 3)(x - 1) \quad (a < 0) \text{이라 하면}$$

$$f(2x + 1) = a(2x + 1 + 3)(2x + 1 - 1)$$

$$= 4ax(x + 2)$$

$$f(1) = 0 \text{이므로 } f(2x + 1) < f(1) \text{에서}$$

$$4ax(x + 2) < 0, x(x + 2) > 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 0$$

095 답 ①

$$x^2 \leq 2k \text{에서 } x^2 - 2k \leq 0, (x + \sqrt{2k})(x - \sqrt{2k}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{2k} \leq x \leq \sqrt{2k}$$

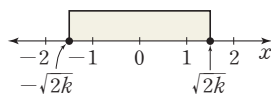
주어진 이차부등식을 만족시키는

정수 x 가 3개이므로 오른쪽 그림에서

$$1 \leq \sqrt{2k} < 2, 1 \leq 2k < 4$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq k < 2$$

따라서 자연수 k 의 값은 1이다.



096 답 2

이차부등식 $(k - 1)x^2 + 2(k - 1)x + 1 \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로
 $k - 1 > 0 \quad \therefore k > 1$

또 이차방정식 $(k - 1)x^2 + 2(k - 1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k - 1) = 0$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0, (k - 1)(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 1$ 이므로 $k = 2$

097 답 ⑤

(i) $k > 0$ 일 때

이차함수 $y = kx^2 - 6x + k - 8$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로
 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k < 0$ 일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$kx^2 - 6x + k - 8 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이
 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - k(k - 8) > 0$$

$$k^2 - 8k - 9 < 0, (k + 1)(k - 9) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 9$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-1 < k < 0$

(i), (ii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $-1 < k < 0$ 또는 $k > 0$

098 답 $-3 < k < -1$

이차방정식 $x^2 - 2(k + 1)x - 2k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k + 1)^2 + 2k + 2 < 0, k^2 + 4k + 3 < 0$$

$$(k + 3)(k + 1) < 0 \quad \therefore -3 < k < -1$$

099 답 ⑤

이차부등식 $x^2 - 2ax + 9a < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실
 수 x 에 대하여 $x^2 - 2ax + 9a \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - 2ax + 9a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9a \leq 0, a(a - 9) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 9$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 9의 10개이다.

100 답 ⑤

$$x^2 - 4x < 2x^2 + a^2 - 3a \text{에서 } x^2 + 4x + a^2 - 3a > 0$$

$$f(x) = x^2 + 4x + a^2 - 3a \text{라 하면}$$

$$f(x) = (x + 2)^2 + a^2 - 3a - 4$$

$-4 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최소이므로 $f(x) > 0$ 이려면

$$f(-2) > 0 \text{이어야 한다.}$$

$$a^2 - 3a - 4 > 0, (a + 1)(a - 4) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다.

101 답 -5

이차함수 $y = x^2 - 4x - 5$ 의 그래프에서 직선 $y = a$ 보다 아래쪽에
 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2 - 4x - 5 < a, \text{ 즉 } x^2 - 4x - a - 5 < 0 \quad \dots\dots ㉠$$

의 해와 같다.

해가 $b < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x - b)(x - 4) < 0 \quad \therefore x^2 - (b + 4)x + 4b < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$$-4 = -(b + 4), -a - 5 = 4b \quad \therefore a = -5, b = 0$$

$$\therefore a + b = -5$$

102 답 ②

두 이차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 이차함수 $y=x^2-6x+4$ 의 그래프가 이차함수 $y=-x^2+2kx+2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-6x+4 > -x^2+2kx+2$, 즉 $x^2-(k+3)x+1 > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k+3)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(k+3)^2-4 < 0, k^2+6k+5 < 0$$

$$(k+5)(k+1) < 0 \quad \therefore -5 < k < -1$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -4 이다.

103 답 4

가격을 x 천 원씩 올리면 양말 한 켤레의 가격은 $(3+x)$ 천 원, 하루 판매량은 $(50-5x)$ 켤레가 된다.

이때 하루 판매액이 21만 원 이상이라면

$$(3+x)(50-5x) \geq 210, -5x^2+35x-60 \geq 0$$

$$x^2-7x+12 \leq 0, (x-3)(x-4) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 4$$

따라서 x 의 최댓값은 4이다.

104 답 ①

$$x^2+3x+1 \leq 2x^2-2x-5 \text{에서}$$

$$x^2-5x-6 \geq 0, (x+1)(x-6) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2x^2-2x-5 \leq 3x-2 \text{에서}$$

$$2x^2-5x-3 \leq 0, (2x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②의 공통부분이 없으므로 주어진 부등식의 해는 없다.

105 답 ③

$$x^2-2x-15 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2-(2+a)x+2a < 0 \text{에서}$$

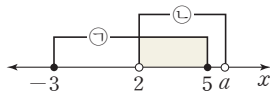
$$(x-2)(x-a) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②의 해의 공통부분이 $2 < x \leq 5$

이려면 오른쪽 그림에서

$$a > 5$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 6이다.



106 답 ⑤

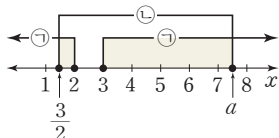
$$(x-2)(x-3) \geq 0 \text{에서 } x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(2x-3)(x-a) \leq 0 \text{에서 } \frac{3}{2} \leq x \leq a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 동시에 만족시키는 정수

x 가 6개이므로 오른쪽 그림에서

$$7 \leq a < 8$$



107 답 4

새로 만든 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이, 높이는 각각 $a-3$, a , $a+4$ 이므로

$$a-3 > 0 \quad \therefore a > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직육면체의 부피는 $a(a-3)(a+4)=a^3+a^2-12a$ 이고 처음 정육면체의 부피는 a^3 이므로

$$a^3+a^2-12a < a^3, a^2-12a < 0$$

$$a(a-12) < 0 \quad \therefore 0 < a < 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $3 < a < 12$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

108 답 ④

이차방정식 $x^2+2ax+a+6=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-a-6 < 0$$

$$(a+2)(a-3) < 0 \quad \therefore -2 < a < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-2ax+4=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=a^2-4 \geq 0$$

$$(a+2)(a-2) \geq 0 \quad \therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $2 \leq a < 3$

따라서 정수 a 의 값은 2이다.

109 답 -2

이차방정식 $x^2+2kx-k+2=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α , β 라 하면 두 근이 모두 양수이므로

$$(i) \frac{D}{4}=k^2-(-k+2) \geq 0, k^2+k-2 \geq 0$$

$$(k+2)(k-1) \geq 0 \quad \therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 1$$

$$(ii) \alpha+\beta=-2k > 0 \quad \therefore k < 0$$

$$(iii) \alpha\beta=-k+2 > 0 \quad \therefore k < 2$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $k \leq -2$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -2 이다.

110 답 ①

$f(x)=x^2-6ax+9$ 라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3a)^2-9 \geq 0, (a+1)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

$$(ii) f(-2) > 0 \text{이므로 } 4+12a+9 > 0$$

$$\therefore a > -\frac{13}{12}$$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=3a$ 이므로

$$-2 < 3a \quad \therefore a > -\frac{2}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는 $a \geq 1$

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

001 답 4

$$\overline{AB}=5\sqrt{2}\text{이므로 } \sqrt{(-1-a)^2+\{4-(-1)\}^2}=5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면 $(a+1)^2+25=50$

$$a^2+2a-24=0, (a+6)(a-4)=0 \quad \therefore a=-6 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 양수 a 의 값은 4이다.

002 답 ③

$P(a, b)$ 가 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$b=2a+1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$$

$$a^2+2a+1+b^2-4b+4=a^2-4a+4+b^2-2b+1$$

$$\therefore 3a-b=0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡\text{을 연립하여 풀면 } a=1, b=3 \quad \therefore 2a+3b=11$$

003 답 ③

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(5+1)^2+(6-4)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(3-5)^2+(2-6)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AB}=\overline{CA}$ 이고 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

004 답 13

$A(1, -1), B(6, 11), P(a, b)$ 라 하면

$$\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(a-6)^2+(b-11)^2}$$

$$=\overline{AP}+\overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB}=\sqrt{(6-1)^2+(11+1)^2}=13$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

005 답 ④

$P(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+2)^2+(-5)^2+(a-4)^2+(-1)^2$$

$$=2a^2-4a+46=2(a-1)^2+44$$

따라서 $a=1$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 44이다.

006 답 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.

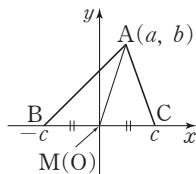
이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를

각각 $A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$$

$$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2=2(a^2+b^2+c^2)$$



$$\text{또 } \overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2\text{이므로}$$

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

007 답 $(-11, 10)$

$$P\left(\frac{3 \times (-3) + 2 \times 7}{3+2}, \frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}\right)$$

$$\therefore P(1, 4)$$

$$Q\left(\frac{3 \times (-3) - 2 \times 7}{3-2}, \frac{3 \times 6 - 2 \times 1}{3-2}\right)$$

$$\therefore Q(-23, 16)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1-23}{2}, \frac{4+16}{2}\right) \quad \therefore (-11, 10)$$

008 답 $\frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$

선분 AB를 $a : (1-a)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a \times 5 + (1-a) \times (-2)}{a + (1-a)}, \frac{a \times (-1) + (1-a) \times 5}{a + (1-a)}\right)$$

$$\therefore (7a-2, 5-6a)$$

이 점이 제1사분면 위의 점이므로

$$7a-2 > 0, 5-6a > 0$$

$$\therefore \frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$$

009 답 17

$$3\overline{AB}=2\overline{BC}\text{에서 } \overline{AB}:\overline{BC}=2:3$$

$a > 0$ 에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}$ 를 5:3으로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{5 \times 3 - 3 \times (-2)}{5-3}=\frac{21}{2}$$

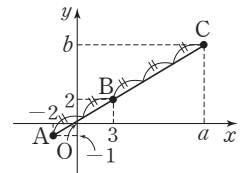
$$b=\frac{5 \times 2 - 3 \times (-1)}{5-3}=\frac{13}{2}$$

$$\therefore a+b=17$$

다른 풀이 점 B는 $\overline{AC}$ 를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 3 \times (-2)}{2+3}=3, \frac{2 \times b + 3 \times (-1)}{2+3}=2$$

$$\therefore a=\frac{21}{2}, b=\frac{13}{2} \quad \therefore a+b=17$$



010 답 4

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a-2b+4}{3}, \frac{3+b+a-1}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2b+2}{3}, \frac{a+b+2}{3}\right)$$

이 점이 점 $(-2, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a-2b+2}{3}=-2, \frac{a+b+2}{3}=2$$

$$a-2b=-8, a+b=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=4$

$$\therefore b-a=4$$

011 답 ⑤

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+4}{2}, \frac{8-1}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right) \quad \dots\dots ㉠$$

D(a, b)라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{5+b}{2}\right) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{11}{2} = \frac{a}{2}, \frac{7}{2} = \frac{5+b}{2} \quad \therefore a=11, b=2$$

따라서 점 D의 좌표는 (11, 2)이다.

012 답 ②

$$\overline{AB} = \sqrt{(-7-5)^2 + (-4-1)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-5)^2 + (5-1)^2} = 5$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{13 \times 2 + 5 \times (-7)}{13+5}, \frac{13 \times 5 + 5 \times (-4)}{13+5}\right)$$

$$\therefore D\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$ 이므로 $a+b=2$

013 답 $y = -2x + \frac{3}{2}$

P(a, b)라 하면 점 P가 직선 $y = -2x + 1$ 위의 점이므로

$$b = -2a + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

Q(x, y)라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$ 의 중점이므로

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b+2}{2}$$

$$\therefore a = 2x, b = 2y - 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2y - 2 = -2 \times 2x + 1 \quad \therefore y = -2x + \frac{3}{2}$$

014 답 ④

$$\overline{AB} = 5 \text{이므로 } \sqrt{(2-a)^2 + (a+2-3)^2} = 5$$

양변을 제곱하면

$$(2-a)^2 + (a-1)^2 = 25, a^2 - 3a - 10 = 0$$

$$(a+2)(a-5) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 모든 a의 값의 합은 3이다.

015 답 ⑤

$$\overline{AB} = 2\overline{CD} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(1-a)^2 + (a+1)^2} = 2\sqrt{2^2 + (-1-1)^2}$$

양변을 제곱하면

$$(1-a)^2 + (a+1)^2 = 32, a^2 = 15$$

$$\therefore a = \pm\sqrt{15}$$

따라서 양수 a의 값은 $\sqrt{15}$ 이다.

016 답 ④

$$\overline{AB} = 4 \text{이므로 } \sqrt{(b+2-a)^2 + (b-a-2)^2} = 4$$

양변을 제곱하면

$$(b+2-a)^2 + (b-a-2)^2 = 16$$

이때 $b-a=t$ 로 놓으면 $(t+2)^2 + (t-2)^2 = 16$

$$2t^2 = 8, t^2 = 4$$

$$\therefore (b-a)^2 = 4$$

따라서 두 점 (a, b), (b, a) 사이의 거리는

$$\sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2(b-a)^2} = 2\sqrt{2}$$

017 답 ⑤

점 P(a, b)가 직선 $y = x + 1$ 위의 점이므로

$$b = a + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+2)^2 + (b-2)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2$$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 = a^2 - 6a + 9 + b^2 - 2b + 1$$

$$\therefore 5a - b = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡을 연립하여 풀면 a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = 2$$

018 답 $10\sqrt{2}$

P(a, 0)이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + (-4)^2 = (a-6)^2 + (-8)^2$$

$$8a = 80 \quad \therefore a = 10 \quad \therefore P(10, 0)$$

Q(0, b)라 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(-2)^2 + (b-4)^2 = (-6)^2 + (b-8)^2$$

$$8b = 80 \quad \therefore b = 10 \quad \therefore Q(0, 10)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-10)^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

019 답 ③

점 P(a, b)가 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b+1)^2$$

$$\therefore a + 3b = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$a^2 + (b+1)^2 = (a-4)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore a + b = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡을 연립하여 풀면 a = \frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a - b = 4$$

020 답 4

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-7)^2 \quad \therefore a + 3b = 14$$

이때 $a + 3b = 14$ 를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍은

(2, 4), (5, 3), (8, 2), (11, 1)

따라서 구하는 점 P는 4개이다.

021 답 ③

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

022 답 ④

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(1+1)^2 + (-1-1)^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2a + 2b - 6 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 = (-1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$\therefore a = b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -\sqrt{3}, b = -\sqrt{3} \text{ 또는 } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 3$$

023 답 ⑤

삼각형 ABP가 $\overline{AB}$ 가 빗변인 직각삼각형이 되려면

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \text{이어야 하므로}$$

$$(7-2)^2 + (1-5)^2 = (p-2)^2 + (-5)^2 + (p-7)^2 + (-1)^2$$

$$\therefore p^2 - 9p + 19 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 p 의 값의 합은 9이다.

024 답 $5\sqrt{2}$

$A(-1, -3), B(4, 2), P(a, b)$ 라 하면

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2} + \sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2}$$

$$= \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2 + (2+3)^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

025 답 ③

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$A(1, 0), B(0, -2), P(x, y)$ 라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$$= \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

026 답 ②

$P(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2^2 + (a-1)^2 + (-3)^2 + (a+3)^2$$

$$= 2a^2 + 4a + 23 = 2(a+1)^2 + 21$$

따라서 $a = -1$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 21이다.

027 답 (2, 6)

$P(a, a+4)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2$$

$$= 4a^2 - 16a + 18$$

$$= 4(a-2)^2 + 2$$

따라서 $a=2$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 2이므로 점 P의 좌표는 (2, 6)이다.

028 답 ④

$P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= (a-1)^2 + (b-2)^2 + (a-2)^2 + (b-5)^2 + (a-3)^2 + (b+1)^2$$

$$= 3a^2 - 12a + 3b^2 - 12b + 44$$

$$= 3(a-2)^2 + 3(b-2)^2 + 20$$

따라서 $a=2, b=2$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 20이다.

029 답 풀이 참조

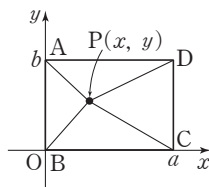
오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.

따라서 $A(0, b), C(a, 0), D(a, b)$ 라 하고 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\}$$

$$\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 = \{x^2 + y^2\} + \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$$

030 답 (가) $-2c$ (나) $a^2 + b^2 + 2c^2$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.

따라서 $A(a, b), B(-2c, 0), C(c, 0)$

이라 하면

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = \{(-2c-a)^2 + (-b)^2\} + 2\{(c-a)^2 + (-b)^2\}$$

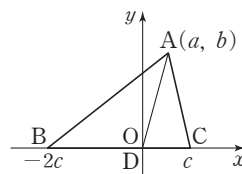
$$= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2$$

$$= 3(a^2 + b^2 + 2c^2)$$

$$\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 = \{(-a)^2 + (-b)^2\} + 2(-c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2)$$



031 답 ④

$$P\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}\right) \quad \therefore P(1, 3)$$

$$Q\left(\frac{2 \times (-1) - 1 \times 5}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2-1}\right) \quad \therefore Q(-7, 7)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(-7-1)^2 + (7-3)^2} = 4\sqrt{5}$$

032 답 ①

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표가 $(-4, 5)$ 이므로
 $\frac{3 \times (-2) - 1 \times a}{3 - 1} = -4, \frac{3 \times b - 1 \times (-1)}{3 - 1} = 5$
 $-6 - a = -8, 3b + 1 = 10 \quad \therefore a = 2, b = 3$
 $\therefore a + b = 5$

033 답 9

$B(a, b)$ 라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(-4, 3)$ 이므로
 $\frac{-3 + a}{2} = -4, \frac{-2 + b}{2} = 3 \quad \therefore a = -5, b = 8$
 $\therefore B(-5, 8)$
 $C(c, d)$ 라 하면 변 AC의 중점의 좌표가 $(-1, 1)$ 이므로
 $\frac{-3 + c}{2} = -1, \frac{-2 + d}{2} = 1 \quad \therefore c = 1, d = 4$
 $\therefore C(1, 4)$
 변 BC를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times 1 - 2 \times (-5)}{3 - 2}, \frac{3 \times 4 - 2 \times 8}{3 - 2} \right) \quad \therefore (13, -4)$
 따라서 $x = 13, y = -4$ 이므로
 $x + y = 9$

034 답 4

점 $C(a, b)$ 는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로
 $C\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{1 + 2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times (-1)}{1 + 2}\right) \quad \therefore C(-1, 1)$
 점 $D(c, d)$ 는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로
 $D\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2 + 1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2 + 1}\right) \quad \therefore D(1, 3)$
 따라서 $a = -1, b = 1, c = 1, d = 3$ 이므로
 $cd - ab = 3 - (-1) = 4$

035 답 ③

선분 AB를 $t : (1 - t)$ 로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{t \times 6 + (1 - t) \times (-2)}{t + (1 - t)}, \frac{t \times (-2) + (1 - t) \times 3}{t + (1 - t)} \right)$
 $\therefore (8t - 2, 3 - 5t)$
 이 점이 제4사분면 위의 점이므로
 $8t - 2 > 0, 3 - 5t < 0 \quad \therefore t > \frac{3}{5}$
 그런데 $t > 0, 1 - t > 0$ 이므로 $0 < t < 1$
 따라서 $\frac{3}{5} < t < 1$ 이므로 $a = \frac{3}{5}, b = 1$
 $\therefore a + b = \frac{8}{5}$

036 답 ①

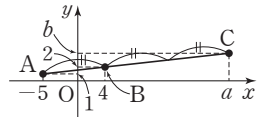
선분 AB를 $a : 1$ 로 외분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{a - 5}{a - 1}, \frac{2a + 2}{a - 1} \right)$
 이 점이 직선 $3x + y - 1 = 0$ 위에 있으므로
 $\frac{3(a - 5)}{a - 1} + \frac{2a + 2}{a - 1} - 1 = 0, 5a - 13 - (a - 1) = 0$
 $4a = 12 \quad \therefore a = 3$

037 답 ④

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{6m - 3n}{m + n}, \frac{-m + 5n}{m + n} \right)$
 이 점이 y 축 위에 있으므로
 $\frac{6m - 3n}{m + n} = 0, n = 2m$
 $\therefore \frac{n}{m} = 2$

038 답 18

$2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$
 $a > 0$ 에서 오른쪽 그림과 같이 점 C는
 $\overline{AB}$ 를 3 : 2로 외분하는 점이므로
 $a = \frac{3 \times 4 - 2 \times (-5)}{3 - 2} = 22$
 $b = \frac{3 \times 2 - 2 \times 1}{3 - 2} = 4$
 $\therefore a - b = 18$

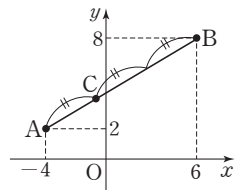


다른 풀이 점 B는 $\overline{AC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로
 $\frac{1 \times a + 2 \times (-5)}{1 + 2} = 4, \frac{1 \times b + 2 \times 1}{1 + 2} = 2$
 $\therefore a = 22, b = 4$
 $\therefore a - b = 18$

039 답 12

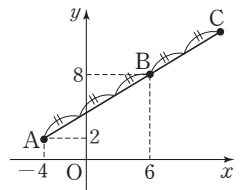
$2\overline{AB} = 3\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 2$
 이를 만족시키는 점 C의 x 좌표를 a 라 하면
 (i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를
 1 : 2로 내분하는 점이므로
 $a = \frac{1 \times 6 + 2 \times (-4)}{1 + 2} = -\frac{2}{3}$



(ii) 점 C가 $\overline{AB}$ 의 연장선 위에 있을 때

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를
 5 : 2로 외분하는 점이므로
 $a = \frac{5 \times 6 - 2 \times (-4)}{5 - 2} = \frac{38}{3}$



(i), (ii)에 의하여 점 C의 x 좌표의 합은
 $-\frac{2}{3} + \frac{38}{3} = 12$

040 답 ④

$S_1 : S_2 = 9 : 4$, 즉 $\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 = 9 : 4$ 이므로
 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$
 따라서 점 P는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌
 표는
 $\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3 + 2}, \frac{3 \times 8 + 2 \times (-2)}{3 + 2} \right)$
 $\therefore (4, 4)$

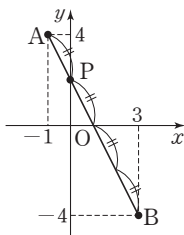
041 답 $3\sqrt{5}$

삼각형 OBP의 넓이가 삼각형 OAP의 넓이의 3배이므로
 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$

(i) 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때

점 P는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 1 : 3
 으로 내분하는 점이므로

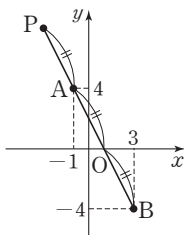
$$\left(\frac{1 \times 3 + 3 \times (-1)}{1+3}, \frac{1 \times (-4) + 3 \times 4}{1+3} \right) \\ \therefore (0, 2)$$



(ii) 점 P가 $\overline{AB}$ 의 연장선 위에 있을 때

점 P는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 1 : 3
 으로 외분하는 점이므로

$$\left(\frac{1 \times 3 - 3 \times (-1)}{1-3}, \frac{1 \times (-4) - 3 \times 4}{1-3} \right) \\ \therefore (-3, 8)$$



따라서 $P_1(0, 2)$, $P_2(-3, 8)$ 또는

$P_1(-3, 8)$, $P_2(0, 2)$ 이므로 두 점 P_1 , P_2 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

042 답 3

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+a-1-2b}{3}, \frac{4+b+1+a}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2b-4}{3}, \frac{a+b+5}{3} \right)$$

이 점이 점 $(-3, 3)$ 과 일치하므로

$$\frac{a-2b-4}{3} = -3, \frac{a+b+5}{3} = 3$$

$$a-2b = -5, a+b = 4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$ $\therefore ab=3$

043 답 (0, 6)

$\overline{AC}$ 의 중점을 M, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G는
 $\overline{BM}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이므로 $B(a, b)$ 라 하면

$$\frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1} = 2, \frac{2 \times 6 + 1 \times b}{2+1} = 6$$

$$a+6=6, 12+b=18 \quad \therefore a=0, b=6$$

따라서 점 B의 좌표는 (0, 6)이다.

044 답 7

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$$P\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \quad \therefore P(3, 3)$$

$$Q\left(\frac{7+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \quad \therefore Q(5, 4)$$

$$R\left(\frac{3-1}{2}, \frac{6+4}{2}\right) \quad \therefore R(1, 5)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+5+1}{3}, \frac{3+4+5}{3} \right) \quad \therefore (3, 4)$$

따라서 $a=3$, $b=4$ 이므로 $a+b=7$

다른 풀이 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과
 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+7+3}{3}, \frac{4+2+6}{3} \right) \quad \therefore (3, 4)$$

따라서 $a=3$, $b=4$ 이므로 $a+b=7$

045 답 3

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+4+3}{3} \right) \quad \therefore (1, 3) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+3+5}{3}, \frac{-1+2+b}{3} \right) \quad \therefore \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+1}{3} \right) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 이 일치하므로

$$\frac{a+8}{3} = 1, \frac{b+1}{3} = 3 \quad \therefore a = -5, b = 8$$

$$\therefore a+b=3$$

046 답 ③

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-3}{2} \right) \quad \therefore \left(3, \frac{3}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$D(a, b)$ 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 이 일치하므로

$$3 = \frac{-1+a}{2}, \frac{3}{2} = \frac{3+b}{2} \quad \therefore a=7, b=0$$

따라서 점 D의 좌표는 (7, 0)이다.

047 답 C(-4, 6), D(-2, -1)

$C(a, b)$ 라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{b}{2} \right)$ 이므로

$$\frac{4+a}{2} = 0, \frac{b}{2} = 3 \quad \therefore a = -4, b = 6$$

$$\therefore C(-4, 6)$$

$D(c, d)$ 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+c}{2}, \frac{7+d}{2} \right)$ 이

고, 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치하므로

$$\frac{2+c}{2} = 0, \frac{7+d}{2} = 3 \quad \therefore c = -2, d = -1$$

$$\therefore D(-2, -1)$$

048 답 ④

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표는

$$\frac{-2+b}{2} = \frac{a+2}{2} \quad \therefore b = a+4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$ 이므로

$$(7-3)^2 + (a+2)^2 = (1-3)^2 + (2+2)^2$$

$$a^2 + 4a = 0, a(a+4) = 0$$

$$\therefore a = -4 \text{ 또는 } a = 0$$

이를 각각 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$a = -4, b = 0 \text{ 또는 } a = 0, b = 4$$

$$\therefore |a+b| = 4$$

049 답 ②

주어진 평행사변형의 네 꼭짓점을 A, B, C, D라 하면 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

(i) A(a, b), C(-3, -1)일 때

$$\frac{a-3}{2} = \frac{-1+1}{2}, \frac{b-1}{2} = \frac{5+3}{2} \quad \therefore a=3, b=9$$

(ii) A(a, b), C(-1, 5)일 때

$$\frac{a-1}{2} = \frac{-3+1}{2}, \frac{b+5}{2} = \frac{-1+3}{2} \quad \therefore a=-1, b=-3$$

(iii) A(a, b), C(1, 3)일 때

$$\frac{a+1}{2} = \frac{-3-1}{2}, \frac{b+3}{2} = \frac{-1+5}{2} \quad \therefore a=-5, b=1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 ab의 값의 합은

$$27+3+(-5)=25$$

050 답 $(-1, \frac{1}{3})$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1+5)^2} = 5, \overline{AC} = \sqrt{(-7+1)^2 + (3+5)^2} = 10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 10 = 1 : 2$$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-7) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-1)}{1+2} \right) \quad \therefore \left(-1, \frac{1}{3} \right)$$

051 답 ④

$$\overline{AB} = \sqrt{(14-2)^2 + (8-3)^2} = 13$$

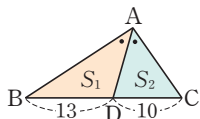
$$\overline{AC} = \sqrt{(-4-2)^2 + (-5-3)^2} = 10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 10$$

따라서 $S_1 : S_2 = \overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 10$ 이므로

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{13}{10}$$



052 답 ⑤

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-8)^2} = 10, \overline{AC} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 외각의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 10 : 5 = 2 : 1$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$$D\left(\frac{2 \times 0 - 1 \times (-3)}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times (-8)}{2-1}\right) \quad \therefore D(3, 16)$$

따라서 $a=3, b=16$ 이므로 $a+b=19$

053 답 ①

P(a, b)라 하면 점 P가 직선 $y=-4x+2$ 위의 점이므로

$$b = -4a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 Q는 $\overline{OP}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{1 \times a + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2}\right) \quad \therefore Q\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

$$Q(x, y) \text{라 하면 } x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3} \text{이므로 } a = 3x, b = 3y$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3y = -4 \times 3x + 2, y = -4x + \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } m = -4, n = \frac{2}{3} \text{이므로 } m+n = -\frac{10}{3}$$

054 답 $y=x+1$

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 P(x, y)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13$$

$$\therefore y = x + 1$$

055 답 ③

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1-1)^2 + (1-3)^2 = (3-a+1)^2 + (-3-1)^2$$

$$a^2 - 4a + 8 = a^2 - 8a + 32, 4a = 24 \quad \therefore a = 6$$

056 답 8

$$\overline{AB} \leq 5 \text{에서 } \overline{AB}^2 \leq 5^2 \text{이므로}$$

$$(2-a)^2 + (a+2-3)^2 \leq 25, a^2 - 3a - 10 \leq 0$$

$$(a+2)(a-5) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 5$$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 8개이다.

057 답 $2\sqrt{2}$

$$P(a, 0) \text{이라 하면 } \overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + 2^2 = (a+4)^2 + (-2)^2, 8a = -16 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore P(-2, 0)$$

$$Q(0, b) \text{라 하면 } \overline{AQ} = \overline{BQ} \text{에서 } \overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2 \text{이므로}$$

$$(b+2)^2 = 4^2 + (b-2)^2, 8b = 16 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore Q(0, 2) \quad \therefore PQ = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

058 답 ③

$$P(a, a-2) \text{라 하면 } \overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a+4)^2 + (a-2)^2 = (a-6)^2 + (a-2+2)^2$$

$$2a^2 + 4a + 20 = 2a^2 - 12a + 36, 16a = 16 \quad \therefore a = 1$$

따라서 점 P의 좌표는 (1, -1)이다.

059 답 ③

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-4)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{2^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

060 답 -2

$$(i) \overline{AB} = \overline{AC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \text{이므로}$$

$$(-4-1)^2 + (5-2)^2 = (a-1)^2 + (-3-2)^2$$

$$34 = a^2 - 2a + 26, a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 4$$

$$(ii) \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \text{에서}$$

$$(a+4)^2 + (-3-5)^2$$

$$= (-4-1)^2 + (5-2)^2 + (a-1)^2 + (-3-2)^2$$

$$a^2 + 8a + 80 = a^2 - 2a + 60, 10a = -20 \quad \therefore a = -2$$

(i), (ii)에 의하여 $a = -2$

061 답 ②

A(1, -2), B(5, 2), P(a, b)라 하면
 $\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}+\sqrt{(a-5)^2+(b-2)^2}$
 $=\overline{AP}+\overline{BP}$
 $\geq \overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$
 따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

062 답 72

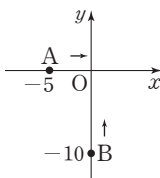
두 점 B, C는 x 축 위의 점이므로 P(a, 0) ($-2 \leq a \leq 3$)이라 하면
 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-4)^2+(-3)^2+(a+2)^2$
 $=2a^2-4a+29=2(a-1)^2+27$
 따라서 $a=-2$ 일 때 최댓값은 45, $a=1$ 일 때 최솟값은 27이므로
 구하는 합은 $45+27=72$

063 답 (가) 2a (나) $\sqrt{3}a$ (다) $2\sqrt{3}a$

점 B(6a, 0)이라 하면 C(2a, 0), D(4a, 0)이고 점 E의 y 좌표는
 정삼각형 ADE의 높이이므로
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4a = 2\sqrt{3}a \quad \therefore E(2a, 2\sqrt{3}a)$
 또 점 F의 y 좌표는 정삼각형 DBF의 높이이므로
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a \quad \therefore F(5a, \sqrt{3}a)$
 이때 $\overline{EC}$, $\overline{CF}$, $\overline{FE}$ 의 길이를 각각 구하면
 $\overline{EC}=2\sqrt{3}a$
 $\overline{CF}=\sqrt{(5a-2a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=2\sqrt{3}a$
 $\overline{FE}=\sqrt{(2a-5a)^2+(2\sqrt{3}a-\sqrt{3}a)^2}=2\sqrt{3}a$
 $\therefore \overline{EC}=\overline{CF}=\overline{FE}=2\sqrt{3}a$
 따라서 삼각형 ECF는 정삼각형이다.

064 답 7

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 도로를
 각각 x 축, y 축으로, O 지점을 원점으로 잡으면
 출발한 지 t 시간 후 A의 위치는 $(-5+4t, 0)$,
 B의 위치는 $(0, -10+3t)$ 이다.



이때 두 사람 사이의 거리는
 $\sqrt{(5-4t)^2+(-10+3t)^2}=\sqrt{25t^2-100t+125}$
 $=\sqrt{25(t-2)^2+25} \text{ (km)}$

두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 $t=2$ 일 때, 즉 출
 발한 지 2시간 후이고 그때의 거리는 5 km이다.
 따라서 $a=2$, $d=5$ 이므로 $a+d=7$

065 답 ⑤

$P\left(\frac{2 \times (-5) + 3 \times 5}{2+3}, \frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{2+3}\right) \quad \therefore P(1, 0)$
 $Q\left(\frac{2 \times (-5) - 3 \times 5}{2-3}, \frac{2 \times 3 - 3 \times (-2)}{2-3}\right) \quad \therefore Q(25, -12)$
 따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{1+25}{2}, \frac{0+(-12)}{2}\right) \quad \therefore (13, -6)$

066 답 ①

선분 AB를 3 : b로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times (-12) + b \times 4}{3+b}, \frac{3 \times a + b \times (-8)}{3+b}\right)$
 $\therefore \left(\frac{-36+4b}{3+b}, \frac{3a-8b}{3+b}\right)$
 이 점이 점 $(-2, 1)$ 과 일치하므로
 $\frac{-36+4b}{3+b} = -2, \frac{3a-8b}{3+b} = 1$
 $-36+4b = -2(3+b), 3a-8b = 3+b$
 $b=5, a-3b=1 \quad \therefore a=16, b=5$
 $\therefore a+b=21$

067 답 ③

선분 AB를 $a : (a+1)$ 로 외분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{a \times (-1) - (a+1) \times 2}{a-(a+1)}, \frac{a \times 4 - (a+1) \times 3}{a-(a+1)}\right)$
 $\therefore (3a+2, -a+3)$
 이 점이 x 축 위의 점이므로
 $-a+3=0 \quad \therefore a=3$

068 답 4

삼각형 ABP에서 $\overline{AP} \parallel \overline{DC}$ 이므로
 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{PB} : \overline{PC}$
 이때 $\overline{AB} = \sqrt{(-4-1)^2 + (-8-4)^2} = 13$,
 $\overline{AD} = \overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = 5$ 이므로
 $13 : 5 = \overline{PB} : \overline{PC}$
 즉, 점 P는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5로 외분하는 점이므로
 $P\left(\frac{13 \times 5 - 5 \times (-4)}{13-5}, \frac{13 \times 1 - 5 \times (-8)}{13-5}\right) \quad \therefore P\left(\frac{85}{8}, \frac{53}{8}\right)$
 따라서 $a = \frac{85}{8}, b = \frac{53}{8}$ 이므로 $a-b=4$

069 답 6+2 $\sqrt{3}$

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로
 $(-2)^2 + 2^2 = a^2 + (b-2)^2$
 $\therefore a^2 + b^2 - 4b - 4 = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로
 $a^2 + (b-2)^2 = (2-a)^2 + (-b)^2$
 $\therefore a = b \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = 1 + \sqrt{3}, b = 1 + \sqrt{3}$ 또는 $a = 1 - \sqrt{3}, b = 1 - \sqrt{3}$
 이때 점 C는 제1사분면 위의 점이므로
 $a = 1 + \sqrt{3}, b = 1 + \sqrt{3}$
 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
 $\left(\frac{2+0+1+\sqrt{3}}{3}, \frac{0+2+1+\sqrt{3}}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$
 즉, $p = \frac{3+\sqrt{3}}{3}, q = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ 이므로
 $3(p+q) = 3 \times \frac{6+2\sqrt{3}}{3} = 6+2\sqrt{3}$

070 [답 ④]

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) \quad \therefore (2, 2) \quad \dots\dots ㉠$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$2 = \frac{2+a}{2}, 2 = \frac{-3+b}{2} \quad \therefore a=2, b=7$$

$$\therefore ab=14$$

071 [답 ③]

두 대각선 AC와 BD의 중점의 좌표는 일치하므로 중점의 x 좌표는

$$\frac{a+4}{2} = \frac{1+b}{2} \quad \therefore b=a+3 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$(1-4)^2 + (5-2)^2 = (a-1)^2 + (2-5)^2$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0, (a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 4$$

그런데 $a=4$ 이면 점 A와 점 C가 일치하므로

$$a = -2$$

$$a = -2 \text{를 } ㉠ \text{에 대입하면 } b = 1$$

$$\therefore a+2b=0$$

072 [답 ①]

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-7-1)^2} = 10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 10 = 1 : 2$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{1 \times (-3) + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-7) + 2 \times (-3)}{1+2}\right)$$

$$\therefore D\left(-1, -\frac{13}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } a = -1, b = -\frac{13}{3} \text{이므로}$$

$$a+b = -\frac{16}{3}$$

073 [답 ①]

$P(a, b)$ 라 하면 점 P가 직선 $y = -2x + 3$ 위의 점이므로

$$b = -2a + 3 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 점 Q는 $\overline{AP}$ 를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{3 \times a - 2 \times (-1)}{3-2}, \frac{3 \times b - 2 \times 0}{3-2}\right)$$

$$\therefore Q(3a+2, 3b)$$

$Q(x, y)$ 라 하면 $x = 3a+2, y = 3b$ 이므로

$$a = \frac{x-2}{3}, b = \frac{y}{3}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{y}{3} = -2 \times \frac{x-2}{3} + 3 \quad \therefore y = -2x + 13$$

$$\text{따라서 } m = -2, n = 13 \text{이므로 } m+n = 11$$

10 직선의 방정식

160~177쪽

001 [답 ③]

두 점 $(-1, 3), (5, -1)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore (2, 1)$$

따라서 점 $(2, 1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-1 = -(x-2) \quad \therefore y = -x+3$$

002 [답 ①]

두 점 $(3, -2), (1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+2 = \frac{-1+2}{1-3}(x-3) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

두 점 $(1, a), \left(b, \frac{1}{2}\right)$ 이 직선 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$$a = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = -1, b = -2 \text{이므로 } a+b = -3$$

003 [답 ①]

x 절편이 3이고 y 절편이 -6 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1 \quad \therefore \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$$

이 직선이 점 $(a, -4)$ 를 지나므로

$$\frac{a}{3} - \frac{-4}{6} = 1, \frac{a}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad \therefore a = 1$$

004 [답 ④]

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-k+1}{2-1} = \frac{-9+1}{(k-2)-1}, -k+1 = \frac{-8}{k-3}$$

$$k^2 - 4k - 5 = 0, (k+1)(k-5) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 5$$

$$\text{따라서 모든 } k \text{의 값의 합은 } -1+5=4$$

005 [답 ②]

직선 $y = ax + b$ 가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

$$\text{선분 BC의 중점의 좌표는 } \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) \quad \therefore (3, -3)$$

두 점 $(2, 2), (3, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{-3-2}{3-2}(x-2) \quad \therefore y = -5x+12$$

$$\text{따라서 } a = -5, b = 12 \text{이므로 } a+b = 7$$

006 [답 ③]

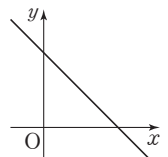
$$b \neq 0 \text{이므로 } ax+by+c=0 \text{에서 } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \dots\dots ㉠$$

$ab > 0$ 에서 $-\frac{a}{b} < 0$ 이므로 직선 ㉠의 기울기는 음수이다.

또 $bc < 0$ 에서 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선 ㉠의 y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽

그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



007 답 ④

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(3x+y+6)+k(x+y-2)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$$3x+y+6=0, x+y-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4, y=6$

따라서 항상 점 $(-4, 6)$ 을 지나므로 $a=-4, b=6$

$$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+6^2=52$$

008 답 ②

$mx-y-5m+4=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-5)-(y-4)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 4)$ 를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 이

직선 $x+y-3=0$ 과 제1사분면에서

만나도록 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때

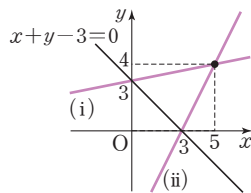
$$-5m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{5}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$-2m+4=0 \quad \therefore m=2$$

(i), (ii)에 의하여 m 의 값의 범위는 $\frac{1}{5} < m < 2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}, \beta=2$ 이므로 $\alpha\beta=\frac{2}{5}$



009 답 ①

두 직선 $x+2y+4=0, 2x-3y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x+2y+4+k(2x-3y-5)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$8-4k=0 \quad \therefore k=2$$

$k=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$5x-4y-6=0$$

따라서 $a=5, b=-4$ 이므로 $a+b=1$

010 답 ⑤

선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times 7 + 1 \times 3}{3+1} \right) \quad \therefore (-2, 6)$$

점 $(-2, 6)$ 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y-6=-2(x+2) \quad \therefore y=-2x+2$$

따라서 이 직선의 y 절편은 2이다.

011 답 ④

구하는 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

따라서 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 점 $(2, -\sqrt{3})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-2) \quad \therefore y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$$

012 답 ⑤

$$2x-3y+5=0 \text{에서 } y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

즉, 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이고 점 $(-3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2}{3}(x+3), y=\frac{2}{3}x+4$$

$$\therefore 2x-3y+12=0$$

따라서 $a=2, b=-3$ 이므로 $a-b=5$

013 답 ①

두 점 $(-3, 5), (1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-3-5}{1+3}(x+3) \quad \therefore y=-2x-1$$

두 점 $(a, 1), (-2, b)$ 가 직선 $y=-2x-1$ 위의 점이므로

$$1=-2a-1, b=4-1$$

따라서 $a=-1, b=3$ 이므로 $ab=-3$

014 답 $y=2x-8$

선분 AB를 3:2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 - 2 \times (-1)}{3-2}, \frac{3 \times 6 - 2 \times 2}{3-2} \right) \quad \therefore (11, 14)$$

따라서 두 점 $(11, 14), (1, -6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-14=\frac{-6-14}{1-11}(x-11) \quad \therefore y=2x-8$$

015 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+2+4}{3}, \frac{-2+4+7}{3} \right) \quad \therefore (1, 3)$$

두 점 $(1, 3), (-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{1-3}{-1-1}(x-1) \quad \therefore y=x+2$$

따라서 $a=1, b=2$ 이므로 $a+b=3$

016 답 7

$\triangle PAB : \triangle PBC = 3 : 2$ 이므로 $\overline{PA} : \overline{PC} = 3 : 2$

즉, 점 P는 선분 AC를 3:2로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}, \frac{3 \times 8 + 2 \times 3}{3+2} \right) \quad \therefore P(4, 6)$$

두 점 B, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{4-5}(x-5) \quad \therefore y=-2x+14$$

따라서 이 직선의 x 절편은 7이다.

017 답 ④

x 절편이 -2 이고 y 절편이 -4 인 직선의 방정식은

$$-\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$$

이 직선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$-\frac{4}{2} - \frac{a}{4} = 1 \quad \therefore a=-12$$

018 답 ③

y 절편을 $a(a \neq 0)$ 라 하면 x 절편은 $2a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} = 1$$

이 직선이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로

$$\frac{4}{2a} + \frac{-1}{a} = 1, \frac{1}{a} = 1 \quad \therefore a = 1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

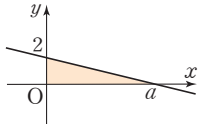
$$\frac{x}{2} + y = 1$$

019 답 ⑤

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1$ 의 x 절편은 $a(a > 0)$ 이고 y 절편은 2이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

이때 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times 2 = 8 \quad \therefore a = 8$$



020 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1+k}{2-1} = \frac{1-3}{2-(2k+1)}, k+1 = \frac{2}{2k-1}$$

$$2k^2 + k - 3 = 0, (2k+3)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

021 답 ⑤

점 A가 직선 BC 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{4-1}{2-1} = \frac{(2k-1)-4}{(k+1)-2}, 3 = \frac{2k-5}{k-1}$$

$$3k-3=2k-5 \quad \therefore k=-2$$

따라서 $C(-1, -5)$ 이므로 두 점 A, C 사이의 거리는

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(-1-1)^2 + (-5-1)^2} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

022 답 ④

서로 다른 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{8+1}{2-k} = \frac{8-(3k-4)}{2+3}, \frac{9}{2-k} = \frac{-3k+12}{5}$$

$$k^2 - 6k - 7 = 0, (k+1)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 7 (\because k > 0)$$

023 답 ③

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다. 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-5-3}{2} \right) \quad \therefore (2, -4)$$

따라서 두 점 $(3, 3)$, $(2, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-4-3}{2-3}(x-3)$$

$$\therefore y = 7x - 18$$

024 답 ④

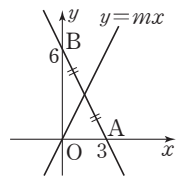
직선 $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ 이 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B라 하면 오른쪽 그림에서 직선 $y = mx$ 가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+6}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{3}{2}, 3 \right)$$

따라서 직선 $y = mx$ 가 점 $\left(\frac{3}{2}, 3 \right)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{3}{2}m \quad \therefore m = 2$$



025 답 ④

주어진 마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 대각선의 교점 $(3, 2)$ 를 지나야 한다.

두 점 $(0, -2)$, $(3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2 = \frac{2+2}{3}x \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - 2$$

따라서 이 직선의 x 절편은 $\frac{3}{2}$ 이다.

026 답 -3

직선 $y = mx + n$ 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하므로 정사각형의 대각선의 교점과 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

직사각형 OABC의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2} \right) \quad \therefore (-1, 3)$$

정사각형 ODEF의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2} \right) \quad \therefore (2, 2)$$

두 점 $(-1, 3)$, $(2, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{2-3}{2+1}(x+1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

따라서 $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{8}{3}$ 이므로

$$m - n = -3$$

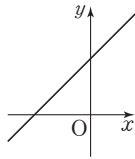
027 답 ④

$b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ㉠

$\frac{b}{a} < 0$ 에서 $-\frac{a}{b} > 0$ 이므로 직선 ㉠의 기울기는 양수이다.

또 $\frac{c}{b} < 0$ 에서 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선 ㉠의 y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



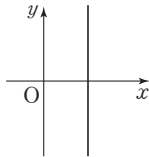
028 답 ②

$ab=0$, $ac < 0$ 에서 $b=0$

$ax+by+c=0$ 에서 $x = -\frac{c}{a}$

이때 $ac < 0$ 에서 $-\frac{c}{a} > 0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 은 오른쪽 그림과 같이 y 축에 평행하므로 제1, 4사분면을 지난다.



029 답 ④

$b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ㉠

$ab > 0$ 에서 $-\frac{a}{b} < 0$ 이므로 직선 ㉠의 기울기는 음수이다.

또 $bc > 0$ 에서 $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로 직선 ㉠의 y 절편은 음수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 ④이다.

030 답 ⑤

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

이 직선의 기울기는 음수, y 절편은 양수이므로

$-\frac{a}{b} < 0$, $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore ab > 0, bc < 0$

즉, $a > 0, b > 0, c < 0$ 또는 $a < 0, b < 0, c > 0$ 이므로 $ac < 0$

한편 $cx+ay+b=0$ 에서 $y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$ ㉡

$ac < 0$ 에서 $-\frac{c}{a} > 0$ 이므로 직선 ㉡의 기울기는 양수이다.

또 $ab > 0$ 에서 $-\frac{b}{a} < 0$ 이므로 직선 ㉡의 y 절편은 음수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$ 의 개형은 ⑤이다.

031 답 ③

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$(x-2y-5)+k(4x+y-2)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$x-2y-5=0$, $4x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

따라서 $P(1, -2)$ 이므로 점 P 와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

032 답 -9

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$(x-y+a)+k(x+2y+3)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$x-y+a=0$, $x+2y+3=0$

이때 점 $(3, b)$ 는 이 두 직선의 교점이므로

$3-b+a=0$, $3+2b+3=0$

$\therefore a=-6$, $b=-3 \quad \therefore a+b=-9$

033 답 $y=3x+8$

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$(x-y+4)+k(x+3y-4)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$x-y+4=0$, $x+3y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=2$

따라서 $P(-2, 2)$ 이므로 기울기가 3이고 점 P 를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=3(x+2) \quad \therefore y=3x+8$

034 답 (4, 1)

점 (a, b) 가 직선 $2x-y=3$ 위에 있으므로

$b=2a-3$

이를 $ax-2by=6$ 에 대입하면

$ax-2(2a-3)y=6$

이 식을 a 에 대하여 정리하면

$(x-4y)a+6y-6=0$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$x-4y=0$, $6y-6=0 \quad \therefore x=4$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 (4, 1)이다.

035 답 $\frac{1}{4} < m < 2$

$mx-y-2m+1=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$m(x-2)-(y-1)=0$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (2, 1)을 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이

직선 $3x+2y+6=0$ 과 제3사분면에서

만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때

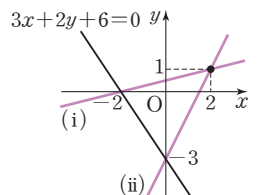
$-4m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, -3)$ 을 지날 때

$-2m+4=0 \quad \therefore m=2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m 의 값의 범위는

$\frac{1}{4} < m < 2$



036 ④

$kx - y + 3k - 2 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+3) - (y+2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로 직선 ①은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -2)$ 를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ①이 선분

AB와 한 점에서 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 A(1, -1)을 지날 때

$$4k - 1 = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

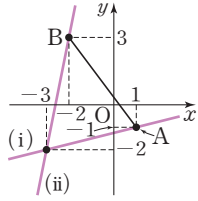
(ii) 직선 ①이 점 B(-2, 3)을 지날 때

$$k - 5 = 0 \quad \therefore k = 5$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq k \leq 5$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.



037 ④

$y = kx + 2k - 2$ 를 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+2) - (y+2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로 직선 ①은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -2)$ 를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ①이 주어진

정사각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 (0, 4)를 지날 때

$$2k - 6 = 0 \quad \therefore k = 3$$

(ii) 직선 ①이 점 (2, 2)를 지날 때

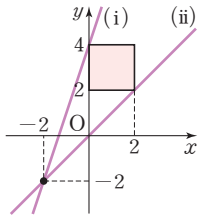
$$4k - 4 = 0 \quad \therefore k = 1$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는

$$1 \leq k \leq 3$$

따라서 $M=3, m=1$ 이므로

$$M+m=4$$



038 ② $-3 < m < -\frac{1}{2}$

$mx - y - 3m + 2 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-3) - (y-2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로 직선 ①은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 2)$ 를 지난다.

이때 직선 ①이 삼각형 ABC와 만나

지 않으려면 직선 ①은 오른쪽 그림의

색칠한 부분에 있어야 하므로

(i) 직선 ①이 점 A(1, 3)을 지날 때

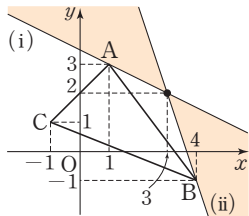
$$-2m - 1 = 0 \quad \therefore m = -\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ①이 점 B(4, -1)을 지날 때

$$m + 3 = 0 \quad \therefore m = -3$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m 의 값의 범위는

$$-3 < m < -\frac{1}{2}$$



039 ②

두 직선 $3x - 2y - 2 = 0, x - y + 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의

방정식은

$$3x - 2y - 2 + k(x - y + 1) = 0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$3 + 3k = 0 \quad \therefore k = -1$$

$k = -1$ 을 ①에 대입하여 정리하면

$$2x - y - 3 = 0$$

따라서 이 직선의 y 절편은 -3 이다.

040 ⑤

두 직선 $2x - y + 4 = 0, x + 4y - 3 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의

방정식은

$$2x - y + 4 + k(x + 4y - 3) = 0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$8 + 8k = 0 \quad \therefore k = -1$$

$k = -1$ 을 ①에 대입하여 정리하면

$$x - 5y + 7 = 0$$

따라서 이 직선 위의 점인 것은 ⑤ $(8, 3)$ 이다.

041 ④

직선 $3x - y + 3 = 0$ 의 x 절편은 -1 이므로

A $(-1, 0)$

직선 $x + y - 7 = 0$ 의 x 절편은 7이므로

B $(7, 0)$

이때 점 C를 지나는 직선의 방정식은

$$3x - y + 3 + k(x + y - 7) = 0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 AB의 중점

을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{0}{2} \right) \quad \therefore (3, 0)$$

직선 ①이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$12 - 4k = 0 \quad \therefore k = 3$$

$k = 3$ 을 ①에 대입하여 정리하면

$$3x + y - 9 = 0$$

따라서 $a=3, b=1$ 이므로 $a^2 + b^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

042 ②

직선 $x + 3y - 2 = 0$ 이 직선 $ax - by + 3 = 0$ 에 수직이므로

$$1 \times a + 3 \times (-b) = 0$$

$$\therefore a = 3b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $x + 3y - 2 = 0$ 이 직선 $x - ay - 1 = 0$ 에 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{3}{-a} \neq \frac{-2}{-1} \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면 $b = -1$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$$

043 ② 14

두 점 A $(-1, 3), B(3, 6)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{6-3}{3-(-1)} = \frac{3}{4} \text{이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 } -\frac{4}{3} \text{이다.}$$

한편 선분 AB를 1:2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 - 2 \times (-1)}{1-2}, \frac{1 \times 6 - 2 \times 3}{1-2} \right) \quad \therefore (-5, 0)$$

즉, 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 이고 점 $(-5, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}(x+5), y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

$$\therefore 4x + 3y + 20 = 0$$

따라서 $a=4$, $b=10$ 이므로 $a+b=14$

044 답 ②

두 점 A(2, 1), B(4, -3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-3-1}{4-2} = -2 \text{이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$

$$\text{선분 AB의 중점의 좌표는 } \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-3}{2} \right) \quad \therefore (3, -1)$$

즉, 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1 = \frac{1}{2}(x-3), y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$\therefore x - 2y - 5 = 0$$

045 답 $\frac{7}{2}$

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x+y=0$, $ax+y+2=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1} \neq \frac{0}{2} \quad \therefore a=1$$

(ii) 두 직선 $x-2y+3=0$, $ax+y+2=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{2} \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

(iii) 직선 $ax+y+2=0$ 이 두 직선 $x+y=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지날 때

$$x+y=0, x-2y+3=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=-1, y=1$$

$$\text{직선 } ax+y+2=0 \text{이 점 } (-1, 1) \text{을 지나야 하므로}$$

$$-a+1+2=0 \quad \therefore a=3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{7}{2}$$

046 답 ③

직선 $3x+4y+2=0$, 즉 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이다.

기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식을 $y = \frac{4}{3}x + k$, 즉 $4x - 3y + 3k = 0$

으로 놓으면 점 $(3, 2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4 \times 3 + (-3) \times 2 + 3k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2, \frac{|3k+6|}{5} = 2$$

$$|3k+6| = 10, 3k+6 = \pm 10$$

$$\therefore k = -\frac{16}{3} \text{ 또는 } k = \frac{4}{3}$$

이때 구하는 y 절편은 k 이고, 양수이므로 $k = \frac{4}{3}$

047 답 ②

두 직선 $x+2y+3=0$, $x+2y-7=0$ 이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$ 과 직선 $x+2y-7=0$ 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \frac{|-3-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5}$$

048 답 ④

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{2}{3-1}(x-1) \quad \therefore x-y-1=0$$

점 C(2, 5)와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2-5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

049 답 $x+3y-2=0$ 또는 $3x-y+4=0$

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+y+1=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x-2y+3| = |2x+y+1|, x-2y+3 = \pm(2x+y+1)$$

$$\therefore x+3y-2=0 \text{ 또는 } 3x-y+4=0$$

050 답 ⑤

직선 $ax-y-1=0$ 이 직선 $3x+2y-1=0$ 에 수직이므로

$$a \times 3 + (-1) \times 2 = 0 \quad \therefore a = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

직선 $ax-y-1=0$ 이 직선 $2x+by+1=0$ 에 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{b} \neq \frac{-1}{1} \quad \therefore ab = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면 $b = -3$

$$\therefore 3a-b = 3 \times \frac{2}{3} - (-3) = 5$$

051 답 ②

두 직선 $3x+(k+3)y-5=0$, $2x+(k-4)y+1=0$ 에 대하여 두 직선이 평행하려면

$$\frac{3}{2} = \frac{k+3}{k-4} \neq \frac{-5}{1}$$

$$3(k-4) = 2(k+3), k=18 \quad \therefore a=18$$

또 두 직선이 수직이 되려면

$$3 \times 2 + (k+3)(k-4) = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0, (k+2)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta = 3$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{18}{3} = 6$$

052 답 ⑤

두 직선 $kx+2y-3=0$, $3x+(k-1)y+1=0$ 의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선이 평행해야 하므로

$$\frac{k}{3} = \frac{2}{k-1} \neq \frac{-3}{1}$$

$$k(k-1)=6, (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-2+3=1$

053 답 ⑤

직선 $ax-2y+1=0$ 이 직선 $bx-3y+2=0$ 에 수직이므로

$$ab+(-2) \times (-3)=0 \quad \therefore ab=-6$$

직선 $ax-2y+1=0$ 이 직선 $(b+2)x+2y+4=0$ 에 평행하므로

$$\frac{a}{b+2} = \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{4}$$

$$a=-(b+2) \quad \therefore a+b=-2$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-2)^2-2 \times (-6)=16$$

054 답 ④

직선 $x+(a+1)y+2=0$ 과 직선 $ax+ay+b=0$ 이 수직이므로

$$a+a(a+1)=0, a(a+2)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a=-2$

즉, 두 직선은 $x-y+2=0$, $-2x-2y+b=0$ 이고, 두 직선의 교점의 좌표가 $(1, c)$ 이므로

$$1-c+2=0, -2-2c+b=0 \quad \therefore b=8, c=3$$

$$\therefore a+b+c=9$$

055 답 ③

두 점 $A(1, 2)$, $B(4, 8)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{8-2}{4-1}=2$ 이므로

로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

선분 AB 를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 8 + 1 \times 2}{2+1} \right) \quad \therefore (3, 6)$$

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$$

따라서 이 직선의 x 절편은 15이다.

056 답 ⑤

두 점 $(-2, -3)$, $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-(-3)}{2-(-2)}=1$$

따라서 기울기가 1이고 x 절편이 -3 , 즉 점 $(-3, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y=x+3$

이 직선이 점 $(2, k)$ 를 지나므로 $k=2+3=5$

057 답 ④

두 직선 $2x+y+5=0$, $x+3y-2=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $2x+y+5+k(x+3y-2)=0$ (단, k 는 실수)

$$\therefore (k+2)x+(3k+1)y-2k+5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①과 직선 $2x-y+3=0$ 이 수직이므로

$$2 \times (k+2) + (-1) \times (3k+1) = 0$$

$$-k+3=0 \quad \therefore k=3$$

$k=3$ 을 ①에 대입하면 $5x+10y-1=0$

058 답 ③

직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$ 의 기울기가 2이므로 직선 AH 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $A(3, 2)$ 를 지나는 직선 AH 의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore x+2y-7=0$$

점 H 는 두 직선 $2x-y+1=0$, $x+2y-7=0$ 의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$

따라서 $H(1, 3)$ 이므로 $a=1$, $b=3$

$$\therefore a+b=4$$

059 답 ③

두 점 $A(-1, 2)$, $B(5, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-2}{5-(-1)}=\frac{1}{3}$$

이므로 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 -3 이다.

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2} \right) \quad \therefore (2, 3)$$

즉, 기울기가 -3 이고 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-3(x-2) \quad \therefore y=-3x+9$$

따라서 이 직선이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로

$$6=-3a+9 \quad \therefore a=1$$

060 답 ①

직선 $2x+y-4=0$ 의 x 절편은 2, y 절편은 4이므로

$A(2, 0)$, $B(0, 4)$

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2} \right) \quad \therefore (1, 2)$$

직선 $2x+y-4=0$, 즉 $y=-2x+4$ 의 기울기는 -2 이므로 선분

AB 의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore x-2y+3=0$$

061 답 ②

직선 AB 와 직선 $y=-2x+b$ 가 수직이므로

$$\frac{a-3}{5-1} \times (-2) = -1, a-3=2 \quad \therefore a=5$$

즉, $B(5, 5)$ 이므로 선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2} \right) \quad \therefore (3, 4)$$

따라서 직선 $y=-2x+b$ 는 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$4=-6+b \quad \therefore b=10 \quad \therefore a+b=15$$

062 답 ③

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $2x-y=0$, $ax-y+4=0$ 이 평행할 때

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{4} \quad \therefore a=2$$

(ii) 두 직선 $x+y-2=0$, $ax-y+4=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{4} \quad \therefore a=-1$$

(iii) 직선 $ax-y+4=0$ 이 두 직선 $2x-y=0$, $x+y-2=0$ 의 교점을 지날 때

$$2x-y=0, x+y-2=0 \text{을 연립하여 풀면 } x=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}$$

직선 $ax-y+4=0$ 이 점 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 를 지나야 하므로

$$\frac{2}{3}a - \frac{4}{3} + 4 = 0 \quad \therefore a = -4$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2 + (-1) + (-4) = -3$$

063 답 ②

주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $3x+y-6=0$, $ax+2y+1=0$ 이 평행할 때

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{2} \neq \frac{-6}{1} \quad \therefore a=6$$

(ii) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax+2y+1=0$ 이 평행할 때

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{1} \quad \therefore a=-4$$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은 $6 + (-4) = 2$

064 답 2

세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이고 나머지 한 직선은 두 직선과 평행하지 않아야 한다.

두 직선 $3x+2y=0$, $x+2y-4=0$ 은 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $3x+2y=0$, $ax-y+2=0$ 이 수직일 때

$$3 \times a + 2 \times (-1) = 0 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

(ii) 두 직선 $x+2y-4=0$, $ax-y+2=0$ 이 수직일 때

$$1 \times a + 2 \times (-1) = 0 \quad \therefore a = 2$$

(i), (ii)에 의하여 정수 a 의 값은 2이다.

065 답 0

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax-y-3=0$, $2x+y+5=0$ 이 평행할 때

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{5} \quad \therefore a=-2$$

(ii) 두 직선 $4x+by-5=0$, $2x+y+5=0$ 이 평행할 때

$$\frac{4}{2} = \frac{b}{1} \neq \frac{-5}{5} \quad \therefore b=2$$

(i), (ii)에 의하여 $a=-2$, $b=2$ 이므로 $a+b=0$

066 답 $-\frac{15}{4}$

직선 $3x-4y+17=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+\frac{17}{4}$ 에 평행한 직선의 방정식을

$y=\frac{3}{4}x+k$, 즉 $3x-4y+4k=0$ 으로 놓으면 점 $(-1, -2)$ 와 이

직선 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3 \times (-1) - 4 \times (-2) + 4k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2, \quad \frac{|5+4k|}{5} = 2$$

$$|5+4k|=10, \quad 5+4k=\pm 10 \quad \therefore k=\frac{5}{4} \text{ 또는 } k=-\frac{15}{4}$$

이때 구하는 y 절편은 k 이고, 음수이므로 $k=-\frac{15}{4}$

067 답 ⑤

점 $(1, -4)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-4-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

068 답 2

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $4x+3y-k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|4 \times (-2) + 3 \times 3 - k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1, \quad \frac{|1-k|}{5} = 1$$

$$|1-k|=5, \quad 1-k=\pm 5 \quad \therefore k=-4 \text{ 또는 } k=6$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-4+6=2$

069 답 ④

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-2y+3)+k(x+2y)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-2y+3=0, \quad x+2y=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=\frac{1}{2} \quad \therefore P(-1, \frac{1}{2})$$

따라서 점 P 와 직선 $3x+4y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-1) + 4 \times \frac{1}{2} - 9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

070 답 ②

$P(a, 0)$ 이라 하면 점 P 에서 두 직선 $2x-y+3=0$, $x-2y-6=0$

에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2a+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$|2a+3|=|a-6|, \quad 2a+3=\pm(a-6)$$

$$\therefore a=-9 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(-9, 0)$ 또는 $(1, 0)$ 이다.

071 답 ⑤

$$f(k) = \frac{|2k+10-2k-4|}{\sqrt{k^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{k^2+4}}$$

따라서 $\sqrt{k^2+4}$ 가 최소일 때, $f(k)$ 의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(0)=3$

072 답 ③ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

직선 AC의 기울기는 $\frac{3-6}{9-3} = -\frac{1}{2}$ 이므로 직선 AC와 수직인 직선 BD의 기울기는 2이다.

또 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+9}{2}, \frac{3+6}{2}\right) \therefore \left(6, \frac{9}{2}\right)$

즉, 직선 BD의 방정식은

$$y - \frac{9}{2} = 2(x - 6) \therefore 4x - 2y - 15 = 0$$

따라서 원점 O와 직선 BD 사이의 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

073 답 ①

두 직선 $3x + 4y + 4 = 0$, $3x + 4y - 6 = 0$ 이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x + 4y + 4 = 0$ 위의 한 점 $(0, -1)$ 과 직선 $3x + 4y - 6 = 0$ 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \frac{|-4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

074 답 ③

두 직선 $7x + y = 0$, $7x + y + a = 0$ 이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $7x + y = 0$ 위의 한 점 $(0, 0)$ 과 직선 $7x + y + a = 0$ 사이의 거리와 같고, 이 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}, \frac{|a|}{5\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$|a| = 30 \therefore a = -30 \text{ 또는 } a = 30$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 30$

075 답 ④

두 직선 $x + ky + 4 = 0$, $kx + y - 2 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{1} \neq \frac{4}{-2}, k^2 = 1 \therefore k = 1 (\because k > 0)$$

즉, 두 직선의 방정식은 $x + y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$

이때 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 평행한 두 직선 사이의 거리와 같고, 이는 직선 $x + y - 2 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 과 직선 $x + y + 4 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $(3\sqrt{2})^2 = 18$

076 답 8

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{29}$$

직선 AB의 방정식은

$$y - 1 = \frac{-1-1}{3+2}(x+2) \therefore 2x + 5y - 1 = 0$$

점 C(1, 3)과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2 + 15 - 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{16}{\sqrt{29}} = \frac{16\sqrt{29}}{29}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{16\sqrt{29}}{29} = 8$

077 답 ③

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \therefore x + y - 2 = 0$$

점 C(3, a)와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|3 + a - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{2}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{|a + 1|}{\sqrt{2}} = 6$$

$$|a + 1| = 6, a + 1 = \pm 6$$

$$\therefore a = -7 \text{ 또는 } a = 5$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 5$

078 답 6

직선 OA와 직선 $2x - 3y + 12 = 0$ 은 기울기가 $\frac{2}{3}$ 로 같으므로 평행하다.

이때 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$ 를 밑변으로 하면 원점과 직선

$2x - 3y + 12 = 0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$$\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

원점과 직선 $2x - 3y + 12 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{12\sqrt{13}}{13} = 6$$

079 답 7

세 직선의 기울기가 모두 다르고 한 점에서 만나지 않으므로 세 직선으로 둘러싸인 도형은 삼각형이다.

두 직선 $x - 2y = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ 의 교점을 A라 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x = 6, y = 3 \therefore A(6, 3)$$

두 직선 $2x + 3y - 21 = 0$, $4x - y - 7 = 0$ 의 교점을 B라 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 5 \therefore B(3, 5)$$

두 직선 $x - 2y = 0$, $4x - y - 7 = 0$ 의 교점을 C라 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 1 \therefore C(2, 1)$$

즉, 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는

$$A(6, 3), B(3, 5), C(2, 1)$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

점 B(3, 5)와 직선 $x - 2y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{7\sqrt{5}}{5} = 7$$

080 ①

두 직선 $x+3y+2=0$, $3x+y-2=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y+2|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|3x+y-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$|x+3y+2| = |3x+y-2|$$

$$x+3y+2 = \pm(3x+y-2)$$

$$\therefore x-y-2=0 \text{ 또는 } x+y=0$$

따라서 y 절편이 음수인 직선의 방정식은 $x-y-2=0$

081 ③

$P(x, y)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선 $3x+2y+1=0$, $2x-3y-5=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+2y+1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

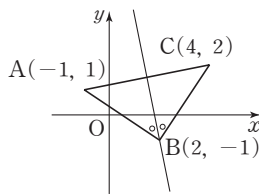
$$|3x+2y+1| = |2x-3y-5|$$

$$3x+2y+1 = \pm(2x-3y-5)$$

$$\therefore x+5y+6=0 \text{ 또는 } 5x-y-4=0$$

082 ⑤ $5x+y-9=0$

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 B 와 삼각형 ABC 의 내심을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 $\angle B$ 의 이등분선과 같다.



직선 AB 의 방정식은

$$y-1 = \frac{-1-1}{2+1}(x+1)$$

$$\therefore 2x+3y-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 BC 의 방정식은

$$y+1 = \frac{2+1}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore 3x-2y-8=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|3x-2y-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$|2x+3y-1| = |3x-2y-8|$$

$$2x+3y-1 = \pm(3x-2y-8)$$

$$\therefore x-5y-7=0 \text{ 또는 } 5x+y-9=0$$

그런데 $\angle B$ 의 이등분선의 y 절편은 양수이어야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$$5x+y-9=0$$

083 ①

점 $(2, 4)$ 를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y-4=3(x-2) \quad \therefore y=3x-2$$

따라서 $m=3$, $n=-2$ 이므로

$$m+n=1$$

084 ①

두 점 $(3, -k)$, $(k-3, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{k}{(k-3)-3}=2, k=2k-12$$

$$\therefore k=12$$

기울기가 2이고 점 $(3, -12)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+12=2(x-3) \quad \therefore y=2x-18$$

따라서 구하는 y 절편은 -18 이다.

085 ① -1

선분 BC 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-1+13}{2}\right) \quad \therefore (5, 6)$$

두 점 $(1, 4)$, $(5, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{6-4}{5-1}(x-1), y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore x-2y+7=0$$

따라서 $a=1$, $b=-2$ 이므로

$$a+b=-1$$

086 ②

x 절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 y 절편은 $-a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$$

이 직선이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{-1}{a} - \frac{2}{a} = 1 \quad \therefore a = -3$$

087 ⑤ $y=3x+5$

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB 와 직선 AC 의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{8+1}{k+2} = \frac{(5k+6)+1}{2+2}, \frac{9}{k+2} = \frac{5k+7}{4}$$

$$5k^2+17k-22=0, (5k+22)(k-1)=0$$

$$\therefore k=1 (\because k>0)$$

따라서 직선 l 은 기울기가 $\frac{9}{k+2}=3$ 이고 점 $A(-2, -1)$ 을 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y+1=3(x+2) \quad \therefore y=3x+5$$

088 ③

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 점 $(2, 3)$, $(6, 5)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (4, 4)$$

두 점 $(1, -2)$, $(4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2 = \frac{4+2}{4-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-4$$

따라서 $a=2$, $b=-4$ 이므로

$$a-b=6$$

089 [답] ⑤

선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \quad \therefore (4, 2)$$

두 점 (2, 3), (4, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{2-3}{4-2}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+4$$

이 직선이 점 (-2, a)를 지나므로

$$a=1+4=5$$

090 [답] ③

주어진 그림에서 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로

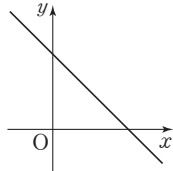
$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $cx+by+a=0$ 에서

$$y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에 의하여 직선 ②의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 직선 $cx+by+a=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



091 [답] ⑤

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(3x-y-5)+k(x+2y-11)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$$3x-y-5=0, x+2y-11=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=4$

따라서 항상 점 (3, 4)를 지나므로 $a=3, b=4$

$$\therefore a+b=7$$

092 [답] ②

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x-1)-(y-2)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 ①은 k 의 값에 관계없이 항상 점 (1, 2)를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ①이 주어진 삼각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 (5, 0)을 지날 때

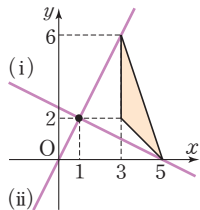
$$4k+2=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ①이 점 (3, 6)을 지날 때

$$2k-4=0 \quad \therefore k=2$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는 $-\frac{1}{2} \leq k \leq 2$

따라서 $M=2, m=-\frac{1}{2}$ 이므로 $Mm=-1$



093 [답] $x-5y+9=0$

두 직선 $3x-4y+1=0, 2x+y-8=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$3x-4y+1+k(2x+y-8)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 (1, 2)를 지나므로

$$-4-4k=0 \quad \therefore k=-1$$

$k=-1$ 을 ①에 대입하여 정리하면

$$x-5y+9=0$$

094 [답] ②

두 직선 $(k+3)x+2y-4=0, kx-2y+3=0$ 이 평행하려면

$$\frac{k+3}{k}=\frac{2}{-2} \neq \frac{-4}{3}$$

$$k+3=-k \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a=-\frac{3}{2}$$

또 두 직선이 수직이 되려면

$$k(k+3)+2 \times (-2)=0$$

$$k^2+3k-4=0$$

$$(k+4)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta=1$

$$\therefore a+\beta=-\frac{1}{2}$$

095 [답] -2

직선 AB의 기울기는

$$\frac{a+3}{3-1}=\frac{a+3}{2}$$

직선 $4x-ay=1$, 즉 $y=\frac{4}{a}x-\frac{1}{a}$ 의 기울기는 $\frac{4}{a}$

두 직선이 수직이므로

$$\frac{a+3}{2} \times \frac{4}{a} = -1$$

$$2(a+3)=-a, 3a=-6$$

$$\therefore a=-2$$

096 [답] ①

직선 $2x+y-1=0$, 즉 $y=-2x+1$ 이 직선 AB와 수직이므로

$$-2 \times \frac{b-4}{a-1} = -1$$

$$\therefore a-2b=-7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 $2x+y-1=0$ 은 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ 를 지나

므로

$$2 \times \frac{a+1}{2} + \frac{b+4}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-3, b=2$$

$$\therefore a-b=-5$$

097 답 6

세 직선에 의하여 좌표평면이 6개의 영역으로 나누어지려면 세 직선 중 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(i) 두 직선 $3x-y-1=0$, $y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$ 이 평행할 때

$$\frac{3}{m} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-3}{-3} \quad \therefore m=3$$

(ii) 두 직선 $x+y-7=0$, $y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{m} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-3} \quad \therefore m=-1$$

(iii) 직선 $y=mx-3$ 이 두 직선 $3x-y-1=0$, $x+y-7=0$ 의 교점을 지날 때

$$3x-y-1=0, x+y-7=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=2, y=5$$

$$\text{직선 } y=mx-3 \text{이 점 } (2, 5) \text{를 지나므로}$$

$$5=2m-3 \quad \therefore m=4$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 m 의 값의 합은 $3+(-1)+4=6$

098 답 ⑤

점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을

$$y-3=m(x-1), \text{ 즉 } mx-y-m+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 원점과 직선 ① 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3, \quad |-m+3|=3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-6m+9=9m^2+9$$

$$4m^2+3m=0, \quad m(4m+3)=0$$

$$\therefore m=-\frac{3}{4} \text{ 또는 } m=0$$

그런데 직선이 좌표축과 평행하지 않으므로

$$m=-\frac{3}{4}$$

$$m=-\frac{3}{4} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 정리하면}$$

$$3x+4y-15=0$$

따라서 이 직선의 x 절편은 5이다.

099 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $k=-1$ 을 $kx-2y-2k+3=0$ 에 대입하여 정리하면

$$x+2y-5=0$$

두 직선 $x+2y-5=0$, $2x+4y+3=0$ 에서

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{-5}{3}$$

따라서 직선 l 은 직선 $2x+4y+3=0$ 에 평행하다.

ㄷ. 점 $(2, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리를 $f(k)$ 라 하면

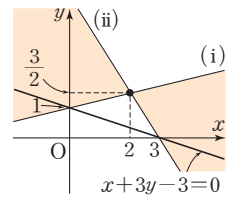
$$f(k) = \frac{|3|}{\sqrt{k^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{k^2+4}}$$

따라서 $\sqrt{k^2+4}$ 가 최소일 때, $f(k)$ 의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

ㄷ. $kx-2y-2k+3=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$k(x-2)-(2y-3)=0$ 이므로 직선 l 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, \frac{3}{2})$ 을 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 l 이 직선 $x+3y-3=0$ 과 제1사분면에서 만나지 않도록 움직여 보면



(i) 직선 l 이 점 $(0, 1)$ 을 지날 때

$$-2k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 l 이 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$k+3=0 \quad \therefore k=-3$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는 $-3 < k < \frac{1}{2}$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

100 답 ④

두 직선 $kx+y-2=0$, $2x+(2k-3)y+3=0$ 이 평행하므로

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{2k-3} \neq \frac{-2}{3}, \quad k(2k-3)=2$$

$$(2k+1)(k-2)=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k=2$

즉, 두 직선의 방정식은 $2x+y-2=0$, $2x+y+3=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-2=0$ 위의 한 점

$(1, 0)$ 과 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

101 답 ①

직선 $2x+y-12=0$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$2x+x-12=0 \quad \therefore x=4 \quad \therefore A(4, 4)$$

직선 $2x+y-12=0$ 과 직선 $y=2x$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$2x+2x-12=0 \quad \therefore x=3 \quad \therefore B(3, 6)$$

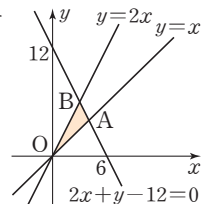
$$\therefore AB = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$

원점 O와 직선 $2x+y-12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} = 6$$



102 답 ⑤

점 $(3, a)$ 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3+2a+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|6+a+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|2a+4| = |a+9|, \quad 2a+4 = \pm(a+9)$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=-\frac{13}{3}$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=5$



001 답 ⑤

원 $(x+3)^2+(y-5)^2=12$ 의 중심의 좌표가 $(-3, 5)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-5)^2=r^2$$

이 원이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$3^2+(-1-5)^2=r^2 \quad \therefore r^2=45$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=\pi \times 45=45\pi$

002 답 ③

원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-a)^2=r^2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$4^2+(0-a)^2=r^2, a^2+16=r^2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(3, 7)$ 을 지나므로

$$3^2+(7-a)^2=r^2, a^2-14a+58=r^2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=25$

003 답 $k < -1$ 또는 $k > 2$

$$x^2+y^2+4kx-2y+4k+9=0 \text{에서}$$

$$(x+2k)^2+(y-1)^2=4k^2-4k-8$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$4k^2-4k-8 > 0, k^2-k-2 > 0$$

$$(k+1)(k-2) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

004 답 ①

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16+4B=0 \quad \therefore B=-4$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(3, -3)$ 을 지나므로

$$9+9+3A-3B=0, A-B=-6 \quad \therefore A=-10$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-10x-4y=0$

005 답 ①

원의 중심의 좌표를 $(a, a+3)$ 이라 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2+(2-a-3)^2=(a+3)^2$$

$$a^2-6a-7=0, (a+1)(a-7)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 넓이의 합은 $\pi \times 2^2 + \pi \times 10^2 = 104\pi$

006 답 ④

점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 중심이 제 1사분면 위에 있어야 한다.

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이므로 원의 방정식은

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이 원이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$$

$$r^2-6r+5=0, (r-1)(r-5)=0$$

$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 둘레의 길이의 합은

$$2\pi \times 1 + 2\pi \times 5 = 12\pi$$

007 답 ④

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2+k(x^2+y^2-2x+4y+2)=0 \text{ (단, } k \neq -1) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-2+2k=0 \quad \therefore k=1$$

$k=1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-x+2y=0$$

따라서 $a=-1$, $b=2$ 이므로

$$a+b=1$$

008 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+x-5y+1-(x^2+y^2-2x-4y-4)=0$$

$$3x-y+5=0 \quad \therefore y=3x+5$$

따라서 구하는 직선의 기울기는 3이다.

009 답 ①

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2 \text{이므로}$$

$$3\overline{BP}=2\overline{AP} \quad \therefore 9\overline{BP}^2=4\overline{AP}^2$$

따라서 $P(x, y)$ 라 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$9\{(x-2)^2+y^2\}=4\{(x+3)^2+y^2\}$$

$$\therefore x^2+y^2-12x=0$$

010 답 ④

원 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ 의 중심의 좌표가 $(-2, 3)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$$

이 원이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$2^2+(1-3)^2=r^2, r^2=8$$

$$\therefore r=-2\sqrt{2} \text{ 또는 } r=2\sqrt{2}$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

011 답 ①

중심의 좌표가 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3이므로 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

이 원이 점 $(a, 5)$ 를 지나므로

$$(a+1)^2 + (5-2)^2 = 9$$

$$(a+1)^2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

012 답 ④

선분 AB를 3:2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 1 - 2 \times 2}{3-2}, \frac{3 \times (-2) - 2 \times (-3)}{3-2} \right) \quad \therefore (-1, 0)$$

즉, 원의 중심의 좌표가 $(-1, 0)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 A(2, -3)을 지나므로

$$(2+1)^2 + (-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 18$$

$$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 18$$

013 답 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

$$G\left(\frac{1+3-4}{3}, \frac{2+6-5}{3}\right) \quad \therefore G(0, 1)$$

$$\therefore AG = \sqrt{(-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 중심의 좌표가 $(0, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 방정식은

$$x^2 + (y-1)^2 = 2$$

014 답 ④

원의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \quad \therefore C(4, -1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$AC = \sqrt{(4-5)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{5}$$

즉, 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$$

따라서 $a=4$, $b=-1$, $c=5$ 이므로

$$a+b+c=8$$

015 답 ②

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-5}{2}\right) \quad \therefore M(1, -1)$$

원의 중심을 D라 하면 점 D는 선분 AM의 중점이므로

$$D\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore D(1, 1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$AD = \sqrt{(1-1)^2 + (1-3)^2} = 2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

016 답 ⑤

원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + 1 = r^2, \quad a^2 - 6a + 10 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠이 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로

$$(-1-a)^2 + 25 = r^2, \quad a^2 + 2a + 26 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $r^2=26$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + y^2 = 26$$

017 답 ②

원의 중심의 좌표를 (k, k) 라 하면 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 방정식은

$$(x-k)^2 + (y-k)^2 = 2$$

이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$k^2 + k^2 = 2, \quad k^2 = 1 \quad \therefore k = \pm 1$$

(i) $k=1$ 일 때, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

(ii) $k=-1$ 일 때, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

(i), (ii)에 의하여

$$a=1, b=1, c=2 \text{ 또는 } a=-1, b=-1, c=2$$

$$\therefore abc=2$$

018 답 ③

원의 중심의 좌표를 $(k, 2k-1)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-k)^2 + (y-2k+1)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$(3-k)^2 + (3-2k)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠이 점 $(5, -2)$ 를 지나므로

$$(5-k)^2 + (-1-2k)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } (3-k)^2 + (3-2k)^2 = (5-k)^2 + (-1-2k)^2$$

$$5k^2 - 18k + 18 = 5k^2 - 6k + 26$$

$$-12k = 8 \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ 이므로

$$a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{7}{3} \quad \therefore a+b = -3$$

019 답 ③

$$x^2 + y^2 - 4x + 4ky + 5k^2 - 5k + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+2k)^2 = -k^2 + 5k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2 + 5k > 0, \quad k^2 - 5k < 0$$

$$k(k-5) < 0 \quad \therefore 0 < k < 5$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

020 [답] ⑤

주어진 식을 변형하면

- ① $(x+1)^2+y^2=1$
- ② $x^2+(y-3)^2=2$
- ③ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
- ④ $(x+2)^2+(y+1)^2=4$
- ⑤ $(x+2)^2+(y+2)^2=0$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ⑤이다.

021 [답] 6π

$$x^2+y^2-4x+6y+4=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y+3)^2=9$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, -3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\pi \times 3 = 6\pi$

022 [답] 2

$$x^2+y^2-6kx+2ky+11k^2-2k-3=0 \text{에서}$$

$$(x-3k)^2+(y+k)^2=-k^2+2k+3$$

이때 $-k^2+2k+3 > 0$ 이어야 하므로

$$k^2-2k-3 < 0, (k+1)(k-3) < 0 \quad \therefore -1 < k < 3$$

이때 원의 넓이가 최대하려면 반지름의 길이 $\sqrt{-k^2+2k+3}$ 이 최대이어야 하므로

$$\sqrt{-k^2+2k+3} = \sqrt{-(k-1)^2+4}$$

따라서 $-1 < k < 3$ 에서 $k=1$ 일 때 반지름의 길이는 최대이고, 그때의 반지름의 길이는 2이다.

023 [답] $x^2+y^2+x-3y=0$

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$1+4+A+2B=0, A+2B=-5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$1+9-A+3B=0, A-3B=10 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=1, B=-3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+x-3y=0$$

024 [답] ②

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 $(-2, 4)$ 를 지나므로

$$4+16-2A+4B=0, A-2B=10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$4+36+2A+6B=0, A+3B=-20 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=-2, B=-6$

$$\therefore x^2+y^2-2x-6y=0$$

이 원이 점 $(p, 2)$ 를 지나므로

$$p^2+4-2p-12=0, p^2-2p-8=0$$

$$(p+2)(p-4)=0$$

$$\therefore p=-2 \text{ 또는 } p=4$$

그런데 $p > 0$ 이므로 $p=4$

025 [답] 25π

원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

$$\overline{PA}=\overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \text{이므로}$$

$$(a+3)^2+(b-1)^2=(a+2)^2+(b+6)^2$$

$$\therefore a-7b=15 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{PA}=\overline{PC} \text{에서 } \overline{PA}^2=\overline{PC}^2 \text{이므로}$$

$$(a+3)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$$

$$\therefore 2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

원의 중심은 $P(1, -2)$ 이므로 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PA}=\sqrt{(1+3)^2+(-2-1)^2}=5$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 5^2 = 25\pi$

026 [답] ②

$$x+3y=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2x+y=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$x-2y+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(0, 0)$, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(-3, 1)$, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

원 ㉣이 점 $(-3, 1)$ 을 지나므로

$$9+1-3A+B=0, 3A-B=10 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

원 ㉣이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$1+4-A+2B=0, A-2B=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $A=3, B=-1$

따라서 구하는 외접원의 방정식은

$$x^2+y^2+3x-y=0$$

027 [답] ③

원의 중심의 좌표를 $(a, -a-1)$ 이라 하면 y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y+a+1)^2=a^2$$

이 원이 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2+(3+a+1)^2=a^2$$

$$a^2+12a+20=0, (a+10)(a+2)=0$$

$$\therefore a=-10 \text{ 또는 } a=-2$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$|-10|+|-2|=10+2=12$$

028 답 π

원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$a^2 + (2-b)^2 = a^2 \quad \therefore b=2$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (3-b)^2 = a^2, \quad -2a+2=0 \quad \therefore a=1$$

따라서 반지름의 길이는 1이므로 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 1^2 = \pi$

029 답 ④

$$x^2 + y^2 + 4kx - 4y + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2k)^2 + (y-2)^2 = 4k^2 - 5$$

원의 중심 $(-2k, 2)$ 가 제2사분면 위에 있으므로

$$-2k < 0 \quad \therefore k > 0$$

또 원이 x 축에 접하므로 $\sqrt{4k^2 - 5} = |2|$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4k^2 - 5 = 4, \quad k^2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \quad (\because k > 0)$$

030 답 ②

$$x^2 + y^2 - 4x - 2ay - b + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y-a)^2 = a^2 + b + 2$$

이 원이 x 축에 접하므로 $\sqrt{a^2 + b + 2} = |a|$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 + b + 2 = a^2 \quad \therefore b = -2$$

이때 원 $(x-2)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$(2-2)^2 + (6-a)^2 = a^2, \quad -12a + 36 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

031 답 $4\sqrt{2}$

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 한다.

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이므로

원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \quad \therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1), (-5, 5)$ 이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5+1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

032 답 ③

원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

이때 원의 중심이 직선 $3x+y-4=0$ 위에 있으므로

$$3r-r-4=0 \quad \therefore r=2$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 2^2 = 4\pi$

033 답 ⑤

$$x^2 + y^2 + 6x + 2ay + 6 - b = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y+a)^2 = a^2 + b + 3$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|-3| = |-a| = \sqrt{a^2 + b + 3}$$

$$|-3| = |-a| \text{에서 } a=3 \quad (\because a > 0)$$

$$\sqrt{a^2 + b + 3} = 3 \text{에서 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 + b + 3 = 9, \quad 9 + b + 3 = 9 \quad \therefore b = -3$$

$$\therefore a - b = 6$$

034 답 8π

x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3, y=x$ 의 교점일 때

$$2x-3=x \text{에서 } x=3 \quad \therefore y=3$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(3, 3)$ 이고, 원의 반지름의 길이는 3

$$\therefore \text{이므로 원의 둘레의 길이는 } 2\pi \times 3 = 6\pi$$

(ii) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3, y=-x$ 의 교점일 때

$$2x-3=-x \text{에서 } x=1 \quad \therefore y=-1$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$ 이고, 원의 반지름의 길이는

$$1 \therefore \text{이므로 원의 둘레의 길이는 } 2\pi \times 1 = 2\pi$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 두 원의 둘레의 길이의 합은

$$6\pi + 2\pi = 8\pi$$

035 답 ③

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 + k(x^2 + y^2 - 2y - 5) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

$\cdots \cdots \textcircled{1}$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로 $1-k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \quad \therefore (x-1)^2 + y^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$

036 답 $x^2 + y^2 - x + 5y - 6 = 0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2ax - 5 + k(x^2 + y^2 - 6x + 10y - 7) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

$\cdots \cdots \textcircled{1}$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $-4+4k=0 \quad \therefore k=1$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$-2a-3-k=0 \quad \therefore a=-2$$

$a=-2, k=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - x + 5y - 6 = 0$$

037 답 ③

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 - 2x + 6y + 7) = 0$$

$$\therefore 2x - 6y - 11 = 0$$

따라서 $a=-6, b=-11$ 이므로 $a-b=5$

038 ㉔ ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 6x - y + 4 - (x^2 + y^2 + ax - 2y + 1) = 0$$

$$(6-a)x + y + 3 = 0 \quad \therefore y = (a-6)x - 3$$

이 직선의 기울기가 -2 이므로

$$a-6 = -2 \quad \therefore a = 4$$

039 ㉔ ②

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13 \text{에서 } x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8) = 0$$

$$2x - y - 4 = 0 \quad \therefore y = 2x - 4$$

이 직선의 x 절편은 2, y 절편은 -4 이므로 $A(2, 0)$, $B(0, -4)$

따라서 삼각형 OAB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

040 ㉔ ④

두 원 C_1 , C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 - (x^2 + y^2 + 4x - 6y + a) = 0$$

$$\therefore 2x + 2y + 9 - a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 C_1 의 방정식을 변형하면 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$

이때 직선 $\textcircled{1}$ 이 원 C_1 의 넓이를 이등분하려면 원 C_1 의 중심

$(-3, 2)$ 를 지나야 하므로

$$-6 + 4 + 9 - a = 0 \quad \therefore a = 7$$

041 ㉔ ④

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1 \text{이므로 } 2\overline{BP} = \overline{AP} \quad \therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$P(x, y) \text{라 하면 } 4\{(x-2)^2 + y^2\} = (x+1)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \quad \therefore (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi$$

042 ㉔ ③

$$P(x, y) \text{라 하면 } (x+1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 26$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad \therefore (x-1)^2 + y^2 = 9$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

043 ㉔ $x^2 + y^2 - y - 6 = 0$

$$P(a, b) \text{라 하면 } a^2 + b^2 + 4a - 6b - 12 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 선분 AP 의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{a+2}{2}, y = \frac{b-2}{2} \quad \therefore a = 2x-2, b = 2y+2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 점 Q 가 나타내는 도형의 방정식은

$$(2x-2)^2 + (2y+2)^2 + 4(2x-2) - 6(2y+2) - 12 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - y - 6 = 0$$

044 ㉔ 15

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2 \text{이므로 } 2\overline{AP} = 3\overline{BP}$$

$$\therefore 4\overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

$P(x, y)$ 라 하면

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0 \quad \therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심의 좌표가 $(7, 0)$, 반지름의 길이가 6인 원 위를 움직인다.

오른쪽 그림과 같이 점 P 에서 x 축에

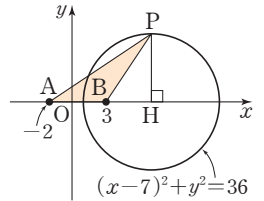
내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{AB} = 5$

이고, $\overline{PH}$ 의 최댓값은 원의 반지름의

길이인 6이므로 삼각형 ABP 의 넓이

의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$



045 ㉔ ④

원의 중심 $(2, 0)$ 과 직선 $y = x + n$, 즉 $x - y + n = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+n|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|n+2|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|n+2|}{\sqrt{2}} > 3\sqrt{2}, |n+2| > 6$$

$$n+2 < -6 \text{ 또는 } n+2 > 6$$

$$\therefore n < -8 \text{ 또는 } n > 4$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

다른 풀이 $y = x + n$ 을 $(x-2)^2 + y^2 = 18$ 에 대입하면

$$(x-2)^2 + (x+n)^2 = 18$$

$$\therefore 2x^2 + 2(n-2)x + n^2 - 14 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$$\frac{D}{4} = (n-2)^2 - 2(n^2 - 14) < 0$$

$$n^2 + 4n - 32 > 0, (n+8)(n-4) > 0$$

$$\therefore n < -8 \text{ 또는 } n > 4$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

046 ㉔ ③

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-1, 2)$

라 하고, 점 C 에서 직선 $3x + 4y + 5 = 0$ 에

내린 수선의 발을 H 라 하면

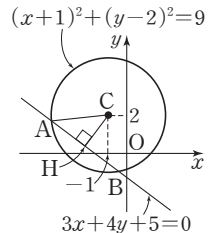
$$\overline{CH} = \frac{|-3+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

직각삼각형 CAH 에서 $\overline{CA}$ 의 길이는 원의

반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{5}$$



047 답 $4\sqrt{2}$

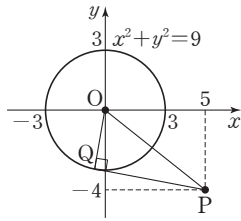
점 $P(5, -4)$ 와 원 $x^2+y^2=9$ 의 중심

$O(0, 0)$ 사이의 거리는

$$OP = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

직각삼각형 OPQ 에서

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{OP^2 - OQ^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{41})^2 - 3^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



048 답 2

원의 중심 $(3, -1)$ 과 직선 $4x+3y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12-3+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로

$$M=2+\sqrt{2}, m=2-\sqrt{2}$$

$$\therefore Mm=2$$

049 답 ⑤

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=9$ 의 반지름의 길이는 3이므로 접선의 방정식은

$$y=2x \pm 3\sqrt{2^2+1}$$

$$\therefore y=2x \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 $m=2$, $n=\pm 3\sqrt{5}$ 이므로

$$m^2+n^2=4+45=49$$

050 답 ⑤

원 $x^2+y^2=17$ 위의 점 $(4, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x+y=17$$

051 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5$$

이 직선이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로 $3x_1-y_1=5$

$$\therefore y_1=3x_1-5 \quad \text{..... ㉠}$$

한편 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2+(3x_1-5)^2=5, x_1^2-3x_1+2=0$$

$$(x_1-1)(x_1-2)=0 \quad \therefore x_1=1 \text{ 또는 } x_1=2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x_1=1, y_1=-2 \text{ 또는 } x_1=2, y_1=1$$

즉, 접선의 방정식은 $x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \text{ 또는 } y=-2x+5$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$$\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{3}{2}$$

다른 풀이 점 $(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y+1=m(x-3)$$

$$\therefore mx-y-3m-1=0 \quad \text{..... ㉢}$$

원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$ 이므로 원과 직선 ㉢이 접하려면

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|3m+1|=\sqrt{5} \times \sqrt{m^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } (3m+1)^2=5(m^2+1)$$

$$2m^2+3m-2=0, (m+2)(2m-1)=0$$

$$\therefore m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은

$$-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

052 답 ③

원의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 $x-2y+n=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-4+n|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|n-3|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|n-3|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}, |n-3|<5$$

$$-5< n-3 < 5 \quad \therefore -2 < n < 8$$

따라서 정수 n 은 $-1, 0, 1, \dots, 7$ 의 9개이다.

053 답 ②

원의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

① 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=0<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

② 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}>2 \text{이므로 원과 직선은 만나지 않는다.}$$

③ 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

④ 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=3x+5$, 즉 $3x-y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

⑤ 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=4x-1$, 즉 $4x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

따라서 원 $x^2+y^2=4$ 와 만나지 않는 직선은 ②이다.

054 [답] 0

$y=mx+2$ 를 $x^2+y^2=2$ 에 대입하면
 $x^2+(mx+2)^2=2 \quad \therefore (m^2+1)x^2+4mx+2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나므로
 $\frac{D}{4}=(2m)^2-2(m^2+1)\geq 0$
 $2m^2-2\geq 0, m^2\geq 1$
 $\therefore m\leq -1$ 또는 $m\geq 1$
 따라서 $\alpha=-1, \beta=1$ 이므로 $\alpha+\beta=0$

055 [답] -1

원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 $x+ky-5=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|2-k-5|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}$
 원의 넓이가 5π 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이고, 원과 직선이 접하려면
 $\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}, |k+3|=\sqrt{5}\sqrt{k^2+1}$
 양변을 제곱하면 $(k+3)^2=5(k^2+1)$
 $2k^2-3k-2=0, (2k+1)(k-2)=0$
 $\therefore k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=2$
 따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은
 $-\frac{1}{2}\times 2=-1$

056 [답] ①

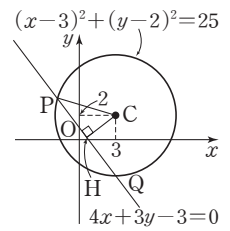
원의 중심이 제1사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로
 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이다.
 이때 원과 직선 $3x-4y+1=0$ 이 접하려면
 $\frac{|3r-4r+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r, |r-1|=5r$
 $r-1=\pm 5r \quad \therefore r=-\frac{1}{4}$ 또는 $r=\frac{1}{6}$
 그런데 $r>0$ 이므로 $r=\frac{1}{6}$

057 [답] ⑤

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=8$ 의 중심의 좌표는 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 직선 $x-y+n=0$ 과 만나지 않으려면
 $\frac{|1-3+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>2\sqrt{2}, |n-2|>4$
 $n-2<-4$ 또는 $n-2>4 \quad \therefore n<-2$ 또는 $n>6 \quad \dots\dots ㉠$
 원 $x^2+y^2-8x-6y+7=0$, 즉 $(x-4)^2+(y-3)^2=18$ 의 중심의 좌표는 $(4, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이므로 직선 $x-y+n=0$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면
 $\frac{|4-3+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<3\sqrt{2}, |n+1|<6$
 $-6<n+1<6 \quad \therefore -7<n<5 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡에 의하여 n 의 값의 범위는 $-7<n<-2$
 따라서 정수 n 의 최솟값은 -6 이다.

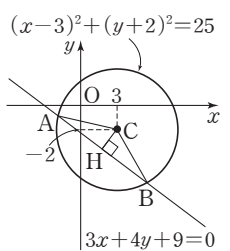
058 [답] ③

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(3, 2)$ 라 하고, 점 C 에서 직선 $4x+3y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 $\overline{CH}=\frac{|12+6-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$
 직각삼각형 CPH 에서 $\overline{CP}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로
 $\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}$
 $=\sqrt{5^2-3^2}=4$
 $\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=8$



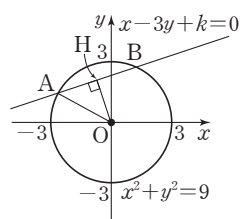
059 [답] $2\sqrt{21}$

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 에서
 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$
 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $C(3, -2)$ 에서 직선 $3x+4y+9=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 $\overline{CH}=\frac{|9-8+9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
 직각삼각형 CAH 에서 $\overline{CA}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로
 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$
 $=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$
 $\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{21}$
 따라서 삼각형 ABC 의 넓이는
 $\frac{1}{2}\times \overline{AB}\times \overline{CH}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{21}\times 2=2\sqrt{21}$



060 [답] ⑤

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=9$ 와 직선 $x-3y+k=0$ 이 만나는 두 점을 A, B 라 하고 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 주어진 원과 직선이 만나서 생기는 현 AB 의 길이가 4이므로
 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4=2$
 직각삼각형 OAH 에서
 $\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$
 $=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
 즉, 점 $O(0, 0)$ 과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로
 $\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{5}$
 $|k|=5\sqrt{2} \quad \therefore k=\pm 5\sqrt{2}$
 그런데 $k>0$ 이므로 $k=5\sqrt{2}$



061 답 ④

오른쪽 그림과 같이 두 원의 두 교점을 A, B라 하면 두 원의 공통인 현은 $\overline{AB}$ 이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 6) = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

이때 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 중심 O에서 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

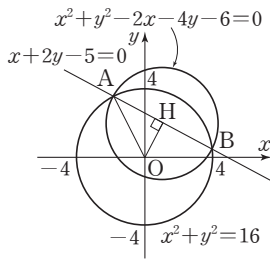
$$\overline{OH} = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{11}$$



062 답 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$

원의 중심이 제1사분면 위에 있고, y축에 접하므로 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

오른쪽 그림과 같이 원과 x축이 만나는 두 점을 A, B라 하고 원의 중심 C(a, b)에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} = \sqrt{7}$$

직각삼각형 ACH에서

$$a^2 = b^2 + 7 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 점 C(a, b)가 직선 $x - 2y + 2 = 0$ 위에 있으므로

$$a - 2b + 2 = 0 \quad \therefore a = 2b - 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

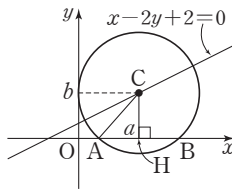
$$(2b-2)^2 = b^2 + 7, \quad 3b^2 - 8b - 3 = 0$$

$$(3b+1)(b-3) = 0 \quad \therefore b = 3 (\because b > 0)$$

$b = 3$ 을 ㉡에 대입하면 $a = 4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$$



063 답 ②

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 11$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

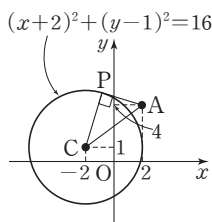
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

$C(-2, 1)$ 이라 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

직각삼각형 CAP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$



064 답 ⑤

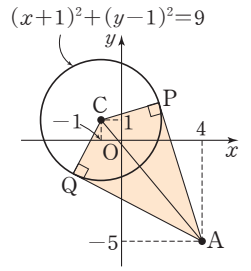
$$C(-1, 1) \text{이므로 } \overline{AC} = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$$

오른쪽 그림의 직각삼각형 APC에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{61})^2 - 3^2} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

따라서 사각형 APCQ의 넓이는

$$2\triangle APC = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 3 \right) = 6\sqrt{13}$$



065 답 ③

오른쪽 그림과 같이 두 점점을 P, Q, 원의 중심을 C(2, 3)이라 하면 두 점점이 서로 수직이므로 사각형 APCQ는 정사각형이다.

점 A와 원의 중심 C 사이의 거리는

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(2-5)^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{10} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

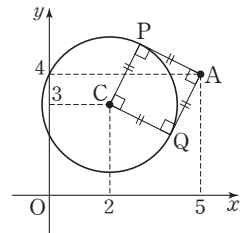
또 점 A와 점점 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AP} = \overline{AQ} = r$$

직각삼각형 CPA에서

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2} = \sqrt{r^2 + r^2} \\ &= \sqrt{2}r (\because r > 0) \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$㉠, ㉡ \text{에 의하여 } \sqrt{10} = \sqrt{2}r \quad \therefore r = \sqrt{5}$$



066 답 ⑤

원의 중심 (1, -3)과 직선 $2x + y + 11 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-3+11|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로

$$M = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}, \quad m = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} \quad \therefore Mm = 15$$

067 답 ④

원의 중심 (0, 0)과 점 A(3, -4) 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

원의 반지름의 길이는 r이고 $\overline{AP}$ 의 길이의 최댓값이 7이므로

$$5 + r = 7 \quad \therefore r = 2$$

068 답 ③

$$x^2 + y^2 - 10y = 0 \text{에서 } x^2 + (y-5)^2 = 25$$

원의 중심 (0, 5)와 직선 $3x - 4y - 15 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-20-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 7$$

원의 반지름의 길이는 5이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $7+5=12$, 최솟값은 $7-5=2$ 이다.

이때 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중 자연수인 것은 2, 3, 4, ..., 12의 11개이고 거리가 2, 12일 때만 점이 1개이고 나머지 거리 일 때는 점이 2개씩 있으므로 구하는 점의 개수는

$$11 \times 2 - 2 = 20$$

069 ④

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, 1)이라 하고, 점 C에서 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|6-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 4$$

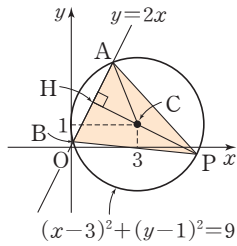
삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되려면 $\overline{PH}$ 의 길이가 최대이어야 하고, 이때 $\overline{PH}$ 는 점 C를 지나므로 $\overline{PH}$ 의 최댓값은

$$\overline{PC} + \overline{CH} = 3 + \sqrt{5}$$

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (3 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}$$

따라서 $a=6$, $b=2$ 이므로 $a+b=8$



070 ④ 49

직선 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -3 이고 원 $x^2 + y^2 = 4$

의 반지름의 길이는 2이므로 접선의 방정식은

$$y = -3x \pm 2\sqrt{(-3)^2 + 1} \quad \therefore y = -3x \pm 2\sqrt{10}$$

따라서 $m=-3$, $n=\pm 2\sqrt{10}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 9 + 40 = 49$$

071 ②

직선의 기울기를 m 이라 하면 원 $x^2 + y^2 = 2$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{2} \times \sqrt{m^2 + 1} \quad \therefore y = mx \pm \sqrt{2(m^2 + 1)}$$

이 직선의 y 절편이 4이므로 $y = mx + \sqrt{2(m^2 + 1)}$ 이고

$$\sqrt{2(m^2 + 1)} = 4$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2(m^2 + 1) = 16, m^2 = 7 \quad \therefore m = \pm\sqrt{7}$$

그런데 $m > 0$ 이므로 $m = \sqrt{7}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{7}x + \sqrt{2(7+1)} \quad \therefore y = \sqrt{7}x + 4$$

072 ③

기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x + k, \text{ 즉 } x - y + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 원의 중심 (1, -2)와 직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선 ①이 접하려면

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, |k+3| = 4$$

$$k+3 = \pm 4 \quad \therefore k = -7 \text{ 또는 } k = 1$$

즉, 두 직선 $y = x - 7$, $y = x + 1$ 이므로 x 절편은 각각 7, -1이다.

따라서 구하는 x 절편의 차는 $7 - (-1) = 8$

073 ②

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는

$\tan 45^\circ = 1$ 이므로 기울기가 1이고 점 A(3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = x - 3 \quad \therefore x - y - 2 = 0$$

원의 중심 (3, -1)과 직선 $x - y - 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

따라서 원과 직선이 접하려면 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이어야 하므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

074 ④

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \text{에서 } (x-1)^2 + y^2 = 1$$

직선 $x + 2y + 3 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는

2이므로 기울기가 2인 접선의 방정식을

$$y = 2x + k, \text{ 즉 } 2x - y + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 원의 중심 (1, 0)과 직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k+2|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선 ①이 접하려면

$$\frac{|k+2|}{\sqrt{5}} = 1, |k+2| = \sqrt{5}$$

$$k+2 = \pm\sqrt{5} \quad \therefore k = -2 \pm\sqrt{5}$$

따라서 A(0, $-2-\sqrt{5}$), B(0, $-2+\sqrt{5}$) 또는 A(0, $-2+\sqrt{5}$),

B(0, $-2-\sqrt{5}$)이므로

$$\overline{AB} = |-2+\sqrt{5} - (-2-\sqrt{5})| = 2\sqrt{5}$$

075 ①

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 (2, -4)에서의 접선의 방정식은

$$2x - 4y = 20, x - 2y = 10 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 5$$

따라서 $m = \frac{1}{2}$, $n = -5$ 이므로

$$4m + n = -3$$

076 ①

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 10 \quad \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{10}{b}$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a}{b} = 3 \quad \therefore a = -3b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 점 (a, b)는 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위에 있으므로

$$a^2 + b^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 1 \text{ 또는 } a = 3, b = -1$$

$$\therefore ab = -3$$

077 답 ②

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

$C(4, -2)$ 라 하면 직선 CP의 기울기는

$$\frac{1+2}{3-4} = -3$$

이때 원의 접선은 직선 CP와 수직이므로

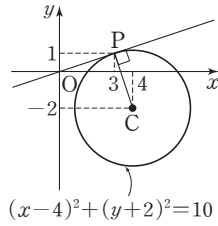
원의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이고 점 $P(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{1}{3}(x-3) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x$$

이 직선이 점 $(a, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{1}{3}a \quad \therefore a = 6$$



078 답 ⑤

원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x + y = 4$$

$$\therefore \sqrt{3}x + y - 4 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원의 중심 $(0, a)$ 와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|a-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{|a-4|}{2}$$

원의 반지름의 길이는 3이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|a-4|}{2} = 3, |a-4| = 6$$

$$a-4 = \pm 6 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 10$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 10$

079 답 16

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 16 \quad \therefore y_1^2 = 16 - x_1^2$$

한편 원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 16, y = \frac{-x_1x + 16}{y_1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{-x_1x + 16}{y_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-4)f(4) &= \frac{4x_1 + 16}{y_1} \times \frac{-4x_1 + 16}{y_1} \\ &= \frac{(16 + 4x_1)(16 - 4x_1)}{y_1^2} \\ &= \frac{16^2 - 16x_1^2}{y_1^2} \\ &= \frac{16(16 - x_1^2)}{16 - x_1^2} = 16 \end{aligned}$$

080 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$$4x_1 - 2y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = 2x_1 - 2 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2 + (2x_1 - 2)^2 = 4, 5x_1^2 - 8x_1 = 0$$

$$x_1(5x_1 - 8) = 0$$

$$\therefore x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = \frac{8}{5}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x_1 = 0, y_1 = -2 \text{ 또는 } x_1 = \frac{8}{5}, y_1 = \frac{6}{5}$$

즉, 접선의 방정식은

$$-2y = 4 \text{ 또는 } \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 4$$

$$\therefore y + 2 = 0 \text{ 또는 } 4x + 3y - 10 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -5 \text{ 또는 } a = 4, b = 3$$

$$\text{그런데 } a \neq 0 \text{이므로 } a = 4, b = 3 \quad \therefore a + b = 7$$

081 답 ①

점 $(-2, 1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - 1 = m(x + 2) \quad \therefore mx - y + 2m + 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원의 중심의 좌표가 $(2, -1)$ 이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|2m + 1 + 2m + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|4m + 2| = \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$(4m + 2)^2 = 2(m^2 + 1)$$

$$7m^2 + 8m + 1 = 0, (m + 1)(7m + 1) = 0$$

$$\therefore m = -1 \text{ 또는 } m = -\frac{1}{7}$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$x + y + 1 = 0 \text{ 또는 } x + 7y - 5 = 0$$

따라서 $a = 1, b = 1, c = 7, d = -5$ 또는 $a = 7, b = -5, c = 1,$

$$d = 1 \text{이므로 } abcd = -35$$

082 답 ①

원점을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \quad \therefore mx - y = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$$

원의 중심의 좌표가 $(1, 3)$ 이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|m-3| = \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$(m-3)^2 = 2(m^2 + 1)$$

$$m^2 + 6m - 7 = 0, (m+7)(m-1) = 0$$

$$\therefore m = -7 \text{ 또는 } m = 1$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은

$$-7 \times 1 = -7$$

083 [답] ⑤

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 6$$

이 직선이 점 $P(0, 6)$ 을 지나므로

$$6y_1 = 6 \quad \therefore y_1 = 1$$

한편 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 6$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 6$$

$$x_1^2 + 1^2 = 6, \quad x_1^2 = 5$$

$$\therefore x_1 = \pm\sqrt{5}$$

즉, 점 P 에서 원에 그은 접선의 방정식은

$$\sqrt{5}x + y = 6 \text{ 또는 } \sqrt{5}x - y = -6$$

$$\text{따라서 } A\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right), B\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right) \text{ 또는 } A\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right),$$

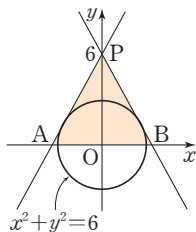
$$B\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right) \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 원점 O 에 대하여 삼각형 PAB 의

넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OP} &= \frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} \times 6 \\ &= \frac{36\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$



084 [답] $(x-2)^2 + y^2 = 20$

직선 $y = -2x + 4$ 가 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(2, 0), (0, 4)$$

중심의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$(-2)^2 + 4^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 = 20$$

085 [답] $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$

선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$$M\left(\frac{2-10}{2}, \frac{-4+8}{2}\right)$$

$$\therefore M(-4, 2)$$

선분 AB 를 1:2로 내분하는 점을 N 이라 하면

$$N\left(\frac{1 \times (-10) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 8 + 2 \times (-4)}{1+2}\right)$$

$$\therefore N(-2, 0)$$

이때 원의 중심을 C 라 하면 점 C 는 선분 MN 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \quad \therefore C(-3, 1)$$

또 원의 반지름의 길이는

$$\overline{NC} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$$

086 [답] ⑤

원의 중심의 좌표를 $(a, a-2)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a+2)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (2-a+2)^2 = r^2$$

$$2a^2 - 10a + 17 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠이 점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$(3-a)^2 + (-2-a+2)^2 = r^2$$

$$2a^2 - 6a + 9 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad r^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ 이고 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

087 [답] $-3 \leq k < -2$ 또는 $0 < k \leq 1$

$$x^2 + y^2 - 2ky - 2k^2 - 6k = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y-k)^2 = 3k^2 + 6k$$

이 방정식이 반지름의 길이가 3 이하인 원을 나타내려면

$$0 < \sqrt{3k^2 + 6k} \leq 3$$

$$\therefore 0 < 3k^2 + 6k \leq 9$$

$$3k^2 + 6k > 0 \text{에서 } k(k+2) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3k^2 + 6k \leq 9 \text{에서 } k^2 + 2k - 3 \leq 0$$

$$(k+3)(k-1) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-3 \leq k < -2 \text{ 또는 } 0 < k \leq 1$$

088 [답] ④

원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$C = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16 + 4B = 0 \quad \therefore B = -4$$

원 ㉠이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$4 + 4 + 2A + 2B = 0$$

$$A + B = -4$$

$$\therefore A = 0$$

즉, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 4$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

089 답 ③

$x^2+y^2-8x+ky+9=0$ 에서

$$(x-4)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+7$$

이 원의 중심 $\left(4, -\frac{k}{2}\right)$ 가 제4사분면 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2}<0 \quad \therefore k>0$$

또 이 원이 y 축에 접하므로

$$\sqrt{\frac{k^2}{4}+7}=4$$

양변을 제곱하면

$$\frac{k^2}{4}+7=16, \quad k^2=36 \quad \therefore k=\pm 6$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=6$

090 답 $12\sqrt{2}$

원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$ 이라 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$$

이 원이 점 $(5, 3)$ 을 지나므로

$$(5-a)^2+(3-a-1)^2=(a+1)^2$$

$$a^2-16a+28=0, \quad (a-2)(a-14)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=14$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 3), (14, 15)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}$$

091 답 ③

중심의 좌표가 $(3, -3)$ 이고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9$$

이 원이 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$(k-3)^2+(-2+3)^2=9$$

$$k^2-6k+1=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 6이다.

092 답 4

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2+ax-2y-2)=0 \quad (\text{단, } k \neq -1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 원이 원점을 지나므로

$$-4-2k=0 \quad \therefore k=-2$$

$k=-2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2+y^2-4-2(x^2+y^2+ax-2y-2)=0$$

$$x^2+y^2+2ax-4y=0$$

$$\therefore (x+a)^2+(y-2)^2=a^2+4$$

이 원의 넓이가 20π 이므로

$$\pi(a^2+4)=20\pi$$

$$a^2+4=20, \quad a^2=16 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

093 답 ⑤

원 C 의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$$

$$\therefore x^2+y^2-2x-6y+10-r^2=0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-6y+10-r^2-(x^2+y^2-10)=0$$

$$\therefore 2x+6y+r^2-20=0$$

이 직선이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$r^2=20 \quad \therefore r=\pm 2\sqrt{5}$$

그런데 $r>0$ 이므로 $r=2\sqrt{5}$

094 답 ④

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$2\overline{BP}=\overline{AP} \quad \therefore 4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$$

$P(x, y)$ 라 하면

$$4\{(x-6)^2+(y+1)^2\}=(x-3)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+y^2-14x+4y+45=0$$

$$\therefore (x-7)^2+(y+2)^2=8$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

095 답 ⑤

원의 중심 $(1, 3)$ 과 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+3-k|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|k-6|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-6|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, \quad |k-6|=10$$

$$k-6=\pm 10 \quad \therefore k=-4 \text{ 또는 } k=16$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-4+16=12$$

096 답 $k < -\frac{\sqrt{21}}{2}$ 또는 $k > \frac{\sqrt{21}}{2}$

$$x^2+y^2+2y-3=0 \text{에서 } x^2+(y+1)^2=4$$

원의 중심 $(0, -1)$ 과 직선 $kx-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{5}{\sqrt{k^2+1}} < 2, \quad \sqrt{k^2+1} > \frac{5}{2}$$

양변을 제곱하면

$$k^2+1 > \frac{25}{4}, \quad k^2 > \frac{21}{4}$$

$$\therefore k < -\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ 또는 } k > \frac{\sqrt{21}}{2}$$

097 답 ③

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C(-2, 1)이라 하고, 점 C에서 직선

$4x - 3y + 1 = 0$ 에 내린 수선의 발을

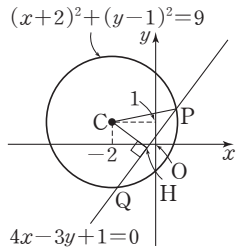
H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|-8 - 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2\sqrt{5}$$



098 답 ⑤

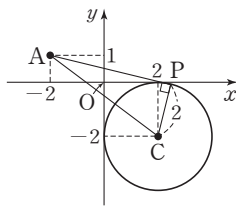
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C(2, -2)라 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

직각삼각형 CAP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$



099 답 ③

점 A(3, 4)를 지나고 직선 중 원점 O와 거리가 최대인 직선은 직선 OA와 수직인 직선이므로 직선 l의 방정식은

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \quad \therefore 3x + 4y - 25 = 0$$

원의 중심 (5, 7)과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|15 + 28 - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{18}{5} - 1 = \frac{13}{5}$$

100 답 ⑤

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

원의 중심 (1, 2)와 점 A(4, -2) 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

원의 반지름의 길이는 4이므로 $\overline{AP}$ 의 최댓값은 $5 + 4 = 9$, $\overline{AP}$ 의 최솟값은 $5 - 4 = 1$ 이다.

따라서 $1 \leq l \leq 9$ 이므로 l의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.

101 답 25

주어진 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{5} \times \sqrt{2^2 + 1} \quad \therefore y = 2x \pm 10$$

$$y = 2x + 10 \text{일 때, } A(-5, 0), B(0, 10)$$

$$y = 2x - 10 \text{일 때, } A(5, 0), B(0, -10)$$

$$\therefore \overline{OA} = 5, \overline{OB} = 10$$

$$\text{따라서 삼각형 OAB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$$

102 답 $y = 3x - 9$ 또는 $y = 3x + 11$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0 \text{에서 } (x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$$

기울기가 3인 접선의 방정식을

$$y = 3x + k, \text{ 즉 } 3x - y + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 원의 중심 (1, 4)와 직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|3 - 4 + k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|k - 1|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선 ①이 접하려면

$$\frac{|k - 1|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, |k - 1| = 10$$

$$k - 1 = \pm 10 \quad \therefore k = -9 \text{ 또는 } k = 11$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3x - 9 \text{ 또는 } y = 3x + 11$$

103 답 7

원의 중심을 C(-1, 2)라 하면 직선 AC

의 기울기는

$$\frac{2 - 1}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}$$

따라서 점 A에서의 접선은 기울기가 3이

고 점 A를 지나므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = 3(x - 2)$$

$$\therefore y = 3x - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 직선 BC의 기울기는 } \frac{2 - 5}{-1} = 3$$

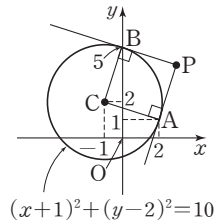
따라서 점 B에서의 접선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 점 B를 지나므로

$$\text{접선의 방정식은 } y = -\frac{1}{3}x + 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $x = 3, y = 4$

즉, P(3, 4)이므로 $a = 3, b = 4$

$$\therefore a + b = 7$$



104 답 ④

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 9$$

이 직선이 점 (6, 0)을 지나므로

$$6x_1 = 9 \quad \therefore x_1 = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{9}{4} + y_1^2 = 9, y_1^2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore y_1 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$$x + \sqrt{3}y = 6 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 6$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} \text{ 또는 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } m = -\frac{\sqrt{3}}{3}, n = 2\sqrt{3} \text{ 또는 } m = \frac{\sqrt{3}}{3}, n = -2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$mn = -2$$

001 답 ④

점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+2, b-5)$$

이 점이 점 $(3, -2)$ 와 일치하므로

$$a+2=3, b-5=-2 \quad \therefore a=1, b=3$$

$$\therefore a+b=4$$

002 답 ④

직선 $y=3x+n-1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-3=3(x+1)+n-1$$

$$\therefore y=3x+n+5$$

이 직선이 직선 $y=3x+9$ 와 일치하므로

$$n+5=9 \quad \therefore n=4$$

003 답 ①

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-3)^2+(y-b-1)^2=9 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $x^2+y^2-4y+c=0$ 에서

$$x^2+(y-2)^2=4-c \quad \dots\dots ㉡$$

㉠과 ㉡이 일치하므로

$$-a-3=0, -b-1=-2, 9=4-c$$

$$\therefore a=-3, b=1, c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-7$$

다른 풀이 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(3, 1)$ 이다. 원 $x^2+y^2-4y+c=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=4-c$ 의 중심의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

따라서 중심 $(3, 1)$ 이 중심 $(0, 2)$ 로 옮겨졌으므로

$$a=0-3=-3, b=2-1=1$$

원은 평행이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$$4-c=9 \quad \therefore c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-7$$

004 답 ②

$A(1, -2), B(-1, 2)$ 이므로

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$$

005 답 ③

직선 $y=ax+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=-ax+1 \quad \therefore y=ax-1$$

이 직선이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2=a-1 \quad \therefore a=3$$

006 답 -5

원 $x^2+y^2-2ax+6y+a^2=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+x^2-2ay+6x+a^2=0$$

$$\therefore (x+3)^2+(y-a)^2=9$$

이 원의 중심 $(-3, a)$ 가 직선 $2x-y+1=0$ 위에 있으므로

$$-6-a+1=0 \quad \therefore a=-5$$

007 답 -54

포물선 $y=x^2-2$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-2=(x-3)^2-2 \quad \therefore y=x^2-6x+9$$

이 포물선을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2-6x+9 \quad \therefore y=-x^2+6x-9$$

따라서 $a=6, b=-9$ 이므로 $ab=-54$

008 답 0

두 점 $(a, 2), (4, b)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{a+4}{2}=1, \frac{2+b}{2}=2 \quad \therefore a=-2, b=2$$

$$\therefore a+b=0$$

009 답 ①

두 점 $(0, 4), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=-2x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{b+4}{2}=-2 \times \frac{a}{2}-1 \quad \therefore 2a+b=-6 \quad \dots\dots ㉠$$

또 두 점 $(0, 4), (a, b)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=-2x-1$ 이 수직이므로

$$\frac{b-4}{a} \times (-2)=-1 \quad \therefore a-2b=-8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=2$

$$\therefore ab=-8$$

010 답 $3\sqrt{5}$

점 $B(5, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한

점을 B' 이라 하면

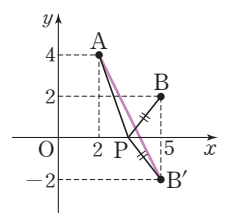
$$B'(5, -2)$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{5}$ 이다.



011 답 ④

방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 ④이다.

012 ④ (4, -3)

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 (a-3, b+2)
이 점이 점 (1, -1)과 일치하므로
 $a-3=1, b+2=-1 \quad \therefore a=4, b=-3$
따라서 점 P의 좌표는 (4, -3)이다.

013 ③

점 (3, 1)을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는 (3+a, 1+4) $\therefore (a+3, 5)$
이 점이 점 (6, b)와 일치하므로
 $a+3=6, 5=b \quad \therefore a=3, b=5 \quad \therefore ab=15$

014 ⑤

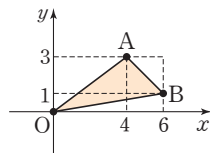
점 (2, k)가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는 (2-4, k+3) $\therefore (-2, k+3)$
이 점이 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로
 $k+3=2+6 \quad \therefore k=5$

015 ⑤ (5, -7)

점 (-1, 2)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 (3, -4)라 하면
 $-1+m=3, 2+n=-4 \quad \therefore m=4, n=-6$
따라서 점 (1, -1)을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점의 좌표는 (1+4, -1-6) $\therefore (5, -7)$

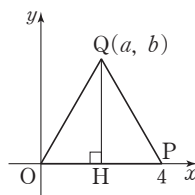
016 ⑦

점 A(4, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는 B(4+2, 3-2) $\therefore B(6, 1)$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는
 $6 \times 3 - \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 7$



017 ② 21

도형을 평행이동하여도 그 모양은 변하지 않으므로 삼각형 O'P'Q'이 정삼각형이면 삼각형 OPQ도 정삼각형이다.
오른쪽 그림의 삼각형 OPQ에서 $\overline{OP}=4$ 이므로 $\overline{OH}=2$
이때 삼각형 OPQ는 정삼각형이므로 $\overline{QH}=2\sqrt{3}$
 $\therefore Q(2, 2\sqrt{3})$



점 Q를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이 Q'(5, $4\sqrt{3}$)이므로
 $2+m=5, 2\sqrt{3}+n=4\sqrt{3} \quad \therefore m=3, n=2\sqrt{3}$
 $\therefore m^2+n^2=3^2+(2\sqrt{3})^2=21$

018 ②

직선 $y=-2x+k$ 를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+3=-2(x-2)+k \quad \therefore y=-2x+k+1$
이 직선이 직선 $y=-2x$ 와 일치하므로
 $k+1=0 \quad \therefore k=-1$

019 ③

직선 $y=2x+1$ 을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y-1=2(x+2)+1 \quad \therefore y=2x+6$
따라서 이 직선의 y절편은 6이다.

020 ④

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 -p만큼 평행이동하는 것이므로 직선 $y=4x+2$ 를 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+p=4(x-p)+2 \quad \therefore y=4x-5p+2$
이 직선이 직선 $y=4x-8$ 과 일치하므로
 $-5p+2=-8 \quad \therefore p=2$

021 ③ -3

직선 $2x+y-1=0$ 이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은
 $2(x+1)+(y-4)-1=0 \quad \therefore 2x+y-3=0$
따라서 $a=1, b=-3$ 이므로 $ab=-3$

022 ②

직선 $y=2x+3$ 을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+2=2(x-1)+3 \quad \therefore y=2x-1$
이 직선이 주어진 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 (m, -3)을 지나야 하므로
 $-3=2m-1 \quad \therefore m=-1$

023 ⑧ 8

원 $(x-1)^2+(y+b)^2=4$ 를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-a-1)^2+(y-2+b)^2=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
한편 $x^2+y^2+2x+c-1=0$ 에서
 $(x+1)^2+y^2=2-c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 이 일치하므로
 $-a-1=1, -2+b=0, 4=2-c$
 $\therefore a=-2, b=2, c=-2 \quad \therefore abc=8$

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+b)^2=4$ 의 중심의 좌표는 $(1, -b)$ 이다.
원 $x^2+y^2+2x+c-1=0$, 즉 $(x+1)^2+y^2=2-c$ 의 중심의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다.

따라서 중심 $(1, -b)$ 가 중심 $(-1, 0)$ 으로 옮겨졌으므로

$$a=-1-1=-2, 2=b$$

원은 평행이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$$2-c=4 \quad \therefore c=-2$$

$$\therefore abc=8$$

024 답 ⑤

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y=x^2+1$ 을 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-2=(x+1)^2+1 \quad \therefore y=x^2+2x+4$$

이 포물선이 점 $(3, p)$ 를 지나므로

$$p=9+6+4=19$$

025 답 0

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-1)^2=9$$

이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-2)^2+(y-b-1)^2=9$$

이 원의 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 이므로

$$-a-2=0, -b-1=0, 9=r^2$$

$$\therefore a=-2, b=-1, r=3 (\because r>0)$$

$$\therefore a+b+r=0$$

다른 풀이 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 이 점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$$(2+a, 1+b)$$

이 점이 원점이므로 $2+a=0, 1+b=0$

$$\therefore a=-2, b=-1$$

한편 원의 반지름의 길이는 평행이동하여도 변하지 않으므로

$$r=3$$

$$\therefore a+b+r=0$$

026 답 ①

점 $(1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(1+m, 3+n)$$

이 점이 점 $(-1, 2)$ 와 일치하므로

$$1+m=-1, 3+n=2 \quad \therefore m=-2, n=-1$$

즉, 포물선 $y=x^2+2x-1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+1=(x+2)^2+2(x+2)-1$$

$$y=x^2+6x+6 \quad \therefore y=(x+3)^2-3$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -3)$ 이므로

$$a=-3, b=-3$$

$$\therefore a+b=-6$$

다른 풀이 포물선 $y=x^2+2x-1$, 즉 $y=(x+1)^2-2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -2)$

이 점을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-1-2, -2-1) \quad \therefore (-3, -3)$$

따라서 $a=-3, b=-3$ 이므로 $a+b=-6$

027 답 $\sqrt{26}$

포물선 $y=x^2+4x+5$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=(x-m)^2+4(x-m)+5$$

$$\therefore y=x^2+(-2m+4)x+m^2-4m+5+n$$

이 포물선과 포물선 $y=x^2+6x+13$ 이 일치하므로

$$-2m+4=6, m^2-4m+5+n=13 \quad \therefore m=-1, n=3$$

원 $x^2+y^2-4y-9=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=13$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-3-2)^2=13 \quad \therefore (x+1)^2+(y-5)^2=13$$

따라서 $C(-1, 5)$ 이므로 $OC=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

028 답 ④

원 $(x-1)^2+y^2=10$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-1-1)^2+(y-n)^2=10 \quad \therefore (x-2)^2+(y-n)^2=10$$

이 원이 직선 $y=3x+1$ 에 접하려면 원의 중심 $(2, n)$ 과 직선 $3x-y+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|6-n+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, |n-7|=10$$

$$n-7=\pm 10 \quad \therefore n=-3 \text{ 또는 } n=17$$

그런데 $n>0$ 이므로 $n=17$

029 답 16

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심은 $O(0, 0)$ 이므로 점 O 에서 직선 $3x+4y-6=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$OH=\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6}{5}$$

직각삼각형 OBH 에서

$$BH=\sqrt{2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{8}{5}$$

$$\therefore AB=2BH=\frac{16}{5}$$

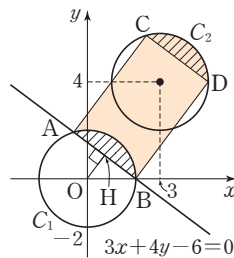
한편 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$

즉, 원 C_2 는 원 C_1 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로

$$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

이때 선분 AC 는 직선 $3x+4y-6=0$ 과 수직이므로 구하는 넓이는 직사각형 $ABDC$ 의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $\frac{16}{5} \times 5=16$



030 답 ⑤

P(3, -4), Q(4, 3)이므로
 $PQ = \sqrt{(4-3)^2 + (3+4)^2} = 5\sqrt{2}$

031 답 ②

점 (-2, 5)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 (2, -5)
 따라서 점 (2, -5)와 직선 $3x-4y-6=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|6+20-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 4$

032 답 ①

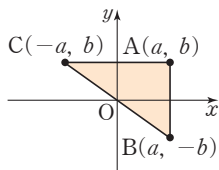
점 (a+3, 4)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 (4, a+3)
 이 점을 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 (-4, -a-3)
 이 점과 점 (b, -4)가 일치하므로
 $-4=b, -a-3=-4 \quad \therefore a=1, b=-4$
 $\therefore ab=-4$

033 답 제4사분면

점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 (a, -b)
 이 점이 제3사분면 위에 있으므로
 $a < 0, -b < 0 \quad \therefore a < 0, b > 0$
 점 (a-b, ab)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 (-a+b, ab)
 이때 $-a+b > 0, ab < 0$ 이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.

034 답 8

B(a, -b), C(-a, b)이고 삼각형
 ABC의 넓이가 6이므로
 $\frac{1}{2} \times 2|a| \times 2|b| = 6$
 $2|ab| = 6 \quad \therefore |ab| = 3$
 따라서 점 A가 될 수 있는 점은 (1, 3),
 (-1, 3), (1, -3), (-1, -3), (3, 1), (-3, 1), (3, -1),
 (-3, -1)의 8개이다.



035 답 ④

직선 $ax+(2a-1)y+7=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의
 방정식은
 $-ax-(2a-1)y+7=0$
 $\therefore ax+(2a-1)y-7=0$
 이 직선이 점 (-1, 3)을 지나므로
 $-a+3(2a-1)-7=0$
 $-a+6a-3-7=0 \quad \therefore a=2$

036 답 ④

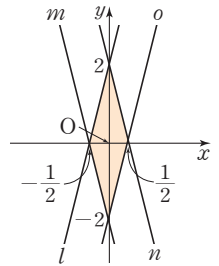
직선 $x+3y-5=0$ 을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-x+3y-5=0$
 이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y+3x-5=0$
 $\therefore 3x-y-5=0$

037 답 ⑤

직선 $3x-2y+p=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방
 정식은
 $3y-2x+p=0 \quad \therefore 2x-3y-p=0$
 이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=13$ 에 접하려면 원의 중심
 (1, -3)과 직선 $2x-3y-p=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길
 이 $\sqrt{13}$ 과 같아야 하므로
 $\frac{|2+9-p|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}, |p-11|=13$
 $p-11=\pm 13 \quad \therefore p=-2$ 또는 $p=24$
 그런데 $p > 0$ 이므로 $p=24$

038 답 2

직선 $l: y=4x+2$ 를 x축, y축, 원점에 대
 하여 대칭이동한 직선의 방정식은 각각
 $m: y=-4x-2$
 $n: y=-4x+2$
 $o: y=4x-2$
 따라서 오른쪽 그림과 같이 네 직선 l, m,
 n, o로 둘러싸인 도형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$



039 답 -2

원 $x^2+y^2-2x+2ay-6=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한
 원의 방정식은
 $y^2+x^2-2y+2ax-6=0$
 $\therefore (x+a)^2+(y-1)^2=a^2+7$
 이 원의 중심의 좌표는 (-a, 1) ㉠
 한편 $y=x^2-4x+5$ 에서 $y=(x-2)^2+1$
 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (2, 1) ㉡
 ㉠과 ㉡이 일치하므로
 $-a=2 \quad \therefore a=-2$

040 답 ③

포물선 $y=x^2+3x-2$ 를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정
 식은
 $-y=x^2+3x-2 \quad \therefore y=-x^2-3x+2$
 이 포물선이 점 (1, a)를 지나므로
 $a=-1-3+2=-2$

041 답 ⑤

포물선 $y=x^2-2x-6$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2+2x-6 \quad \therefore y=-x^2-2x+6$$

이 포물선을 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-x^2+2x+6 \quad \therefore y=-(x-1)^2+7$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점 (1, 7)이 직선 $y=4x+a$ 위에 있으므로 $7=4+a \quad \therefore a=3$

042 답 -5

원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+x^2-2y+4x-4=0 \quad \therefore (x+2)^2+(y-1)^2=9$$

직선 $y=-3x+k$ 가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심

(-2, 1)을 지나야 하므로

$$1=6+k \quad \therefore k=-5$$

043 답 7

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(-y+1)^2=9 \quad \therefore (x-2)^2+(y-1)^2=9$$

이 원을 x 축의 방향으로 -4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+4-2)^2+(y-3-1)^2=9$$

$$\therefore x^2+y^2+4x-8y+11=0$$

따라서 $a=4, b=-8, c=11$ 이므로

$$a+b+c=7$$

044 답 ④

점 $(a-2, -a)$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a-2-1, -a+2) \quad \therefore (a-3, -a+2)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a+3, a-2)$$

이 점이 직선 $2x-y+4=0$ 위에 있으므로

$$2(-a+3)-(a-2)+4=0, -3a=-12 \quad \therefore a=4$$

045 답 -4

직선 $y=2x+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=2x+1 \quad \therefore y=-2x-1$$

이 직선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-a=-2(x-3)-1 \quad \therefore y=-2x+a+5$$

이 직선을 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y=2x+a+5$$

이 직선과 직선 $y=2x+1$ 이 일치하므로

$$a+5=1 \quad \therefore a=-4$$

046 답 $0 < r < 1$

중심의 좌표가 (0, -3)이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 $x^2+(y+3)^2=r^2$

이 원을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+y^2=r^2$$

이 원을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-y+1)^2+(-x)^2=r^2 \quad \therefore x^2+(y-1)^2=r^2$$

이때 이 원과 직선 $3x+4y+1=0$ 이 만나지 않으려면 원의 중심 (0, 1)과 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r 보다 커야 하므로

$$\frac{|4+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} > r, 1 > r \quad \therefore 0 < r < 1 (\because r > 0)$$

047 답 ④

두 점 $(2a-1, -4), (3, b+1)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 (4, -5)이므로

$$\frac{2a-1+3}{2}=4, \frac{-4+b+1}{2}=-5$$

$$\therefore a=3, b=-7 \quad \therefore a+b=-4$$

048 답 1

$$x^2+y^2-4x-6y+4=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-3)^2=9$$

이 원의 중심의 좌표는 (2, 3)

$$x^2+y^2+8x+14y+56=0 \text{에서 } (x+4)^2+(y+7)^2=9$$

이 원의 중심의 좌표는 (-4, -7)

따라서 점 (a, b) 는 두 점 (2, 3), (-4, -7)을 이은 선분의 중점

$$\text{이므로 } a=\frac{2-4}{2}=-1, b=\frac{3-7}{2}=-2 \quad \therefore a-b=1$$

049 답 -4

포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 의 꼭짓점의 좌표는 (1, 2)

포물선 $y=-x^2-6x+a=-(x+3)^2+a+9$ 의 꼭짓점의 좌표는 (-3, $a+9$)

따라서 점 $(b, 4)$ 는 두 점 (1, 2), (-3, $a+9$)을 이은 선분의 중점

$$\text{이므로 } b=\frac{1-3}{2}=-1, 4=\frac{2+a+9}{2} \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore a+b=-4$$

050 답 ④

직선 $y=2x+3$ 위의 점 (x, y) 를 점 $(-2, 4)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y') 이라 하면 두 점 $(x, y), (x', y')$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2, 4)$ 이므로

$$\frac{x+x'}{2}=-2, \frac{y+y'}{2}=4 \quad \therefore x=-x'-4, y=-y'+8$$

이를 $y=2x+3$ 에 대입하면

$$-y'+8=2(-x'-4)+3 \quad \therefore y'=2x'+13$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x+13$

051 답 ①

두 점 $(-3, 1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

이 점이 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$$\frac{a-3}{2} - \frac{b+1}{2} - 2 = 0$$

$$\therefore a-b=8 \quad \dots\dots ㉠$$

두 점 $(-3, 1)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $x-y-2=0$, 즉

$y=x-2$ 가 수직이므로

$$\frac{b-1}{a+3} \times 1 = -1$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

$$\therefore ab=-15$$

052 답 ①

두 점 $(-4, 2)$, $(12, -2)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+12}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \quad \therefore (4, 0)$$

이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로

$$0=4m+n$$

$$\therefore n=-4m \quad \dots\dots ㉠$$

두 점 $(-4, 2)$, $(12, -2)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$ 이

수직이므로

$$\frac{-2-2}{12+4} \times m = -1$$

$$\therefore m=4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $n=-16$

$$\therefore m+n=-12$$

053 답 ⑤

$$x^2+y^2-2x+6y+9=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=1$$

이 원의 중심의 좌표는 $(1, -3)$

$$x^2+y^2-8x+15=0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2+y^2=1$$

이 원의 중심의 좌표는 $(4, 0)$

두 점 $(1, -3)$, $(4, 0)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

이 점이 직선 $ax+by-1=0$ 위에 있으므로

$$\frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b - 1 = 0$$

$$\therefore 5a-3b=2 \quad \dots\dots ㉠$$

두 점 $(1, -3)$, $(4, 0)$ 을 지나는 직선과 직선 $ax+by-1=0$, 즉

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b} \text{이 수직이므로}$$

$$\frac{3}{4-1} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

$$\therefore a=b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$$\therefore a+b=2$$

054 답 76

원 C_2 의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 두 원 C_1 , C_2 의 중심

$(3, -1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $2x-y+3=0$ 위에 있으므로

$$3+a - \frac{-1+b}{2} + 3 = 0$$

$$\therefore 2a-b=-13 \quad \dots\dots ㉠$$

두 점 $(3, -1)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $2x-y+3=0$, 즉

$y=2x+3$ 이 수직이므로

$$\frac{b+1}{a-3} \times 2 = -1$$

$$\therefore a+2b=1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-5, b=3$$

따라서 두 원의 중심 $(3, -1)$, $(-5, 3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5-3)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{5} \text{이고, 두 원 } C_1, C_2 \text{의 반지름의 길이는 각각 1이므로}$$

$$M=4\sqrt{5}+2, m=4\sqrt{5}-2$$

$$\therefore Mm=76$$

055 답 ②

점 $A(3, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점

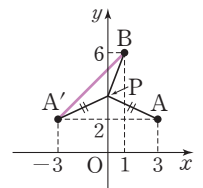
을 A' 이라 하면 $A'(-3, 2)$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.



056 답 ④

점 $A(6, 3)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이

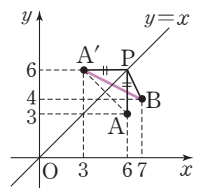
동한 점을 A' 이라 하면 $A'(3, 6)$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.



057 답 $5\sqrt{2}$

점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'

이라 하면 $A'(-1, 3)$

점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'

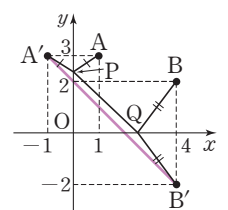
이라 하면 $B'(4, -2)$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{5^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.



058 답 $2\sqrt{10}$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을

A'이라 하면 A'(-2, 4)

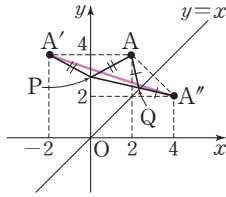
점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동

한 점을 A''이라 하면 A''(4, 2)

삼각형 APQ의 둘레의 길이는

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \\ \geq \overline{A'A''} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.



059 답 ⑤

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 y축

에 대하여 대칭이동하면

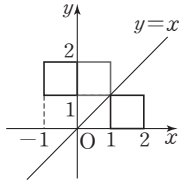
$$f(y, -x)=0$$

따라서 방정식 $f(y, -x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 구하는 도형은 ⑤이다.

다른 풀이 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $f(y, -x)=0$



060 답 ③

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y축

에 대하여 대칭이동하면

$$f(-x, y)=0$$

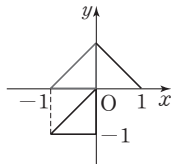
방정식 $f(-x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y

축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$$f(-x, y+1)=0$$

따라서 방정식 $f(-x, y+1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ③이다.



061 답 ③

ㄱ. 방정식 $f(x-1, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄴ. 방정식 $f(-x+1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄷ. 방정식 $f(y+1, x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같지 않다. 따라서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

062 답 ④

점 (1, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(1-2, 3+a) \quad \therefore (-1, 3+a)$$

이 점이 점 (b, 5)와 일치하므로

$$-1=b, 3+a=5 \quad \therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=1$$

063 답 ③

점 (a, b)를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는 (a+4, b+3) ㉠

점 (c, d)를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는 (c-1, d-3) ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로 $a+4=c-1, b+3=d-3$

$$\therefore a-c=-5, b-d=-6$$

$$\therefore a-b-c+d=(a-c)-(b-d)=-5-(-6)=1$$

064 답 ③

직선 $y=-2x$ 를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=-2(x-a) \quad \therefore 2x+y-2a=0$$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ 와 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 (3, 1)과 직선 $2x+y-2a=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$ 보다 작아야 하므로

$$\frac{|6+1-2a|}{\sqrt{2^2+1^2}} < \sqrt{5}, |7-2a| < 5$$

$$-5 < 7-2a < 5, -12 < -2a < -2$$

$$\therefore 1 < a < 6$$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

065 답 (3, -5)

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 원 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$, 즉

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1$$

$$(x-2-1)^2+(y+3+2)^2=1$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+5)^2=1$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 (3, -5)이다.

066 답 (0, 8)

$$y=x^2+2x+6a \text{에서 } y=(x+1)^2+6a-1$$

이 포물선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-3=(x-a+1)^2+6a-1$$

$$\therefore y=(x-a+1)^2+6a+2$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (a-1, 6a+2)이고 이 점이 y축 위에 있으므로

$$a-1=0 \quad \therefore a=1$$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 (0, 8)이다.

067 답 $y=x-2$

P(-1, -3), Q(3, 1)이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{1+3}{3+1}(x+1)$$

$$\therefore y=x-2$$

068 답 ③

직선 $x+3y-1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x-3y-1=0$

이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y-3x-1=0 \quad \therefore y=3x+1$$

이 직선이 점 (2, p)를 지나므로

$$p=6+1=7$$

069 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 직선 $y=-x$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=x$$

$$\therefore y=-x$$

ㄴ. 포물선 $y=x^2+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2+1$$

$$\therefore y=-x^2-1$$

ㄷ. 원 $x^2+y^2+4x=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x=0$

ㄹ. 도형 $|x+y|=4$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$|-x-y|=4$$

$$\therefore |x+y|=4$$

따라서 처음 도형과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

070 답 14

포물선 $y=x^2-4x+2$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+9=(x-1)^2-4(x-1)+2$$

$$\therefore y=x^2-6x-2$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=x^2+6x-2$$

이 포물선이 점 (2, a)를 지나므로

$$a=4+12-2=14$$

071 답 ③

PQ의 중점의 좌표가 (3, -2)이므로

$$\frac{2+b}{2}=3, \frac{a-3}{2}=-2$$

$$\therefore a=-1, b=4$$

따라서 P(2, -1), Q(4, -3)이므로

$$PQ=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

072 답 ①

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심 (1, 2)를 점 (-1, 5)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 (1, 2), (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표가 (-1, 5)이므로

$$\frac{1+a}{2}=-1, \frac{2+b}{2}=5 \quad \therefore a=-3, b=8$$

중심의 좌표가 (-3, 8)이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-8)^2=4$

따라서 이 원 위에 있는 점은 ① (-3, 6)이다.

073 답 ⑤

두 점 (-4, 2), (b, 4)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b-4}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{b-4}{2}, 3\right)$$

이 점이 직선 $y=-3x+a$ 위에 있으므로

$$3=-3 \times \frac{b-4}{2}+a$$

$$\therefore 2a-3b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 점 (-4, 2), (b, 4)를 지나는 직선과 직선 $y=-3x+a$ 가 수직이므로

$$\frac{2}{b+4} \times (-3)=-1$$

$$\therefore b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하여 정리하면 $a=0$

$$\therefore a+b=2$$

074 답 $4\sqrt{2}$

점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을

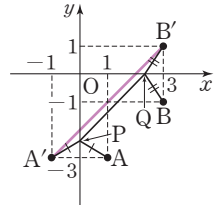
A'이라 하면 A'(-1, -3)

점 B를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을

B'이라 하면 B'(3, 1)

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB} &= \overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.



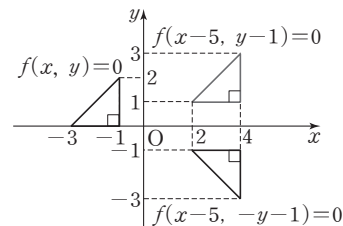
075 답 ③

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-5, y-1)=0$$

이 도형을 다시 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x-5, -y-1)=0$$



$$\therefore g(x, y)=f(x-5, -y-1)$$