



정답과 해설

미적분

01 수열의 극한

핵심
유형

유형01 ㉔, ㉕	유형02 ㉓	유형03 12
유형04 ㉔, ㉕	유형05 -4	유형06 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
유형07 ㉓	유형08 ㉔	유형09 ㉓
유형10 ㉔, ㉕	유형11 2	유형12 ㉓
유형13 ㉓	유형14 ㉓	유형15 ㉔
유형16 $\frac{19}{16}$	유형17 ㉔	

핵심
유형

완성하기

001 ㉔	002 ㉔	003 5	004 45	005 $-\frac{1}{5}$
006 ㉓	007 -6	008 ㉓	009 ㉔	010 ㉔
011 ㉔	012 ㉔	013 ㉓	014 $\frac{3}{2}$	015 ㉔
016 $\frac{2}{3}$	017 10	018 9	019 6	020 9
021 $\frac{3}{2}$	022 ㉓	023 ㉓	024 ㉓	025 ㉔
026 $\frac{5}{6}$	027 1	028 1	029 ㉔	030 ㉔
031 4	032 4	033 2	034 ㉓	035 $\frac{3}{10}$
036 $\frac{16}{7}$	037 $\frac{3}{2}$	038 ㉔	039 ㉓	040 $\frac{1}{2}$
041 $\frac{1}{4}$	042 ㉓	043 ㉓	044 ㉔	045 ㉔
046 ㉔	047 2	048 2	049 16	
050 ㉔, ㉕	051 4	052 ㉔	053 $\frac{1}{4}$	054 ㉔
055 $\frac{1}{3}$	056 $\frac{2}{3}$	057 10	058 ㉔	
059 $2\sqrt{2}$	060 ㉓	061 7	062 ㉓	063 ㉓
064 ㉔	065 ㉓	066 ㉔	067 $-\frac{1}{2}$	068 ㉔
069 9	070 125			

핵심
유형

최종 점검하기

1 ㉔	2 ㉓	3 ㉓	4 $\frac{1}{4}$	5 4
6 ㉔	7 ㉔	8 ㉔	9 ㉓	10 ㉔
11 ㉔	12 ㉔	13 $\frac{1}{2}$	14 ㉓	15 1
16 $\frac{2}{5}$	17 14	18 ㉔	19 ㉔	20 11

핵심 유형 8~10쪽

유형01 답 ㉓

- ① n 의 값이 한없이 커질 때, $-2n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
- ② n 의 값이 한없이 커질 때, $(n+1)^2$ 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
- ③ n 의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^n \times \frac{1}{n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.
- ④ n 의 값이 한없이 커질 때, $5n+2$ 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
- ⑤ 발산(진동)한다.

유형02 답 ㉓

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 2a_nb_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n \\ &= 4 \times 4 - 2 \times 5 = 6\end{aligned}$$

유형03 답 12

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2}{3a_{n+1} + 4} &= \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{\alpha - 2}{3\alpha + 4} = \frac{1}{4} \\ 4\alpha - 8 &= 3\alpha + 4 \quad \therefore \alpha = 12\end{aligned}$$

유형04 답 ㉔, ㉕

$$\begin{aligned}\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+5)}{n^2-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5n}{n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = 1 \\ \neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3} = \frac{1}{3} \\ \neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{4n^2+1}+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{2}{3} \\ \neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3}{(n-1)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3+12n^2+6n+1}{n^3-3n^2+3n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = 8\end{aligned}$$

유형05 답 -4

$a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+2}{2n-3}$ 는 발산하므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+2}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+2}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2} = -2$ 이므로 $b = -4$

$$\therefore a+b = -4$$

유형06 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n+1} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

유형07 답 ⑤

$a \leq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2+n} - (an+b)\} = \infty$ 이므로 $a > 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2+n} - (an+b)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{n^2+n} - (an+b)\} \{\sqrt{n^2+n} + (an+b)\}}{\sqrt{n^2+n} + (an+b)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)n^2 + (1-2ab)n - b^2}{\sqrt{n^2+n} + an + b} \\ \text{이때 } 1-a^2 \neq 0 \text{이면 극한값이 존재하지 않으므로} \\ 1-a^2=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)n^2 + (1-2ab)n - b^2}{\sqrt{n^2+n} + an + b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2b)n - b^2}{\sqrt{n^2+n} + n + b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2b) - \frac{b^2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 + \frac{b}{n}} = \frac{1-2b}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1-2b}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로 $1-2b=3 \quad \therefore b=-1$

$$\therefore a-b=1-(-1)=2$$

유형08 답 ④

$$\frac{a_n+2}{3a_n+10} = b_n \text{으로 놓으면}$$

$$a_n+2=3a_nb_n+10b_n, (1-3b_n)a_n=10b_n-2$$

$$\therefore a_n = \frac{10b_n-2}{1-3b_n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10b_n-2}{1-3b_n} = \frac{10 \times \frac{1}{4} - 2}{1 - 3 \times \frac{1}{4}} = 2$$

유형09 답 ③

$$4n^2 - n \leq a_n \leq 4n^2 + n \text{에서}$$

$$\frac{4n^2-n}{2n^2+3} \leq \frac{a_n}{2n^2+3} \leq \frac{4n^2+n}{2n^2+3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-n}{2n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n}{2n^2+3} = 2$ 이므로 수열의 극한의 대소

관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2+3} = 2$$

유형10 답 $\neg, \sqsubset$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{2a_n - (2a_n - b_n)\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) \\ &= 2 \times 3 - 0 = 6 \end{aligned}$$

$$\sqsubset. [\text{반례}] \{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ 이다.

$$\sqsubset. a_n < b_n \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

유형11 답 2

$$P_n(n, 3n^2), P_{n+1}(n+1, 3(n+1)^2) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{P_n P_{n+1}} = \sqrt{1^2 + \{3(n+1)^2 - 3n^2\}^2} \\ &= \sqrt{36n^2 + 36n + 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{36n^2 + 36n + 10}}{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{36 + \frac{36}{n} + \frac{10}{n^2}}}{3} = 2 \end{aligned}$$

핵심 유형 완성하기 11~17쪽

001 답 ④

- ① n 의 값이 한없이 커질 때, $-n^2$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
- ② n 의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^n \times n$ 의 절댓값은 한없이 커지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타나므로 발산(진동)한다.
- ③ n 의 값이 한없이 커질 때, $\log_2(n+1)$ 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
- ④ n 의 값이 한없이 커질 때, $1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.
- ⑤ 발산(진동)한다.

002 답 ④

$\neg. n$ 의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n}{n^2+1}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

$\sqsubset. n$ 의 값이 한없이 커질 때, $n + \frac{1}{n+1}$ 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

$\sqsubset. n$ 의 값이 한없이 커질 때, $3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 3에 수렴한다.

$\sqsubset. 홀수 번째 항 1, 1, 1, \dots$ 은 1에 수렴하고, 짝수 번째 항 $-1, -1, -1, \dots$ 은 -1 에 수렴하므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

003 답 5

$\frac{\cos n\pi}{2^n}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례로 대입하면

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

따라서 n 의 값이 한없이 커질 때, $\frac{\cos n\pi}{2^n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 0에 수렴한다. $\therefore a=0$

$\frac{5n+(-1)^n}{n}=5+\frac{(-1)^n}{n}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례로 대입하면

$$5-1, 5+\frac{1}{2}, 5-\frac{1}{3}, 5+\frac{1}{4}, \dots$$

따라서 n 의 값이 한없이 커질 때, $\frac{5n+(-1)^n}{n}$ 의 값은 5에 한없이 가까워지므로 5에 수렴한다. $\therefore b=5$

$$\therefore a+b=5$$

004 답 45

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 + b_n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_n + b_n)^3 - 3a_nb_n(a_n + b_n) \} \\ &= \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \}^3 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &= 3^3 - 3 \times (-2) \times 3 = 45\end{aligned}$$

005 답 $-\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_nb_n+1}{3a_n-5b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n+1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n-5b_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 1}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{5 \times (-1) + 1}{3 \times 5 - 5 \times (-1)} = -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

006 답 ⑤

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n+1)=2 \text{에서 } 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n=1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n}{3a_n-1}=5 \text{에서 } \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n-1}=5$$

$$\frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3 \times \frac{1}{2} - 1} = 5, \quad 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{5}{4}$$

007 답 -6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} - 5 \right) = -5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 - \frac{2}{n(n+1)} \right\} = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+2)(b_n-1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+2) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n-1) \\ &= (-5+2) \times (3-1) = -6\end{aligned}$$

008 답 ③

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8a_{n+2}+7}{3a_n+1} = 3 \text{에서 } \frac{8a+7}{3a+1} = 3$$

$$8a+7=9a+3 \quad \therefore a=4$$

009 답 ①

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n+12} \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n+12} \text{이므로}$$

$$a = \sqrt{a+12}, \quad a^2 = a+12$$

$$a^2 - a - 12 = 0, \quad (a+3)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 4$$

$$\text{그런데 } a = \sqrt{a+12} > 0 \text{이므로 } a = 4$$

010 답 ①

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 2a_{2n} - 3) = 0 \text{에서 } a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항이 양수이므로 $a = 3$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+1}+1} = \sqrt{3+1} = 2$$

011 답 ④

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2-12n+4}{n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 9$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{(n-2)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{n^3-6n^2+12n-8} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}-\frac{8}{n^3}} = 1\end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+3n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3}{2} = 2$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{9n^2+2}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{4n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3}$$

012 답 ④

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{na_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 3 \times 2 = 6\end{aligned}$$

013 답 ⑤

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \log_4 (2n+1) + \log_4 (2n-1) - \log_4 (n^2+3n-2) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{(2n+1)(2n-1)}{n^2+3n-2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{4n^2-1}{n^2+3n-2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = \log_4 4 = 1$$

014 답 $\frac{3}{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= 3n^2 + 2n - 1, \quad \alpha_n \beta_n = 2n^2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

015 답 ②

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^n (4k+3) \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= 2n^2 + 5n \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{3n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n}{3n^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

016 답 $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 &= \sum_{k=1}^n (2k)^2 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2}{2n^3 - 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3(2n^3 - 3n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{6n^3 - 9n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}}{6 - \frac{9}{n^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

017 답 10

$$\begin{aligned} a_n &= \log_3(n+2) - \log_3(n+1) = \log_3 \frac{n+2}{n+1} \text{이므로} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{5}{4} + \cdots + \log_3 \frac{n+2}{n+1} \\ &= \log_3 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \log_3 \frac{n+2}{2} \\ \therefore 3^{a_1} \times 3^{a_2} \times 3^{a_3} \times \cdots \times 3^{a_n} &= 3^{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} \\ &= 3^{\log_3 \frac{n+2}{2}} = \frac{n+2}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3^{a_1} \times 3^{a_2} \times 3^{a_3} \times \cdots \times 3^{a_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{1 + \frac{2}{n}} = 10 \end{aligned}$$

018 답 9

$$\begin{aligned} a \neq 0 \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{an^2 - bn - 3} &= 0 \text{이므로 } a=0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{an^2 - bn - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{-bn-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n}}{-b - \frac{3}{n}} = -\frac{3}{b} \\ \text{따라서 } -\frac{3}{b} &= \frac{1}{3} \text{이므로 } b = -9 \\ \therefore a - b &= 9 \end{aligned}$$

019 답 6

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + an^2 + bn}{a_n + 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a_n}{n} + an + b}{\frac{a_n}{n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + 2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ a \neq 0 \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + 2}{4} &\text{는 발산하므로 } a=0 \\ \text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서 } \frac{b+2}{4} &= 2 \text{이므로 } b=6 \\ \therefore b - a &= 6 \end{aligned}$$

020 답 9

$$\begin{aligned} f(n) &= an + b \quad (a \neq 0, a, b \text{는 상수}) \text{라고 하면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{-4n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{-4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n}}{-4 + \frac{5}{n}} = -\frac{a}{4} \\ \text{즉, } -\frac{a}{4} &= -\frac{3}{2} \text{이므로 } a=6 \\ \text{또 } f(1)=3 \text{에서 } a+b=3 \text{이므로 } 6+b=3 \quad \therefore b=-3 \\ \text{따라서 } f(n) &= 6n-3 \text{이므로 } f(2)=12-3=9 \end{aligned}$$

021 답 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{(i) } a \neq 0, b=0 \text{이면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 - 3n + 1}{an^2 + 2n - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + 1}{an^2 + 2n - 5} = 0 \\ \text{(ii) } a=0, b \neq 0 \text{이면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 - 3n + 1}{an^2 + 2n - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 - 3n + 1}{2n - 5} = \infty \text{ (또는 } -\infty) \\ \text{(iii) } a=0, b=0 \text{이면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 - 3n + 1}{an^2 + 2n - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + 1}{2n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{5}{n}} = -\frac{3}{2} \\ \text{(i), (ii), (iii)에 의하여 } a \neq 0, b \neq 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 - 3n + 1}{an^2 + 2n - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{a + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{b}{a} \\ \text{따라서 } \frac{b}{a} &= \frac{1}{2} \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3an+b}{4bn-a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a + \frac{b}{n}}{4b - \frac{a}{n}} = \frac{3a}{4b} = \frac{3}{4} \times \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

022 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n-\sqrt{n^2-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)(n+\sqrt{n^2-1})}{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+2}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+2}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1} = 2\end{aligned}$$

023 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^2+8n}-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{n^2+8n}+n)}{(\sqrt{n^2+8n}-n)(\sqrt{n^2+8n}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n^2+8n}+3n}{8n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{1+\frac{8}{n}}+3}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

024 답 ⑤

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - \sqrt{9n^2 + n})(3n + \sqrt{9n^2 + n})}{3n + \sqrt{9n^2 + n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{3n + \sqrt{9n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{3 + \sqrt{9 + \frac{1}{n}}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}) (\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + 3n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 3n}}{(n - \sqrt{n^2 + 3n})(n + \sqrt{n^2 + 3n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 3n}}{-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{-3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{2(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)}{2\left(\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1\right)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

025 답 ①

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^n(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

$$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^n 2k=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)} - \sqrt{2+4+6+\dots+2n} \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})}{n + \sqrt{n^2 + n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}$$

026 $\frac{5}{6}$

$$\sqrt{9n^2} < \sqrt{9n^2 + 5n + 1} < \sqrt{9n^2 + 6n + 1} \circledast$$

$$3n < \sqrt{9n^2 + 5n + 1} < 3n + 1$$

$$\therefore a_n = \sqrt{9n^2 + 5n + 1} - 3n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 5n + 1} - 3n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9n^2+5n+1}-3n)(\sqrt{9n^2+5n+1}+3n)}{\sqrt{9n^2+5n+1}+3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{\sqrt{9n^2+5n+1}+3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{9 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + 3}} = \frac{5}{6}$$

027 답 1

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1 \circ \text{므로}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n$$

$$S_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) = n^2 + 4n + 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - \sqrt{n^2 + 2n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = 1$$

028 답 1

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)} - n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{2} = 1$$

029 답 ④

$b \geq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{an^2+4n+bn}} = 0$ 이므로 $b < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{an^2+4n+bn}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2+4n-bn}}{(\sqrt{an^2+4n+bn})(\sqrt{an^2+4n-bn})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2+4n-bn}}{(a-b^2)n^2+4n} \end{aligned}$$

이때 $a-b^2 \neq 0$ 이면 극한값이 0이므로

$$a-b^2=0 \quad \therefore a=b^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2+4n-bn}}{(a-b^2)n^2+4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2+4n-bn}}{4n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a+\frac{4}{n}}-b}{4} \\ &= \frac{\sqrt{a}-b}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\sqrt{a}-b}{4}=3$ 이므로 $\sqrt{a}=b+12 \quad \dots\dots \textcircled{8}$

⑦을 ⑧에 대입하면 $b < 0$ 이므로

$$-b=b+12, \quad -2b=12 \quad \therefore b=-6$$

이를 ⑦에 대입하면 $a=(-6)^2=36$

$$\therefore a-b=36-(-6)=42$$

030 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+kn}-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+kn}-n)(\sqrt{n^2+kn}+n)}{\sqrt{n^2+kn}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kn}{\sqrt{n^2+kn}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+1} \\ &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{k}{2}=3$ 이므로 $k=6$

031 답 4

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{an^2+bn}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{an^2+bn})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(1-a)n^2+(1-b)n} \end{aligned}$$

이때 $1-a \neq 0$ 이면 극한값이 0이므로 $a=1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(1-a)n^2+(1-b)n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+bn}}{(1-b)n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}}{1-b} \\ &= \frac{2}{1-b} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{1-b}=\frac{1}{2}$ 이므로 $b=-3$

$$\therefore a-b=1-(-3)=4$$

032 답 4

$k \geq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $k < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(2n+3)(2n+5)}+kn\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{(2n+3)(2n+5)}+kn\}\{\sqrt{(2n+3)(2n+5)}-kn\}}{\sqrt{(2n+3)(2n+5)}-kn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-k^2)n^2+16n+15}{\sqrt{4n^2+16n+15}-kn} \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$4-k^2=0 \quad \therefore k=-2 \quad (\because k < 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-k^2)n^2+16n+15}{\sqrt{4n^2+16n+15}-kn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n+15}{\sqrt{4n^2+16n+15}+2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16+\frac{15}{n}}{\sqrt{4+\frac{16}{n}+\frac{15}{n^2}}+2} = 4 \end{aligned}$$

033 답 2

$\frac{3+2a_n}{2-3a_n}=b_n$ 으로 놓으면 $3+2a_n=2b_n-3a_nb_n$

$$(2+3b_n)a_n=2b_n-3 \quad \therefore a_n=\frac{2b_n-3}{2+3b_n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n-3}{2+3b_n} = \frac{2 \times 2-3}{2+3 \times 2} = \frac{1}{8} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (8a_n+1) &= 8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2 \end{aligned}$$

034 답 ⑤

$(2n^2-n)a_n=b_n$ 으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{2n^2-n}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n=6$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \times \frac{b_n}{2n^2-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2-n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 6 = 3 \end{aligned}$$

035 답 $\frac{3}{10}$

$(2n+1)a_n=c_n$ 으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{2n+1}$

$(n^2-1)b_n=d_n$ 으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{n^2-1}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n=3, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n=5$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+2)b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{c_n}{2n+1}}{(n+2) \times \frac{d_n}{n^2-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2+5n+2} \times \frac{c_n}{d_n} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

036 답 16/7

$2a_n - 5b_n = c_n$ 으로 놓으면 $-5b_n = c_n - 2a_n$

$$\therefore b_n = \frac{2a_n - c_n}{5}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3 \times \frac{2a_n - c_n}{5}}{a_n + \frac{2a_n - c_n}{5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_n + 6a_n - 3c_n}{5a_n + 2a_n - c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16a_n - 3c_n}{7a_n - c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 - 3 \times \frac{c_n}{a_n}}{7 - \frac{c_n}{a_n}} = \frac{16}{7} \end{aligned}$$

037 답 3/2

$3n^2 + 4n - 3 < a_n < 3n^2 + 4n + 5$ 에서

$$\frac{3n^2 + 4n - 3}{2n^2 + 3n + 1} < \frac{a_n}{2n^2 + 3n + 1} < \frac{3n^2 + 4n + 5}{2n^2 + 3n + 1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n - 3}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 5}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{3}{2}$ 이므로 수열의 극

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{3}{2}$$

038 답 ④

$\sqrt{9n^2 - n} < (n+1)a_n < \sqrt{9n^2 + 2n}$ 에서

$$\frac{\sqrt{9n^2 - n}}{n+1} < a_n < \frac{\sqrt{9n^2 + 2n}}{n+1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n}}{n+1} = 3$ 이므로 수열의 극한의

대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

039 답 ③

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1 \text{이므로 } -\frac{2}{n+3} \leq \frac{2}{n+3} \sin \frac{n\pi}{2} \leq \frac{2}{n+3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n+3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+3} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소

관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+3} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

040 답 1/2

$n < a_n < n+1$ 에서 $\sum_{k=1}^n k < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (k+1)$

$$\frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n(n+1)}{2} + n, \quad \frac{n^2 + n}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n^2 + 3n}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2 + n}{2n^2} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n^2} < \frac{n^2 + 3n}{2n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{2n^2} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소

관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

041 답 1/4

곡선 $y = x^2 - (n+1)x + a_n$ 이 x 축과 만나므로 이차방정식

$x^2 - (n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1 = (n+1)^2 - 4a_n \geq 0 \quad \therefore a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y = x^2 - nx + a_n$ 이 x 축과 만나지 않으므로 이차방정식

$x^2 - nx + a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$D_2 = n^2 - 4a_n < 0 \quad \therefore a_n > \frac{n^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } \frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$$

042 답 ③

$$\frac{n}{3} < \left[\frac{n}{3} + 1\right] \leq \frac{n}{3} + 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} + 1\right] \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계

에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} + 1\right] = \frac{1}{3}$$

043 답 ③

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - 0 = \alpha$$

$\neg$. [반례] $a_n = n, b_n = -n^2$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ (β 는 실수)라고 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\beta|$ 이므로 수열 $\{|a_n|\}$ 도 수렴한다.

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

044 답 ②

$\neg$. [반례] $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$ 이면 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모두 발산(진동)하지만 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 0으로 수렴한다.

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2a_n + 3b_n}{3} - \frac{2a_n}{3}\right) = \frac{\beta}{3} - \frac{2\alpha}{3} \text{이므로 수열 } \{b_n\} \text{은 수렴한다.}$$

$\neg$. [반례] $a_n = (-1)^n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1$ 이므로 두 수열 $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}$ 은 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

045 답 ②

ㄱ. [반례] $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ 이지만
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다.
 ㄴ. $a_n < b_n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이므로 $\alpha \leq \beta$
 ㄷ. [반례] $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n + \frac{1}{n}$, $c_n = n$ 이면 $a_n < c_n < b_n$ 이고
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n}\right) = 0$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 이므로
 수열 $\{c_n\}$ 은 발산한다.
 따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

046 답 ①

$$\begin{aligned} \overline{OP}_n &= \sqrt{n^2 + (\sqrt{n})^2} = \sqrt{n^2 + n} \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n - \overline{OP}_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n - \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n + \sqrt{n^2 + n})}{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n + \sqrt{n^2 + n})}{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \right\} \\ &= -4 \end{aligned}$$

047 답 2

$y = nx$ 를 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면
 $x^2 + (nx)^2 = 4$, $x^2 = \frac{4}{n^2 + 1}$
 $\therefore x = \pm \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}}$
 그런데 점 P_n 은 제1사분면 위의 점이므로
 $P_n \left(\frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}}, \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)$, $Q_n \left(\frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}}, 0 \right)$
 따라서 $\triangle OP_n Q_n$ 의 넓이 S_n 은
 $S_n = \frac{1}{2} \times \overline{OQ}_n \times \overline{P_n Q}_n$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}} \times \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$
 $= \frac{2n}{n^2 + 1}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 1} = 2$

048 답 2

$a_1 = 4$, $a_2 = 4 + 8$, $a_3 = 4 + 8 + 12$, ...에서
 $a_n = 4 + 8 + 12 + \dots + 4n$
 $= \sum_{k=1}^n 4k = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} = 2n^2 + 2n$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n}{n^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{n} \right) = 2$

핵심 유형 18~19쪽

유형12 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^{n+1}}{5^{n+1} - 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2 \times 2^n}{5 \times 5^n - 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \left(\frac{2}{5} \right)^n}{5 - \left(\frac{2}{5} \right)^n} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

유형13 답 ⑤

$n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (5^{n+1} - 2) - (5^n - 2)$
 $= (5 - 1) \times 5^n = 4 \times 5^n$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 2}{4 \times 5^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 2 \left(\frac{1}{5} \right)^n}{4}$
 $= \frac{5}{4}$

유형14 답 ③

공비가 $\frac{4x - x^2}{5}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
 $-1 < \frac{4x - x^2}{5} \leq 1$
 (i) $-1 < \frac{4x - x^2}{5}$ 에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$
 $(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5$
 (ii) $\frac{4x - x^2}{5} \leq 1$ 에서 $x^2 - 4x + 5 \geq 0$
 이때 $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 $-1 < x < 5$
 따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

유형15 답 ①

(i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r^n - 4}{r^n + 1} = -4$
 (ii) $r = 1$ 일 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r^n - 4}{r^n + 1} = \frac{2 - 4}{1 + 1} = -1$
 (iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r^n - 4}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} = 2$
 따라서 $a = -4$, $b = -1$, $c = 2$ 이므로
 $a + b + c = -3$

유형 16 답 19

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times (-2) - (-2)^n}{2+(-2)^{n+2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 - (-2)^n}{2+4 \times (-2)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4} = -\frac{1}{4} \\
 f\left(\frac{1}{3}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}} = 1 \\
 f(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times 1 - 1^n}{2+1^{n+2}} = 1 \\
 f\left(\frac{4}{3}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \left(\frac{4}{3}\right)^n}{2 + \frac{16}{9} \left(\frac{4}{3}\right)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{2 \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{16}{9}} = -\frac{9}{16} \\
 \therefore f(-2) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) &= -\frac{1}{4} + 1 + 1 + \left(-\frac{9}{16}\right) \\
 &= \frac{19}{16}
 \end{aligned}$$

유형 17 답 ②

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고, $a_{n+1} - 2a_n = 0$, 즉 $a_{n+1} = 2a_n$ 에서 공비가 2인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}
 a_n &= 3 \times 2^{n-1} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2^{n-1}}{2^n + 3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

핵심 유형 완성하기 20~22쪽

049 답 16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+2} - 3^{n+1}}{4^{n-1} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 4^n - 3 \times 3^n}{\frac{1}{4} \times 4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 16$$

050 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 수열 $\{0.5^n\}$ 은 공비가 0.5이고, $-1 < 0.5 < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

즉, 주어진 수열은 1에 수렴한다.

ㄴ. 주어진 수열은 4, 2, 4, 2, 4, 2, ...이므로 발산(진동)한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$ 은 공비가 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 이고, $\frac{3}{\sqrt{5}} > 1$ 이므로 발산한다.

즉, 주어진 수열은 발산한다.

ㄹ. $3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{3}$ 이고, $-1 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 수열 $\{3^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

$4^{-n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{4}$ 이고 $-1 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 수열 $\{4^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

즉, 주어진 수열은 0에 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄹ이다.

051 답 4

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \times a_n - 3^{n+1}}{3^n \times a_n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 3 \left(\frac{3}{5}\right)^n}{a_n \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} = 5\alpha$$

따라서 $5\alpha = 20$ 이므로 $\alpha = 4$

052 답 ①

$$2a_n + b_n = 3^n \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$a_n + 2b_n = 2^n \quad \cdots \textcircled{B}$$

$2 \times \textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$3a_n = 2 \times 3^n - 2^n \quad \therefore a_n = \frac{1}{3}(2 \times 3^n - 2^n)$$

$2 \times \textcircled{B} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$3b_n = 2^{n+1} - 3^n \quad \therefore b_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 3^n)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^n - 2^n}{2^{n+1} - 3^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = -2
 \end{aligned}$$

053 답 $\frac{1}{4}$

$10^n = 2^n \times 5^n$ 이므로

$$\begin{aligned}
 a_n &= (1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n) \\
 &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1} \\
 &= \frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1) \times \frac{1}{2^{n+1} \times 5^{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

054 답 ④

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n - 2^n) - (3^{n-1} - 2^{n-1}) \\ &= (3-1) \times 3^{n-1} - (2-1) \times 2^{n-1} \\ &= 2 \times 3^{n-1} - 2^{n-1} \\ \therefore a_n + a_{n+1} &= (2 \times 3^{n-1} - 2^{n-1}) + (2 \times 3^n - 2^n) \\ &= (2+6) \times 3^{n-1} - (1+2) \times 2^{n-1} \\ &= 8 \times 3^{n-1} - 3 \times 2^{n-1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \times 3^{n-1} - 3 \times 2^{n-1}}{3^n - 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8}{3} - \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

055 답 $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, S_n = \frac{2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{4\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}}{2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

056 답 $\frac{2}{3}$

$S_{n+1} = 3S_n + 2$ 에서 $S_n = 3S_{n-1} + 2$ 이므로

$$S_{n+1} - S_n = 3(S_n - S_{n-1})$$

$$\therefore a_{n+1} = 3a_n$$

따라서 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$, $S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^{n-1}}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

057 답 10

첫째항이 $x-5$, 공비가 $\frac{x^2-2x}{3}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하

려면 $x-5=0$ 또는 $-1 < \frac{x^2-2x}{3} \leq 1$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } -1 < \frac{x^2-2x}{3} \leq 1$$

$$(i) -1 < \frac{x^2-2x}{3} \text{에서 } x^2-2x+3 > 0$$

이때 $x^2-2x+3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

$$(ii) \frac{x^2-2x}{3} \leq 1 \text{에서 } x^2-2x-3 \leq 0$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3$$

(i), (ii)에 의하여 $-1 \leq x \leq 3$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 5$ 이므로 구하는 합은 $-1+0+1+2+3+5=10$

058 답 ④

공비가 $\log_2 x - 2$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \log_2 x - 2 \leq 1, 1 < \log_2 x \leq 3$$

$$\log_2 2 < \log_2 x \leq \log_2 8$$

$$\therefore 2 < x \leq 8$$

따라서 정수 x 는 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개이다.

059 답 $2\sqrt{2}$

공비가 $x(2-x)$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < x(2-x) \leq 1$$

$$(i) -1 < x(2-x) \text{에서 } x^2-2x-1 < 0$$

$$\therefore 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$$

$$(ii) x(2-x) \leq 1 \text{에서 } x^2-2x+1 \geq 0$$

이때 $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 항상 성립한다.

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$$

따라서 $\alpha = 1-\sqrt{2}$, $\beta = 1+\sqrt{2}$ 이므로

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{2}$$

060 답 ③

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로

$$-1 < r \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ㄱ. 공비가 $-r$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $-1 \leq -r < 1$

이때 $-r = -1$, 즉 $r = 1$ 이면 수열 $\{(-r)^n\}$ 은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 공비가 $\frac{r+1}{3}$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $0 < r+1 \leq 2$

$$\therefore 0 < \frac{r+1}{3} \leq \frac{2}{3}$$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{r+1}{3}\right)^n\right\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. 공비가 r^2 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $0 \leq r^2 \leq 1$

즉, 수열 $\{r^{2n}\}$ 은 수렴한다.

ㄹ. 공비가 $\frac{1}{r}$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{1}{r} < -1$ 또는 $\frac{1}{r} \geq 1$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ 은 $\frac{1}{r} = 1$ 일 때만 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

061 답 7

(i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{3r^n + 1} = 0$$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{3r^n + 1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

(iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{3r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{r^n}} = \frac{1}{3}$$

따라서 $a=0$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{3}$ 이므로

$$12(a+b+c) = 12\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = 7$$

062 답 ③

ㄱ. $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r - 2}{r^n + 1} = -r - 2$$

ㄴ. $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r - 2}{r^n + 1} = \frac{1 - 1 - 2}{1 + 1} = -1$

ㄷ. $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r - 2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{r}{r^n} - \frac{2}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} = 1$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

063 답 ⑤

(i) $|r| < 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{5}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{r}{5}\right)^n + 1} = -1$$

(ii) $r = 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 5^n}{5^n + 5^n} = 0$$

(iii) $|r| > 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{5}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{r}\right)^n} = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = -1$ 을 만족하는 r 의 값의 범위는 $|r| < 5$

따라서 정수 r 는 $-4, -3, -2, \dots, 4$ 의 9개이다.

064 답 ②

$$\begin{aligned} f(-2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{2n+1} - 2}{(-2)^{2n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}} = -2 \end{aligned}$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} - 2}{(-1)^{2n} + 3} = \frac{-1 - 2}{1 + 3} = -\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 3} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} - 2}{1^{2n} + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4} \\ \therefore f(-2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \\ &= -2 + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

065 답 ③

ㄱ. $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \frac{1}{3}x^2$$

ㄴ. $x = 1$ 일 때, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \frac{1 + 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$

$$x = -1 \text{일 때, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \frac{1 + (-1)}{3 + 1} = 0$$

ㄷ. $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^{2n}} + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x^{2n}} + 1} = \frac{1}{x}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

066 답 ②

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{2 + x^n} = \frac{1}{2}$$

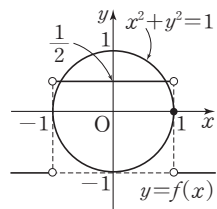
(ii) $x = 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{2 + x^n} = \frac{1 - 1}{2 + 1} = 0$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{2 + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{2}{x^n} + 1} = -1$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 교점의 개수는 3이다.



067 답 $-\frac{1}{2}$

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{2}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 4 \times (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^{n+3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a_n}{4 + a_{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\sqrt{2})^{n+3}}{4 + (\sqrt{2})^{n+5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+5} - \frac{1}{2}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+5} + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

068 답 ②

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ 에서 첫째항이 1, 공차가 4이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

따라서 $a_{n-1} = 4(n-1) - 3 = 4n - 7$ 이므로

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n-1}}{4n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3)(4n-7)}{4n^2 + 5} = 4$$

069 ⑨

$a_{n+1}-a_n=3^n$ 에 n 대신 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2-a_1 &= 3 \\ a_3-a_2 &= 3^2 \\ a_4-a_3 &= 3^3 \\ &\vdots \\ +) a_n-a_{n-1} &= 3^{n-1} \\ \hline a_n-a_1 &= 3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1} = \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3^n-3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a_n = 1 + \frac{3^n-3}{2} = \frac{3^n-1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}+4}{2a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}+4}{3^n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9+4\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 9$$

070 ⑬ 125

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + 100 \text{에서 } a_{n+1} - 125 = \frac{1}{5}(a_n - 125)$$

따라서 수열 $\{a_n - 125\}$ 는 첫째항이

$$a_1 - 125 = 1000 \times \frac{1}{5} + 100 - 125 = 175$$

이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 125 = 175 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 125 + 175 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 125 + 175 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \right\} = 125$$

핵심 유형 최종 점검하기

23~25쪽

1 ④

유형 01 수열의 수렴과 발산

- ① n 의 값이 한없이 커질 때, $10-3n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
- ② 발산(진동)한다
- ③ n 의 값이 한없이 커질 때, $\frac{(-1)^n \times n}{n+1}$ 의 값은 절댓값은 1에 한없이 가까워지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타나므로 발산(진동)한다.
- ④ n 의 값이 한없이 커질 때, $1-\frac{1}{n}$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.
- ⑤ n 의 값이 한없이 커질 때, $\log \frac{1}{n} = -\log n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

2 ⑤

유형 02 수열의 극한에 대한 성질

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2b_n}{a_nb_n + 2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n + 2)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 2} \\ &= \frac{-2 - 2 \times 3}{-2 \times 3 + 2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

3 ③

유형 03 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ 의 이용

수열 $\{a_n\}$ 이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 4 - 4a_n \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 4a_n) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 4 - 4\alpha, 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$$

$$(2\alpha - 1)^2 = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

4 ① $\frac{1}{4}$

유형 04 ∞ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n+3)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n+3)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2+12n+9} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5 ④

유형 04 ∞ 꼴의 극한

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \end{aligned}$$

따라서 $a_{2n} = 4 \times 2n - 5 = 8n - 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n - 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n-5}{2n-5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-\frac{5}{n}}{2-\frac{5}{n}} = 4 \end{aligned}$$

6 답 ①

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 미정계수의 결정

$$a \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+4}{an^2-2n+5} = 0 \text{ 이므로 } a=0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+4}{an^2-2n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+4}{-2n+5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b+\frac{4}{n}}{-2+\frac{5}{n}} = -\frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } -\frac{b}{2} = -3 \text{ 이므로 } b=6$$

$$\therefore b-a=6$$

7 답 ②

유형 06 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = 1 \end{aligned}$$

8 답 ②

유형 06 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n}-n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2-3n}-n)(\sqrt{n^2-3n}+n)}{\sqrt{n^2-3n}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+1} = -\frac{3}{2} \\ \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{3} \\ \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_3 n - \log_3 (3n+1)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{1}{3+\frac{1}{n}} \\ &= \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1 \\ \therefore \alpha &< \gamma < \beta \end{aligned}$$

9 답 ⑤

유형 07 $\infty - \infty$ 꼴의 극한에서 미정계수의 결정

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}} \\ &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a-b}{2} = 6 \text{ 이므로 } a-b=12$$

10 답 ①

유형 08 일반항 a_n 을 포함하는 수열의 극한

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3n^2-2n+1} &= b_n \text{ 으로 놓으면} \\ a_n &= (3n^2-2n+1)b_n \\ \text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \frac{4}{9} \text{ 이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{2n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n+1}{2n^3} \times (3n^2-2n+1)b_n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+n^2-n+1}{2n^3} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

11 답 ④

유형 09 수열의 극한의 대소 관계

$$5n-3 < (2n+1)a_n < 5n+3 \text{ 에서}$$

$$\frac{5n-3}{2n+1} < a_n < \frac{5n+3}{2n+1}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{2n+1} = \frac{5}{2} \text{ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{2}$$

12 답 ㄷ

유형 10 수열의 극한에 대한 참, 거짓 판별

$$\neg. \text{ [반례]} a_n = b_n = (-1)^n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1 \text{ 이므로 수열}$$

$$\{a_n b_n\} \text{ 이 수렴하지만 두 수열 } \{a_n\}, \{b_n\} \text{ 은 모두 발산한다.}$$

$$\neg. \text{ [반례]} a_n = (-1)^n \text{ 이라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1 \text{ 이므로 수열}$$

$$\{|a_n|\} \text{ 은 수렴하지만 수열 } \{a_n\} \text{ 은 발산한다.}$$

$$\square. |a_n| < |b_n| \text{ 이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{따라서 옳은 것은 ㄷ이다.}$$

13 답 1/2

유형 11 수열의 극한의 활용

$$\begin{aligned}
 & A_n(n, \sqrt{n+1}), A_{n+1}(n+1, \sqrt{n+2}) \text{이므로} \\
 & A_n B_n = n, A_{n+1} B_{n+1} = n+1, B_n B_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\
 & \therefore S_n = \frac{1}{2} \times (n+n+1) \times (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\
 & \quad = \frac{(2n+1)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}{2} \\
 & \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}{2\sqrt{n}} \\
 & \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \\
 & \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n})} \\
 & \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)} \\
 & \quad = \frac{2}{2(1+1)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

14 답 ③

유형 12 등비수열의 극한

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 1}{(2^{n+1} + 1)(3^n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}} = 3$$

15 답 1

유형 12 등비수열의 극한

$$\begin{aligned}
 & A_n(n, 2^n), B_n(n, 3^n) \text{이므로 삼각형 } OA_nC \text{의 넓이는} \\
 & \frac{1}{2} \times 1 \times n = \frac{n}{2} \\
 & \text{삼각형 } A_n B_n C \text{의 넓이는} \\
 & \frac{1}{2} \times (3^n - 2^n) \times n = \frac{n}{2} (3^n - 2^n) \\
 & \therefore S_n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} (3^n - 2^n) = \frac{n}{2} (1 + 3^n - 2^n), T_n = \frac{n}{2} (3^n - 2^n) \\
 & \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2} (3^n - 2^n)}{\frac{n}{2} (1 + 3^n - 2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{1 + 3^n - 2^n} \\
 & \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1
 \end{aligned}$$

16 답 2/5

유형 13 수열의 합과 등비수열의 극한

$$\begin{aligned}
 & S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{a_1(3^n - 1)}{2} \text{이므로} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^{n+1}}{a_1(3^n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{a_1 \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}} = \frac{6}{a_1} \\
 & \text{따라서 } \frac{6}{a_1} = 15 \text{이므로 } a_1 = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

17 답 14

유형 14 등비수열의 수렴 조건

- (i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-1}{4}\right)^n\right\}$ 이 수렴하려면
- $$-1 < \frac{x-1}{4} \leq 1 \quad \therefore -3 < x \leq 5$$
- (ii) 등비수열 $\{(-1 + \log_3 x)^n\}$ 이 수렴하려면
- $$-1 < -1 + \log_3 x \leq 1, 0 < \log_3 x \leq 2$$
- $$\log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 9 \quad \therefore 1 < x \leq 9$$
- (i), (ii)에 의하여 $1 < x \leq 5$
- 따라서 정수 x 는 2, 3, 4, 5이므로 그 합은 $2+3+4+5=14$

18 답 ②

유형 15 r^n 을 포함한 수열의 극한

- (i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - r^{2n-1}}{2 + r^{2n}} = \frac{3}{2}$
- (ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - r^{2n-1}}{2 + r^{2n}} = \frac{3-1}{2+1} = \frac{2}{3}$
- (iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0$ 이므로
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - r^{2n-1}}{2 + r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(\frac{1}{r}\right)^{2n} - \frac{1}{r}}{2\left(\frac{1}{r}\right)^{2n} + 1} = -\frac{1}{r}$$
- (iv) $r = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - r^{2n-1}}{2 + r^{2n}} = \frac{3 - (-1)}{2 + 1} = \frac{4}{3}$
- 따라서 극한값이 될 수 없는 것은 ②이다.

19 답 ①

유형 16 x^n 을 포함한 극한으로 정의된 함수

- (i) $x = 1, 2, 3$ 일 때,
- $$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - x^{n+1}}{4^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - x\left(\frac{x}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^n} = 4$$
- (ii) $x = 4$ 일 때,
- $$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 4^{n+1}}{4^n + 4^n} = 0$$
- (iii) $x = 5, 6, 7, \dots, 10$ 일 때,
- $$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - x^{n+1}}{4^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\left(\frac{4}{x}\right)^n - x}{\left(\frac{4}{x}\right)^n + 1} = -x$$
- $$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{x=1}^{10} f(x) &= f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) \\
 &= 4 \times 3 + 0 - (5 + 6 + 7 + \dots + 10) = -33
 \end{aligned}$$

20 답 11

유형 17 귀납적으로 정의된 수열의 극한

- $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ 에서 $a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4)$
- 따라서 수열 $\{a_n - 4\}$ 는 첫째항이 $a_1 - 4 = 3 - 4 = -1$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로
- $$a_n - 4 = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
- $$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \left\{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} - 1\right] = 3 \times 4 - 1 = 11$$

02 급수

핵심
유형

유형01 ①	유형02 ④
유형03 ㄴ, ㄷ	유형04 -1
유형05 ㄴ	유형06 ①
유형07 ㄱ, ㄴ	유형08 ⑤
유형09 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$	유형10 ④
유형11 ④	유형12 $(\frac{16}{25}, \frac{12}{25})$
유형13 $32(\sqrt{2}+1)$	유형14 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
유형15 750 kg	

핵심
유형

완성하기

001 ①	002 ②	003 ①	004 ④	005 ①
006 ④	007 ④	008 ①	009 ②	
010 ㄴ, ㄷ	011 ㄱ	012 ①	013 ③	014 $-\frac{3}{2}$
015 $-\frac{6}{5}$	016 -4	017 1	018 ⑤	019 ④
020 9	021 ④	022 4	023 ㄱ, ㄴ	
024 ㄱ	025 ⑤	026 ④	027 $\frac{13}{10}$	028 $\frac{3}{2}$
029 ②	030 ③	031 ③	032 ②	033 ②
034 3	035 16	036 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $3 < x < 5$		
037 -8	038 ④	039 2	040 ①	041 $\frac{4}{45}$
042 ②	043 3	044 $\frac{7}{15}$	045 5	
046 $(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10})$	047 $\frac{5}{7}$	048 $18(2+\sqrt{3})$		
049 π	050 $\frac{1}{2}$	051 $\sqrt{2}+1$	052 18π	053 $\frac{1}{2}$
054 $\frac{9}{5}$	055 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	056 5652 kg		
057 64 cm	058 60 mg			

핵심
유형

최종 점검하기

1 ③	2 ③	3 ②	4 ④	5 $\frac{3}{5}$
6 ②	7 -4	8 ③	9 ③	10 ⑤
11 ⑤	12 ①	13 ㄴ	14 ①	15 $\frac{63}{64}$
16 $2\sqrt{2}$	17 $\frac{32}{7}\pi$	18 4억 5천만 원		

핵심 유형 28~29쪽

유형01 답 ①

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

유형02 답 ④

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{n+1} 4 - \log_{n+2} 4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\log_{k+1} 4 - \log_{k+2} 4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\log_4(k+1)} - \frac{1}{\log_4(k+2)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\log_4 2} - \frac{1}{\log_4 3} \right) + \left(\frac{1}{\log_4 3} - \frac{1}{\log_4 4} \right) + \left(\frac{1}{\log_4 4} - \frac{1}{\log_4 5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{\log_4(n+1)} - \frac{1}{\log_4(n+2)} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log_4 2} - \frac{1}{\log_4(n+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{\log_4 2} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \end{aligned}$$

유형03 답 ㄴ, ㄷ

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

ㄱ. $S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, S_5=1, S_6=0, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_1=1, S_2=\frac{1}{2}, S_3=1, S_4=\frac{2}{3}, S_5=1, S_6=\frac{3}{4}, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}=1$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 1로 수렴한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $-\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이다.

유형04 답 -1

$$(a_1+3)+\frac{a_2+5}{2}+\frac{a_3+7}{3}+\frac{a_4+9}{4}+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+2n+1}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2n+1}{n}\right)$$

주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2n+1}{n}\right)=0$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty}\frac{2n+1}{n}=2 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty}\frac{a_n}{n}=-2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty}\frac{3n+5a_n}{n-3a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty}\frac{3+5 \times \frac{a_n}{n}}{1-3 \times \frac{a_n}{n}} \\ &= \frac{3+5 \times (-2)}{1-3 \times (-2)} = -1\end{aligned}$$

유형05 답 ㄴ

$$\neg. \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty}\frac{n}{n+1}=1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\neg. \frac{10}{1 \times 2}+\frac{10}{2 \times 3}+\frac{10}{3 \times 4}+\frac{10}{4 \times 5}+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{n \rightarrow \infty}\sum_{k=1}^n 10\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n \rightarrow \infty} 10\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n \rightarrow \infty} 10\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=10$$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

$$\neg. \left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{6}-1\right)+\left(\frac{1}{9}-1\right)+\left(\frac{1}{12}-1\right)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}-1\right)$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{3n}-1\right)=-1 \neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}$$

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ이다.

유형06 답 ①

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha, \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=13 \text{에서 } 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=13$$

$$\therefore 2\alpha+3\beta=13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n-b_n)=5 \text{에서 } 4\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$$

$$\therefore 4\alpha-\beta=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\alpha=2, \beta=3$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-5b_n) &= 3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-5\sum_{n=1}^{\infty}b_n \\ &= 3 \times 2 - 5 \times 3 = -9\end{aligned}$$

유형07 답 ㄱ, ㄴ

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{과 } \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{이 수렴하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}a_n=0, \lim_{n \rightarrow \infty}b_n=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty}a_nb_n=\lim_{n \rightarrow \infty}a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty}b_n=0$$

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha, \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$

$$=\alpha-\beta$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 은 수렴한다.

$$\neg. [\text{반례}] \{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, \dots, \{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$ 으로 수렴하고, $\lim_{n \rightarrow \infty}a_n \neq 0$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty}b_n \neq 0 \text{이다.}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

핵심 유형 완성하기 30~33쪽

001 답 ①

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라고 하면

$$a_n=\frac{3}{1+2+3+\dots+n+(n+1)}=\frac{3}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$=\frac{6}{(n+1)(n+2)}=6\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^n 6\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=6\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty}S_n=\lim_{n \rightarrow \infty}6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=3$$

002 답 ②

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^n a_k=\sqrt{n^2+3n}-n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n \rightarrow \infty}S_n=\lim_{n \rightarrow \infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$$

$$=\lim_{n \rightarrow \infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\lim_{n \rightarrow \infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{3}{2}$$

003 답 ①

$$S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 3\}}{2} = \frac{3n(n+1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

004 답 ④

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

005 답 ①

$a_{n+1}-a_n=n+1$ 에 n 대신 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여
변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
& a_2 - a_1 = 2 \\
& a_3 - a_2 = 3 \\
& a_4 - a_3 = 4 \\
& \vdots \\
& + \underbrace{a_n - a_{n-1} = n} \\
& a_n - a_1 = 2 + 3 + 4 + \cdots + n \\
& \therefore a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\because a_1 = 1) \\
& \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a_{n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\frac{(n+3)(n+4)}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+3)(n+4)} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 4 \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \right\} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} \right) = 1
\end{aligned}$$

006 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= \frac{4n+2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = 2 \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = 2 \end{aligned}$$

007 답 ④

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (\log_{2n+1} \sqrt{3} - \log_{2n+3} \sqrt{3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\log_{2k+1} \sqrt{3} - \log_{2k+3} \sqrt{3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2k+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2k+3)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 5} \right) + \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 5} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 7} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

008 답 ①

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \log_2 a_k \\ &= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \cdots + \log_2 a_n \\ &= \log_2 (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \log_2 \frac{n+1}{4n-3} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log_2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{4n-3} \\ &= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \end{aligned}$$

009 답 ②

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2-1}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \left(\frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \log_2 \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{2n} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \end{aligned}$$

010 답 ㄴ, ㄷ

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

ㄱ. $S_1=1, S_2=-1, S_3=1, S_4=-2, S_5=1, S_6=-3, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=-n \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=-\infty$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

ㄷ. $S_1=1, S_2=\frac{1}{2}, S_3=1, S_4=\frac{3}{4}, S_5=1, S_6=\frac{5}{6}, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n}=1$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 1로 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이다.

011 답 ㄱ

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

ㄱ. $S_1=2, S_2=0, S_3=2, S_4=0, S_5=2, S_6=0, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=2, S_{2n}=0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=2, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } S_n &= (2-2) + (2-2) + (2-2) + \dots + (2-2) = 0 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= 0 \end{aligned}$$

즉, 주어진 급수는 0으로 수렴한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } S_n &= 2 + (-2+2) + (-2+2) + (-2+2) + \dots + (-2+2) = 2 \\ \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

즉, 주어진 급수는 2로 수렴한다.

따라서 발산하는 급수는 ㄱ이다.

012 답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$S_1=1, S_2=\frac{2}{3}, S_3=1, S_4=\frac{4}{5}, S_5=1, S_6=\frac{6}{7}, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=\frac{2n}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1}=1$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 T_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 1로 수렴한다.

013 답 ③

$$(a_1-1) + \left(\frac{a_2}{2}-1\right) + \left(\frac{a_3}{3}-1\right) + \left(\frac{a_4}{4}-1\right) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}-1\right)$$

$$\text{주어진 급수가 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}=1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3a_n}{4n+a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3 \times \frac{a_n}{n}}{4+\frac{a_n}{n}} = \frac{2+3 \times 1}{4+1} = 1$$

014 답 $-\frac{3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3} \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n-9S_n}{2a_n+6S_n} = \frac{3 \times 0 - 9 \times \frac{2}{3}}{2 \times 0 + 6 \times \frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

015 답 $-\frac{6}{5}$

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - \alpha\right) \text{가 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - \alpha\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2-5a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{2}{n^2} - 5 \times \frac{a_n}{n^2}} = -\frac{3}{5\alpha}$$

$$\text{따라서 } -\frac{3}{5\alpha} = \frac{1}{2} \text{이므로 } \alpha = -\frac{6}{5}$$

016 답 -4

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 24 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 24$$

$$\text{또 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2n-1}+10a_{2n}}{a_n-6} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}+9a_{2n}}{a_n-6} = \frac{24+9 \times 0}{0-6} = -4 \end{aligned}$$

017 답 1

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} na_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} = 0$$

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n - a_{n+1}) \text{의 제} n \text{항까지의 부분합을 } S_n \text{이라고 하면}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 2(a_1-a_2) + 3(a_2-a_3) + 4(a_3-a_4) \\ &\quad + \dots + n(a_{n-1}-a_n) + (n+1)(a_n-a_{n+1}) \\ &= 2a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n - (n+1)a_{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^n a_k - (n+1)a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n - a_{n+1}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_1 + \sum_{k=1}^n a_k - (n+1)a_{n+1} \right\} \\ = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 0 = 1 \end{aligned}$$

018 답 ⑤

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty \end{aligned}$$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{11} + \frac{4}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-1}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{3} \quad 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 \end{aligned}$$

따라서 수렴하는 급수는 ⑤이다.

019 답 ④

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \text{은 발산한다.}$$

$$\begin{aligned} \neg. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \right\} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{2n+5} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \neq 0 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \frac{n+1}{2n+5} \text{은 발산한다.}$$

$$\begin{aligned} \neg. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}} \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}}\right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) \right\} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) = 2 \end{aligned}$$

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄹ이다.

020 답 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 11 \text{에서 } 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 11$$

$$\therefore 3\alpha - 2\beta = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 3b_n) = -1 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1$$

$$\therefore \alpha - 3\beta = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } \alpha = 5, \beta = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 5 + 2 \times 2 = 9 \end{aligned}$$

021 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_n - (4a_n - 3b_n)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - 3b_n) \right\} \\ &= \frac{1}{3} (4 \times 6 - 30) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 5b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 6 - 5 \times (-2) = 22 \end{aligned}$$

022 답 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n b_n = 2 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n + \log b_n) = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n^2}{b_n^3} = 9 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} (2 \log a_n - 3 \log b_n) = 9$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 9$$

$$\therefore 2\alpha - 3\beta = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } \alpha = 3, \beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n}{b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n - \log b_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n \\ &= 3 - (-1) = 4 \end{aligned}$$

023 답 ㄱ, ㄴ

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{과 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라고 하면}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + 2b_n) - a_n}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\} \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $b_n = n^2$ 이라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 1로 수렴하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \neq 0$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

024 답 ㄱ

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

ㄴ. [반례] $a_n = \frac{1}{n}$ 이라고 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}: 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots$

$$S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

$$\{a_n^2\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

025 답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2)$ 와 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 2)$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 2) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4$$

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2 \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n + 2) + (b_n - 2)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 2) \end{aligned}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

핵심 유형 34~35쪽

유형08 답 ⑤

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-3)^{n+1}}{12^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-1} \times 2^n}{12^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3) \times (-3)^n}{12^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-3) \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} + (-3) \times \frac{-\frac{1}{4}}{1 - (-\frac{1}{4})} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

유형09 답 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} \text{에서 } \frac{a}{1-r} = \sqrt{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 의 첫째항은 a^2 , 공비는 r^2 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } \frac{2(1-r)^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-r)}{1+r} = \frac{1}{2}, 4(1-r) = 1+r$$

$$5r = 3 \quad \therefore r = \frac{3}{5}$$

$$r = \frac{3}{5} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a_1 = a = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

유형10 답 ④

첫째항이 x , 공비가 $\frac{x-5}{3}$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$x=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x-5}{3} < 1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } 2 < x < 8$$

따라서 정수 x 는 0, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

유형11 답 ④

$a_1 = 0.\dot{2} = \frac{2}{9}$ 이고, $a_3 = 0.00\dot{8} = \frac{8}{900} = \frac{2}{225}$ 이므로 공비를 r 라고 하면

$$\frac{2}{9} r^2 = \frac{2}{225}, r^2 = \frac{1}{25}$$

$$\therefore r = \frac{1}{5} (\because r > 0)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{18} = 0.\dot{2}\dot{7}$$

유형12 답 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$

점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$x = \overline{OP_1 - P_2P_3 + P_4P_5 - P_6P_7 + \dots}$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \left\{ -\left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\}} = \frac{16}{25}$$

$$y = \overline{P_1P_2 - P_3P_4 + P_5P_6 - P_7P_8 + \dots}$$

$$= \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{3}{4}\right)^7 + \dots$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left\{ -\left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\}} = \frac{12}{25}$$

따라서 점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$ 이다.

유형 13 답 32($\sqrt{2}+1$)

$$\begin{aligned}\overline{AA_1} &= \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{이고 } \triangle AA_1D_1 \text{은 직각이등변삼각형이므로} \\ \overline{A_1D_1} &= \sqrt{2} \overline{AA_1} = 4\sqrt{2} \\ \therefore l_1 &= 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \\ \overline{A_1A_2} &= \frac{1}{2} \overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{이고 } \triangle A_1A_2D_2 \text{는 직각이등변삼각형이므로} \\ \overline{A_2D_2} &= \sqrt{2} \overline{A_1A_2} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4 \\ \therefore l_2 &= 4 \times 4 = 16 \\ \overline{A_2A_3} &= \frac{1}{2} \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{이고 } \triangle A_2A_3D_3 \text{은 직각이등변삼각형이므로} \\ \overline{A_3D_3} &= \sqrt{2} \overline{A_2A_3} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2} \\ \therefore l_3 &= 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \\ &\vdots \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= 16\sqrt{2} + 16 + 8\sqrt{2} + \cdots \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \\ &= 32(\sqrt{2} + 1)\end{aligned}$$

유형 14 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned}\overline{BB_1} &= 1 \text{이므로 } \triangle ABC \text{의 높이는 } \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \\ \text{따라서 } \triangle ABC \text{의 넓이는 } &\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{이므로} \\ S_1 &= \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{4} S_1 = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{4} S_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\vdots \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

유형 15 답 750 kg

$$\begin{aligned}&n \text{번째 수거하여 재생산되는 종이의 양을 } a_n \text{ kg이라고 하면} \\ a_1 &= 500 \times 0.8 \times 0.75 = 500 \times \frac{3}{5} \\ a_2 &= a_1 \times 0.8 \times 0.75 = 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ a_3 &= a_2 \times 0.8 \times 0.75 = 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \\ &\vdots \\ \text{따라서 재생산되는 종이의 양의 합은} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots &= 500 \times \frac{3}{5} + 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{500 \times \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 750 \text{ (kg)}\end{aligned}$$

핵심 유형 완성하기 36~40쪽

026 답 ④

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 5^n}{10^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 4^n}{10 \times 10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10 \times 10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 20 \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 20 \times \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} - 10 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{40}{3} - 10 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

027 답 $\frac{13}{10}$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos n\pi + \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos n\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \cos \pi + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cos 2\pi + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cos 3\pi + \cdots \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin \pi + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \sin \frac{3\pi}{2} + \cdots \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \right\} + \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots \right\} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)} = 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}\end{aligned}$$

028 답 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 \text{이므로} \\ a_1 a_2 &= \frac{1}{3} \text{에서 } a_2 = \frac{1}{3} \\ a_2 a_3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{에서 } a_3 = \frac{1}{3} \\ a_3 a_4 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \text{에서 } a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ a_4 a_5 &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \text{에서 } a_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

029 답 ②

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = -\frac{1}{3}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} \right\} - \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} - \frac{4}{3} \right\} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

이때 $a_1 = -\frac{1}{3}$ 은 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{4}} + -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{4}} = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$

030 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -\frac{2\sqrt{5}}{2^n}, \alpha_n \beta_n = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$(\alpha_n - \beta_n)^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n \beta_n = \frac{20}{2^{2n}} - \frac{4}{2^{2n}} = \frac{16}{2^{2n}} \text{이므로}$$

$$|\alpha_n - \beta_n| = \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

031 답 ③

$a_1=4, a_2=1, a_3=4, a_4=1, a_5=4, a_6=1, \dots$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{4}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \dots$$

$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5^3} + \frac{4}{5^5} + \dots \right) + \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots \right)$$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} + \frac{\frac{1}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{5}{6} + \frac{1}{24} = \frac{7}{8}$$

032 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 1$$

$$\therefore a = 1-r \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

등비수열 $\{a_n^2\}$ 의 첫째항은 a^2 , 공비는 r^2 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2 \text{에서 } \frac{a^2}{1-r^2} = 2$$

$$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{(1-r)^2}{(1+r)(1-r)} = 2$$

$$\frac{1-r}{1+r} = 2, 2(1+r) = 1-r \quad \therefore r = -\frac{1}{3}$$

$$r = -\frac{1}{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \frac{4}{3}$$

등비수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 $a^3 = \frac{64}{27}$, 공비가 $r^3 = -\frac{1}{27}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{\frac{64}{27}}{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)} = \frac{16}{7}$$

따라서 $p=7, q=16$ 이므로 $p+q=23$

033 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ 에서

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-r} = 2, 2(1-r) = \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{3}{4}$$

따라서 $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{16}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{6}{7}$$

034 답 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}} + \frac{-\frac{x}{4}}{1+\frac{x}{4}}$$

$$= \frac{x}{4-x} - \frac{x}{4+x} = \frac{2x^2}{16-x^2}$$

따라서 $\frac{2x^2}{16-x^2} = \frac{18}{7}$ 이므로

$$14x^2 = 18(16-x^2), x^2 = 9$$

$$\therefore x = 3 (\because x > 0)$$

035 답 16

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_1 + a_2 = 20 \text{에서 } a + ar = 20$$

$$\therefore a = \frac{20}{1+r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \frac{4}{3} \text{에서 } ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \frac{ar^2}{1-r} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 3ar^2 = 4(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3 \times \frac{20r^2}{1+r} = 4(1-r), 60r^2 = 4(1-r^2)$$

$$r^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{4} (\because 0 < r < 1)$$

$r = \frac{1}{4}$ 을 ㉠에 대입하면

$$a_1 = a = \frac{20}{1+\frac{1}{4}} = 16$$

036 답 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $3 < x < 5$

첫째항이 $(2x-1)(x-4)$, 공비가 $x-4$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$(2x-1)(x-4) = 0 \text{ 또는 } -1 < x-4 < 1$$

$$(i) (2x-1)(x-4) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

$$(ii) -1 < x-4 < 1 \text{에서 } 3 < x < 5$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 3 < x < 5$$

037 답 -8

$\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{2n}$ 의 공비가 $(2x)^2$ 이므로 이 급수가 수렴하려면
 $0 \leq (2x)^2 < 1, 0 \leq 4x^2 < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4x+1}{2}\right)^{n-1}$ 의 공비가 $\frac{4x+1}{2}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면
 $-1 < \frac{4x+1}{2} < 1, -2 < 4x+1 < 2 \quad \therefore -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 의하여 구하는 x 의 값의 범위는 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$
따라서 $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ 이므로 $\frac{1}{\alpha\beta} = -8$

038 답 ④

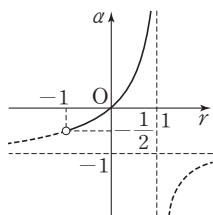
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$ 은 공비가 r 인 등비급수이므로 주어진 급수는 수렴한다.
 $\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서
 $0 \leq r^2 < 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.
 $\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+2}{3}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r+2}{3}$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서
 $\frac{1}{3} < \frac{r+2}{3} < 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.
 $\textcircled{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2} + 1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2} + 1$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서
 $\frac{1}{2} < \frac{r}{2} + 1 < \frac{3}{2}$ 이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.
 $\textcircled{5} \sum_{n=1}^{\infty} \{r^n + (-r)^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 공비가
 $-r$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서 $-1 < -r < 1$ 이므로 주어진 급수
는 수렴한다.
따라서 항상 수렴하는 급수가 아닌 것은 $\textcircled{4}$ 이다.

039 답 2

공비가 $2\log_9(x+2)$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면
 $-1 < 2\log_9(x+2) < 1$
 $-\frac{1}{2} < \log_9(x+2) < \frac{1}{2}, \log_9 9^{-\frac{1}{2}} < \log_9(x+2) < \log_9 9^{\frac{1}{2}}$
 $\frac{1}{3} < x+2 < 3 \quad \therefore -\frac{5}{3} < x < 1$
따라서 정수 x 는 $-1, 0$ 의 2개이다.

040 답 ①

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} = -1 + \frac{1}{1-r}$
 $-1 < r < 1$ 에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 α 로
수렴한다고 하면 $\alpha = -1 + \frac{1}{1-r}$ 이고,
그 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $\alpha > -\frac{1}{2}$
따라서 α 의 값이 될 수 없는 것은 $\textcircled{1}$ 이다.



041 답 $\frac{4}{45}$

$a_1 = 0.0\dot{4} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}, a_3 = 0.0\dot{1} = \frac{1}{90}$ 이므로 공비를 r 라고 하면
 $\frac{2}{45}r^2 = \frac{1}{90}, r^2 = \frac{1}{4}$
 $\therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{2}{45}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{45}$

042 답 ②

$0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, 0.\dot{2}1\dot{6} = \frac{216}{999} = \frac{8}{37}$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{8}{37}$
 $\therefore a_1 = \frac{8}{37} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{111} = 0.\dot{1}4\dot{4}$

043 답 3

$a_1 = 0.\dot{a} = \frac{a}{9}, a_2 = 0.\dot{0}\dot{a} = \frac{a}{99}$ 이므로 공비를 r 라고 하면
 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{a}{99}}{\frac{a}{9}} = \frac{1}{11}$
따라서 첫째항이 $\frac{a}{9}$, 공비가 $\frac{1}{11}$ 인 등비급수이므로
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.3\dot{6} = \frac{36-3}{90} = \frac{11}{30}$ 에서
 $\frac{\frac{a}{9}}{1 - \frac{1}{11}} = \frac{11}{30}, \frac{11}{90}a = \frac{11}{30}$
 $\therefore a = 3$

044 답 $\frac{7}{15}$

$\frac{13}{99} = 0.\dot{1}\dot{3}$ 이므로
 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 1, a_6 = 3, \dots$
 $\therefore \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \frac{a_3}{4^3} + \frac{a_4}{4^4} + \dots$
 $= \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{3}{4^6} + \dots$
 $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \dots\right) + \left(\frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^4} + \frac{3}{4^6} + \dots\right)$
 $= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4^2}} + \frac{\frac{3}{4^2}}{1 - \frac{1}{4^2}}$
 $= \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

045 답 5

$$\begin{aligned}
 a &= \overline{OP_1} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} + \overline{P_6P_7} + \cdots = 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \cdots \\
 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{9} \\
 b &= \overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} + \overline{P_7P_8} + \cdots = \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{5}\right)^7 + \cdots \\
 &= \frac{\frac{4}{5}}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{20}{9} \\
 \therefore a + b &= \frac{25}{9} + \frac{20}{9} = 5
 \end{aligned}$$

046 답 $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$

점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\begin{aligned}
 x &= \overline{OP_1} \cos 45^\circ + \overline{P_1P_2} \cos 45^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 45^\circ + \cdots \\
 &= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \\
 &= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \overline{OP_1} \sin 45^\circ - \overline{P_1P_2} \sin 45^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 45^\circ - \cdots \\
 &= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \cdots \\
 &= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{9\sqrt{2}}{10}
 \end{aligned}$$

따라서 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$ 이다.

047 답 $\frac{5}{7}$

점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 y 좌표는

$$\begin{aligned}
 &\overline{OP_1} - \overline{P_1P_2} \cos 60^\circ - \overline{P_2P_3} \cos 60^\circ + \overline{P_3P_4} \\
 &\quad - \overline{P_4P_5} \cos 60^\circ - \overline{P_5P_6} \cos 60^\circ + \overline{P_6P_7} - \cdots \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \cdots \\
 &= \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\} - \frac{1}{4} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\} \\
 &\quad - \frac{1}{8} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

048 답 $18(2 + \sqrt{3})$

$\triangle AB_1C_1$ 에서 $l_1 = 3 \times 3 = 9$

$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$ 이고 닮음비는 $\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 2 : \sqrt{3}$ 이므로

$$3 : \overline{AB_2} = 2 : \sqrt{3} \quad \therefore \overline{AB_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

즉, $\triangle AB_2C_2$ 에서 $l_2 = 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3$ 이고 닮음비는 $\overline{AB_2} : \overline{AB_3} = 2 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} : \overline{AB_3} = 2 : \sqrt{3} \quad \therefore \overline{AB_3} = \frac{9}{4}$$

$$\text{즉, } \triangle AB_3C_3 \text{에서 } l_3 = 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 9 + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4} + \cdots = \frac{9}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 18(2 + \sqrt{3})$$

049 답 π

$$l_1 = 2 \angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad l_2 = 2 \angle A_2OA_3 = \frac{2\pi}{3^2},$$

$$l_3 = 2 \angle A_3OA_4 = \frac{2\pi}{3^3}, \quad \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3^2} + \frac{2\pi}{3^3} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{2\pi}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \pi$$

050 답 $\frac{1}{2}$

$\overline{AB_2} : \overline{B_1B_2} = 4 : 1$ 이므로 $\overline{AB_1} : \overline{B_1B_2} = 3 : 1$

$$\therefore \overline{B_1B_2} = \frac{1}{3} \overline{AB_1} = \frac{1}{3}$$

$\overline{B_1B_3} : \overline{B_2B_3} = 4 : 1$ 이므로 $\overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = 3 : 1$

$$\therefore \overline{B_2B_3} = \frac{1}{3} \overline{B_1B_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$\overline{B_2B_4} : \overline{B_3B_4} = 4 : 1$ 이므로 $\overline{B_2B_3} : \overline{B_3B_4} = 3 : 1$

$$\therefore \overline{B_3B_4} = \frac{1}{3} \overline{B_2B_3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \overline{B_3B_4} + \cdots = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

051 답 $\sqrt{2} + 1$

$\triangle OP_1P_2$ 에서 $\overline{OP_1} = 1$, $\angle OP_1P_2 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_1} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle OP_2P_3$ 에서 $\overline{OP_2} = \overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle OP_2P_3 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{P_2P_3} = \overline{OP_2} \cos 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\triangle OP_3P_4$ 에서 $\overline{OP_3} = \overline{P_2P_3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $\angle OP_3P_4 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{P_3P_4} = \overline{OP_3} \cos 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nP_{n+1}} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + 1$$

052 답 18π

원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라고 하면

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2, \quad 2r_{n+1}^2 = r_n^2$$

$$\sqrt{2}r_{n+1} = r_n \quad (\because r_n > 0, r_{n+1} > 0)$$

$$\therefore r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n$$

즉, 원 C_n 과 원 C_{n+1} 의 넓음비가 $2 : \sqrt{2}$

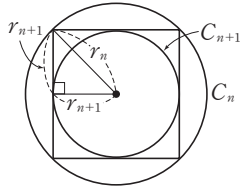
이므로 넓이의 비는 $2 : 1$ 이다.

따라서 $S_1 = \pi \times 3^2 = 9\pi$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$

$$= 9\pi + 9\pi \times \frac{1}{2} + 9\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{9\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 18\pi$$



053 답 $\frac{1}{2}$

$\triangle ABC$ 의 한 변의 길이를 a 라고 하면

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ 를 $2 : 1$ 로 각각 내분하는 점 A_1 , C_1 에 대하여

$$\overline{AA_1} = \frac{2}{3}a, \quad \overline{AC_1} = \frac{1}{3}a \text{이므로}$$

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC - 3\triangle AA_1C_1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{3}a \times \sin 60^\circ\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

따라서 $\triangle ABC : \triangle A_1B_1C_1 = 3 : 1$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

054 답 $\frac{9}{5}$

정사각형 A_n 의 한 변의 길이를 a_n ,

정사각형 A_{n+1} 의 한 변의 길이를

a_{n+1} 이라고 하면

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$$

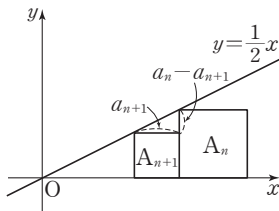
정사각형 A_n 과 A_{n+1} 의 넓음비가

$3 : 2$ 이므로 넓이의 비는 $9 : 4$ 이다.

$$\therefore S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$



055 답 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

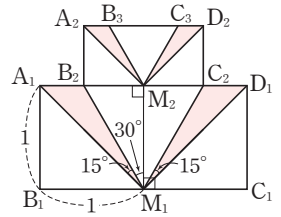
오른쪽 그림과 같이 선분 M_1M_2 를

그으면 삼각형 $B_2M_1M_2$ 에서

$\overline{M_1M_2} = 1$, $\angle B_2M_1M_2 = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{B_2M_2} = \overline{M_1M_2} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \overline{B_2C_2} = 2\overline{B_2M_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



따라서 $\square A_1B_1C_1D_1$ 과 $\square A_2B_2C_2D_2$ 의 넓음비는 $2 : \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 즉

$3 : \sqrt{3}$ 이므로 넓이의 비는 $3 : 1$ 이다.

$$\therefore S_{n+1} = \frac{1}{3}S_n$$

이때 $\triangle A_1M_1B_2 = \triangle C_2M_1D_1$ 이고, $\overline{A_1B_2} = \overline{A_1M_2} - \overline{B_2M_2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로

$$S_1 = 2\triangle A_1M_1B_2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times \overline{A_1B_2} \times \overline{M_1M_2}\right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

056 답 5652 kg

n 번째 수거하여 재생산되는 비닐의 양을 a_n kg이라고 하면

$$a_1 = 10000 \times 0.6 \times 0.6 = 10000 \times 0.36$$

$$a_2 = a_1 \times 0.6 \times 0.6 = 10000 \times 0.36^2$$

$$a_3 = a_2 \times 0.6 \times 0.6 = 10000 \times 0.36^3$$

$\vdots$

따라서 재생산되는 비닐의 양의 합은

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

$$= 10000 \times 0.36 + 10000 \times 0.36^2 + 10000 \times 0.36^3 + \cdots$$

$$= 10000(0.36 + 0.36^2 + 0.36^3 + \cdots)$$

$$= 10000 \times \frac{0.36}{1 - 0.36}$$

$$= 5652 \text{ (kg)}$$

057 답 64 cm

추가 멈출 때까지 움직이는 거리는

$$16 + \frac{3}{4} \times 16 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 16 + \cdots$$

$$= \frac{16}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 64 \text{ (cm)}$$

058 **답** 60 mg

한 번에 복용하는 약의 양을 a mg이라고 하면 약을 복용하고 24 시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2}a$$

48시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}a\right) = a + \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a$$

이와 같은 방법으로 $24n$ 시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n a$$

이 약을 장기간 복용할 때, 체내에 남아 있는 약의 양은

$$\frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = 2a$$

즉, $2a \leq 120$ 이므로 $a \leq 60$

따라서 매회 최대 복용할 수 있는 약의 양은 60 mg이다.

핵심 유형 **최종 점검하기**

41~43쪽

1 **답** ③

유형 01 급수의 합

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{4}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n(n+1)} \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

2 **답** ③

유형 01 급수의 합

(i) $n=1$ 일 때, $a_1=S_1=3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \\ = (2n^2 + n) - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ = 4n - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 $a_1=3$ 은 $n=1$ 을 ⑦에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n - 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\ \left. + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{12}$$

3 **답** ②

유형 02 로그를 포함한 급수

$$a_n = \log(n^2 + 2n) - 2 \log(n+1) = \log \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \\ = \log \frac{n}{n+1} + \log \frac{n+2}{n+1} = \log \frac{n}{n+1} - \log \frac{n+1}{n+2} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n}{n+1} - \log \frac{n+1}{n+2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\log \frac{k}{k+1} - \log \frac{k+1}{k+2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{2}{3} \right) + \left(\log \frac{2}{3} - \log \frac{3}{4} \right) \right. \\ \left. + \cdots + \left(\log \frac{n}{n+1} - \log \frac{n+1}{n+2} \right) \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{n+1}{n+2} \right) = \log \frac{1}{2} - \log 1 = -\log 2$$

4 **답** ④

유형 03 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$\textcircled{1} S_1=3, S_2=\frac{11}{4}, S_3=3, S_4=\frac{17}{6}, S_5=3, S_6=\frac{23}{8}, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=3, S_{2n}=\frac{6n+5}{2(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 3$$

즉, 주어진 급수는 3으로 수렴한다.

$$\textcircled{2} S_n=3 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n=3$$

즉, 주어진 급수는 3으로 수렴한다.

$$\textcircled{3} S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \right\} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

$$\textcircled{4} S_1=3, S_2=\frac{9}{4}, S_3=3, S_4=\frac{13}{6}, S_5=3, S_6=\frac{17}{8}, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=3, S_{2n}=\frac{4n+5}{2(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 2$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{5} S_n=3 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n=3$$

즉, 주어진 급수는 3으로 수렴한다.

따라서 발산하는 것은 ④이다.

5 답 3

유형 [04] 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{2n^2+1}{n^2} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{2n^2+1}{n^2} \right) = 0$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+1} = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - n + 2}{a_n + 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \frac{a_n}{n+1} - \frac{n-2}{n+1}}{\frac{a_n}{n+1} + \frac{3n}{n+1}} \\ &= \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

6 답 2

유형 [05] 급수의 수렴과 발산

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n^2+1} = -1 \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{n^2+1}$ 은 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-3}$ 은 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{3}) \\ &= \infty \end{aligned}$$

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ이다.

7 답 -4

유형 [06] 급수의 성질

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 8 \text{에서 } 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8$$

$$\therefore 2\alpha - \beta = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - 5b_n) = 10 \text{에서 } 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$$

$$\therefore 4\alpha - 5\beta = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 5$, $\beta = 2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n + kb_n) = 3 \times 5 + 2k = 15 + 2k$$

따라서 $15 + 2k = 7$ 이므로 $k = -4$

8 답 3

유형 [07] 급수의 수렴, 발산에 대한 참, 거짓 판별

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

ㄴ. [반례] $\{a_n\}: 1, 1, 1, 1, \dots$, $\{b_n\}: -1, -1, -1, -1, \dots$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 0으로 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n) + (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n) - (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{aligned}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 모두 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9 답 3

유형 [08] 등비급수의 합

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5 \times 3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{3} \right)^n \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

10 답 5

유형 [08] 등비급수의 합

$$4a_{n+1} = 3a_n + 2 \text{에서 } 4(a_{n+1} - 2) = 3(a_n - 2)$$

이때 $a_n - 2 = b_n$ 이라고 하면 $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} 4(a_n - 2) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 8 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} = \frac{8}{1 - \frac{3}{4}} = 32 \end{aligned}$$

11 답 5

유형 [09] 합이 주어진 등비급수

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 s 라고 하면 두 수열의 첫째항이 모두 2이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \text{에서 } \frac{2}{1-r} = 5 \quad \therefore r = \frac{3}{5} \quad \therefore a_n = 2 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \text{에서 } \frac{2}{1-s} = 3 \quad \therefore s = \frac{1}{3} \quad \therefore b_n = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{2 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9} \right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

12 답 ①

유형 10 등비급수의 수렴 조건

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x}{4}\right)^{n-1}$ 의 공비가 $\frac{3x}{4}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{3x}{4} < 1 \quad \therefore -\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{2^n}$ 의 공비가 $\frac{x-1}{2}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x-1}{2} < 1 \quad \therefore -1 < x < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 구하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < \frac{4}{3}$

따라서 $\alpha = -1$, $\beta = \frac{4}{3}$ 이므로 $6\alpha\beta = -8$

13 답 ㄴ

유형 10 등비급수의 수렴 조건

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 이 수렴하므로 $-1 < a < 1$ $\dots\dots ㉠$

$\sum_{n=1}^{\infty} b^{n-1}$ 이 수렴하므로 $-1 < b < 1$ $\dots\dots ㉡$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^n$ 은 공비가 $a+b$ 인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서 $-2 < a+b < 2$ 이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$ 은 공비가 ab 인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서 $-1 < ab < 1$ 이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ 이면 $\frac{a}{b} = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{a}{b}$ 인 등비급수이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄴ이다.

14 답 ①

유형 11 순환소수와 등비급수

$0.\dot{0}2 = 0.020202\dots$ 이므로 $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, $\dots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{4}$$

15 답 $\frac{63}{64}$

유형 12 등비급수의 활용 - 좌표

$$a = \overline{OP_1} \cos 30^\circ - \overline{P_1P_2} \cos 30^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 30^\circ - \overline{P_3P_4} \cos 30^\circ + \dots$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$b = \overline{OP_1} \sin 30^\circ + \overline{P_1P_2} \sin 30^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 30^\circ + \overline{P_3P_4} \sin 30^\circ + \dots$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{63}{64}$$

16 답 $2\sqrt{2}$

유형 13 등비급수의 활용 - 길이

직선 $y = x + 2$ 와 y 축의 교점을 P라고 하면 $\angle PA_1B_1 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{A_1B_1} = \overline{PA_1} \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$\angle A_1B_1A_2 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{B_1A_2} = \overline{A_1B_1} \cos 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$\angle B_1A_2B_2 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{A_2B_2} = \overline{B_1A_2} \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 삼각형 $B_1A_2A_1$ 과 삼각형 $B_2A_3A_2$ 의 닮음비는 2 : 1이므로

$$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_nB_n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nB_n} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3} + \dots$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \sqrt{2} + \dots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

17 답 $\frac{32}{7}\pi$

유형 14 등비급수의 활용 - 넓이

$$\overline{P_1P_2} = 4 \text{이므로 } S_1 = \frac{\pi}{2} \times 2^2 = 2\pi$$

$$\overline{P_1P_3} : \overline{P_2P_3} = 7 : 3 \text{이므로 } \overline{P_1P_2} : \overline{P_2P_3} = 4 : 3$$

$$\text{즉, } \overline{P_2P_3} = 3 \text{이므로 } S_2 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}\pi$$

$$\overline{P_2P_4} : \overline{P_3P_4} = 7 : 3 \text{이므로 } \overline{P_2P_3} : \overline{P_3P_4} = 4 : 3$$

$$\text{즉, } \overline{P_3P_4} = \frac{9}{4} \text{이므로 } S_3 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{128}\pi$$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi + \frac{9}{8}\pi + \frac{81}{128}\pi + \dots$$

$$= \frac{2\pi}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{32}{7}\pi$$

18 답 4억 5천만 원

유형 15 등비급수의 활용 - 실생활

2020년에 운동장 조성에 사용하게 될 금액은

$$12 \times \frac{3}{10} = \frac{18}{5} \text{(억 원)}$$

2021년에 운동장 관리에 사용하게 될 금액은

$$\frac{18}{5} \times \frac{1}{5} \text{(억 원)}$$

2022년에 운동장 관리에 사용하게 될 금액은

$$\frac{18}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \text{(억 원)}$$

$\vdots$

$$\therefore \frac{18}{5} + \frac{18}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{18}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots = \frac{\frac{18}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 4.5 \text{(억 원)}$$

따라서 A 지역이 운동장 조성 및 관리에 사용하게 될 돈의 총액은 4억 5천만 원이다.

03 지수함수와 로그함수의 미분

핵심
유형

유형01 ③	유형02 ⑤		
유형03 $e^6 + \frac{1}{e^3}$	유형04 $\frac{1}{4}$	유형05 ③	유형06 ①
유형07 ⑤	유형08 ④	유형09 ②	
유형10 $\frac{1}{\ln 2}$	유형11 2	유형12 e	유형13 3
유형14 ④			

핵심
유형

완성하기

001 49	002 ①	003 2	004 ④	
005 $\neg, \perp$	006 ④	007 -1	008 ⑤	009 ②
010 ③	011 ④	012 ③	013 e^2	014 7
015 e	016 ①	017 e^2	018 $\sqrt{e}$	019 ③
020 ⑤	021 $\frac{1}{4}$	022 $\frac{7}{8}$	023 ④	024 2
025 $-\frac{1}{3}$	026 ①	027 ③	028 ⑤	
029 $-\frac{2}{\ln 3}$		030 $\frac{4}{3}$	031 ①	032 -3
033 ④	034 ①	035 ②	036 2	037 2
038 -1	039 ①	040 ⑤	041 ④	042 ①
043 $\frac{5}{4}$	044 1	045 ④	046 $e-1$	
047 $-\frac{3}{4}$	048 9	049 ④	050 ③	051 ①
052 4	053 ④	054 ④	055 $2\ln 15$	
056 ③	057 $7 + \frac{2}{\ln 2}$	058 $4e$	059 2	
060 ④	061 ①	062 ③		

핵심
유형

최종 점검하기

1 15	2 3	3 5	4 ⑤	5 ②
6 3	7 4	8 24	9 ①	10 4
11 ②	12 7	13 ⑤	14 12	15 2

핵심 유형 46~48쪽

유형01 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1} + 2^x}{3^x - 2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

$$= \frac{3+0}{1-0} = 3$$

유형02 답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\log_2 |x^3 - 8| - \log_2 |3x - 6|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{x^3 - 8}{3x - 6} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{x^2 + 2x + 4}{3} \right|$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x^2 + 2x + 4}{3} \right|$$

$$= \log_2 4 = 2$$

유형03 답 $e^6 + \frac{1}{e^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^6 + \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1-3x)^{-\frac{1}{3x}} \right\}^{-3}$$

$$= e^6 + e^{-3} = e^6 + \frac{1}{e^3}$$

유형04 답 $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \left(1 - \frac{1}{4x}\right) \right\}^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \times \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^x \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^{-4x} \right\}^{-\frac{1}{4}} \right]$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

유형05 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{3}{2} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

유형06 답 ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(5+x) - \log_3 5}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 \frac{5+x}{5}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 \left(1 + \frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \ln 3}$$

유형07 답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2}{4x + 1} \right)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

유형08 답 ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2^{-x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{2^{-x} - 1}{-x} \right) \\ &= 1 + \ln 2\end{aligned}$$

유형09 답 ②

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} - b) = 0$$

$$1 - b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{\ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times a \right\} \\ &= 1 \times 1 \times a = a\end{aligned}$$

따라서 $a=3$ 이므로 $a+b=4$

유형10 답 $\frac{1}{\ln 2}$

점 P의 좌표를 $(t, 2^t - 1) (t > 0)$ 이라고 하면

$$\overline{OQ} = 2^t - 1, \overline{PQ} = t$$

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{2^t - 1} = \frac{1}{\ln 2}$$

유형11 답 2

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + a}{x} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + a) = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

따라서 $b=3$ 이므로 $a+b=2$

유형12 답 e

$$f(x) = (4x^2 + 1)e^{x+1} = e(4x^2 + 1)e^x \text{이므로}$$

$$f'(x) = e\{8xe^x + (4x^2 + 1)e^x\}$$

$$= e(4x^2 + 8x + 1)e^x$$

$$= (4x^2 + 8x + 1)e^{x+1}$$

$$\therefore f'(0) = e$$

유형13 답 3

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= 2f'(1) + f'(1)$$

$$= 3f'(1)$$

$$\text{이때 } f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \text{이므로}$$

$$f'(1) = 1$$

$$\text{따라서 구하는 극한값은 } 3f'(1) = 3$$

유형14 답 ④

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln ax = \lim_{x \rightarrow 1-} (bx + 1) = f(1)$$

$$\therefore \ln a = b + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } f'(1) \text{이 존재하므로 } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ b & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} b \quad \therefore b = 1$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } \ln a = 2 \quad \therefore a = e^2$$

$$\therefore ab = e^2$$

핵심 유형 완성하기 49~57쪽

001 답 49

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{x+2} - 2^{2x}}{7^x + 2^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{49 - \left(\frac{4}{7}\right)^x}{1 + 2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^x} \\ &= \frac{49 - 0}{1 + 0} = 49\end{aligned}$$

002 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - 4^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[5^x \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= 5 \times 1 = 5\end{aligned}$$

003 답 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 9^x + 1}{9^{x-1} - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \left(\frac{1}{9}\right)^x}{\frac{1}{9} - \left(\frac{2}{9}\right)^x} = \frac{a + 0}{\frac{1}{9} - 0} = 9a$$

따라서 $9a=18$ 이므로 $a=2$

004 답 ④

$-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - x^3 + 1}{1 - 2x^3} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3^{-t} + t^3 + 1}{1 + 2t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t^3} \times 3^t + 1 + \frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t^3} + 2} \\ &= \frac{0 + 1 + 0}{0 + 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

005 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1}-4^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^x}{1} = \frac{0-0}{1} = 0$
 ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x-3^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3^{-t}}{2^{-t}-3^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t}{\left(\frac{1}{6}\right)^t-1} \\ &= \frac{0}{0-1} = 0 \end{aligned}$$

ㄷ. $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4^x-1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1}{4^t-1} = -\infty$$

ㄹ. $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7^t}{7^t-7^{-t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{49}\right)^t} \\ &= \frac{1}{1-0} = 1 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{7^t}{7^t-7^{-t}}$$

$-t=s$ 로 놓으면 $t=-s$ 이고, $t \rightarrow -\infty$ 일 때 $s \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{7^t}{7^t-7^{-t}} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{7^{-s}}{7^{-s}-7^s} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{49}\right)^s}{\left(\frac{1}{49}\right)^s-1} \\ &= \frac{0}{0-1} = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}}$ 이므로 극한값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이 ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} 7^{\frac{1}{x}} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} 7^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} 7^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} 7^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1-7^{-\frac{2}{x}}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}} = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}}$ 이므로 극한값은 존재하지 않는다.

006 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (\log_4 |x^2+4x-5| - \log_4 |x^2+x-2|) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \log_4 \left| \frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \log_4 \left| \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \log_4 \left| \frac{x+5}{x+2} \right| = \log_4 \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+5}{x+2} \right| = \log_4 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

007 답 -1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\log_2 x - \log_2 \sqrt{4x^2+x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}} = \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}} \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

008 답 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(ax+2) - \log_3(3x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{ax+2}{3x+1} \\ &= \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+2}{3x+1} = \log_3 \frac{a}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\log_3 \frac{a}{3} = 2$ 이므로 $\frac{a}{3} = 9$

$\therefore a = 27$

009 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_2 (8^x + 3^x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 (8^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[8^x \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 8 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} 8 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_2 (8 \times 1) = 3 \end{aligned}$$

010 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^4+3x^2)}{\log(x^3+2x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^4 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\log x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \log x + \log \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{3 \log x + \log \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = \log 1 = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = \log 1 = 0$ 이므로 ①의 분모, 분자를 각각 $\log x$ 로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{\log \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\log x}}{3 + \frac{\log \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{\log x}} &= \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

011 답 ④

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{2x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{9}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+4x)^{\frac{1}{4x}} \right\}^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}} \right\}^{-3} \\ &= e^2 + e^{-3} = e^2 + \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

따라서 $m=2, n=3$ 이므로 $m+n=5$

012 답 ③

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)(1-x)\}^{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{2}{x}} \times (1-x)^{\frac{2}{x}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 \times \left\{ (1-x)^{-\frac{1}{x}} \right\}^{-2} \right] \\ &= e^2 \times e^{-2} = 1 \end{aligned}$$

013 답 e^2

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x-1}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{2}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^2 = e^2 \end{aligned}$$

014 답 7

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)(1+2x)(1+3x) \cdots (1+nx)\}^{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{2}{x}} \times (1+2x)^{\frac{2}{x}} \times (1+3x)^{\frac{2}{x}} \times \cdots \times (1+nx)^{\frac{2}{x}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 \times \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^4 \times \left\{ (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right\}^6 \right. \\ & \quad \left. \times \cdots \times \left\{ (1+nx)^{\frac{1}{nx}} \right\}^{2n} \right] \end{aligned}$$

$$= e^{2+4+6+\cdots+2n} = e^{n(n+1)}$$

따라서 $e^{n(n+1)} = e^{56}$ 이므로

$$n(n+1) = 56 = 7 \times 8$$

$$\therefore n=7$$

015 답 e

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x}\right) \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \right\}^{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{6x} \times \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{6x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{-3x} \right\}^{-2} \times \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right\}^3 \right] \\ &= e^{-2} \times e^3 = e \end{aligned}$$

016 답 ①

$-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{3x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{t}\right)^{-3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}} \right\}^{-3a} \\ &= e^{-3a} \end{aligned}$$

따라서 $e^{-3a} = e^{-9}$ 이므로

$$-3a = -9 \quad \therefore a = 3$$

017 답 e^2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left\{ \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} \right\}^{-1}} \\ &= \frac{e}{e^{-1}} = e^2 \end{aligned}$$

018 답 $\sqrt{e}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n+3}{n+2} \times \cdots \times \frac{4n+1}{4n} \\ &= \frac{4n+1}{4n} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \right\}^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

019 답 ③

ㄱ. $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = e$$

ㄹ. $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-t} = e$$

따라서 보기 중 극한값이 e 인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

020 답 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{2x^2+3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+6x)}{6x} \times \frac{6}{2x+3} \right\} \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

021 답 $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(4+x) - \ln 4) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} \times \frac{1}{4} \\ &= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

022 답 $\frac{7}{8}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{a}{4} \\ &= 1 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{4}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{4} = 2$ 이므로 $a = 8$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+ax)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+8x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+7x)}{7x} \times \frac{8x}{\ln(1+8x)} \times \frac{7}{8} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

023 답 ④

$y = e^{\frac{x}{5}} - 1$ 이라고 하면

$$e^{\frac{x}{5}} = y + 1, \quad \frac{x}{5} = \ln(y + 1)$$

$$\therefore x = 5 \ln(y + 1)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 5 \ln(x + 1)$

따라서 $g(x) = 5 \ln(x + 1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(x + 1)}{x} = 5 \times 1 = 5$$

024 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \{\ln(x+2) - \ln x\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)\end{aligned}$$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+2t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t)}{2t} \times 2 \\ &= 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{\ln(x+2) - \ln x\}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = 2 \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \\ &= 2 \ln e = 2\end{aligned}$$

025 답 $-\frac{1}{3}$

$x - 3 = t$ 로 놓으면 $x = 3 + t$ 이고, $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \ln \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left(\frac{3+t}{3}\right)^{-\frac{1}{t}} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{3}\right)}{t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}} \times \frac{1}{3} \\ &= -1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

026 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(6+x) - \log_5 6}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5 \frac{6+x}{6}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5 \left(1 + \frac{x}{6}\right)}{\frac{x}{6}} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{\ln 5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6 \ln 5}\end{aligned}$$

027 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+4x)}{\log_3(1-2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_4(1+4x)}{4x} \times \frac{-2x}{\log_3(1-2x)} \times (-2) \right\} \\ &= \frac{1}{\ln 4} \times \ln 3 \times (-2) = -\frac{2 \ln 3}{\ln 4} = -\frac{\ln 3}{\ln 2}\end{aligned}$$

028 답 ⑤

$x - 1 = t$ 로 놓으면 $x = 1 + t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_3(2x-1)}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+2t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+2t)}{2t} \times 2 \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times 2 = \frac{2}{\ln 3}\end{aligned}$$

029 답 $-\frac{2}{\ln 3}$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_9 \left(1 - \frac{4}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log_9(1-4t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_9(1-4t)}{-4t} \times (-4) \\ &= \frac{1}{\ln 9} \times (-4) = -\frac{2}{\ln 3}\end{aligned}$$

030 답 $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^{3x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+4x)}{4x} \times \frac{3x}{e^{3x}-1} \times \frac{4}{3} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

031 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - e^{2x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x} - 1}{x} - \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x} - 1}{4x} \times 4 - \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \right) \\ &= 1 \times 4 - 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

032 답 -3

$x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{2-x} - (x-1)^2}{x-2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - (t+1)^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - (t^2 + 2t + 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-t} - 1}{t} - t - 2 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{-t} - 1}{-t} \times (-1) - t - 2 \right\} \\ &= 1 \times (-1) - 2 = -3\end{aligned}$$

033 답 ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{e^{ax} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ln(1+3x)}{e^{ax} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2 + \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{ax}{e^{ax} - 1} \times \frac{1}{a} \right] \\ &= (1+1 \times 2+1 \times 3) \times 1 \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{6}{a}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{6}{a} = 3$ 이므로 $a=2$

034 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{f(x)} &= \frac{1}{2} \text{이므로} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{3x} - 1} = 2 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1-3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{e^{3x} - 1} \times \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1-3x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{e^{3x} - 1} \times \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{-3x}{\ln(1-3x)} \times (-1) \right\} \\ &= 2 \times 1 \times 1 \times (-1) = -2\end{aligned}$$

035 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{2x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1 - 3^x + 1}{x(2-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{6^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) \times \frac{1}{2-x} \right\} \\ &= (\ln 6 - \ln 3) \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

036 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9^x - 1) \log_3(1+x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{9^x - 1}{x} \times \frac{\log_3(1+x)}{x} \right\} \\ &= \ln 9 \times \frac{1}{\ln 3} \\ &= 2 \ln 3 \times \frac{1}{\ln 3} = 2\end{aligned}$$

037 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+4)^x - a^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+4)^x - 1 - a^x + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(a+4)^x - 1}{x} - \frac{a^x - 1}{x} \right\} \\ &= \ln(a+4) - \ln a \\ &= \ln \frac{a+4}{a}\end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{a+4}{a} = \ln 3$ 이므로

$$\frac{a+4}{a} = 3 \quad \therefore a = 2$$

038 답 -1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x - 2^x + 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1)(2^x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{x} \times \frac{2^x - 1}{x} \right) \\ &= \ln 3 \times \ln 2\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=3$ 이므로 $a-b=-1$

039 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{x+2} - 1}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{x+2} - 1}{(x+2)(x-2)} \\ x+2=t \text{로 놓으면 } x=t-2 \text{이고, } x \rightarrow -2 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{x+2} - 1}{(x+2)(x-2)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2^t - 1}{t} \times \frac{1}{t-4} \right) \\ &= \ln 2 \times \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{\ln 2}{4}\end{aligned}$$

040 답 ⑤

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b} - 2) &= 0 \\ \sqrt{b} - 2 &= 0 \quad \therefore b = 4\end{aligned}$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4} - 2}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+4} - 2)(\sqrt{ax+4} + 2)}{(e^x - 1)(\sqrt{ax+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(e^x - 1)(\sqrt{ax+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \times \frac{a}{\sqrt{ax+4} + 2} \right) \\ &= 1 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{4}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{4} = 5$ 이므로 $a=20$

$$\therefore a+b=24$$

041 ④

$\lim_{x \rightarrow 0} (4^x - 1) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a + 6x) = 0$$

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{4^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+6x)}{6x} \times \frac{x}{4^x - 1} \times 6 \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{\ln 4} \times 6 = \frac{3}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{\ln 2} = \frac{b}{\ln 2} \text{이므로 } b = 3$$

$$\therefore ab = 3$$

042 ①

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+ax) = 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{bx+c} - 1) = 0, \quad e^c - 1 = 0 \quad \therefore c = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{e^{bx} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{bx}{e^{bx} - 1} \times \frac{a}{b} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{b} = 3 \text{이므로 } a = 3b$$

$$\therefore \frac{a+c}{b} = \frac{3b+0}{b} = 3$$

043 ⑤/4

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (e^{x-2} - a) = 0$$

$$1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{(x-2)(x+2)}$$

이때 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{(x-2)(x+2)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \times \frac{1}{t+4} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } b = \frac{1}{4} \text{이므로 } a+b = \frac{5}{4}$$

044 ①

$P(t, e^t), Q(t, e^{-t})$ 이므로

$$S(t) = \frac{1}{2} \times (e^t - e^{-t}) \times t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1 - e^{-t} + 1}{2t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^{-t} - 1}{-t} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1+1) = 1 \end{aligned}$$

045 ④

$A(t, \log_2 t), B(t, -\log_4 t)$ 이므로

$$\overline{AB} = \log_2 t + \log_4 t = \frac{3}{2} \log_2 t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\overline{AB}}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\frac{3}{2} \log_2 t}{t-1} = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\log_2 t}{t-1}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\log_2 t}{t-1} &= \frac{3}{2} \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\log_2(1+s)}{s} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

046 ① $e-1$

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \times (e-1) \times \ln t, \quad S_2(t) = \frac{1}{2} \times 1 \times (t-1) \text{이므로}$$

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{(e-1) \ln t}{t-1}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{t-1}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{t-1} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{(e-1) \ln(1+s)}{s} \\ &= (e-1) \times 1 = e-1 \end{aligned}$$

047 ② $-\frac{3}{4}$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{2e^{2x} + a} = b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{5x} - 1) = 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{2x} + a) = 0$$

$$2 + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{2e^{2x} - 2} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 1}{5x} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \times \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \times 1 \times \frac{5}{2} \right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } b = \frac{5}{4} \text{이므로 } a+b = -\frac{3}{4}$$

048 ⑨

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+3x)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times \frac{a}{3} = 1 \times \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{3} = 3 \text{이므로 } a = 9$$

049 답 ④

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\ln(2x-3)}{e^{x-2}-1} = a$$

이때 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\ln(2x-3)}{e^{x-2}-1} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2t)}{e^t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\ln(1+2t)}{2t} \times \frac{t}{e^t-1} \times 2 \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a=2$$

050 답 ③

$$x \neq \frac{1}{2} \text{ 일 때, } f(x) = \frac{\ln 2x}{2x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = \frac{1}{2}$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

이때 $x - \frac{1}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t)}{2t} = 1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

051 답 ①

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x+3)(x^2-e^x) + (e^x+3x)(2x-e^x) \\ \therefore f'(0) &= 4 \times (-1) + 1 \times (-1) = -5 \end{aligned}$$

052 답 4

$$f'(x) = 1 + a^x \ln a$$

$$\therefore f'(0) = 1 + \ln a$$

따라서 $1 + \ln a = 1 + \ln 3$ 이므로 $a=3$

$$\therefore f(x) = x + 3^x$$

$$\therefore f(1) = 1 + 3 = 4$$

053 답 ④

$$f(x) = 2^{x+1} = 2 \times 2^x \text{ 이라고 하면}$$

$$f'(x) = 2 \times 2^x \ln 2 = 2^{x+1} \ln 2$$

따라서 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 2^2 \times \ln 2 = 4 \ln 2$$

054 답 ④

$$f(0) = 5 \text{ 에서 } a=5$$

$$f'(x) = e^x + (x+5)e^x + b = (x+6)e^x + b \text{ 이므로 } f'(0) = 2 \text{ 에서}$$

$$6+b=2 \quad \therefore b=-4$$

$$\therefore a-b=9$$

055 답 $2 \ln 15$

$$f(0) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)-2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)-f(0)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(0) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5$ 이므로

$$f'(0) = \ln 3 + \ln 5 = \ln 15$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(0) = 2 \ln 15$

056 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\ &= f'(1) \times 2 \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = \ln x + \frac{x+2}{x}$ 이므로

$$f'(1) = 3$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(1) = 6$

057 답 $7 + \frac{2}{\ln 2}$

$$f(x) = x^2 + 3 \ln x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

$$g(x) = 2x \log_2 x \text{ 에서}$$

$$g'(x) = 2 \log_2 x + 2x \times \frac{1}{x \ln 2} = 2 \log_2 x + \frac{2}{\ln 2}$$

$$\therefore f'(3) + g'(1) = 7 + \frac{2}{\ln 2}$$

058 답 $4e$

$$f(x) = x^2 \log_3 2x = x^2 (\log_3 2 + \log_3 x) \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 2x (\log_3 2 + \log_3 x) + x^2 \times \frac{1}{x \ln 3}$$

$$= 2x \log_3 2x + \frac{x}{\ln 3}$$

$$= 2x \log_3 2x + x \log_3 e$$

따라서 $f'(1) = 2 \log_3 2 + \log_3 e = \log_3 4e$ 이므로

$$a = 4e$$

059 답 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 4 \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{ 이고 극한값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-1\} = 0 \quad \therefore f(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 4$$

$$f(1) = 1 \text{ 에서 } b = 1$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + b \text{ 이므로 } f'(1) = 4 \text{ 에서}$$

$$a+b=4 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-b=2$$

060 답 ④

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + a) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5 + bx) = f(0)$$

$$1 + a = 5 \quad \therefore a = 4$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} e^x & (x > 0) \\ b & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 5$$

061 답 ①

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = f(1)$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{x} & (x > 1) \\ 2ax + b & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax + b)$$

$$\therefore 2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 3, b = -1$$

$$\therefore ab = -3$$

062 답 ③

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} a \ln x = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x + b) = f(1)$$

$$0 = e + b \quad \therefore b = -e$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & (x > 1) \\ e^x & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x \quad \therefore a = e$$

$$\therefore a + b = 0$$

핵심 유형 최종 점검하기 •

58~59쪽

1 답 15

유형 01 지수함수의 극한

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{x+1} - 3^{x+1}}{5^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^x} = 5$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (9^x - 7^x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[9^x \left\{ 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (3^{2x})^{\frac{1}{2x}} \left\{ 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^x \right\}^{\frac{1}{2x}} = 3 \times 1 = 3$$

$$\therefore \alpha\beta = 15$$

2 답 3

유형 02 로그함수의 극한

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2(4x+1) - \log_2(x^2+2) + \log_2(2x-1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{(4x+1)(2x-1)}{x^2+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2}$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2}$$

$$= \log_2 8 = 3$$

3 답 5

유형 03 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 꼴의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1+ax)^{\frac{1}{ax}} \}^{ab} = e^{ab}$$

따라서 $e^{ab} = e^5$ 이므로 $ab = 5$

4 답 ⑤

유형 04 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 꼴의 극한

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = e$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+x}{3}\right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}} = e$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

④ $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

⑤ $x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

따라서 극한값이 e 가 아닌 것은 ⑤이다.

5 답 ②

유형 05 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{a}{x+3} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

따라서 $\frac{a}{3} = 7$ 이므로 $a = 21$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{21x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{7x} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

6 답 3

유형 06 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+6x)}{\ln(1+2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_2(1+6x)}{6x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times 3 \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{\ln 2}$$

$$\therefore a = 3$$

7 답 4

유형 07 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 꼴의 극한

$y = \frac{1}{2} \ln(x+3)$ 이라고 하면

$$\ln(x+3) = 2y, \quad x+3 = e^{2y} \quad \therefore x = e^{2y} - 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{2x} - 3$

따라서 $g(x) = e^{2x} - 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+2}{f(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\frac{1}{2} \ln(x+1)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times 2 \right\} \\ &= 2(1 \times 1 \times 2) = 4 \end{aligned}$$

8 답 24

유형 08 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1 + 3^x - 1 + 4^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} \right) \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 = \ln 24 \end{aligned}$$

$\therefore a = 24$

9 답 ①

유형 09 지수함수와 로그함수의 극한을 이용한 미정계수의 결정

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(2x+1) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a^x + b) = 0, \quad 1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\ln(2x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{a^x - 1}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= \ln a \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\ln a}{2} = \ln 4$ 이므로 $a = 16$

$\therefore a + b = 15$

10 답 4

유형 10 지수함수와 로그함수의 극한의 도형에 활용

$A(t, \ln(1+4t)) (t > 0)$ 라고 하면

$$\tan \theta = \frac{\ln(1+4t)}{t}$$

이때 점 A가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \tan \theta &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+4t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+4t)}{4t} \times 4 = 1 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

11 답 ②

유형 11 지수함수와 로그함수의 연속을 이용한 미정계수의 결정

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+bx)}{\ln(1+3x)} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+3x) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+bx) = 0, \quad \ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{\ln(1+3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+bx)}{bx} \times \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times \frac{b}{3} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{b}{3} = \frac{b}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{b}{3} = \frac{1}{2}$ 이므로 $b = \frac{3}{2}$

$$\therefore b - a = \frac{1}{2}$$

12 답 7

유형 12 지수함수의 도함수

$$f'(x) = (1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1})e^x + (1+x+x^2+\dots+x^n)e^x$$

$$\therefore f'(1) = (1+2+3+\dots+n)e + (n+1)e$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} e$$

따라서 $\frac{(n+1)(n+2)}{2} e = 36e$ 이므로

$$(n+1)(n+2) = 72 = 8 \times 9 \quad \therefore n = 7$$

13 답 ⑤

유형 12 지수함수의 도함수

$f(x) = 2^x + 4^x$ 이라고 하면 $f(1) = 6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x + 4^x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때 $f'(x) = 2^x \ln 2 + 4^x \ln 4$ 이므로

$$f'(1) = 2 \ln 2 + 4 \ln 4 = 2 \ln 2 + 8 \ln 2 = 10 \ln 2$$

14 답 12

유형 13 로그함수의 도함수

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\ &= 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h} \\ &= 3f'(1) + f'(1) = 4f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 2x + \ln x + x \times \frac{1}{x} = 2x + \ln x + 1$ 이므로

$$f'(1) = 2 + 0 + 1 = 3$$

따라서 구하는 극한값은 $4f'(1) = 12$

15 답 2

유형 14 지수함수와 로그함수의 미분가능성

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ae^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} (bx^2 - 1) = f(1)$$

$$\therefore a = b - 1 \quad \dots\dots ①$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} ae^{x-1} & (x > 1) \\ 2bx & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ae^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} 2bx \quad \therefore a = 2b \quad \dots\dots ②$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -1$

$$\therefore ab = 2$$

04 삼각함수의 미분

핵심
유형

유형01 ②	유형02 ⑤	유형03 ①
유형04 $\frac{1}{8}$	유형05 3	유형06 $\frac{4}{7}$
유형07 ②	유형08 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$	유형09 -18
유형10 ①	유형11 ⑤	유형12 ③
유형13 ①	유형14 ②	유형15 ④
유형16 ③	유형17 6	유형18 ⑤
유형19 0	유형20 ①	

핵심
유형

완성하기

001 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$	002 ③	003 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	004 $\sqrt{3}$	005 ②
006 $-\frac{4}{5}$	007 $-\frac{3}{2}$	008 $\frac{33}{65}$	009 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	010 ④
011 $-\frac{3}{8}$	012 $\frac{3}{4}\pi$	013 $\frac{1}{17}$	014 ①	015 2
016 $\frac{3}{4}$	017 $\frac{25}{16}$	018 $\frac{\pi}{4}$	019 ②	020 3
021 $\frac{12}{5}$	022 $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$	023 $\frac{3}{4}$	024 ③	
025 $\frac{12}{5}$	026 2	027 $\frac{7}{5}$	028 $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$	
029 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$	030 ③	031 ⑤		
032 -103	033 $\frac{\sqrt{55}}{8}$	034 3	035 2	036 $2\sqrt{2}$
037 ③	038 $\frac{1}{2}$	039 0	040 ③	041 ④
042 ④	043 ②	044 ③	045 ③	046 ②
047 ③	048 $\frac{55}{2}$	049 2	050 ③	051 $\frac{1}{12}$
052 $-\frac{7}{2}$	053 2	054 ④	055 ⑤	056 $\frac{4}{\pi}$
057 $-\frac{1}{2}$	058 $-\frac{\pi}{2}$	059 1	060 ②	061 9
062 ①	063 ⑤	064 9	065 ④	066 $\frac{1}{4}$
067 2π	068 4	069 $\frac{9}{4}$	070 2	071 8
072 ④	073 1	074 5	075 $\frac{45}{2}$	076 ①
077 $\frac{3}{2}\pi$	078 3	079 -3	080 2	
081 $-\frac{1}{2}$	082 ①	083 e	084 10	

핵심
유형

최종 점검하기

1 ③	2 ④	3 ①	4 ③	5 $\frac{7}{24}$
6 $\frac{24}{5}$	7 $-\frac{8}{9}$	8 ②	9 4	10 $2\sqrt{2}$
11 ④	12 ②	13 ③	14 $\frac{1}{4}$	15 $\frac{1}{8}$
16 6	17 2	18 ③	19 ②	
20 $2\pi-2$				

핵심 유형 62~63쪽

유형01 답 ②

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0 \quad \therefore \sin \theta = \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} \therefore \csc \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

유형02 답 ⑤

$$\begin{aligned} &\frac{\csc \theta}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{\csc \theta}{\sec \theta + \tan \theta} \\ &= \frac{\csc \theta (\sec \theta + \tan \theta) + \csc \theta (\sec \theta - \tan \theta)}{(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)} \\ &= \frac{\csc \theta (\sec \theta + \tan \theta) + \csc \theta (\sec \theta - \tan \theta)}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{2 \csc \theta \sec \theta}{(1 + \tan^2 \theta) - \tan^2 \theta} = 2 \csc \theta \sec \theta \end{aligned}$$

유형03 답 ①

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서 $\cos \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

유형04 답 $\frac{1}{8}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{3}, \quad \tan \alpha \tan \beta = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{5}{3}\right)} = \frac{1}{8}$$

유형05 **답 3**

두 직선 $y=x+3$, $y=-2x+6$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라고 하면

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = -2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{1 - (-2)}{1 + 1 \times (-2)} \right| = 3 \end{aligned}$$

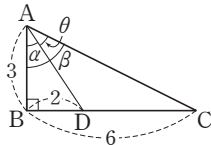
유형06 **답 $\frac{4}{7}$**

$\angle BAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta$ 라고 하면

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}, \tan \beta = \frac{6}{3} = 2$$

이때 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + 2 \times \frac{2}{3}} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$



유형07 **답 ②**

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

유형08 **답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$**

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}$$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$\sin \frac{\theta}{2} > 0, \cos \frac{\theta}{2} < 0$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

유형09 **답 -18**

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\therefore y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos x + 1$$

$$= \sqrt{3} \sin x + 4 \cos x + 1$$

$$= \sqrt{19} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \sin x + \frac{4}{\sqrt{19}} \cos x \right) + 1$$

$$= \sqrt{19} \sin(x + \alpha) + 1 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{19}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \right)$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{19} + 1 \leq \sqrt{19} \sin(x + \alpha) + 1 \leq \sqrt{19} + 1$$

따라서 $M = \sqrt{19} + 1$, $m = -\sqrt{19} + 1$ 이므로

$$Mm = (\sqrt{19} + 1)(-\sqrt{19} + 1) = -18$$

핵심 유형 완성하기 64~68쪽

001 **답 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$**

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{8}{9}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0 \quad \therefore \cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

002 **답 ③**

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{16}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{15}{32}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta - \csc \theta &= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{32}} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

003 **답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$**

$\tan \theta + \cot \theta = 3$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 3, \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 3$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore |\sin \theta - \cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

004 답 $\sqrt{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\csc \theta + \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\csc \theta \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = -3$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -3(\sin \theta + \cos \theta) = k$$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{k}{3}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{k^2}{9}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{k^2}{9}, k^2 = 3 \quad \therefore k = \sqrt{3} \quad (\because k > 0)$$

005 답 ②

$$\text{ㄱ. } (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \sec^2 \theta = \cos^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } (1 + \cot^2 \theta) + (1 - \cot^2 \theta) &= 1 + 2 \cot^2 \theta + \cot^2 \theta + 1 - 2 \cot^2 \theta + \cot^2 \theta \\ &= 2 + 2 \cot^2 \theta = 2(1 + \cot^2 \theta) = 2 \csc^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} &= \frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} = 2 \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } \frac{\sec \theta}{\csc \theta - \cot \theta} + \frac{\sec \theta}{\csc \theta + \cot \theta} &= \frac{\sec \theta (\csc \theta + \cot \theta) + \sec \theta (\csc \theta - \cot \theta)}{(\csc \theta - \cot \theta)(\csc \theta + \cot \theta)} \\ &= \frac{\sec \theta \csc \theta + \sec \theta \cot \theta + \sec \theta \csc \theta - \sec \theta \cot \theta}{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sec \theta \csc \theta}{(1 + \cot^2 \theta) - \cot^2 \theta} = 2 \sec \theta \csc \theta \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

006 답 $-\frac{4}{5}$

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\csc \theta < 0 \quad \therefore \csc \theta = -\frac{5}{4}$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} = -\frac{4}{5}$$

007 답 $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} &= \frac{1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} = 2 \csc^2 \theta \end{aligned}$$

따라서 $2 \csc^2 \theta = \frac{5}{2}$ 이므로 $\csc^2 \theta = \frac{5}{4}$

$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ 이므로

$$\frac{5}{4} = 1 + \cot^2 \theta \quad \therefore \cot^2 \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\cot \theta < 0 \quad \therefore \cot \theta = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \tan \theta - \cot \theta = -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

008 답 $\frac{33}{65}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 에서 $\cos \alpha > 0, \sin \beta < 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

009 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \sin 70^\circ \sin 140^\circ + \sin 20^\circ \sin 50^\circ &= \sin(90^\circ - 20^\circ) \sin(90^\circ + 50^\circ) + \sin 20^\circ \sin 50^\circ \\ &= \cos 20^\circ \cos 50^\circ + \sin 20^\circ \sin 50^\circ \\ &= \cos(20^\circ - 50^\circ) = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

010 답 ④

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ 에서 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} &= 1 \quad \therefore \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta \\ \therefore (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) &= 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta \\ &= 1 + 1 - \tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta \\ &= 2 \end{aligned}$$

011 답 $-\frac{3}{8}$

$\sin \alpha + \cos \beta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\cos \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$2 + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \frac{5}{4}$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -\frac{3}{8} \quad \therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{8}$$

012 답 $\frac{3}{4}\pi$

$g(2) = \alpha, g(3) = \beta$ 라고 하면 $f(\alpha) = 2, f(\beta) = 3$ 이므로 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 3$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = -1$$

이때 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \alpha + \beta < \pi$ 이고

$\tan(\alpha + \beta) = -1$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore g(2) + g(3) = \frac{3}{4}\pi$$

013 답 $\frac{1}{17}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{4} \text{에서 } \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{2}{3} \text{에서 } \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면 } 2\sin\alpha\cos\beta=\frac{17}{12} \quad \therefore \sin\alpha\cos\beta=\frac{17}{24}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면 } 2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12} \quad \therefore \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{24}$$

$$\therefore \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{17}{24}}=\frac{1}{17}$$

014 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=-2, \tan\alpha\tan\beta=-5$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2}{1-(-5)}=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$$

015 답 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=4, \tan\alpha\tan\beta=a$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-a}$$

$$\text{따라서 } \frac{4}{1-a}=-4 \text{이므로 } a=2$$

016 답 $\frac{3}{4}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{2}, \tan\alpha\tan\beta=1$$

$$\therefore (\tan\alpha-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta \\ =\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{9}{4}$$

$$\text{이때 } \tan\alpha>\tan\beta \text{이므로 } \tan\alpha-\tan\beta=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{1+1}=\frac{3}{4}$$

017 답 $\frac{25}{16}$

두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1, y=2x+1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}, \tan\beta=2$$

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}\times 2}\right|=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

018 답 $\frac{\pi}{4}$

두 직선 $x-2y+1=0, 3x-y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, y=3x-2$

가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}, \tan\beta=3$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라고 하면

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\times 3}\right|=1$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4} \quad (\because 0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

019 답 ②

두 직선 $ax-y+2=0, 2x+y-2=0$, 즉 $y=ax+2, y=-2x+2$

가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라고 하면

$$\tan\alpha=a, \tan\beta=-2$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\tan\frac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$$

$$\frac{a+2}{1-2a}=\pm 1$$

$$a+2=1-2a \text{ 또는 } a+2=-1+2a$$

$$\therefore a=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=3$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=3$

020 답 3

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 이 x 축의 양의 방향과

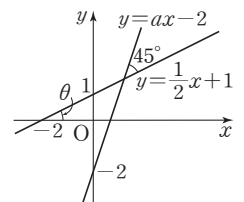
이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$$\tan\theta=\frac{1}{2}$$

직선 $y=ax-2$ 가 x 축의 양의 방향과

이루는 각의 크기는 $\theta+45^\circ$ 이므로

$$a=\tan(\theta+45^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\times 1}=3$$



021 답 $\frac{12}{5}$

$\angle CAB=\alpha, \angle EAD=\beta$ 라고 하면

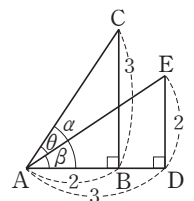
$$\tan\alpha=\frac{3}{2}, \tan\beta=\frac{2}{3}$$

이때 $\theta=\alpha-\beta$ 이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{2}\times \frac{2}{3}}=\frac{5}{12}$$

$$\therefore \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{12}{5}$$



022 답 $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACD에서

$$\overline{CD} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ 라고 하면

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

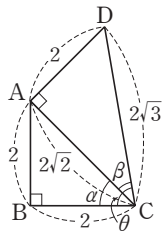
$$\cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이때 $\theta = \alpha + \beta$ 이므로

$$\sin \theta = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6}$$



023 답 $\frac{3}{4}$

$\angle CPE = \alpha$, $\angle CPB = \beta$, $\overline{CP} = x$ 라고 하면

$\overline{CE} = 2$ 이므로

$$\tan \alpha = \frac{2}{x}, \tan \beta = \frac{8}{x}$$

이때 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

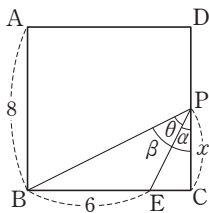
$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{8}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{8}{x} \times \frac{2}{x}} = \frac{6x}{x^2 + 16} = \frac{6}{x + \frac{16}{x}}$$

이때 $x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{16}{x}} = 8 \quad (\text{단, 등호는 } x = \frac{16}{x}, \text{ 즉 } x = 4 \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $\tan \theta$ 의 최댓값은 $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ 이다.



024 답 ③

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \therefore 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos^2 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

025 답 $\frac{12}{5}$

$3 \sin \theta - 2 \cos \theta = 0$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \quad \therefore \tan \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5}$$

026 답 2

$$y = 8 \sin x + 2 \cos 2x + k$$

$$= 8 \sin x + 2(1 - \sin^2 x) + k$$

$$= -4 \sin^2 x + 8 \sin x + 2 + k$$

$$= -4(\sin x - 1)^2 + 6 + k$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 함수 y 는 $\sin x = 1$ 일 때 최댓값 $6 + k$ 를 갖는다.

따라서 $6 + k = 8$ 이므로 $k = 2$

027 답 $\frac{7}{5}$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 4 = 5$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5} \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin 2\theta - \cos 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta - (1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$= 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \left\{1 - 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{7}{5}$$

028 답 $\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$

직선 $y = mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\tan \theta = m$

직선 $y = 4x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 2θ 이므로

$$\tan 2\theta = 4, \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 4$$

$$\frac{2m}{1 - m^2} = 4, m = 2 - 2m^2$$

$$2m^2 + m - 2 = 0 \quad \therefore m = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad (\because m > 0)$$

029 답 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\frac{1}{3}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$, $\cos \frac{\theta}{2} > 0$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$$

030 ③

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)} = 7$$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3}{4}\pi$ 이므로 $\tan \frac{\theta}{2} < 0$

$$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = -\sqrt{7}$$

031 ⑤

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{7}{9} \text{에서}$$

$$9 - 9\tan^2 \theta = -7 - 7\tan^2 \theta \quad \therefore \tan^2 \theta = 8$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 8 = 9 \text{이므로 } \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \cos \theta < 0 \text{이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin \frac{\theta}{2} > 0$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

032 ④ -103

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\therefore y = 4 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4\sqrt{3} \sin x + 3$$

$$= 2 \cos x + 6\sqrt{3} \sin x + 3$$

$$= 4\sqrt{7} \left(\frac{1}{2\sqrt{7}} \cos x + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \sin x \right) + 3$$

$$= 4\sqrt{7} \sin(x + \alpha) + 3 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \right)$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-4\sqrt{7} + 3 \leq 4\sqrt{7} \sin(x + \alpha) + 3 \leq 4\sqrt{7} + 3$$

따라서 $M = 4\sqrt{7} + 3$, $m = -4\sqrt{7} + 3$ 이므로

$$Mm = (4\sqrt{7} + 3)(-4\sqrt{7} + 3) = -103$$

033 ④ $\frac{\sqrt{55}}{8}$

$$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{따라서 } 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{4} \text{이므로 } \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{8}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } -\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} \text{이므로 } \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) > 0$$

$$\therefore \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{1 - \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8} \right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

034 ③

$$y = \sqrt{3}a \sin x + a \cos x - 2$$

$$= 2a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) - 2$$

$$= 2a \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - 2$$

$$= 2a \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 2$$

이때 $a > 0$ 이고 $-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ 이므로

$$-2a - 2 \leq 2a \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \leq 2a - 2$$

따라서 최댓값이 $2a - 2$ 이므로

$$2a - 2 = 4 \quad \therefore a = 3$$

035 ②

$\angle APB = 90^\circ$ 이므로 $\angle PAB = \theta$ 라고 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{2} \cos \theta, \overline{BP} = \sqrt{2} \sin \theta$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)$$

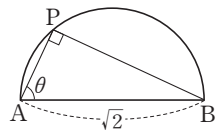
$$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\sqrt{2} < 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2$$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.



핵심 유형 69~71쪽

유형10 ①

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (\sin x - \cos x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

유형11 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^3 + 3x^2 + 4x)}{3x^3 + 2x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(2x^3 + 3x^2 + 4x)}{2x^3 + 3x^2 + 4x} \times \frac{2x^2 + 3x + 4}{3x^2 + 2x + 1} \right\}$$

$$= 1 \times 4 = 4$$

유형12 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 2x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 3x} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{3}{2} \right\} \\&= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

유형13 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{4x \sin x (1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x \sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x(1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{4(1 + \cos x)} \right\} = 1 \times \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

유형14 답 ②

$x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} \\&= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1\end{aligned}$$

유형15 답 ④

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \left(\sin \frac{1}{x} + \tan \frac{3}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} (\sin t + \tan 3t) \\&= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\tan 3t}{3t} \times 3 \right) \\&= \frac{1}{2} (1 + 1 \times 3) = 2\end{aligned}$$

유형16 답 ③

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 5 \cos x + a) = 0, \quad -2 + a = 0 \quad \therefore a = 2$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 5 \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{x(1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{5}{1 + \cos x} \right) = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

따라서 $b = \frac{5}{2}$ 이므로 $ab = 5$

유형17 답 6

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC} = 6 \sin \theta$
 $\angle HAC = \angle ABC$ 이므로 $\triangle ACH$ 에서
 $\overline{CH} = \overline{AC} \sin \theta = 6 \sin^2 \theta$
 $\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CH}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{6 \sin^2 \theta}{\theta^2} = 6 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2$
 $= 6 \times 1^2 = 6$

유형18 답 ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 4(x-2)}{x-2} = k$$

이때 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 4(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 4t}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 4t}{4t} \times 4 = 1 \times 4 = 4\end{aligned}$$

유형19 답 0

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x (\sin x - \cos x) + e^x (\cos x + \sin x) \\&= 2e^x \sin x \\&\therefore f'(\pi) = 0\end{aligned}$$

유형20 답 ①

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (a \sin x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + b) = f(0) \\3 &= 1 + b \quad \therefore b = 2\end{aligned}$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} a \cos x & (x > 0) \\ e^x & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \\&\therefore a = 1 \quad \therefore a + b = 3\end{aligned}$$

핵심 유형 완성하기 72~78쪽

036 답 $2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\sin x - \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

037 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - 2 \cos x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \cos x}{1 - \sin^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (\sin x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cos x}{1 + \sin x} = \frac{-2 \times 0}{1 + 1} = 0\end{aligned}$$

038 답 1/2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

039 답 0

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{1 + 1} = 0\end{aligned}$$

040 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 3x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{4} \right\} \\&= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

041 답 ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin 3x} + \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3} + \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} \right) \\&= 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = 1\end{aligned}$$

042 답 ④

$$\begin{aligned}x^\circ &= \frac{\pi}{180} x \text{라므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{\frac{\pi}{180} x} \times \frac{\pi}{180} \\&= 1 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \\ \therefore a &= 180\end{aligned}$$

043 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{\sin 4x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin 3x}{e^{3x^2} - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+8x)}{8x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times 2 \right\} \\&\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3x^2}{e^{3x^2} - 1} \times 2 \right) \\&= 1 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 4\end{aligned}$$

044 답 ③

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(\sin x) = 4 \sin x \\g(f(x)) &= g(4x) = \sin 4x \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{g(f(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{\sin 4x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \right) \\&= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

045 답 ③

$$\begin{aligned}f(n) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \dots + \frac{\sin nx}{x}} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\sin nx}{nx} \times n} \\&= \frac{3}{1 + 2 + \dots + n} \\&= \frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{6}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 6 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 6\end{aligned}$$

046 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x^2 + x)}{x^2 - x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(3x^2 + x)}{3x^2 + x} \times \frac{3x + 1}{x - 1} \right\} \\&= 1 \times \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}$$

047 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{e^{4x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{4x}{e^{4x} - 1} \times \frac{1}{2} \right) \\&= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

048 답 55/2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan 2x + \dots + \tan 10x}{2x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{2x} + \frac{\tan 2x}{2x} + \dots + \frac{\tan 10x}{2x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{2} + \frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{2}{2} + \dots + \frac{\tan 10x}{10x} \times \frac{10}{2} \right) \\&= \frac{1 + 2 + \dots + 10}{2} = \frac{55}{2}\end{aligned}$$

049 ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan^2 x + 2 \tan x}{k \tan(6x^2 + 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (3 \tan x + 1)}{k \tan(6x^2 + 2x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x}{x} \times \frac{6x^2 + 2x}{\tan(6x^2 + 2x)} \times \frac{2(3 \tan x + 1)}{k(6x + 2)} \right\} \\&= 1 \times 1 \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \\&\text{따라서 } \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } k = 2\end{aligned}$$

050 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1 + \cos 3x)}{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1 + \cos 3x)}{\sin^2 3x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^2 \times \frac{2(1 + \cos 3x)}{9} \right\} \\&= 1^2 \times \frac{2 \times 2}{9} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

051 ① $\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan 6x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \tan 6x (1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \tan 6x (1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{6x}{\tan 6x} \times \frac{1}{6(1 + \cos x)} \right\} \\&= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{6 \times 2} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

052 ② $-\frac{7}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x - 5}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos x + 5)(\cos x - 1)}{x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2} \times \frac{2 \cos x + 5}{\cos x + 1} \right\} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{2 \cos x + 5}{\cos x + 1} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (-1) \times \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{2 \cos x + 5}{\cos x + 1} \right\} \\&= -1 \times 1^2 \times \frac{7}{2} = -\frac{7}{2}\end{aligned}$$

053 ②

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x (1 - \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin x (1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin^3 x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \times \cos x (1 + \cos x) \right\} \\&= 1^3 \times 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

054 ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\sec 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\frac{1}{\cos 2x} - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x (1 - \cos x)}{\cos x (1 - \cos 2x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos 2x}{\cos x} \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)}{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)} \right\} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos 2x}{\cos x} \times \frac{\sin^2 x (1 + \cos 2x)}{\sin^2 2x (1 + \cos x)} \right\} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos 2x}{\cos x} \times \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right)^2 \times \frac{1 + \cos 2x}{4(1 + \cos x)} \right\} \\&= \frac{1}{1} \times 1^2 \times 1^2 \times \frac{2}{4 \times 2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

055 ⑤

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 2x}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2(\pi + t)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan (2\pi + 2t)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{2t} \times 2 \\&= 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

056 ④ $\frac{4}{\pi}$

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = 2 + t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sin \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{\sin \pi x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 + t)}{\sin \pi(2 + t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 + t)}{\sin (2\pi + \pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 + t)}{\sin \pi t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi t}{\sin \pi t} \times \frac{4 + t}{\pi} \right) \\&= 1 \times \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

057 ② $-\frac{1}{2}$

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi) \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + t)}{t \sin(\pi + t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \right) \\&= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

058 답 $-\frac{\pi}{2}$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\cos \frac{\pi}{2} x\right)}{x-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos \frac{\pi}{2}(1+t)\right\}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{-\sin \frac{\pi}{2}t} \times \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

059 답 1

$\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\tan \frac{1}{x}\right) \csc \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin(\tan t) \csc t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sin(\tan t) \times \frac{1}{\sin t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan t)}{\tan t} \times \frac{\tan t}{t} \times \frac{t}{\sin t} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

060 답 ②

$x^\circ = \frac{\pi}{180}x$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\circ \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180}x \sin \frac{2}{x}$

이때 $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180}x \sin \frac{2}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{180} \times \frac{\sin 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{180} \times \frac{\sin 2t}{2t} \times 2 \\ &= \frac{\pi}{180} \times 1 \times 2 = \frac{\pi}{90} \end{aligned}$$

061 답 9

$\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2\left(1 - \cos \frac{3}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t^2}(1 - \cos 3t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 3t)(1 + \cos 3t)}{t^2(1 + \cos 3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3t}{t^2(1 + \cos 3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3t}{3t}\right)^2 \times \frac{18}{1 + \cos 3t} \right\} = 1^2 \times \frac{18}{2} = 9 \end{aligned}$$

062 답 ①

$\frac{1}{2x^2+1}=t$ 로 놓으면 $x^2=\frac{1-t}{2t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{2x^2+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-t}{2t} \times \sin t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-t}{2} \times \frac{\sin t}{t} \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

063 답 ⑤

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a + b \cos x) = 0$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{a - a \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{a(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{a \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{a} \right) \\ &= 1 \times \frac{2}{a} = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{a} = \frac{2}{9}$ 이므로 $a = 9$

이를 ㉠에 대입하면 $b = -9$

$$\therefore a - b = 18$$

064 답 9

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-1) = 0$$

$$\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1}-1}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}{\sin 4x (\sqrt{ax+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin 4x (\sqrt{ax+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{a}{4(\sqrt{ax+1}+1)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{a}{4 \times 2} = \frac{a}{8} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{8} = 1$ 이므로 $a = 8$

$$\therefore a + b = 9$$

065 답 ④

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a - b \cos x) = 0$$

$$a - b = 0 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - a \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{a}{1 + \cos x} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 2$ 이므로 $a = 4$

이를 ㉡에 대입하면 $b = 4$

$$\therefore ab = 16$$

066 답 1/4

$\lim_{x \rightarrow a} 4 \tan(x-a) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow a} (3^x - 1) = 0, \quad 3^a - 1 = 0 \quad \therefore a = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{4 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \times \frac{3^x - 1}{x} \times \frac{x}{\tan x} \right) = \frac{1}{4} \times \ln 3 \times 1 = \frac{\ln 3}{4}$$

따라서 $\frac{\ln 3}{4} = b \ln 3$ 이므로 $b = \frac{1}{4}$

$$\therefore b - a = \frac{1}{4}$$

067 답 2π

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{ax + b}{\sin(\pi + x)} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin(\pi + x) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} (ax + b) = 0$$

$$-a\pi + b = 0 \quad \therefore b = a\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{ax + a\pi}{\sin(\pi + x)} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{a(x + \pi)}{\sin(\pi + x)}$$

이때 $x + \pi = t$ 로 놓으면 $x = t - \pi$ 이고, $x \rightarrow -\pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{a(x + \pi)}{\sin(\pi + x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{\sin t} = a \times 1 = a$$

$$\therefore a = 1$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $b = \pi$

따라서 $f(x) = x + \pi$ 이므로 $f(\pi) = \pi + \pi = 2\pi$

068 답 4

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 4 \tan \theta$

$\angle ABH = \angle ACB = \theta$ 이므로 $\triangle ABH$ 에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin \theta = 4 \sin \theta \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AH}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4 \sin \theta \tan \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(4 \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right) \\ &= 4 \times 1 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

069 답 9/4

$\triangle OHB$ 에서 $\overline{OH} = 3 \cos \theta$, $\overline{BH} = 3 \sin \theta$ 이고

$\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 3 - 3 \cos \theta = 3(1 - \cos \theta)$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH} = \frac{9}{2} (1 - \cos \theta) \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{9(1 - \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{9(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{9 \sin^3 \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \frac{9}{2(1 + \cos \theta)} \right\} \\ &= 1^3 \times \frac{9}{2 \times 2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

070 답 2

$\overline{OP} = \overline{OA} = 1$ 이므로

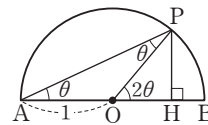
$\angle OPA = \angle OAP = \theta$

$\triangle OPA$ 에서 $\angle POH = 2\theta$

$\triangle POH$ 에서 $\overline{OH} = \overline{OP} \cos 2\theta = \cos 2\theta$

$$\therefore \overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = 1 - \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2\theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^2 \times \frac{4}{1 + \cos 2\theta} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$



071 답 8

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC} = 8 \sin \theta$

$\triangle ABD$ 에서 $\angle ADC = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$\triangle ACD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)}, \quad \frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = \frac{8 \sin \theta}{\cos 2\theta} \quad \therefore \overline{CD} = \frac{8 \sin^2 \theta}{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CD}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8 \sin^2 \theta}{\theta^2 \cos 2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{8}{\cos 2\theta} \right\} = 1^2 \times 8 = 8 \end{aligned}$$

072 답 ④

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan 2(x+1)}{x+1} = k$$

이때 $x + 1 = t$ 로 놓으면 $x = t - 1$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan 2(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{2t} \times 2 = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

073 답 1

함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos x) = 0, \quad a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{x}{1 + \cos x} \right\} \\ &= 1^2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 0 \quad \therefore a - b = 1$$

074 ⑤

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - b}{\sin x} = 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} - b) = 0, \quad 1 - b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{x}{\sin x} \times a \right) = 1 \times 1 \times a = a$$

$$\therefore a = 5 \quad \therefore ab = 5$$

075 ④ $\frac{45}{2}$

$$x \neq 0 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{a - 5 \cos 3x}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - 5 \cos 3x}{x^2} = f(0) \quad \dots\dots ㉠$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a - 5 \cos 3x) = 0, \quad a - 5 = 0 \quad \therefore a = 5$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 5 \cos 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \times \frac{45}{1 + \cos 3x} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{45}{2} = \frac{45}{2}$$

076 ①

$$f'(x) = 2e^x(1 + 2 \cos x) + 2e^x(-2 \sin x)$$

$$= 2e^x(1 + 2 \cos x - 2 \sin x)$$

$$\therefore f'(0) = 2 \times (1 + 2 - 0) = 6$$

077 ③ $\frac{3}{2}\pi$

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f'(a) = 0 \text{ 에서 } \cos a - \sin a = 0 \quad \therefore \sin a = \cos a$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } a = \frac{5}{4}\pi \quad (\because 0 \leq a \leq 2\pi)$$

$$\therefore \text{따라서 모든 } a \text{의 값의 합은 } \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

078 ③

$$f(x) = e^x(a \sin x + b \cos x) \text{ 라고 하면 곡선 } y = f(x) \text{ 가 점 } (0, 3)$$

을 지나므로 $f(0) = b = 3$

$$\text{점 } (0, 3) \text{ 에서의 접선의 기울기가 4 이므로 } f'(0) = 4$$

$$f'(x) = e^x(a \sin x + 3 \cos x) + e^x(a \cos x - 3 \sin x) \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = 3 + a = 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore ab = 3$$

079 ④ -3

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi) + f(\pi) - f(\pi - h)}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi) - f(\pi - h)}{-h}$$

$$= 2f'(\pi) + f'(\pi) = 3f'(\pi)$$

$$\text{이때 } f'(x) = \cos x - x \sin x \text{ 이므로 } f'(\pi) = -1$$

$$\therefore \text{따라서 구하는 극한값은 } 3f'(\pi) = -3$$

080 ②

$$f(x) = \sin^2 x = \sin x \sin x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi}$$

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2(\pi + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin (2\pi + 2t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

081 ② $-\frac{1}{2}$

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \sin (x+h) - x \sin x}{2h} = \frac{x}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin (x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \frac{x}{2} (\sin x)' = \frac{x}{2} \cos x$$

따라서 $f'(x) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{x}{2} \sin x$ 이므로

$$f'(\pi) = \frac{1}{2} \cos \pi - \frac{\pi}{2} \sin \pi = -\frac{1}{2}$$

082 ①

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (3 + ax \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (b + 5 \sin x) = f(0)$$

$$\therefore b = 3$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} a \cos x - ax \sin x & (x > 0) \\ 5 \cos x & (x < 0) \end{cases} \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (a \cos x - ax \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 5 \cos x$$

$$\therefore a = 5 \quad \therefore a - b = 2$$

083 ② e

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (a \sin x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0-} b e^{x-1} = f(0)$$

$$1 = \frac{b}{e} \quad \therefore b = e$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} a \cos x - \sin x & (x > 0) \\ e^x & (x < 0) \end{cases} \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (a \cos x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0-} e^x$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore ab = e$$

084 답 10

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$, $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$, $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 + bx^2 + cx) = f(1)$$

$$\therefore a + b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(0)$, $f'(1)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} & (x > 1) \\ 3ax^2 + 2bx + c & (0 < x < 1) \\ 4 \cos x & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3ax^2 + 2bx + c) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4 \cos x$$

$$\therefore c = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 + 2bx + c)$$

$$\therefore 3a + 2b + c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$, $c=4$

$$\therefore a - b + c = 10$$

핵심 유형 최종 점검하기 •

79~81쪽

1 답 ③

유형 01 삼각함수 $\csc \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \csc \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -3$$

2 답 ④

유형 02 삼각함수 사이의 관계

$$\frac{\tan \theta}{1 + \sec \theta} + \frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta} = \frac{\tan^2 \theta + (1 + \sec \theta)^2}{(1 + \sec \theta) \tan \theta}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta + 1 + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta) \tan \theta}$$

$$= \frac{\sec^2 \theta + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta) \tan \theta}$$

$$= \frac{2 \sec \theta (1 + \sec \theta)}{(1 + \sec \theta) \tan \theta}$$

$$= \frac{2 \sec \theta}{\tan \theta}$$

$$= 2 \csc \theta$$

3 답 ①

유형 03 삼각함수의 덧셈정리

$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = -\frac{5}{8} \quad \therefore \cos(\alpha - \beta) = -\frac{5}{8}$$

4 답 ③

유형 04 삼각함수의 덧셈정리의 활용-방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -a, \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{a}{2}$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 에서

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \quad \frac{-a}{1 - \frac{a}{2}} = 1, \quad -a = 1 - \frac{a}{2} \quad \therefore a = -2$$

5 답 $\frac{7}{24}$

유형 05 삼각함수의 덧셈정리의 활용-두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 $3x + 4y + 1 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$, 즉 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$,

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라고 하면

$$\tan \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \tan \beta = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{3}{4} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)} \right| = \frac{7}{24}$$

6 답 $\frac{24}{5}$

유형 06 삼각함수의 덧셈정리의 활용-도형

$\angle BAH = \alpha$, $\angle CAH = \beta$, $\overline{CH} = x$ 라고 하면

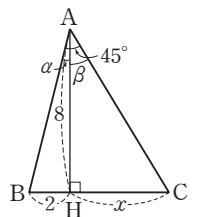
$$\tan \alpha = \frac{1}{4}, \quad \tan \beta = \frac{x}{8}$$

이때 $\alpha + \beta = 45^\circ$ 이므로

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan 45^\circ = 1 \text{에서}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{x}{8}}{1 - \frac{1}{4} \times \frac{x}{8}} = \frac{8 + 4x}{32 - x} = 1, \quad 8 + 4x = 32 - x \quad \therefore x = \frac{24}{5}$$



7 답 -8/9

유형 07 배각의 공식

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

8 답 2

유형 08 반각의 공식

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1}{5} \text{에서 } 1 - \cos \theta = \frac{2}{5} \quad \therefore \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7}$$

9 답 4

유형 09 삼각함수의 합성

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\therefore y = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos x - 1$$

$$= \sqrt{3} \sin x - \cos x - 1$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) - 1$$

$$= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

이때 $-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 1$

따라서 $M=1$, $m=-3$ 이므로 $M-m=4$

10 답 $2\sqrt{2}$

유형 10 삼각함수의 극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

11 답 4

유형 11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - \cos x}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{2 \cos x} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

12 답 2

유형 12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin 2x)}{\tan(\tan 5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(\sin 2x)}{\sin 2x} \times \frac{\tan 5x}{\tan(\tan 5x)} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{2}{5} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

13 답 3

유형 13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ 꼴의 극한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos kx)(1 + \cos kx)}{\sin^2 x (1 + \cos kx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x (1 + \cos kx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{k^2}{1 + \cos kx} \right\} \\ &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{k^2}{2} = 8$ 이므로 $k^2 = 16$

$\therefore k = 4$ ($\because k > 0$)

14 답 1/4

유형 14 치환을 이용한 삼각함수의 극한

$x + \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = -\frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(2x + \pi) \cos x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \left(-\frac{\pi}{2} + t\right)}{2t \cos \left(-\frac{\pi}{2} + t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{2t \cos \left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{2t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{2t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{2t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{2(1 + \cos t)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

15 답 1/8

유형 15 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$ 꼴의 극한

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \tan \frac{1}{2x} \csc \frac{4}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \tan \frac{t}{2} \csc 4t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{t}{2}}{\sin 4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\tan \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \times \frac{4t}{\sin 4t} \times \frac{1}{8} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

16 답 6

유형 16 삼각함수의 극한을 이용한 미정계수의 결정

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+a} - b) &= 0 \\ \sqrt{a} - b &= 0 \quad \therefore b = \sqrt{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{x+a} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x+a} - \sqrt{a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{x+a} + \sqrt{a})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times (\sqrt{x+a} + \sqrt{a}) \right\} \\ &= 1 \times 2\sqrt{a} = 2\sqrt{a}\end{aligned}$$

따라서 $2\sqrt{a} = 6$ 이므로 $\sqrt{a} = 3$

$$\therefore a = 9$$

이를 ①에 대입하면 $b = 3$

$$\therefore a - b = 6$$

17 답 2

유형 17 삼각함수의 극한의 도형에의 활용

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{에서 } \overline{AB} &= \frac{1}{\sin \theta}, \overline{BC} = \frac{1}{\tan \theta} \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta}{\overline{AB} - \overline{BC}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta}{\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta \sin \theta (1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta \sin \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta (1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\theta}{\sin \theta} \times (1 + \cos \theta) \right\} \\ &= 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

18 답 ③

유형 18 삼각함수의 연속을 이용한 미정계수의 결정

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5e^x + a}{2x} &= b \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x - 5e^x + a) &= 0 \\ -5 + a &= 0 \quad \therefore a = 5\end{aligned}$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5e^x + 5}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{2x} - \frac{5(e^x - 1)}{2x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{2} - \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{5}{2} \right) \\ &= 1 \times \frac{3}{2} - 1 \times \frac{5}{2} = -1\end{aligned}$$

$$\therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = 4$$

19 답 ②

유형 19 삼각함수의 도함수

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2h} \\ &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2h} \\ &= -2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore \text{따라서 구하는 극한값은 } -2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$$

20 답 $2\pi - 2$

유형 20 삼각함수의 미분가능성

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \{(2x+a) \cos x\} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} b \sin x = f(0) \\ \therefore a &= 0\end{aligned}$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x - 2x \sin x & (x > 0) \\ b \cos x & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \cos x - 2x \sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} b \cos x \\ \therefore b &= 2\end{aligned}$$

$$\therefore \text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x \cos x & (x \geq 0) \\ 2 \sin x & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad f(\pi) = 2\pi \cos \pi = -2\pi$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{2}\right) - f(\pi) = 2\pi - 2$$

05 여러 가지 미분법

핵심
유형

유형01 -7	유형02 7	유형03 ③
유형04 ③	유형05 15	유형06 ③
유형08 $\frac{25}{2}$	유형09 $\frac{3}{5}$	유형10 $\frac{11}{3}$
유형11 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	유형12 $\frac{1}{4}$	유형13 3

핵심
유형

완성하기

001 ①	002 -2	003 ①	004 $\frac{e}{4}$	005 4
006 2	007 $\frac{1}{2}$	008 ①	009 ③	010 ②
011 2	012 -22	013 1	014 0	015 ③
016 ②	017 ③	018 ⑤	019 $-\frac{\sqrt{3}e}{2}$	
020 1	021 $\frac{8}{3}$	022 ①	023 ④	024 8
025 ③	026 ②	027 ④	028 ①	029 ②
030 27	031 16	032 $\frac{2}{e}$	033 0	034 ④
035 ③	036 ④	037 ②	038 $\frac{\pi}{2}$	039 ②
040 ③	041 ③	042 $\frac{2}{3}$	043 100	
044 $-\frac{5}{3}$	045 $\frac{dy}{dx} = -y \ln y$	046 ①	047 8	
048 ③	049 ④	050 ①	051 ⑤	052 4
053 ⑤	054 ①	055 ④	056 ⑤	057 1
058 0	059 1	060 9		

핵심
유형

최종 점검하기

1 ④	2 ①	3 ②	4 ④	
5 $1 - \ln 7$	6 -2	7 -1	8 ①	9 ②
10 ④	11 $\frac{13}{16}$	12 $\frac{2}{11}$	13 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	14 $\frac{5}{2}$

핵심 유형 84~86쪽

유형01 답 -7

$$f'(x) = \frac{a(x^2 - x + 1) - (ax + b)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-ax^2 - 2bx + a + b}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(-1) = 2 \text{에서 } \frac{3b}{9} = 2 \quad \therefore b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(0) = 5 \text{에서 } a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하여 풀면 $a = -1$

$$\therefore a - b = -7$$

유형02 답 7

$$f(x) = \frac{3x^3 - x^2 - 2}{x^2} = 3x - 1 - 2x^{-2} \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3 + 4x^{-3} = 3 + \frac{4}{x^3}$$

따라서 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 + 4 = 7$$

유형03 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$f(x) = \sec x \tan x \text{에서}$$

$$f'(x) = \sec x \tan x \tan x + \sec x \sec^2 x$$

$$= \sec x (\tan^2 x + \sec^2 x)$$

$$\therefore f'(0) = 1 \times (0 + 1) = 1$$

유형04 답 ③

$$f'(x) = 5(2x^2 + ax - 1)^4 (2x^2 + ax - 1)'$$

$$= 5(2x^2 + ax - 1)^4 (4x + a)$$

이때 $f'(0) = 25$ 이므로

$$5 \times (-1)^4 \times a = 25 \quad \therefore a = 5$$

유형05 답 15

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 3 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{이고 극한값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + 1\} = 0 \quad \therefore f(0) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 3$$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - 1}{x + 1} = 5$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x) - 1\} = 0 \quad \therefore g(-1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = g'(-1) = 5$$

이때 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서 $y' = g'(f(x))f'(x)$ 이므로 $x = 0$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(0))f'(0) = g'(-1)f'(0) = 5 \times 3 = 15$$

유형06 답 ③

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + h) - f(\pi - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + h) - f(\pi) + f(\pi) - f(\pi - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi) - f(\pi - h)}{-h}$$

$$= f'(\pi) + f'(\pi) = 2f'(\pi)$$

이때 $f(x) = \ln |\sin x + \cos x|$ 에서

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$\therefore 2f'(\pi) = 2 \times \frac{\cos \pi - \sin \pi}{\sin \pi + \cos \pi} = 2$$

유형07 ②

$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2(x-3)}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 3 \ln |x+1| - 2 \ln |x| - \ln |x-3|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-3}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-3} \right)$$

$$f(2) = \frac{(2+1)^3}{2^2 \times (2-3)} = -\frac{27}{4} \text{ 이므로}$$

$$f'(2) = -\frac{27}{4} \times (1-1+1) = -\frac{27}{4}$$

유형08 ② $\frac{25}{2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(x+\sqrt{x^2+1})^4(x+\sqrt{x^2+1})' \\ &= 5(x+\sqrt{x^2+1})^4 \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) \\ &= 5(x+\sqrt{x^2+1})^4 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(1) = 5(1+\sqrt{2})^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = a$$

$$f'(-1) = 5(-1+\sqrt{2})^4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = b$$

$$\begin{aligned} \therefore ab &= 5(1+\sqrt{2})^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \times 5(-1+\sqrt{2})^4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 25 \{ (1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2}) \}^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 25 \times 1^4 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

유형09 ① $\frac{3}{5}$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

따라서 $t=2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

유형10 ② $\frac{11}{3}$

$x^3 - xy^2 + y = 7$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2xy-1) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy - 1} \quad (\text{단, } 2xy \neq 1)$$

따라서 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \times 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 1 - 1} = \frac{11}{3}$$

유형11 ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$x = \sqrt{y^2+3}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+3}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{y^2+3}}{y}$$

따라서 $y=3$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{\sqrt{3^2+3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

유형12 ① $\frac{1}{4}$

$g(2)=a$ 라고 하면 $f(a)=2$

$$a^3+a=2, \quad a^3+a-2=0, \quad (a-1)(a^2+a+2)=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a^2+a+2>0) \quad \therefore g(2)=1$$

이때 $f'(x)=3x^2+1$ 이므로 $f'(1)=4$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

유형13 ③ 3

$$f'(x) = a \cos 2x - 2(ax+b) \sin 2x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2a \sin 2x - 2a \sin 2x - 4(ax+b) \cos 2x \\ &= -4a \sin 2x - 4(ax+b) \cos 2x \end{aligned}$$

$$f'(0)=5 \text{에서 } a=5$$

$$f''(0)=8 \text{에서 } -4b=8 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore a+b=3$$

핵심 유형 완성하기 87~95쪽

001 ①

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2ax+b)(x-2) - (ax^2+bx+2) \times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - 2}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(0)=1 \text{에서 } \frac{-2b-2}{4}=1$$

$$\therefore b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(1)=-2 \text{에서 } -3a-2b-2=-2$$

$$\therefore 3a+2b=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하여 풀면 $a=2$

$$\therefore a-b=5$$

002 ② -2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x (1-\cos x) - (1+\cos x) \sin x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{-\sin x + \sin x \cos x - \sin x - \sin x \cos x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{-2 \sin x}{(1-\cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2}}{\left(1-\cos \frac{\pi}{2}\right)^2} = -2$$

003 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(-h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0) + f(0) - f(-h)}{h} \\&= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-h)}{-h} \\&= 2f'(0) + f'(0) = 3f'(0)\end{aligned}$$

이때 $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{(3x-1)'}{(3x-1)^2} = -\frac{3}{(3x-1)^2} \\ \therefore 3f'(0) &= 3 \times (-3) = -9\end{aligned}$$

004 답 $\frac{e}{4}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

따라서 점 (1, f(1))에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = \frac{e}{4}$$

005 답 4

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3(x^2+1) - (3x-4) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\&= \frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

$(x^2+1)^2 > 0$ 이므로 $f'(x) \geq 0$ 에서

$$-3x^2+8x+3 \geq 0, \quad 3x^2-8x-3 \leq 0$$

$$(3x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

006 답 2

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{f'(x) \times 2x - \{f(x) - 3\} \times 2}{4x^2} \\ \therefore g'(1) &= \frac{f'(1) \times 2 - \{f(1) - 3\} \times 2}{4} = \frac{f'(1) - f(1) + 3}{2}\end{aligned}$$

이때 $f'(1) = 5$, $g'(1) = 3$ 이므로

$$\frac{5 - f(1) + 3}{2} = 3, \quad 8 - f(1) = 6$$

$$\therefore f(1) = 2$$

007 답 $\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{a(3x-2) - ax \times 3}{(3x-2)^2} = \frac{-2a}{(3x-2)^2}$$

$f'(1) = 8$ 에서

$$-2a = 8 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore f'(x) = \frac{8}{(3x-2)^2}$$

$f(x) = \frac{-4x}{3x-2}$ 에서 $f(2) = -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

008 답 ①

$$f(x) = \frac{x^5 - 5x^4 + 1}{x^3} = x^2 - 5x + x^{-3} \text{이므로}$$

$$f'(x) = 2x - 5 - 3x^{-4} = 2x - 5 - \frac{3}{x^4}$$

따라서 점 (2, f(2))에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 4 - 5 - \frac{3}{16} = -\frac{19}{16}$$

009 답 ③

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2} = 2x^2 + 3x^{-1} + 2x^{-2} \text{이므로}$$

$$f'(x) = 4x - 3x^{-2} - 4x^{-3} = 4x - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(-1) + f'(1) &= (-4 - 3 + 4) + (4 - 3 - 4) \\&= -6\end{aligned}$$

010 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h} \\&= f'(1) + f'(1) = 2f'(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^{10}} \\&= x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \cdots + x^{-10}\end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} - \cdots - 10x^{-11}$$

$$\therefore 2f'(1) = -2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)$$

$$= -2 \times \frac{10 \times 11}{2} = -110$$

011 답 2

$f(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \times 2 = 2f'(0)\end{aligned}$$

$f(x) = (2e^x - 1) \tan x$ 에서

$$f'(x) = 2e^x \tan x + (2e^x - 1) \sec^2 x$$

$$\begin{aligned}\therefore 2f'(0) &= 2\{2e^0 \tan 0 + (2e^0 - 1) \sec^2 0\} \\&= 2 \times (0 + 1) = 2\end{aligned}$$

012 답 -22

$f(x) = (2 + \csc x) \cot x$ 에서

$$f'(x) = (-\csc x \cot x) \cot x + (2 + \csc x)(-\csc^2 x)$$

$$\begin{aligned}\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(-\csc \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}\right) \cot \frac{\pi}{6} + \left(2 + \csc \frac{\pi}{6}\right) \left(-\csc^2 \frac{\pi}{6}\right) \\&= (-2 \times \sqrt{3}) \times \sqrt{3} + (2 + 2) \times (-4) = -22\end{aligned}$$

013 답 1

$$f'(x) = -\frac{(a + \cot x)'}{(a + \cot x)^2} = \frac{\csc^2 x}{(a + \cot x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{2}{(a+1)^2} = \frac{1}{2}, (a+1)^2 = 4$$

$$a+1 = -2 \text{ 또는 } a+1 = 2$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

014 답 0

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 미분가능하면 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (b + \sqrt{2} \sec x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore a = b + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 가 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} a \sec^2 x & (x > \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2} \sec x \tan x & (x < \frac{\pi}{4}) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \sec^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \sqrt{2} \sec x \tan x$$

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $b = -1$

$$\therefore a + b = 0$$

015 답 ③

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left(\frac{a-x}{x+1} \right)^2 \left(\frac{a-x}{x+1} \right)' \\ &= 3 \left(\frac{a-x}{x+1} \right)^2 \times \frac{-1 \times (x+1) - (a-x) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-3(a-x)^2(a+1)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

이때 $f'(-2) = -12$ 이므로

$$-3(a+2)^2(a+1) = -12, a(a^2+5a+8) = 0$$

$$\therefore a = 0 (\because a^2+5a+8 > 0)$$

016 답 ②

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + x \sec^2\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \left(5x + \frac{\pi}{4}\right)' \\ &= \tan\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + 5x \sec^2\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = \tan \frac{\pi}{4} + 0 = 1$$

017 답 ③

$f(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

$$f(x) = (x^3 + x + 1)^5 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(x^3 + x + 1)^4 (x^3 + x + 1)' \\ &= 5(x^3 + x + 1)^4 (3x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = 5 \times 1 \times 1 = 5$$

018 답 ⑤

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 이므로

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'(1) = f'(g(1))g'(1)$$

$$f'(x) = 2^{2x-1} \ln 2 (2x-1)' = 2^{2x} \ln 2 \text{이고 } g(1) = 1 \text{이므로}$$

$$f'(g(1)) = f'(1) = 4 \ln 2$$

$$\text{또 } g'(x) = 4x - 1 \text{이므로 } g'(1) = 3$$

$$\therefore h'(1) = 4 \ln 2 \times 3 = 12 \ln 2$$

019 답 $-\frac{\sqrt{3e}}{2}$

$h(x) = f(g(x))$ 라고 하면 $h(x) = e^{\cos x}$

$$\therefore h\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{e}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(g(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$h'(x) = e^{\cos x} (\cos x)' = -\sin x e^{\cos x}$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} e^{\cos \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{e} = -\frac{\sqrt{3e}}{2}$$

020 답 1

$$g'(x) = f'(2x-3)(2x-3)' = 2f'(2x-3)$$

$$\therefore g'(1) = 2f'(-1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x+1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\therefore f'(-1) = \frac{1}{2} \quad \therefore g'(1) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

021 답 $\frac{8}{3}$

$f(3x-1) = x^3 - x^2 + 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(3x-1)(3x-1)' = 3x^2 - 2x$$

$$3f'(3x-1) = 3x^2 - 2x$$

$$\therefore f'(3x-1) = x^2 - \frac{2}{3}x$$

$3x-1=5$ 에서 $x=2$ 이므로 위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(5) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

022 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = 0 \quad \therefore f(1) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 4$$

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 1}{x - 2} = -3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{g(x) - 1\} = 0 \quad \therefore g(2) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2) = -3$$

이때 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서 $y' = g'(f(x))f'(x)$ 이므로

$x=1$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(1))f'(1) = g'(2)f'(1) = -3 \times 4 = -12$$

023 답 ④

$$y' = 2\{xf(x)\}\{xf(x)\}'$$

$$= 2\{xf(x)\}\{f(x) + xf'(x)\}$$

따라서 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$2f(1)\{f(1) + f'(1)\} = 2 \times 1 \times (1+2) = 6$$

024 답 8

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A(2, 4)에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f(2)=4, f'(2)=2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B(4, 3)에서 접선의 기울기가 4이므로

$$f(4)=3, f'(4)=4$$

$h(x)=f(f(x))$ 라고 하면

$$h(2)=f(f(2))=f(4)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f(x)) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = h'(2)$$

이때 $h'(x) = f'(f(x))f'(x)$ 이므로

$$h'(2) = f'(f(2))f'(2) = f'(4)f'(2) = 4 \times 2 = 8$$

025 답 ③

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1)$$

$f(x) = \log_2 |4x+2|$ 에서

$$f'(x) = \frac{4}{(4x+2)\ln 2}$$

$$\therefore 3f'(1) = 3 \times \frac{4}{6\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$$

026 답 ②

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = 4$$

027 답 ④

$$f'(x) = \frac{3x^2 + a}{x^3 + ax + 2}$$

이때 $f'(-1) = -5$ 이므로

$$\frac{3+a}{1-a} = -5, 3+a = -5+5a \quad \therefore a=2$$

028 답 ①

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{1}{2} \{\ln(1-\sin x) - \ln(1+\sin x)\}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) \\ &= \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{2(1-\sin^2 x)} \\ &= \frac{-2\cos x}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}$$

029 답 ②

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} \text{이므로 } f'(n) = \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

030 답 27

$f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx})$ 이라고 하면

$$f(0) = \ln n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}$ 이므로

$$f'(0) = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

따라서 $\frac{n+1}{2} = 14$ 이므로 $n=27$

031 답 16

$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = \ln |x-1| + 2\ln |x+2| - 4\ln |x+1|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+1}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+1} \right)$$

$$f(0) = -4 \text{이므로}$$

$$f'(0) = -4 \times (-1+1-4) = 16$$

032 답 2/e

$f(x) = x^{\ln x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\therefore \frac{f'(e)}{f(e)} = \frac{2 \ln e}{e} = \frac{2}{e}$$

033 답 0

$f(x) = \frac{x^5(x+1)^6}{(x-4)(x-3)^2}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 5 \ln |x| + 6 \ln |x+1| - \ln |x-4| - 2 \ln |x-3|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x} + \frac{6}{x+1} - \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -5} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{5}{x} + \frac{6}{x+1} - \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-3} \right) \\ &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

034 답 ④

$f(\pi) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - 1}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi)$$

$f(x) = x^{\sin x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\therefore f'(\pi) = \pi^{\sin \pi} \left(\cos \pi \ln \pi + \frac{\sin \pi}{\pi} \right)$$

$$= -\ln \pi$$

035 답 ③

$$f'(x) = 4(x - \sqrt{x^2 - 2})^3 (x - \sqrt{x^2 - 2})'$$

$$= 4(x - \sqrt{x^2 - 2})^3 \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2}} \right)$$

$$= 4(x - \sqrt{x^2 - 2})^3 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \right)$$

이므로

$$f'(2) = 4(2 - \sqrt{2})^3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = a$$

$$f'(-2) = 4(-2 - \sqrt{2})^3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = b$$

$$\therefore ab = 4(2 - \sqrt{2})^3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \times 4(-2 - \sqrt{2})^3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 16 \{ (2 - \sqrt{2})(-2 - \sqrt{2}) \}^3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 16 \times (-2)^3 \times (-1)$$

$$= 128$$

036 답 ④

$$f(x) = \sqrt{5-2x} = (5-2x)^{\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5-2x)^{-\frac{1}{2}}(5-2x)' = -\frac{1}{\sqrt{5-2x}}$$

따라서 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$f'(2) = -1$$

037 답 ②

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} = (2x-1)^{-\frac{1}{3}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{4}{3}}(2x-1)'$$

$$= -\frac{2}{3(2x-1)\sqrt[3]{2x-1}}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -\frac{2}{3(2x-1)} \text{이므로}$$

$$g(1) = -\frac{2}{3}$$

038 답 $\frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} = (1+\sin x)^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+\sin x)^{-\frac{3}{2}}(1+\sin x)'$$

$$= -\frac{\cos x}{2(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$$

이때 $x=a$ 가 $f'(x)=0$ 의 해이므로 $f'(a)=0$

$$-\frac{\cos a}{2(1+\sin a)\sqrt{1+\sin a}} = 0, \cos a = 0$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2} (\because 0 < a < \pi)$$

039 답 ②

$$\frac{dx}{d\theta} = \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{단, } \sin \theta \neq 0)$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1 - \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

040 답 ③

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t(1+t^2) - (2-2t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{8t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4(1+t^2) - 4t \times 2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{4(t^2-1)}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4(t^2-1)}{(1+t^2)^2}}{-\frac{8t}{(1+t^2)^2}} = \frac{t^2-1}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 2} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2-1}{2t} = \frac{3}{4}$$

041 ③

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 2(at+1) \times a = 2a(at+1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a(at+1)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 4a\sqrt{t}(at+1)$$

$t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 8이므로

$$4a(a+1)=8, \quad a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$$

042 ② $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)+f(4)-f(4-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4)-f(4-h)}{-h} \\ &= \frac{1}{2} f'(4) + \frac{1}{2} f'(4) = f'(4) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{dx}{dt}=3, \quad \frac{dy}{dt}=2t \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3}$$

$$x=3t+1=4 \text{ 에서 } t=1$$

$$\therefore f'(4) = \frac{2}{3}$$

043 ① 100

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 3t^2 + 5t^4 + \cdots + (2n-1)t^{2n-2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 4t^3 + 6t^5 + \cdots + 2nt^{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2t + 4t^3 + 6t^5 + \cdots + 2nt^{2n-1}}{1 + 3t^2 + 5t^4 + \cdots + (2n-1)t^{2n-2}} \\ \therefore f(n) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t + 4t^3 + 6t^5 + \cdots + 2nt^{2n-1}}{1 + 3t^2 + 5t^4 + \cdots + (2n-1)t^{2n-2}} \\ &= \frac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n 2k}{\sum_{k=1}^n (2k-1)} \\ &= \frac{2 \times \frac{n(n+1)}{2}}{2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n} \\ &= \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{n+1}{n} = \frac{101}{100} \text{ 이므로}$$

$$n=100$$

044 ② $-\frac{5}{3}$

$x^3+y^3-3x^2y=1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2 \frac{dy}{dx} - 6xy - 3x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x^2-3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2-6xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-6xy}{3x^2-3y^2} = \frac{x^2-2xy}{x^2-y^2} \quad (\text{단, } x^2 \neq y^2)$$

따라서 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+4}{1-4} = -\frac{5}{3}$$

045 ② $\frac{dy}{dx} = -y \ln y$

$e^x \ln y = e$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x \ln y + \frac{e^x}{y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -y \ln y$$

046 ① ①

$\frac{\pi}{2}x = y + \sin xy$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{\pi}{2} = \frac{dy}{dx} + y \cos xy + x \cos xy \frac{dy}{dx}$$

$$(1+x \cos xy) \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2} - y \cos xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\pi}{2} - y \cos xy}{1+x \cos xy} \quad (\text{단, } 1+x \cos xy \neq 0)$$

위의 식에 $x=2, y=\pi$ 를 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\pi}{2} - \pi \cos 2\pi}{1+2 \cos 2\pi} = -\frac{\pi}{6}$$

047 ② 8

점 $(1, 4)$ 가 곡선 $a\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ 위의 점이므로

$$a+2=b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$a\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (\text{단, } x \neq 0)$$

점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 -4 이므로

$$-2a = -4 \quad \therefore a=2$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=4 \quad \therefore ab=8$$

048 ③ ③

$x = \frac{1}{y^2+y}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y+1}{(y^2+y)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^2+y)^2}{2y+1}$$

$$\text{따라서 } y=1 \text{에서의 } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } -\frac{2^2}{2+1} = -\frac{4}{3}$$

049 답 ④

$x=\sqrt{y^2+1}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

050 답 ①

$x=\ln(\tan y)$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sec^2 y}{\tan y} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\tan y}{\sec^2 y} = \sin y \cos y$$

$x=\ln(\tan y)$ 에서 $x=0$ 일 때

$$0=\ln(\tan y), \tan y=1 \quad \therefore y=\frac{\pi}{4} \left(\because 0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $x=0$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

051 답 ⑤

$g(0)=a$ 라고 하면 $f(a)=0$ 이므로

$$\frac{e^a - e^{-a}}{2} = 0, e^a = e^{-a}, a = -a \quad \therefore a = 0$$

$$\therefore g(0) = 0$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{이므로 } f'(0) = 1$$

$$\therefore g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

052 답 4

$$f(3)=5 \text{이므로 } g(5)=3 \quad \therefore g'(5) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore g(5)g'(5) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

053 답 ⑤

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = a \text{라고 하면 } f(a) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\sin a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{6} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \cos x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b \text{라고 하면 } f(b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore b = \frac{\pi}{3} \left(\because -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{이므로 } g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

054 답 ①

$$(g \circ f)(x) = x \text{이므로 } g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(2) = a \text{라고 하면 } f(a) = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{a-1}{a+2} = 2, a-1 = 2a+4$$

$$\therefore a = -5$$

$$\therefore g(2) = -5$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \text{이므로}$$

$$f'(-5) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{f'(-5)} = 3$$

055 답 ④

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+2}{x-3} = \frac{1}{5} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0 \text{이고 극한값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)+2\} = 0 \quad \therefore f(3) = -2$$

$$\therefore g(-2) = 3$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) \text{이므로}$$

$$f'(3) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore g'(-2) = \frac{1}{f'(3)} = 5$$

056 답 ⑤

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0) + g(0) - g(-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-3h) - g(0)}{-3h}$$

$$= g'(0) + 3g'(0) = 4g'(0)$$

$$g(0) = a \text{라고 하면 } f(a) = 0 \text{이므로}$$

$$\ln(e^a - 1) = 0, e^a - 1 = 1$$

$$e^a = 2 \quad \therefore a = \ln 2$$

$$\therefore g(0) = \ln 2$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \text{이므로}$$

$$f'(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = 2$$

$$\therefore 4g'(0) = 4 \times \frac{1}{f'(\ln 2)} = 2$$

057 답 1

$$f'(x) = a + b \ln x + x \times \frac{b}{x} = a + b \ln x + b$$

$$f''(x) = \frac{b}{x}$$

$$f'(1) = 5 \text{에서 } a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f''(2) = 1 \text{에서 } \frac{b}{2} = 1 \quad \therefore b = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a = 3$$

$$\therefore a - b = 1$$

058 답 0

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \text{이므로 } f'(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = f''(1)$$

이때 $f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$$f''(1) = 0$$

059 답 1

$$f'(x) = (1-2x)e^{x-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{x-x^2} + (1-2x)^2 e^{x-x^2}$$

$$= (4x^2 - 4x - 1)e^{x-x^2}$$

$f''(a) = 0$ 에서

$$4a^2 - 4a - 1 = 0 \quad (\because e^{a-a^2} > 0)$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 합은 1이다.

060 답 9

$$y' = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$$

$$y'' = 2e^{2x}(2 \cos x - \sin x) + e^{2x}(-2 \sin x - \cos x)$$

$$= e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x)$$

$y'' - ay' - by = 0$ 에서

$$e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x) - ae^{2x}(2 \cos x - \sin x) - be^{2x} \cos x = 0$$

$$e^{2x}\{(-2a-b+3) \cos x + (a-4) \sin x\} = 0$$

위의 등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-2a-b+3=0, \quad a-4=0 \quad \therefore a=4, \quad b=-5$$

$$\therefore a-b=9$$

핵심 유형 최종 점검하기

96~97쪽

1 답 ④

유형 01 함수의 몫의 미분법

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+3) - (x+a) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{3-a}{(x+3)^2}$$

$f'(-2) = -3$ 에서

$$3-a = -3 \quad \therefore a = 6$$

2 답 ①

유형 02 함수 $y = x^n$ (n 은 정수)의 도함수

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} = \frac{1}{2} f'(1)$$

이때 $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^3} = x - 2x^{-1} + 5x^{-3}$ 에서

$$f'(x) = 1 + 2x^{-2} - 15x^{-4}$$

$$\therefore \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times (1 + 2 - 15) = -6$$

3 답 ②

유형 03 삼각함수의 도함수

$f(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$$

이때 $f(x) = \frac{\tan x}{1+\sec x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x (1+\sec x) - \tan^2 x \sec x}{(1+\sec x)^2}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{1 \times (1+1) - 0 \times 1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

4 답 ④

유형 04 합성함수의 미분법

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 이므로

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'(0) = f'(g(0))g'(0)$$

$f'(x) = 4(x^2-2)^3 \times 2x = 8x(x^2-2)^3$ 이고 $g(0) = 1$ 이므로

$$f'(g(0)) = f'(1) = -8$$

또 $g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ 이므로

$$g'(0) = -1$$

$$\therefore h'(0) = -8 \times (-1) = 8$$

5 답 1 - ln 7

유형 04 합성함수의 미분법

$$f'(x) = 7^{\sin x} \ln 7 (\sin x)' = \cos x 7^{\sin x} \ln 7$$

$$\therefore f(\pi) + f'(\pi) = 7^{\sin \pi} + \cos \pi 7^{\sin \pi} \ln 7$$

$$= 1 - \ln 7$$

6 답 -2

유형 05 합성함수의 미분법의 응용

$h(x) = f(g(x))$ 라고 하면

$$h(2) = f(g(2)) = f(3) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(g(x)) + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x-2} = h'(2)$$

이때 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$h'(2) = f'(g(2))g'(2)$$

$$= f'(3)g'(2)$$

$$= 1 \times (-2) = -2$$

7 답 -1

유형 06 로그함수의 도함수

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 3ax^2}{x^4 + ax^3 - 2}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{4+3a}{a-1} = -\frac{1}{2}, \quad 8+6a = 1-a$$

$$\therefore a = -1$$

8 답 ①

유형 07 로그함수의 미분의 응용

$f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x+3)}{x-1}}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = \frac{1}{2}(\ln |x-2| + \ln |x+3| - \ln |x-1|)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\therefore \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{5}{12}$$

9 답 ②

유형 08 함수 $y=x^n$ (n 은 실수)의 도함수

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4+\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+be^{2x}) = f(0)$$

$$\therefore a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{2\sqrt{4+\sin x}} & (x>0) \\ 2be^{2x} & (x<0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2\sqrt{4+\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2be^{2x}$$

$$2b = \frac{1}{4} \quad \therefore b = \frac{1}{8}$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $a = \frac{15}{8}$

$$\therefore a-b = \frac{7}{4}$$

10 답 ④

유형 09 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

$$\frac{dx}{dt} = 2t-2, \quad \frac{dy}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2t-2} \quad (\text{단, } t \neq 1)$$

이때 $\frac{3}{2t-2} = -\frac{3}{4}$ 에서

$$2t-2 = -4 \quad \therefore t = -1$$

$$\therefore a = 1+2=3, \quad b = -3+2=-1$$

$$\therefore a+b=2$$

11 답 $\frac{13}{16}$

유형 10 음함수의 미분법

$x^2-xy-2y=1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x-y-x \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x+2) \frac{dy}{dx} = 2x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+2} \quad (\text{단, } x \neq -2)$$

$x=2$ 를 $x^2-xy-2y=1$ 에 대입하면

$$4-2y-2y=1 \quad \therefore y = \frac{3}{4}$$

따라서 점 $(2, \frac{3}{4})$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2 - \frac{3}{4}}{2+2} = \frac{13}{16}$$

12 답 $\frac{2}{11}$

유형 11 역함수의 미분법

$x=2y\sqrt{y+1}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 2\sqrt{y+1} + \frac{2y}{2\sqrt{y+1}} = \frac{3y+2}{\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{y+1}}{3y+2}$$

$$\therefore \lim_{y \rightarrow 3} \frac{dy}{dx} = \lim_{y \rightarrow 3} \frac{\sqrt{y+1}}{3y+2} = \frac{2}{11}$$

13 답 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

유형 12 역함수의 미분법의 응용

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = g'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = a \text{라고 하면 } f(a) = \frac{1}{2}$$

$$\cos a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < a < \pi)$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

이때 $f'(x) = -\sin x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

14 답 $\frac{5}{2}$

유형 13 이계도함수

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x)) - 3}{x-1} = 5$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f'(f(x)) - 3\} = 0$$

$$\therefore f'(f(1)) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x)) - 3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x)) - f'(f(1))}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(1))}{f(x) - f(1)} \times \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right\}$$

$$= f''(f(1))f'(1)$$

$$= f''(3) \times 2 = 2f''(3)$$

따라서 $2f''(3) = 5$ 이므로

$$f''(3) = \frac{5}{2}$$

06 도함수의 활용 (1)

핵심
유형

유형01 ①	유형02 ②	유형03 ④
유형04 $a < \frac{1}{2}$	유형05 2	유형06 ④
유형07 ①	유형08 $\frac{\pi}{2}$	유형09 ③
유형10 ①	유형11 ⑤	유형12 ④
유형13 4π	유형14 4	유형15 ②
유형16 ①		

핵심
유형

완성하기

001 1	002 -1	003 $2e$	004 3	005 ①
006 ④	007 ①	008 16	009 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	
010 $(\ln 2)^2$	011 $-e$	012 ⑤	013 ④	
014 ①	015 1	016 $a < -1$ 또는 $a > 0$		
017 2	018 -8	019 ③	020 ①	
021 $-\frac{5}{4}$	022 ③	023 ③	024 $y = -4x + 1$	
025 $\frac{32}{15}$	026 10	027 ①	028 ④	029 ⑤
030 ③	031 $\frac{\pi}{4} - 1$	032 $-\frac{19}{13}$	033 16	034 ①
035 0	036 3	037 6	038 ④	039 ①
040 ①	041 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	042 $a \geq \frac{1}{2}$	043 ①	044 1
045 0	046 8	047 -5	048 4	
049 $\neg, \sqsubset$	050 2π	051 ③	052 ④	
053 $\frac{3}{4}\pi - 1$	054 $-\frac{32}{e^2}$	055 2	056 $\neg$	
057 ①	058 -2	059 -3	060 $\frac{3}{e}$	061 $\sqrt{3}$
062 ⑤	063 ①	064 $a < -6$ 또는 $a > 6$		
065 ①	066 ②	067 ④		

핵심
유형

최종 점검하기

1 -5	2 2	3 2		
4 $a < -\sqrt{3}$ 또는 $a > \sqrt{3}$	5 ③	6 ④	7 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
8 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$	9 2	10 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	11 ③	12 ④
13 $-e^{2\pi}$	14 4	15 9		

핵심 유형 100~101쪽

유형01 답 ①

$f(x) = \frac{2x+6}{x+1}$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+6)}{(x+1)^2} = -\frac{4}{(x+1)^2}$$

점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = -1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - 4 = -(x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 5$$

즉, $a = -1$, $b = 5$ 이므로

$$a - b = -6$$

유형02 답 ②

$f(x) = x \ln x + x$ 라고 하면

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$$

접점의 좌표를 $(t, t \ln t + t)$ 라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \ln t + 2$$

직선 $3x - y + 7 = 0$, 즉 $y = 3x + 7$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 $f'(t) = 3$ 에서

$$\ln t + 2 = 3, \ln t = 1$$

$$\therefore t = e$$

따라서 접점의 좌표는 $(e, 2e)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e = 3(x - e)$$

$$\therefore y = 3x - e$$

즉, 구하는 y 절편은 $-e$ 이다.

유형03 답 ④

$f(x) = 2e^{x-1}$ 이라고 하면

$$f'(x) = 2e^{x-1}$$

접점의 좌표를 $(t, 2e^{t-1})$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 2e^{t-1}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - 2e^{t-1} = 2e^{t-1}(x - t)$$

$$\therefore y = 2e^{t-1}x + 2e^{t-1}(1 - t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = 2e^{t-1}(1 - t)$$

$$\therefore t = 1 (\because e^{t-1} > 0)$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = 2x$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = 2 \times 2 = 4$$

유형04 답 $a < \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ 이라고 하면 } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, 1 + \frac{1}{t})$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (1 + \frac{1}{t}) = -\frac{1}{t^2}(x - t)$$

이 직선이 점 $(a, 3)$ 을 지나므로

$$3 - (1 + \frac{1}{t}) = -\frac{1}{t^2}(a - t)$$

$t \neq 0$ 이므로 양변에 t^2 을 곱하여 정리하면

$$2t^2 - 2t + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 3)$ 에서 곡선 $y = \frac{x+1}{x}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{2}$$

유형05 답 2

$$f(x) = ax^2 + e^{x-1}, g(x) = 2 \ln x + b \text{ 라고 하면}$$

$$f'(x) = 2ax + e^{x-1}, g'(x) = \frac{2}{x}$$

두 곡선이 $x=1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(1) = g(1) \text{ 에서 } a+1=b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = g'(1) \text{ 에서 } 2a+1=2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=2$$

유형06 답 ④

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t \quad (\text{단, } \sin t \neq 0)$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{dy}{dx} = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2}) \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 } ab = -\frac{2}{3}$$

유형07 답 ①

$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(x + 2y) \frac{dy}{dx} = -2(x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x+2y} \quad (\text{단, } x+2y \neq 0)$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+0}{1+0} = -1$$

따라서 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = -(x-1) \quad \therefore y = -x+1$$

이 직선이 점 $(3, a)$ 를 지나므로

$$a = -3+1 = -2$$

유형08 답 $\frac{\pi}{2}$

$$g(0) = k \text{ 라고 하면 } f(k) = 0$$

$$\cos k = 0 \quad \therefore k = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < k < \pi)$$

$$\therefore g(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{이때 } f'(x) = -\sin x \text{ 이므로 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\therefore g'(0) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{2} = -x \quad \therefore y = -x + \frac{\pi}{2}$$

즉, 구하는 x 절편은 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

핵심 유형 완성하기 102~106쪽

001 답 1

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} \text{ 라고 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

점 $(-2, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-2) = -\frac{2}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 2) \quad \therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{2}{3}, b = \frac{5}{3} \text{ 이므로}$$

$$a+b=1$$

002 답 -1

$$f(x) = x^2 e^{1-x} + 1 \text{ 이라고 하면}$$

$$f'(x) = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = x - 1 \quad \therefore y = x + 1$$

따라서 구하는 x 절편은 -1 이다.

003 답 2e

$f(x) = x \ln x - 3x$ 라고 하면

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 3 = \ln x - 2$$

x 좌표가 e 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(e) = -1$

이때 $f(e) = -2e$ 이므로 점 $(e, -2e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 2e = -(x - e) \quad \therefore y = -x - e$$

이 직선이 점 $(a, -3e)$ 를 지나므로

$$-3e = -a - e \quad \therefore a = 2e$$

004 답 3

$f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{-(1+x^2) - (1-x) \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$$

점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = \frac{1}{2}$

이때 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(-1)} = -2 \text{이므로 구하는 직선의 방정식은}$$

$$y - 1 = -2(x + 1) \quad \therefore 2x + y + 1 = 0$$

따라서 $a = 2, b = 1$ 이므로 $a + b = 3$

005 답 ①

$f(x) = (x-1)e^x$ 이라고 하면

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = e(x-1) \quad \therefore y = ex - e$$

이때 직선 $y = ex - e$ 의 x 절편은 1, y 절편은 $-e$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times e = \frac{e}{2}$$

006 답 ④

$g(x) = \cos x$ 라고 하면 $g'(x) = -\sin x$

점 $(t, \cos t)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(t) = -\sin t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \cos t = -\sin t(x - t) \quad \therefore y = -x \sin t + t \sin t + \cos t$$

위의 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = -x \sin t + t \sin t + \cos t$$

$$x \sin t = t \sin t + \cos t \quad \therefore x = t + \cot t \quad (\because \sin t \neq 0)$$

따라서 $f(t) = t + \cot t$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} t(t + \cot t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \left(t + \frac{1}{\tan t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2 + \frac{t}{\tan t} \right) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

007 답 ①

$f(x) = e^{2x} - 2$ 라고 하면 $f'(x) = 2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t, e^{2t} - 2)$ 라고 하면 직선 $x + 2y - 5 = 0$, 즉

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서

$$2e^{2t} = 2, e^{2t} = 1 \quad \therefore t = 0$$

따라서 접점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 1 = 2x \quad \therefore y = 2x - 1$$

즉, 구하는 x 절편은 $\frac{1}{2}$ 이다.

008 답 16

$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{(x+3) - (x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{t-1}{t+3})$ 이라고 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t) = 4$ 에서

$$\frac{4}{(t+3)^2} = 4, (t+3)^2 = 1$$

$$t+3 = \pm 1 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = -2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-4, 5)$ 또는 $(-2, -3)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 5 = 4(x + 4) \text{ 또는 } y + 3 = 4(x + 2)$$

$$\therefore y = 4x + 21 \text{ 또는 } y = 4x + 5$$

이때 $a > b$ 이므로 $a = 21, b = 5$

$$\therefore a - b = 16$$

009 답 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

$f(x) = \sin 2x$ 라고 하면 $f'(x) = 2 \cos 2x$

접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라고 하면 접선의 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$2 \cos 2t = 1, \cos 2t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{6} \quad (\because 0 < t < \frac{\pi}{2})$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{\pi}{6} \quad \therefore y = x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

즉, 구하는 y 절편은 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ 이다.

010 답 $(\ln 2)^2$

$f(x) = \ln(x+2)$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$ 라고 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$f'(t) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \quad \therefore t = 0$$

따라서 접점의 좌표는 $(0, \ln 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}x \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

이때 직선 $y = \frac{1}{2}x + \ln 2$ 의 x 절편은 $-2 \ln 2$, y 절편은 $\ln 2$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \ln 2 \times \ln 2 = (\ln 2)^2$$

011 답 -e

$f(x)=e^x+ax$ 라고 하면

$$f'(x)=e^x+a$$

곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 점 $(t, 0)$ 에서 접한다고 하면

$$f(t)=e^t+at=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 $(t, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(t)=0$ 에서

$$e^t+a=0 \quad \therefore a=-e^t \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$e^t-e^t \times t=0, e^t(1-t)=0 \quad \therefore t=1 (\because e^t>0)$$

이를 ⑧에 대입하면 $a=-e$

012 답 ⑤

$f(x)=2x \ln x$ 라고 하면

$$f'(x)=2 \ln x+2x \times \frac{1}{x}=2 \ln x+2$$

접점의 좌표를 $(t, 2t \ln t)$ 라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2 \ln t+2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-2t \ln t=(2 \ln t+2)(x-t)$$

$$\therefore y=2(\ln t+1)x-2t \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2=-2t \quad \therefore t=1$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y=2x-2$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$4=2a-2 \quad \therefore a=3$$

013 답 ④

$f(x)=\sqrt{x}+3$ 이라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t}+3)$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(\sqrt{t}+3)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}+3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$3=-\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}+3, \frac{1}{\sqrt{t}}=\sqrt{t} \quad \therefore t=1$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{7}{2}$ 이다.

014 답 ①

$f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ 이라고 하면

$$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{t-3}{t+1})$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기

는 $f'(t)=\frac{4}{(t+1)^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t-3}{t+1}=\frac{4}{(t+1)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{4}{(t+1)^2}x+\frac{t^2-6t-3}{(t+1)^2}$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0=\frac{8}{(t+1)^2}+\frac{t^2-6t-3}{(t+1)^2}, t^2-6t+5=0$$

$$(t-1)(t-5)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 접선의 기울기는 $f'(1)=1, f'(5)=\frac{1}{9}$ 이므로 두 접선의

기울기의 곱은

$$1 \times \frac{1}{9}=\frac{1}{9}$$

015 답 1

$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ 이라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

접점의 좌표를 $(t, e^{\frac{1}{2}t})$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{\frac{1}{2}t}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}x+\left(1-\frac{1}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0=-e^{\frac{1}{2}t}+\left(1-\frac{1}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t}$$

$$-\frac{1}{2}te^{\frac{1}{2}t}=0 \quad \therefore t=0 (\because e^{\frac{1}{2}t}>0)$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1=1$$

016 답 $a<-1$ 또는 $a>0$

$f(x)=xe^{4x}$ 이라고 하면

$$f'(x)=e^{4x}+4xe^{4x}=(1+4x)e^{4x}$$

접점의 좌표를 (t, te^{4t}) 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=(1+4t)e^{4t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-te^{4t}=(1+4t)e^{4t}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-te^{4t}=(1+4t)e^{4t}(a-t)$$

$e^{4t}>0$ 이므로 양변을 e^{4t} 으로 나누어 정리하면

$$4t^2-4at-a=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y=xe^{4x}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수
있으려면 이차방정식 ⑦이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

⑦의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2+4a>0, a(a+1)>0$$

$$\therefore a<-1 \text{ 또는 } a>0$$

017 답 2

$$f(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, 1 - \frac{2}{t})$ 라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{2}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (1 - \frac{2}{t}) = \frac{2}{t^2}(x - t)$$

이 직선이 점 (3, 3)을 지나므로

$$3 - (1 - \frac{2}{t}) = \frac{2}{t^2}(3 - t)$$

$t \neq 0$ 이므로 양변에 t^2 을 곱하여 정리하면

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 (3, 3)에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

018 답 -8

$$f(x) = (2x-a)e^{-x} \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x-a)e^{-x} = (-2x+a+2)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (2t-a)e^{-t})$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (-2t+a+2)e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (2t-a)e^{-t} = (-2t+a+2)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(2t-a)e^{-t} = (-2t+a+2)e^{-t}(-t)$$

$e^{-t} > 0$ 이므로 양변을 e^{-t} 으로 나누어 정리하면

$$2t^2 - at - a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y = (2x-a)e^{-x}$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = a^2 + 8a = 0, a(a+8) = 0$$

$$\therefore a = -8 (\because a \neq 0)$$

019 답 ③

$$f(x) = e^{x+1}, g(x) = \sqrt{ax+b} \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = e^{x+1}, g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

두 곡선이 $x = -1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(-1) = g(-1) \text{에서}$$

$$1 = \sqrt{-a+b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(-1) = g'(-1) \text{에서}$$

$$1 = \frac{a}{2\sqrt{-a+b}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$1 = \frac{a}{2} \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1 = \sqrt{-2+b}, 1 = -2+b \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a+b=5$$

020 답 ①

$$f(x) = \ln 4x, g(x) = 8x^2 + a \text{라고 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 16x$$

두 곡선이 $x=b$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(b) = g(b) \text{에서 } \ln 4b = 8b^2 + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(b) = g'(b) \text{에서 } \frac{1}{b} = 16b$$

$$b^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore b = \frac{1}{4} (\because b > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\ln\left(4 \times \frac{1}{4}\right) = 8 \times \frac{1}{16} + a \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{8}$$

021 답 $-\frac{5}{4}$

$$f(x) = a + \cos^2 x, g(x) = -\sin x \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = -2\cos x \sin x, g'(x) = -\cos x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } a + \cos^2 t = -\sin t$$

$$a + 1 - \sin^2 t = -\sin t$$

$$\therefore a = \sin^2 t - \sin t - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } -2\cos t \sin t = -\cos t$$

$$\cos t(1 - 2\sin t) = 0$$

$$\therefore \cos t = 0 \text{ 또는 } \sin t = \frac{1}{2}$$

(i) $\cos t = 0$ 일 때

$$\sin t = -1 \text{ 또는 } \sin t = 1 \text{이므로 이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$a = 1 \text{ 또는 } a = -1$$

(ii) $\sin t = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\sin t = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = -\frac{5}{4}$$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1 + (-1) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

022 답 ③

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{-2t}{1-t^2} \quad (\text{단, } t \neq \pm 1)$$

$t = 2$ 일 때

$$x = \frac{2 \times 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}, y = \frac{1-2^2}{1+2^2} = -\frac{3}{5}, \frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2}{2^2-1} = \frac{4}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y + \frac{3}{5} = \frac{4}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right) \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{4}{3}, b = -\frac{5}{3} \text{이므로 } a-b=3$$

023 ③

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = 2t - 6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-6}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 4\sqrt{t}(t-3)$$

$t=4$ 일 때

$$x = \sqrt{4} + 1 = 3, y = 4^2 - 6 \times 4 = -8, \frac{dy}{dx} = 4\sqrt{4}(4-3) = 8$$

이므로 접선의 방정식은

$$y + 8 = 8(x - 3) \quad \therefore y = 8x - 32$$

이 직선이 점 $(a, 8)$ 을 지나므로

$$8 = 8a - 32 \quad \therefore a = 5$$

024 ④ $y = -4x + 1$

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 4, \frac{dy}{dt} = 3t^2 - k$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - k}{2t - 4} \quad (\text{단, } t \neq 2)$$

$$t=1 \text{일 때 } \frac{dy}{dx} = -4 \text{이므로}$$

$$\frac{3-k}{2-4} = -4, \quad 3-k=8$$

$$\therefore k = -5$$

$t=1$ 일 때 $x=-1, y=5$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 5 = -4(x + 1)$$

$$\therefore y = -4x + 1$$

025 ④ $\frac{32}{15}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}, \frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

$t = \ln 2$ 일 때

$$x = e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$y = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \therefore y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$$

이때 직선 $y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$ 의 x 절편은 $-\frac{8}{3}$, y 절편은 $\frac{8}{5}$ 이므로 구하는

도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{32}{15}$$

026 ④ 10

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sec^2\theta, \frac{dy}{d\theta} = 4\sec\theta\tan\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4\sec\theta\tan\theta}{2\sec^2\theta} = 2\sin\theta$$

이때 $2\tan\theta = 2\sqrt{3}$, $4\sec\theta = 8$ 에서

$$\tan\theta = \sqrt{3}, \sec\theta = 2$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{일 때 } \frac{dy}{dx} = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

따라서 점 $(2\sqrt{3}, 8)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 직선의 방정식은

$$y - 8 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3}) \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 10$$

즉, 구하는 y 절편은 10이다.

027 ④ ①

$x^2 - \cos y + xy = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + \sin y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + \sin y) \frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+\sin y} \quad (\text{단, } x + \sin y \neq 0)$$

점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{0 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$$

따라서 점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}x \quad \therefore y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

028 ④ ④

$xy + e^y = e$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$y + x \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx} = 0, \quad (x + e^y) \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y} \quad (\text{단, } x + e^y \neq 0)$$

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{0 + e} = -\frac{1}{e}$$

따라서 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{e}x \quad \therefore y = -\frac{1}{e}x + 1$$

즉, 구하는 x 절편은 e 이다.

029 답 ⑤

$y^3 = \ln(5-x^2) + 3xy + 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5-x^2} + 3y + 3x \frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 15y - 3x^2y}{5-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 15y - 3x^2y}{3(y^2 - x)(5-x^2)} \quad (\text{단, } y^2 \neq x)$$

점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \times 2 + 15 \times (-1) - 3 \times 2^2 \times (-1)}{3\{(-1)^2 - 2\}(5-2^2)} = \frac{7}{3}$$

따라서 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 1 = \frac{7}{3}(x - 2) \quad \therefore y = \frac{7}{3}x - \frac{17}{3}$$

$$\text{즉, } a = \frac{7}{3}, b = -\frac{17}{3} \text{이므로}$$

$$a - b = 8$$

030 답 ③

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$x=9$ 를 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ 에 대입하면

$$3 + \sqrt{y} = 4 \quad \therefore y = 1$$

따라서 점 $(9, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 9) \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x + 4$$

이때 직선 $y = -\frac{1}{3}x + 4$ 의 x 절편은 12, y 절편은 4이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

031 답 $\frac{\pi}{4} - 1$

$g(\sqrt{2}) = k$ 라고 하면 $f(k) = \sqrt{2}$

$$2 \sin k = \sqrt{2}, \sin k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore k = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

이때 $f'(x) = 2 \cos x$ 이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$$\therefore g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi}{4} - 1$$

즉, 구하는 y 절편은 $\frac{\pi}{4} - 1$ 이다.

032 답 $-\frac{19}{13}$

$g(-6) = k$ 라고 하면 $f(k) = -6$

$$k^3 + k + 4 = -6, k^3 + k + 10 = 0$$

$$(k+2)(k^2-2k+5)=0 \quad \therefore k = -2 \quad (\because k^2-2k+5 > 0)$$

$$\therefore g(-6) = -2$$

이때 $f'(x) = 3x^2 + 1$ 이므로 $f'(-2) = 13$

$$\therefore g'(-6) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{13}$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(-6, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 2 = \frac{1}{13}(x + 6) \quad \therefore y = \frac{1}{13}x - \frac{20}{13}$$

$$\text{즉, } a = \frac{1}{13}, b = -\frac{20}{13} \text{이므로 } a + b = -\frac{19}{13}$$

033 답 16

$g(0) = k$ 라고 하면 $f(k) = 0$

$$\cos 2k = 0 \quad \therefore k = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 < k < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g(0) = \frac{\pi}{4}$$

이때 $f'(x) = -2 \sin 2x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$$

$$\therefore g'(0) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2}$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}x \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$$

이때 직선 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$ 의 x 절편은 $\frac{\pi}{2}$, y 절편은 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} \quad \therefore a = 16$$

핵심 유형 107~108쪽

유형 09 답 ③

$f(x) = \frac{2x-1}{2x^2+4}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(2x^2+4) - (2x-1) \times 4x}{(2x^2+4)^2} \\ &= \frac{-4x^2+4x+8}{(2x^2+4)^2} = \frac{-(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 2]$ 에서 증가한다.

유형10 답 ①

$$f(x) = (x^2 - ax + 2)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x - a)e^{-x} - (x^2 - ax + 2)e^{-x} \\ = \{-x^2 + (a+2)x - a - 2\}e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } e^{-x} > 0 \text{이므로 } -x^2 + (a+2)x - a - 2 \leq 0$$

이차방정식 $-x^2 + (a+2)x - a - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (a+2)^2 - 4(a+2) \leq 0$$

$$a^2 - 4 \leq 0, (a+2)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

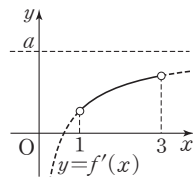
유형11 답 ⑤

$$f(x) = ax + 5 - 2 \ln x \text{에서 } f'(x) = a - \frac{2}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, 3)$ 에서 증가하려면

$1 < x < 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $f'(1) \geq 0$

$$a - 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$



유형12 답 ④

$$f(x) = x\sqrt{8-x^2} \text{에서 } -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \text{이고}$$

$$f'(x) = \sqrt{8-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{-2x^2+8}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{-2(x+2)(x-2)}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(2) = 4$, 극솟값은 $f(-2) = -4$ 이므로 $M = 4, m = -4$

$$\therefore M - m = 8$$

유형13 답 4π

$$f(x) = 2x + 4 \sin x \text{에서 } f'(x) = 2 + 4 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$4 \cos x = -2, \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ 극대	$\searrow$	$\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$, 극솟값은

$$f(\frac{4}{3}\pi) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}, m = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore M + m = 4\pi$$

다른 풀이 $f'(x) = 2 + 4 \cos x$ 에서

$$f''(x) = -4 \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore f''(\frac{2}{3}\pi) = -2\sqrt{3} < 0, f''(\frac{4}{3}\pi) = 2\sqrt{3} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$, 극솟값은

$$f(\frac{4}{3}\pi) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}, m = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore M + m = 4\pi$$

유형14 답 4

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+3) - (ax+b) \times 2x}{(x^2+3)^2} \\ = \frac{-ax^2 - 2bx + 3a}{(x^2+3)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = -1$$

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{2a-2b}{16} = 0 \quad \therefore a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1) = -1 \text{에서}$$

$$\frac{a+b}{4} = -1 \quad \therefore a+b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = -2$$

$$\therefore ab = 4$$

유형15 답 ②

$$f(x) = (x^2 + kx + 5)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x+k)e^x + (x^2+kx+5)e^x$$

$$= \{x^2 + (k+2)x + k+5\}e^x$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$x^2 + (k+2)x + k+5 = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (k+2)^2 - 4(k+5) > 0$$

$$k^2 - 16 > 0, (k+4)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

따라서 $\alpha = -4, \beta = 4$ 이므로

$$\alpha\beta = -16$$

유형 16 답 ①

$$f(x) = ax + \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = a + \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \text{ 또는 } f'(x) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로}$$

$$a - 1 \leq a + \cos x \leq a + 1$$

즉, $a - 1 \leq f'(x) \leq a + 1$ 에서 $a + 1 \leq 0$ 또는 $a - 1 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 1이다.

핵심 유형 완성하기 109~113쪽

034 답 ①

$$f(x) = 2x - \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{2}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$1 + \ln 2$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{1}{2}]$ 에서 감소한다.

035 답 0

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 감소하고 구간 $[-1, 1]$ 에서 증가하므로 $a = -1$, $b = 1$

$$\therefore a + b = 0$$

036 답 3

$$f(x) = x + \sqrt{16 - x^2} \text{에서 } 0 < x \leq 4 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{\sqrt{16 - x^2} - x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\sqrt{16 - x^2} = x, 16 - x^2 = x^2$$

$$x^2 = 8 \quad \therefore x = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < x \leq 4)$$

$0 < x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	4

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $(0, 2\sqrt{2}]$ 이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 = 3$$

037 답 6

$$f(x) = (x^2 - a)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - a)e^x = (x^2 + 2x - a)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 $-4 \leq x \leq b$ 이므로 부등식 $f'(x) \leq 0$ 의 해가 $-4 \leq x \leq b$ 이다.

$$\text{즉, } f'(x) = (x^2 + 2x - a)e^x \leq 0 \text{에서 } e^x > 0 \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x - a \leq 0$$

이 부등식의 해가 $-4 \leq x \leq b$ 이므로 $x = -4$, $x = b$ 는 이차방정식 $x^2 + 2x - a = 0$ 의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4 + b = -2, -4 \times b = -a$$

$$\therefore a = 8, b = 2$$

$$\therefore a - b = 6$$

038 답 ④

$$f(x) = \ln(x^2 + a) + x \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + a} + 1 = \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 + a}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } x^2 + a > 0 \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x + a \geq 0$$

이차방정식 $x^2 + 2x + a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

따라서 a 의 최솟값은 1이다.

039 답 ①

$$f(x) = ax - \cos 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = a + 2 \sin 2x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2$$

$$\therefore a - 2 \leq a + 2 \sin 2x \leq a + 2$$

즉, $a - 2 \leq f'(x) \leq a + 2$ 에서 $a + 2 \leq 0$ 이어야 하므로

$$a \leq -2$$

040 ①

$$f(x) = (1+ax^2)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2axe^x + (1+ax^2)e^x \\ = (ax^2 + 2ax + 1)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^x > 0$ 이므로

$$ax^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

(i) $a=0$ 일 때, $1 \geq 0$ 이므로 $ax^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 은 항상 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a \leq 0, a(a-1) \leq 0 \quad \therefore 0 < a \leq 1$$

(i), (ii)에 의하여 $0 \leq a \leq 1$

따라서 정수 a 는 0, 1의 2개이다.

041 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(x) = \ln(x^2+2) - kx \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - k = \frac{-kx^2 + 2x - 2k}{x^2+2}$$

임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $x^2+2 > 0$ 이므로 $-kx^2 + 2x - 2k \leq 0$

모든 실수 x 에 대하여 위의 부등식을 만족하려면 $k > 0$ 이고 이차방정식 $-kx^2 + 2x - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2k^2 \leq 0, k^2 - \frac{1}{2} \geq 0, \left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(k - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } k \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore k \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because k > 0)$$

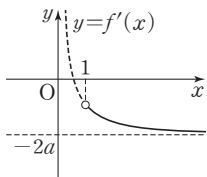
따라서 k 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

042 ③ $a \geq \frac{1}{2}$

$$f(x) = \ln x - 2ax \text{에서 } f'(x) = \frac{1}{x} - 2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, \infty)$ 에서 감소하려면 $x > 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $f'(1) \leq 0$

$$1 - 2a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{2}$$



043 ④ ①

$$f(x) = (x^2+a)e^{2x} \text{에서}$$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + 2(x^2+a)e^{2x} = (2x^2+2x+2a)e^{2x}$$

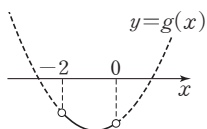
함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 0)$ 에서 감소하려면 $-2 < x < 0$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{2x} > 0$ 이므로 $2x^2 + 2x + 2a \leq 0$, 즉 $x^2 + x + a \leq 0$ 이어야 한다.

$g(x) = x^2 + x + a$ 라고 하면 $-2 < x < 0$ 에서

$g(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$g(-2) \leq 0, g(0) \leq 0$$



$$g(-2) = 4 - 2 + a \leq 0 \text{에서 } a \leq -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$g(0) = a \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$$a \leq -2$$

따라서 a 의 최댓값은 -2 이다.

044 ⑤ 1

$$f(x) = \frac{x^2+2x+a}{x^2+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x+a) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ = \frac{-2x^2 + 2(1-a)x + 2}{(x^2+1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 1)$ 에서 증가하려면 $-1 < x < 1$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $(x^2+1)^2 > 0$ 이므로 $-2x^2 + 2(1-a)x + 2 \geq 0$ 이어야 한다.

$g(x) = -2x^2 + 2(1-a)x + 2$ 라고 하면

$-1 < x < 1$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이어야 하므로

오른쪽 그림에서 $g(-1) \geq 0, g(1) \geq 0$

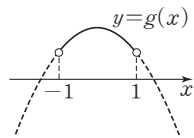
$$g(-1) = -2 - 2(1-a) + 2 \geq 0 \text{에서}$$

$$a \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$g(1) = -2 + 2(1-a) + 2 \geq 0 \text{에서}$$

$$a \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족하는 a 의 값은 1이다.



045 ⑥ 0

$$f(x) = ax - 3\cos x \text{에서 } f'(x) = a + 3\sin x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가하려면 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \sin x < 1$ 이므로

$$0 < 3\sin x < 3 \quad \therefore a < a + 3\sin x < a + 3$$

즉, $a < f'(x) < a + 3$ 에서 $a \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 a 의 최솟값은 0이다.

046 ⑦ 8

$$f(x) = x + \frac{4}{x-1} \text{에서 } x \neq 1 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \\ = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3 극대	$\searrow$		$\searrow$	5 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = -3$, 극솟값은 $f(3) = 5$ 이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$5 - (-3) = 8$$

047 답 -5

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3-(x+1) \times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, $x=-3$ 에서 극소이므로

$$\alpha=1, \beta=-3 \quad \therefore \alpha+2\beta=-5$$

048 답 4

$f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ 에서 $0 < x \leq 4$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$\sqrt{4-x^2}=x, 4-x^2=x^2, x^2=2 \quad \therefore x=\sqrt{2} \quad (\because 0 < x \leq 4)$$

$0 < x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{2}$	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$2\sqrt{2}$ 극대	\	4

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{2}$ 에서 극댓값이 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$a=\sqrt{2}, b=2\sqrt{2} \quad \therefore ab=4$$

049 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$ 에서 $x-2 \geq 0, 8-x \geq 0$ 이므로
 $2 \leq x \leq 8$

따라서 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x | 2 \leq x \leq 8\}$ 이다.

$$ㄴ. f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{8-x}}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$\sqrt{8-x}=\sqrt{x-2}, 8-x=x-2 \quad \therefore x=5$$

$2 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	5	...	8
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	/	$2\sqrt{3}$ 극대	\	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(5)=2\sqrt{3}$ 이다.

ㄷ. ㄴ의 표에 의하여 구간 $[2, 5]$ 에서 증가한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

050 답 2π

$$f(x) = x \sin x + \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$\cos x = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	$\frac{\pi}{2}$ 극대	\	$-\frac{3\pi}{2}$ 극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 극솟값은

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} \text{이므로}$$

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3\pi}{2} \quad \therefore M - m = 2\pi$$

다른 풀이 $f'(x) = x \cos x$ 에서

$$f''(x) = \cos x - x \sin x$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0, f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 극솟값은

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} \text{이므로}$$

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3\pi}{2} \quad \therefore M - m = 2\pi$$

051 답 ③

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \text{에서 } x \neq 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	\		\	e 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(1)=e$ 이다.

다른 풀이 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ 에서

$$f''(x) = \frac{xe^x \times x^2 - (x-1)e^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$

$$\therefore f''(1) = e > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(1)=e$ 이다.

052 답 ④

$f(x) = x \ln x - 3x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 3 = \ln x - 2$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\ln x = 2 \quad \therefore x = e^2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$-e^2$ 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^2$ 에서 극솟값이 $-e^2$ 이므로

$$a = e^2, b = -e^2 \quad \therefore a + b = 0$$

다른 풀이 $f'(x) = \ln x - 2$ 에서

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = e^2$

$$\therefore f''(e^2) = \frac{1}{e^2} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^2$ 에서 극솟값이 $f(e^2) = -e^2$ 이므로

$$a = e^2, b = -e^2 \quad \therefore a + b = 0$$

053 답 $\frac{3}{4}\pi - 1$

$f(x) = 2x - \tan x$ 에서

$$f'(x) = 2 - \sec^2 x$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\sec^2 x = 2, \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$\frac{\pi}{2} - 1$ 극대	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값이 $\frac{\pi}{2} - 1$ 이므로

$$a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4}\pi - 1$$

054 답 $-\frac{32}{e^2}$

$f(x) = (x^2 - 8)e^{-x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - (x^2 - 8)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 8)e^{-x} \\ &= -(x+2)(x-4)e^{-x} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 4$ ($\because e^{-x} > 0$)

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		\	$-4e^2$ 극소	/	$\frac{8}{e^4}$ 극대

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(4) = \frac{8}{e^4}$, 극솟값은 $f(-2) = -4e^2$

이므로 극댓값과 극솟값의 곱은

$$\frac{8}{e^4} \times (-4e^2) = -\frac{32}{e^2}$$

055 답 2

$f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^2 x + (1 + \cos x) \cos x \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \\ &= (\cos x + 1)(2\cos x - 1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$		/	극대	\		\	극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극댓값을 갖고, $x = \frac{5}{3}\pi$ 에서 극솟값을 가지므로 2개의 극값을 갖는다.

056 답 ㄱ

$f(x) = x(\ln x)^2$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= (\ln x + 2) \ln x$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\ln x = -2 \text{ 또는 } \ln x = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		/	$\frac{4}{e^2}$ 극대	\	0 극소	/

- ㄱ. 극댓값 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$ 와 극솟값 $f(1)=0$ 을 갖는다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(1)=0$ 이다.
 ㄷ. 구간 $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ 에서 감소한다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

057 ①

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta, \frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{인 } \theta \text{의 값은}$$

$$\sin\theta=0 \quad \therefore \theta=\pi \quad (\because 0<\theta<2\pi)$$

또 $0<\theta<\pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx}<0$, $\pi<\theta<2\pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx}>0$ 이므로 주어

진 함수는 $\theta=\pi$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은 $1+\cos\pi=0$

058 ② -2

$$f(x)=\frac{4x^2+ax+b}{x^2+1} \text{에서}$$

$$f'(x)=\frac{(8x+a)(x^2+1)-(4x^2+ax+b)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-ax^2+2(4-b)x+a}{(x^2+1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 5를 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=5$$

$$f'(1)=0 \text{에서}$$

$$\frac{8-2b}{4}=0 \quad \therefore b=4$$

$$f(1)=5 \text{에서}$$

$$\frac{4+a+b}{2}=5, a+b=6 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a-b=-2$$

059 ③ -3

$$f(x)=ax^2+bx+\ln x \text{에서}$$

$$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0, f'(1)=0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{에서}$$

$$a+b+2=0 \quad \therefore a+b=-2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(1)=0 \text{에서}$$

$$2a+b+1=0 \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-3 \quad \therefore ab=-3$$

060 ④ $\frac{3}{e}$

$$f(x)=(x^2+ax+a)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+a)e^{-x}$$

$$=\{-x^2+(2-a)x\}e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 b 를 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=b$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } \frac{1-a}{e}=0 \quad \therefore a=1$$

$$f(1)=b \text{에서 } b=\frac{1+2a}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{e}$$

061 ⑤ $\sqrt{3}$

$$f(x)=a\sin x+b\cos x \text{에서}$$

$$f'(x)=a\cos x-b\sin x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{4}{3}\pi$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=0, f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-2$$

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \quad \therefore a-\sqrt{3}b=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-2 \text{에서}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b=-2 \quad \therefore \sqrt{3}a+b=4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\sqrt{3}$, $b=1 \quad \therefore ab=\sqrt{3}$

062 ⑤

$$f(x)=x-3\ln x-\frac{a}{x} \text{에서 } x>0 \text{이고}$$

$$f'(x)=1-\frac{3}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-3x+a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $x>0$ 에서 이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D=9-4a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{4}$$

(ii) (두 근의 합) $=3>0$

(iii) (두 근의 곱) $=a>0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 그 합은 3이다.

063 ①

$$f(x)=(2x^2+6x+a)e^x \text{에서}$$

$$f'(x)=(4x+6)e^x+(2x^2+6x+a)e^x$$

$$=(2x^2+10x+6+a)e^x$$

이때 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$2x^2+10x+6+a=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=25-2(6+a)\leq 0 \quad \therefore a\geq \frac{13}{2}$$

064 답 $a < -6$ 또는 $a > 6$

$$f(x) = \frac{3x+a}{x^2-4} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2-4) - (3x+a) \times 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 - 2ax - 12}{(x^2-4)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-3x^2 - 2ax - 12 = 0$ 이 $x \neq \pm 2$ 인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $a \neq \pm 6$

이차방정식 $-3x^2 - 2ax - 12 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 36 > 0, (a+6)(a-6) > 0$$

$$\therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 6$$

065 답 ①

$$f(x) = kx + 4 \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = k - 4 \sin x$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \text{ 또는 } f'(x) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{이때 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-4 \leq -4 \sin x \leq 4$$

$$\therefore k - 4 \leq k - 4 \sin x \leq k + 4$$

즉, $k - 4 \leq f'(x) \leq k + 4$ 에서 $k + 4 \leq 0$ 또는 $k - 4 \geq 0$ 이어야 하므로

$$k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 4$$

$$\text{따라서 } \alpha = -4, \beta = 4 \text{이므로 } \alpha\beta = -16$$

066 답 ②

$$f(x) = \sin x + ax + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = \cos x + a$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos x = -a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 $f'(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$\text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq a \leq 1$$

그런데 $a = -1$ 또는 $a = 1$ 일 때에는 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 가 극값을

갖도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-1 < a < 1$$

067 답 ④

$$f(x) = (x^3 - 4x^2 + a)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (3x^2 - 8x)e^{-x} - (x^3 - 4x^2 + a)e^{-x}$$

$$= (-x^3 + 7x^2 - 8x - a)e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식

$$-x^3 + 7x^2 - 8x - a = 0, \text{ 즉 } x^3 - 7x^2 + 8x + a = 0 \text{이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.}$$

$$g(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + a \text{라고 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 14x + 8 = (3x - 2)(x - 4)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 4$$

삼차방정식 $g(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) < 0 이어야 하므로

$$g\left(\frac{2}{3}\right)g(4) < 0, \left(\frac{68}{27} + a\right)(-16 + a) < 0$$

$$\therefore -\frac{68}{27} < a < 16$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, \dots, 15$ 의 18개이다.

핵심 유형 최종 점검하기

114~115쪽

1 답 -5

유형 01 접점이 주어진 접선의 방정식

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 2} \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$$

점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = -3$ 이므로 접선의

방정식은

$$y - 1 = -3(x + 1)$$

$$\therefore y = -3x - 2$$

따라서 $a = -3, b = -2$ 이므로

$$a + b = -5$$

2 답 2

유형 02 기울기가 주어진 접선의 방정식

$$f(x) = \ln(x + 3) \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 3}$$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t + 3))$ 이라고 하면 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$\frac{1}{t + 3} = 1, t + 3 = 1 \quad \therefore t = -2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = x + 2 \quad \therefore a = 2$$

3 답 2

유형 03 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

$$f(x) = e^{-x-1} \text{이라고 하면 } f'(x) = -e^{-x-1}$$

접점의 좌표를 (t, e^{-t-1}) 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -e^{-t-1} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - e^{-t-1} = -e^{-t-1}(x - t)$$

$$\therefore y = -e^{-t-1}x + (t + 1)e^{-t-1} \quad \dots\dots ㉠$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = (t + 1)e^{-t-1} \quad \therefore t = -1 (\because e^{-t-1} > 0)$$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = -x$$

이 직선이 점 $(-2, a)$ 를 지나므로

$$a = 2$$

4 답 $a < -\sqrt{3}$ 또는 $a > \sqrt{3}$

유형 04 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 개수

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ 이라고 하면 } f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{t^2+1})$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{t^2+1} = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{t^2+1} = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}(a-t)$$

$(t^2+1)^2 \neq 0$ 이므로 양변에 $(t^2+1)^2$ 을 곱하여 정리하면

$$3t^2 - 2at + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{x^2+1}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을

수 있으려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3 > 0, (a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore a < -\sqrt{3} \text{ 또는 } a > \sqrt{3}$$

5 답 ③

유형 05 공통인 접선

$$f(x) = 2\cos^2 x + k, g(x) = 2\cos x \text{ 라고 하면}$$

$$f'(x) = -4\cos x \sin x, g'(x) = -2\sin x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{ 에서 } 2\cos^2 t + k = 2\cos t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{ 에서}$$

$$-4\cos t \sin t = -2\sin t, \sin t(1 - 2\cos t) = 0$$

$$\therefore \cos t = \frac{1}{2} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2} + k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

6 답 ④

유형 06 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\frac{b}{a}\cot\theta \quad (\text{단, } \sin\theta \neq 0)$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때

$$x = a\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}a}{2}, y = b\sin\frac{\pi}{6} = \frac{b}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}b}{a}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - \frac{b}{2} = -\frac{\sqrt{3}b}{a}\left(x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}b}{a}x + 2b$$

이 직선이 직선 $y = -3x + 4\sqrt{3}$ 과 일치하므로

$$-\frac{\sqrt{3}b}{a} = -3, 2b = 4\sqrt{3} \quad \therefore a = 2, b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 4\sqrt{3}$$

7 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

유형 07 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

$x^2 + 2xy - y^3 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y^2 - 2x)\frac{dy}{dx} = 2x + 2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y}{3y^2 - 2x} \quad (\text{단, } 3y^2 \neq 2x)$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+0}{0-2} = -1$$

따라서 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = -(x-1) \quad \therefore x + y - 1 = 0$$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8 답 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

유형 08 역함수의 그래프의 접선의 방정식

$$g(\sqrt{3}) = k \text{ 라고 하면 } f(k) = \sqrt{3}$$

$$3\tan k = \sqrt{3}, \tan k = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore k = \frac{\pi}{6} \left(\because -\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{이때 } f'(x) = 3\sec^2 x \text{ 이므로 } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$$

$$\therefore g'(\sqrt{3}) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{4}$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}(x - \sqrt{3}) \quad \therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

즉, 구하는 y 절편은 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다.

9 답 2

유형 09 함수의 증가와 감소

$$f(x) = x^2 e^{-x} \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가 $0 \leq x \leq 2$ 이므로

$$a = 0, b = 2 \quad \therefore b - a = 2$$

10 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

유형 10 실수 전체의 구간에서 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

$$f(x) = (1-ax)e^{x^2} \text{에서}$$

$$f'(x) = -ae^{x^2} + 2x(1-ax)e^{x^2} = (-2ax^2 + 2x - a)e^{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{x^2} > 0$ 이므로

$$-2ax^2 + 2x - a \leq 0$$

모든 실수 x 에서 위의 부등식을 만족하려면 $a > 0$ 이고 이차방정식

$$-2ax^2 + 2x - a = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 하면}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a^2 \leq 0, a^2 - \frac{1}{2} \geq 0, \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } a \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore a \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (\because a > 0)$$

따라서 a 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

11 답 ③

유형 11 주어진 구간에서 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

$$f(x) = -4x + a^2 \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = -4 + a^2 \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 감소하려면 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

$$f'(x) \leq 0 \text{이어야 한다.}$$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \cos x < 1$ 이므로

$$0 < a^2 \cos x < a^2$$

$$-4 < -4 + a^2 \cos x < -4 + a^2$$

즉, $-4 < f'(x) < -4 + a^2$ 에서 $-4 + a^2 \leq 0$ 이어야 하므로

$$a^2 - 4 \leq 0, (a+2)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 2$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 1, 2$ 의 4개이다.

12 답 ④

유형 12 함수의 극대, 극소-유리함수, 무리함수

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \text{에서 } x > 2 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{x-2} = \frac{x-5}{2\sqrt{x-2}(x-2)}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=5$$

$x > 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	5	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{3}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(5) = 2\sqrt{3}$ 이다.

13 답 $-e^{2\pi}$

유형 13 함수의 극대, 극소-지수함수, 로그함수, 삼각함수

$$f(x) = e^x(\sin x + \cos x) \text{에서}$$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos x = 0 (\because e^x > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{\frac{\pi}{2}}$ 극대	$\searrow$	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$, 극솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -e^{\frac{3}{2}\pi} \text{이므로 극댓값과 극솟값의 곱은}$$

$$e^{\frac{\pi}{2}} \times (-e^{\frac{3}{2}\pi}) = -e^{2\pi}$$

14 답 4

유형 14 함수의 극대, 극소를 이용한 미정계수의 결정

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x+1) - (x^2 + ax + b)}{(x+1)^2} \\ = \frac{x^2 + 2x + a - b}{(x+1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = -2$$

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{3+a-b}{4} = 0 \quad \therefore a-b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = -2 \text{에서}$$

$$\frac{1+a+b}{2} = -2 \quad \therefore a+b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -4, b = -1$

$$\therefore ab = 4$$

15 답 9

유형 15 극값을 가질 조건-판별식을 이용하는 경우

$$f(x) = \frac{a}{x} - 2x + a \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - 2 + \frac{a}{x} = \frac{-2x^2 + ax - a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $x > 0$ 에서 이차방정식 $-2x^2 + ax - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-2x^2 + ax - a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = a^2 - 8a > 0, a(a-8) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 8$$

$$(ii) \text{ (두 근의 합)} = \frac{a}{2} > 0 \quad \therefore a > 0$$

$$(iii) \text{ (두 근의 곱)} = \frac{a}{2} > 0 \quad \therefore a > 0$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a > 8$

따라서 정수 a 의 최솟값은 9이다.

07 도함수의 활용 (2)

핵심 유형

유형01 ⑤	유형02 ③	유형03 3
유형04 ③	유형05 ㄴ, ㄷ	유형06 $\frac{9}{8}$
유형08 ④	유형09 $\frac{1}{e}$	유형10 3
유형11 $0 < k < \frac{1}{e}$	유형12 ⑤	
유형13 $a \geq 2$	유형14 ④	유형15 ①
		유형16 ②

핵심 유형

완성하기

001 ①	002 1	003 ④	004 ㄷ, ㄹ	005 ⑤
006 2	007 4	008 ④	009 ①	010 18
011 17	012 $\frac{e}{2}$	013 5	014 ③	015 3
016 C, F	017 ㄱ, ㄷ, ㄹ	018 ⑤		
019 ㄱ, ㄷ	020 ⑤	021 2	022 ①	023 ④
024 ①	025 ②	026 ④	027 $-\frac{27}{16}$	028 ①
029 ①	030 ④	031 $\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$	032 ④	
033 ①	034 ⑤	035 2	036 1	
037 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	038 ③	039 1	040 ④	041 ⑤
042 ②	043 $0 < k < \frac{4}{e^2}$	044 3	045 ③	
046 ②	047 $k \leq 2 - 2\ln 2$	048 ②		
049 $a < 0$	050 e	051 ④	052 ①	
053 $0 < k < \frac{e}{2}$	054 ②	055 ①	056 ②	
057 ①	058 ⑤	059 ②	060 ⑤	061 ④
062 ②	063 ②	064 (0, 2)	065 ③	066 4
067 ⑤	068 ③			

핵심 유형

최종 점검하기

1 ③	2 ②	3 ②	4 ㄴ, ㄷ	5 ④
6 1	7 ④	8 $-\frac{1}{3}$	9 π	10 6
11 $\frac{1}{2e}$	12 ②	13 ①	14 ①	15 ③
16 $2e^2$	17 ②	18 $2\sqrt{2}$	19 $2e$	

핵심 유형 118~119쪽

유형01 답 ⑤

$f(x) = x - 2\sin x$ 라고 하면

$f'(x) = 1 - 2\cos x$, $f''(x) = 2\sin x$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = \pi$ ($\because 0 < x < 2\pi$)

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 $\pi < x < 2\pi$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하다.

유형02 답 ③

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 이라고 하면

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$x < -1$, $x > 1$ 에서 $f''(x) < 0$

$-1 < x < 1$ 에서 $f''(x) > 0$

따라서 $x = -1$, $x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x 좌표의 합은

$-1 + 1 = 0$

유형03 답 3

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$

$x = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1) = 4$ 에서 $3 + 2a + b = 4$

$\therefore 2a + b = 1$ ㉠

변곡점의 좌표가 $(-1, 12)$ 이므로

$f(-1) = 12$, $f''(-1) = 0$

$f(-1) = 12$ 에서

$-1 + a - b + c = 12$

$\therefore a - b + c = 13$ ㉡

$f''(-1) = 0$ 에서

$-6 + 2a = 0$ $\therefore a = 3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b = -5$

$a = 3$, $b = -5$ 를 ㉡에 대입하여 풀면 $c = 5$

$\therefore a + b + c = 3 + (-5) + 5 = 3$

유형04 답 ③

$f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...	c	...	d	...	e	...
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 모양이 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로 구하는 구간은 (b, d) 이다.

유형05 답 ㄴ, ㄷ

$$f(x)=e^{-x^2} \text{에서 } f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

$$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)e^{-x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0$$

$$f''(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	$\curvearrowright$	1 극대	$\curvearrowleft$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 치역은 $\{y|0 < y \leq 1\}$ 이다.

ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은

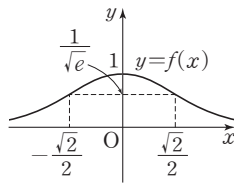
점 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$, 점 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 의 2개이다.

ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



유형06 답 $\frac{9}{8}$

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+2} \text{에서}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+x+2-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+x+2)^2}=\frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 (\because -2 \leq x \leq 2)$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2)=\frac{1}{8}$, 최솟값은 $f(-1)=-1$

이므로 구하는 차는 $\frac{1}{8}-(-1)=\frac{9}{8}$

유형07 답 7

$$f(x)=ax-a \sin 2x \text{에서}$$

$$f'(x)=a-2a \cos 2x=a(1-2 \cos 2x)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{\pi}{6} (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{a}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 극소	$\nearrow$	$\frac{a}{2}\pi$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{a}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{a}{2}\pi=\frac{7}{2}\pi \quad \therefore a=7$$

유형08 답 ④

$$f(x)=\cos^3 x-2 \sin^2 x+4$$

$$=\cos^3 x-2(1-\cos^2 x)+4$$

$$=\cos^3 x+2 \cos^2 x+4$$

$\cos x=t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t)=t^3+2t^2+4$$

$$\therefore g'(t)=3t^2+4t=t(3t+4)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 (\because -1 \leq t \leq 1)$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	3	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$	5

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(1)=5$, 최솟값은 $g(0)=2$ 이므로

$$M=5, m=2 \quad \therefore M+m=7$$

유형09 답 $\frac{1}{e}$

오른쪽 그림에서 점 D의 좌표를

$(t, \frac{1}{2}e^{-t}) (t>0)$ 이라고 하면

$$\overline{AD}=2t, \overline{CD}=\frac{1}{2}e^{-t}$$

직사각형의 넓이를 $S(t)$ 라고 하면

$$S(t)=te^{-t}$$

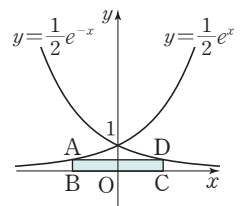
$$\therefore S'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}$$

$$S'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=1 (\because e^{-t}>0)$$

$t>0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ 극대	$\searrow$

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(1)=\frac{1}{e}$ 이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$ 이다.



001 답 ①

$f(x) = 2x \ln x - x^2$ 이라고 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 2x = 2 \ln x + 2 - 2x$$

$$f''(x) = \frac{2}{x} - 2$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 $0 < x < 1$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

002 답 1

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$ 이라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3)$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 3$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 $1 < x < 3$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하다.

따라서 이 구간에 속하는 정수 x 는 2의 1개이다.

003 답 ④

$f(x) = (ax^2 + 3)e^x$ 이라고 하면

$$f'(x) = 2axe^x + (ax^2 + 3)e^x = (ax^2 + 2ax + 3)e^x$$

$$f''(x) = (2ax + 2a)e^x + (ax^2 + 2ax + 3)e^x \\ = (ax^2 + 4ax + 2a + 3)e^x$$

이때 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^x > 0$ 이므로 $ax^2 + 4ax + 2a + 3 \geq 0$ ㉠

(i) $a = 0$ 일 때, $3 \geq 0$ 이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

㉠이 항상 성립해야하므로 $a > 0$ 이어야 하고 이차방정식

$ax^2 + 4ax + 2a + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - a(2a + 3) \leq 0, 2a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(2a - 3) \leq 0 \quad \therefore 0 < a \leq \frac{3}{2} \quad (\because a > 0)$$

(i), (ii)에 의하여 $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$ 이므로 상수 a 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

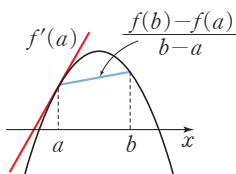
004 답 ㄷ, ㄹ

$$f(b) < f'(a)(b-a) + f(a) \text{에서 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$

이때 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 함수 $y = f(x)$ 에서

x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균 변화율이고, $f'(a)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기 이므로 주어진 부등식을 만족하는 곡선 $y = f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같이 위로 볼록해야 한다.

즉, $0 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$ 이어야 한다.



$$\neg. f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$0 < x < 1 \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$\neg. f'(x) = e^x + e^{-x}, f''(x) = e^x - e^{-x}$$

$$0 < x < 1 \text{에서 } e^x > e^{-x} \text{이므로 } f''(x) > 0$$

$$\neg. f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} \text{이므로}$$

$$0 < x < 1 \text{에서 } f''(x) < 0$$

$$\neg. f'(x) = 1 - \sin x, f''(x) = -\cos x$$

$$0 < x < 1 \text{에서 } f''(x) < 0$$

따라서 보기 중 조건을 만족하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

005 답 ⑤

$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ 이라고 하면

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x - 1)e^{-x} \\ = (x^2 - 4x + 3)e^{-x} = (x-1)(x-3)e^{-x}$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 3$ ($\because e^{-x} > 0$)

$x < 1, x > 3$ 에서 $f''(x) > 0$

$1 < x < 3$ 에서 $f''(x) < 0$

따라서 $x = 1, x = 3$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x 좌표의 합은

$$1 + 3 = 4$$

006 답 2

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 3x$ 라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$x < -1, x > 1$ 에서 $f''(x) > 0$

$-1 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$

따라서 $x = -1, x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 2이다.

007 답 4

$f(x) = 2x^2 + \ln x$ 라고 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2}$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = \frac{1}{2}$ ($\because x > 0$)

$0 < x < \frac{1}{2}$ 에서 $f''(x) < 0$

$x > \frac{1}{2}$ 에서 $f''(x) > 0$

즉, $x = \frac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4$$

008 답 ④

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3} \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x \times 2(x^2+3) \times 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3} = \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$x < -1, x > 1$ 에서 $f''(x) > 0$

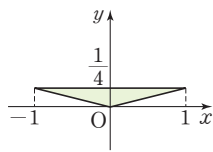
$-1 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$

즉, $x=-1, x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 두 변곡

점의 좌표는 $(-1, \frac{1}{4}), (1, \frac{1}{4})$ 이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



009 답 ①

$$f(x) = 1 + \cos^2 x \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x$$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x = -\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \text{에서 } f''(x) < 0$$

즉, $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡

점의 좌표는 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$ 이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

010 답 18

$$f(x) = x^2 + ax + b \ln x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x + a + \frac{b}{x}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{b}{x^2}$$

$x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -2 이므로 $f'(2) = -2$ 에서

$$4 + a + \frac{b}{2} = -2$$

$$\therefore 2a + b = -12 \quad \dots\dots ①$$

변곡점의 x 좌표가 2이므로 $f''(2)=0$ 에서

$$2 - \frac{b}{4} = 0 \quad \therefore b = 8$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $a = -10$

$$\therefore b - a = 18$$

011 답 17

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, f''(x) = 6x + 2a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극대이므로 $f'(-1)=0$ 에서

$$3 - 2a + b = 0 \quad \therefore 2a - b = 3 \quad \dots\dots ①$$

변곡점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

$$f(1)=0, f''(1)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1 + a + b + c = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$f''(1)=0 \text{에서 } 6 + 2a = 0 \quad \therefore a = -3$$

이를 ①에 대입하면 풀면 $b = -9$

$a = -3, b = -9$ 를 ②에 대입하면 풀면 $c = 11$

$$\therefore a - b + c = -3 - (-9) + 11 = 17$$

012 답 $\frac{e}{2}$

$$f(x) = (\ln ax)^2 \text{이라고 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = 2 \ln ax \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln ax}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln ax}{x^2} = \frac{2(1 - \ln ax)}{x^2}$$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은

$$\ln ax = 1, ax = e \quad \therefore x = \frac{e}{a}$$

$$0 < x < \frac{e}{a} \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$x > \frac{e}{a} \text{에서 } f''(x) < 0$$

즉, $x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표

는 $(\frac{e}{a}, 1)$ 이다.

이때 변곡점이 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$$1 = \frac{2e}{a} - 3, \frac{2e}{a} = 4 \quad \therefore a = \frac{e}{2}$$

013 답 5

$$f(x) = ax^2 + 6 \sin x + 3 \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = 2ax + 6 \cos x, f''(x) = 2a - 6 \sin x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$ 이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x)=0 \text{에서 } 2a - 6 \sin x = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{a}{3}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \frac{a}{3} \leq 1 \quad \therefore -3 \leq a \leq 3$$

$$a = -3 \text{이면 } f''(x) = -6 - 6 \sin x \leq 0$$

$$a = 3 \text{이면 } f''(x) = 6 - 6 \sin x \geq 0$$

즉, $a = -3, a = 3$ 이면 $f''(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a 의 값의 범위는 $-3 < a < 3$ 이므로 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

014 답 ③

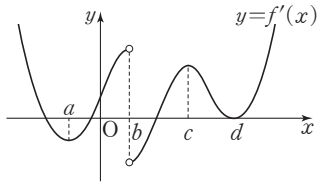
$f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...	c	...	d	...	e	...	f	...
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	-	-

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 모양이 아래로 볼록하려면 $f''(x) > 0$ 이어야 하므로 구하는 구간은 (b, d) 이다.

015 답 3

아래 그림과 같이 a, b, c, d 를 정하고 $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	...	a	...	b	...	c	...	d	...
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	0	+

$x=a, x=c, x=d$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 3이다.

016 답 C, F

A, B, C, D, E, F에서의 x 좌표를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하고 $f'(x), f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	b	c	d	e	f
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-

따라서 $f'(x)f''(x) > 0$ 인 점은 C, F이다.

017 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$

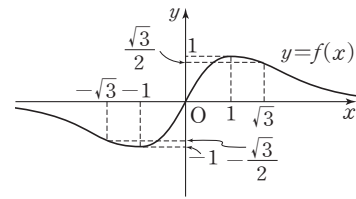
$f''(x)=0$ 인 x 의 값은

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점	↘	-1 극소	↗	0 변곡점	↗	1 극대	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점	↘

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x=1$ 에서 극대이다.

ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 점 $(0, 0)$,

점 $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 의 3개이다.

ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄹ. $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

018 답 ⑤

$$f(x) = \ln(2x^2+1) \text{에서 } f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{4(2x^2+1) - 4x \times 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-8x^2+4}{(2x^2+1)^2} = \frac{-4(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{(2x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$

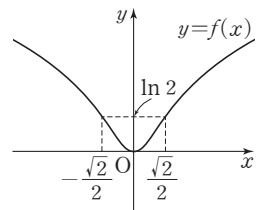
$f''(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↘	$\ln 2$ 변곡점	↘	0 극소	↗	$\ln 2$ 변곡점	↗

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 극솟값은 $f(0)=0$ 이다.

② 치역은 $\{y|y \geq 0\}$ 이다.

③ 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = \ln(2(-x)^2+1) = \ln(2x^2+1) = f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

④ $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln 2)$, 점 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln 2)$ 의 2개이다.

⑤ 구간 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

019 답 ㄱ, ㄷ

$$f(x) = (1-x)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

$$f''(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0$$

$$f''(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗	$\frac{2}{e}$ 변곡점	↘	1 극대	↘

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로

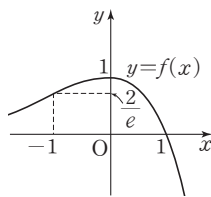
로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.

ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점의 좌표는 $(-1, \frac{2}{e})$ 이다.

ㄷ. $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



020 답 ⑤

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-x} \text{에서 } 0 \leq x \leq 6 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\sqrt{6-x} = \sqrt{x}, 6-x=x \quad \therefore x=3$$

$0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	↗	$2\sqrt{3}$ 극대	↘	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(3)=2\sqrt{3}$, 최솟값은

$$f(0)=f(6)=\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$M=2\sqrt{3}, m=\sqrt{6}$$

$$\therefore Mm=6\sqrt{2}$$

021 답 2

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=4 (\because x>2)$$

$x>2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	8 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최솟값은 8이므로

$$a=4, m=8 \quad \therefore \frac{m}{a}=2$$

022 답 ①

$$f(x) = (x^2-3)e^{-x} \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2-3)e^{-x} = -(x^2-2x-3)e^{-x}$$

$$= -(x+1)(x-3)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 (\because 0 \leq x \leq 4)$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-3	↗	$\frac{6}{e^3}$ 극대	↘	$\frac{13}{e^4}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=0$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$\alpha=3, \beta=0 \quad \therefore \alpha+\beta=3$$

023 답 ④

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \text{에서 } f'(x) = \frac{e^x \times x^2 - e^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 (\because e^x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$\frac{e^2}{4}$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2)=\frac{e^2}{4}$ 이다.

024 답 ①

$$f(x) = 2x \ln x - 4x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 4 = 2 \ln x - 2$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \ln x=1 \quad \therefore x=e$$

구간 $[1, e^2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	e	...	e^2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-4	↘	$-2e$ 극소	↗	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(e^2)=0$, 최솟값은 $f(e)=-2e$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $-2e$ 이다.

025 답 ②

$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\ln x = 2 \quad \therefore x = e^2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e^2}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^2$ 일 때 최댓값은 $\frac{1}{e^2}$ 이므로

$$a = e^2, M = \frac{1}{e^2} \quad \therefore aM = 1$$

026 답 ④

$f(x) = \cos x + x \sin x$ 에서

$$f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $\cos x = 0$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$ 극대	↘	$-\frac{3}{2}\pi$ 극소	↗	1

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, 최솟값은

$$f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{3}{2}\pi \text{ 이므로}$$

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore M - m = 2\pi$$

027 답 $-\frac{27}{16}$

$f(x) = (\cos x - 1) \sin x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^2 x + (\cos x - 1) \cos x \\ &= -\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x - \cos x \\ &= 2\cos^2 x - \cos x - 1 \\ &= (2\cos x + 1)(\cos x - 1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \quad (\because -\pi \leq x \leq \pi)$$

구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	...	$-\frac{2}{3}\pi$	...	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극소	↗	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-\frac{2}{3}\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값은

$$f(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ 이므로 최댓값과 최솟값의 곱은}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \times (-\frac{3\sqrt{3}}{4}) = -\frac{27}{16}$$

028 답 ①

$f(x) = x \ln x + 2x + a$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2$$

$$= \ln x + 3$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\ln x = -3 \quad \therefore x = \frac{1}{e^3}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e^3} + a$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^3}$ 일 때 최솟값은 $-\frac{1}{e^3} + a$ 이므로

$$-\frac{1}{e^3} + a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{e^3}$$

029 답 ①

$f(x) = axe^{-x}$ 에서

$$f'(x) = ae^{-x} - axe^{-x}$$

$$= a(1 - x)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-ae$	↗	$\frac{a}{e}$ 극대	↘	$\frac{2a}{e^2}$

즉, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(1) = \frac{a}{e}$, 최솟값은 $f(-1) = -ae$ 이

므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$$\frac{a}{e} \times (-ae) = -a^2$$

따라서 $-a^2 = -4$ 이므로

$$a = 2 \quad (\because a > 0)$$

030 ④

$f(x) = x\sqrt{a-x^2}$ 에서 $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ 이고

$$f'(x) = \sqrt{a-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}} = \frac{-2x^2+a}{\sqrt{a-x^2}}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$2x^2=a \quad \therefore x = -\sqrt{\frac{a}{2}} \text{ 또는 } x = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{a}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{a}{2}$ 극대	$\searrow$	0

즉, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{a}{2}$, 최솟값은

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = -\frac{a}{2} \text{ 이므로}$$

$$M = \frac{a}{2}, m = -\frac{a}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = 8 \text{ 이므로}$$

$$a=8$$

031 ⑤ $\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

$f(x) = ax + 2a \cos x$ 에서

$$f'(x) = a - 2a \sin x = a(1 - 2 \sin x)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$2a$	$\nearrow$	$\frac{a}{6}\pi + \sqrt{3}a$ 극대	$\searrow$	$\frac{a}{2}\pi$

즉, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{a}{2}\pi = \pi \quad \therefore a=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

032 ④

$$f(x) = 3 \cos^3 x + 9 \sin^2 x + 5$$

$$= 3 \cos^3 x + 9(1 - \cos^2 x) + 5$$

$$= 3 \cos^3 x - 9 \cos^2 x + 14$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = 3t^3 - 9t^2 + 14$$

$$\therefore g'(t) = 9t^2 - 18t = 9t(t-2)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 \left(\because -1 \leq t \leq 1 \right)$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	2	$\nearrow$	14 극대	$\searrow$	8

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(0)=14$, 최솟값은 $g(-1)=2$ 이므로

$$M=14, m=2 \quad \therefore M+m=16$$

033 ①

$$f(x) = 27^x - 3 \times 9^x - 9 \times 3^x + 30$$

$$= (3^x)^3 - 3 \times (3^x)^2 - 9 \times 3^x + 30$$

$3^x = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 30$$

$$\therefore g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=3 \left(\because t > 0 \right)$$

$t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		$\searrow$	3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 $g(3)=3$ 이다.

034 ⑤

$$f(x) = 2(\log_2 x)^3 + 3(\log_2 x)^2 - \log_2 x^{12}$$

$$= 2(\log_2 x)^3 + 3(\log_2 x)^2 - 12 \log_2 x$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$ 에서 $-3 \leq t \leq 2$ 이고, 주어진 함수

$f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t$$

$$\therefore g'(t) = 6t^2 + 6t - 12 = 6(t+2)(t-1)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=-2 \text{ 또는 } t=1$$

$-3 \leq t \leq 2$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	9	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$	4

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(-2)=20$, 최솟값은 $g(1)=-7$ 이므로 최댓값과 최솟값의 차는

$$20 - (-7) = 27$$

035 답 2

점 A의 좌표를 $(t, \sqrt{t+3})$ ($-3 < t < 0$)이라고 하면

$$\overline{AC} = -t, \overline{AB} = \sqrt{t+3}$$

직사각형 ABOC의 넓이를 $S(t)$ 라고 하면

$$S(t) = -t\sqrt{t+3}$$

$$\therefore S'(t) = -\sqrt{t+3} - t \times \frac{1}{2\sqrt{t+3}} = -\frac{3(t+2)}{2\sqrt{t+3}}$$

$S'(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = -2$

$-3 < t < 0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	...	-2	...	0
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	2 극대	↘	

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(-2) = 2$ 이므로 직사각형 ABOC의 넓이의 최댓값은 2이다.

036 답 1

$P(a, a), Q(a, \ln a)$ ($a > 0$)이므로

$$\overline{PQ} = a - \ln a$$

이때 $l(a) = a - \ln a$ 라고 하면

$$l'(a) = 1 - \frac{1}{a}$$

$l'(a) = 0$ 인 a 의 값은 $a = 1$

$a > 0$ 에서 함수 $l(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...
$l'(a)$		-	0	+
$l(a)$		↘	1 극소	↗

따라서 $l(a)$ 의 최솟값은 $l(1) = 1$ 이므로 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 1이다.

037 답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 중점을 O,

$\angle AOD = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 D에

서 $\overline{AO}$ 에 내린 수선의 발을 E라고 하자.

$\triangle ODE$ 에서

$$\overline{DE} = \sin \theta, \overline{OE} = \cos \theta$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\overline{OE} = 2\cos \theta$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라고 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{DE}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 + 2\cos \theta) \times \sin \theta$$

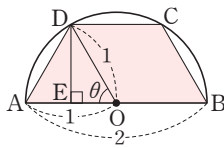
$$= (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\therefore S'(\theta) = -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$= -(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1$$

$$= (\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1)$$



$S'(\theta) = 0$ 인 θ 의 값은

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	↘	

따라서 $S(\theta)$ 의 최댓값은 $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이므로 사다리꼴 ABCD

의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

핵심 유형 126~127쪽

유형10 답 3

$x - e^x + 5 - k = 0$ 에서 $x - e^x + 5 = k$

$f(x) = x - e^x + 5$ 라고 하면 $f'(x) = 1 - e^x$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	4 극대	↘

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$

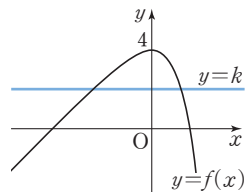
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선

$y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록

하는 실수 k 의 값의 범위는 $k < 4$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.



유형11 답 $0 < k < \frac{1}{e}$

$\ln x = kx$ 에서 $x > 0$ 이므로 $\frac{\ln x}{x} = k$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 라고 하면

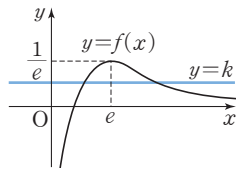
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = e$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{e}$



다른 풀이 방정식 $\ln x = kx$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 곡선 $y=\ln x$ 와 직선 $y=kx$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=k$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 $t(t>0)$ 라고 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서}$$

$$\ln t = kt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

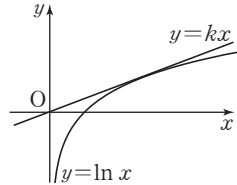
$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$\frac{1}{t} = k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } k = \frac{1}{e}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{e}$



유형12 답 ⑤

$$f(x)=x \ln x - 4x + k \text{라고 하면}$$

$$f'(x)=\ln x + x \times \frac{1}{x} - 4 = \ln x - 3$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=e^3$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e^3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-e^3+k$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(e^3)=-e^3+k$ 이므로 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-e^3+k \geq 0 \quad \therefore k \geq e^3$$

따라서 k 의 최솟값은 e^3 이다.

유형13 답 $a \geq 2$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 부등식 $\sin 2x < ax$ 가 성립

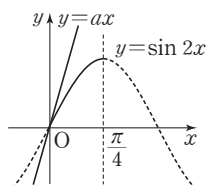
하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=\sin 2x$ 가 직선 $y=ax$ 보다 아래쪽에 있어야 한다.

$$f(x)=\sin 2x \text{라고 하면}$$

$$f'(x)=2 \cos 2x$$

$y=ax$ 가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0)=2$ 이므로 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 주어진 부등식이 성립하려면 $a \geq 2$



유형14 답 ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 - a \cos t$$

$t=\pi$ 에서 점 P의 속도가 3이므로

$$1 - a \cos \pi = 3, 1 + a = 3 \quad \therefore a = 2$$

유형15 답 ①

$\frac{dx}{dt}=2t+1$, $\frac{dy}{dt}=4t+8$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2t+1, 4t+8)$

점 P의 속력이 $3\sqrt{17}$ 이므로

$$\sqrt{(2t+1)^2 + (4t+8)^2} = 3\sqrt{17}$$

$$20t^2 + 68t + 65 = 153, 5t^2 + 17t - 22 = 0$$

$$(5t+22)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

유형16 답 ②

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}$, $\frac{dy}{dt}=-3t^2+3$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(\sqrt{3}, -3t^2+3)$

점 P의 속력이 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3t^2+3)^2} = \sqrt{3}, (-3t^2+3)^2 = 0$$

$$-3t^2+3=0, t^2=1 \quad \therefore t=1 (\because t > 0)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-6t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, -6t)$$

따라서 $t=1$ 에서 가속도는 $(0, -6)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$$

핵심 유형 완성하기 128~132쪽

038 답 ③

$$\ln x + \frac{1}{x} - a = 0 \text{에서 } \ln x + \frac{1}{x} = a$$

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} \text{이라고 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

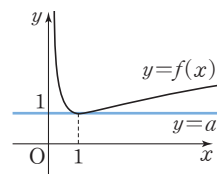
x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=a$ 가 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값은 1이다.



039 ① 1

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\frac{1}{2}$ 극소	/	$\frac{1}{2}$ 극대	\

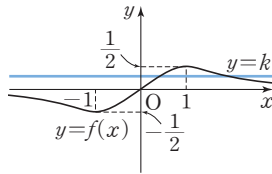
또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이

므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

따라서 정수 k 는 0의 1개이다.



040 ④ ④

$x \sin x + \cos x + k = 0$ 에서 $x \sin x + \cos x = -k$

$f(x) = x \sin x + \cos x$ 라고 하면

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

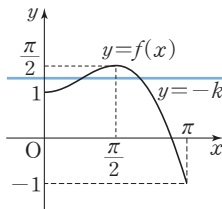
$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	/	$\frac{\pi}{2}$ 극대	\	-1

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$1 \leq -k < \frac{\pi}{2} \quad \therefore -\frac{\pi}{2} < k \leq -1$$

따라서 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = -1$ 이므로 $\alpha\beta = \frac{\pi}{2}$



041 ⑤ ⑤

$2\sqrt{x+1} - x - k = 0$ 에서 $2\sqrt{x+1} - x = k$

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ 라고 하면 $x \geq -1$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$

$x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	1	/	2 극대	\

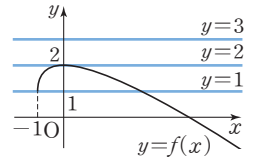
또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $2\sqrt{x+1} - x = k$ 의 실근의 개수는 $k < 1$, $k=2$ 일 때 1,

$1 \leq k < 2$ 일 때 2, $k \geq 2$ 일 때 0이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



042 ② ②

$\ln x = ax^2$ 에서 $x > 0$ 이므로 $\frac{\ln x}{x^2} = a$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \ln x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

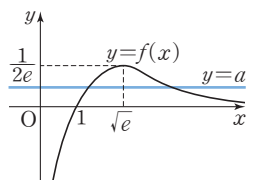
x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	$\frac{1}{2e}$ 극대	\

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이

므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록

하는 실수 a 의 값의 범위는 $0 < a < \frac{1}{2e}$



다른 풀이 $f(x) = \ln x$, $g(x) = ax^2$ 이라고

하면

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 2ax$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라고 하면

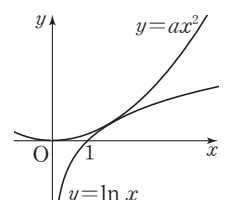
$$f(t) = g(t) \text{에서 } \ln t = at^2$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{1}{t} = 2at \quad \therefore a = \frac{1}{2t^2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a = \frac{1}{2e}$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $0 < a < \frac{1}{2e}$



043 ② $0 < k < \frac{4}{e^2}$

$ke^{-x} = x^2$ 에서 $e^{-x} > 0$ 이므로 $\frac{x^2}{e^{-x}} = k$, 즉 $x^2 e^x = k$

$f(x) = x^2 e^x$ 이라고 하면

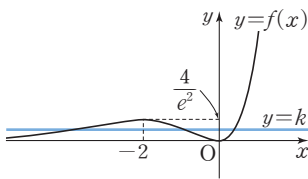
$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(2+x)e^x$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에
서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < \frac{4}{e^2}$

044 ③

$f(x) = e^x$, $g(x) = kx$ 라고 하면

$$f'(x) = e^x, g'(x) = k$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 접할 때

의 접점의 x 좌표를 t 라고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } e^t = kt \quad \cdots \text{㉠}$$

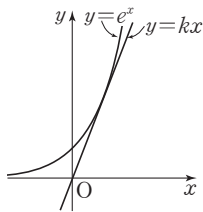
$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } e^t = k \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$e^t = te^t, (t-1)e^t = 0 \quad \therefore t = 1 (\because e^t > 0)$$

이를 ㉡에 대입하면 $k = e$

따라서 실근을 갖지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 \leq k < e$ 이
므로 정수 k 는 0, 1, 2의 3개이다.



045 ③

$-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 방정식 $\sin x = kx$ 가

서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽

그림과 같이 곡선 $y = \sin x$ 와 직선

$y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야

한다.

$f(x) = \sin x$ 라고 하면

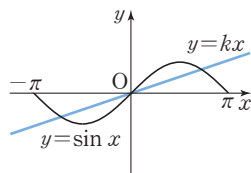
$$f'(x) = \cos x \quad \therefore f'(0) = 1$$

곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = x$

따라서 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나

도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 \leq k < 1$

즉, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 이므로 $\alpha + \beta = 1$



046 ②

$f(x) = x + \frac{4}{x} - k$ 라고 하면

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 2$ ($\because x > 0$)

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$4-k$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 4 - k$ 이므로 $f(x) \geq 0$ 이 성
립하려면

$$4 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

따라서 k 의 최댓값은 4이다.

047 ② $k \leq 2 - 2\ln 2$

$e^x - 2x \geq k$ 에서

$$e^x - 2x - k \geq 0$$

$f(x) = e^x - 2x - k$ 라고 하면

$$f'(x) = e^x - 2$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = \ln 2$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2 - 2\ln 2 - k$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - k$ 이므로

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$2 - 2\ln 2 - k \geq 0$$

$$\therefore k \leq 2 - 2\ln 2$$

048 ②

$(\ln x)^2 - 2\ln x \geq k$ 에서

$$(\ln x)^2 - 2\ln x - k \geq 0$$

$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - k$ 라고 하면

$$f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = e$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-1-k$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(e) = -1 - k$ 이므로 $f(x) \geq 0$ 이
성립하려면

$$-1 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq -1$$

따라서 k 의 최댓값은 -1 이다.

049 답 $a < 0$

$f(x) = \sin x - 2x + a$ 라고 하면

$$f'(x) = \cos x - 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$f'(x) < 0$$

따라서 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $f(x) < 0$ 이 성립하려면 $f(0) < 0$ 이어야 한다.

$$f(0) = a \text{이므로 } a < 0$$

050 답 e

$ae^{-x} \leq \sqrt{2-x^2} \leq be^{-x}$ 에서 $e^{-x} > 0$ 이므로 $a \leq e^x \sqrt{2-x^2} \leq b$

$f(x) = e^x \sqrt{2-x^2}$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \sqrt{2-x^2} + e^x \times \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{-(x+2)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}} e^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 (\because -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e 극대	$\searrow$	0

따라서 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $0 \leq f(x) \leq e$, 즉 $0 \leq e^x \sqrt{2-x^2} \leq e$ 이므로

$$a \leq 0, b \geq e$$

따라서 $b-a$ 의 최솟값은 $e-0=e$

051 답 ④

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $\tan x > ax$ 가

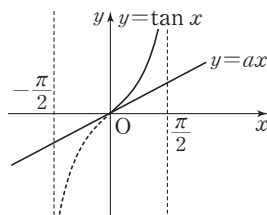
성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \tan x$ 가 직선 $y = ax$ 보다 위쪽에 있어야 한다.

$$f(x) = \tan x \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

$y = ax$ 가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0) = 1$ 이므로 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 주어진 부등식이 성립하려면 $a \leq 1$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

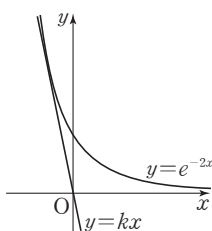


052 답 ①

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^{-2x} \geq kx$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = e^{-2x}$ 이 직선 $y = kx$ 보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.

$$f(x) = e^{-2x}, g(x) = kx \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = -2e^{-2x}, g'(x) = k$$



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t 라고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } e^{-2t} = kt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } -2e^{-2t} = k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

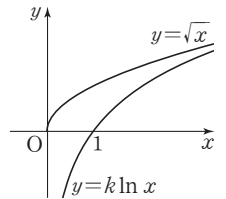
$$e^{-2t} = -2te^{-2t} \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$$

이를 ①에 대입하면 $k = -2e$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 상수 k 의 값의 범위는 $-2e \leq k \leq 0$ 이므로 k 의 최솟값은 $-2e$ 이다.

053 답 $0 < k < \frac{e}{2}$

$x > 0$ 에서 곡선 $y = \sqrt{x}$ 가 곡선 $y = k \ln x$ 보다 위쪽에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = k \ln x \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, g'(x) = \frac{k}{x}$$

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 $t (t > 0)$ 라고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } \sqrt{t} = k \ln t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{k}{t} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t, \ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

이를 ②에 대입하면 $k = \frac{e}{2}$

따라서 구하는 상수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{e}{2}$$

다른 풀이 $x > 0$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있으려면

$$f(x) > g(x) \quad \therefore f(x) - g(x) > 0$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라고 하면}$$

$$h(x) = \sqrt{x} - k \ln x \text{이므로}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{k}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2k}{2x}$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\sqrt{x} = 2k \quad \therefore x = 4k^2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$4k^2$	$\cdots$
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	$2k(1 - \ln 2k)$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(4k^2) = 2k(1 - \ln 2k)$ 이므로 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$2k(1 - \ln 2k) > 0, 1 - \ln 2k > 0 (\because k > 0)$$

$$\ln 2k < 1, 2k < e$$

$$\therefore 0 < k < \frac{e}{2}$$

054 답 ②

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{2} \sin \frac{t}{2}$$

$t = \pi$ 에서 점 P의 속도가 3이므로

$$-\frac{k}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 3, \quad -\frac{k}{2} = 3 \quad \therefore k = -6$$

055 답 ①

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3 \cos t - 2 \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -3 \sin t - 2 \cos t$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속도는

$$a = 3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$$

또 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 가속도는

$$\beta = -3 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2} = -3$$

$$\therefore \alpha + \beta = -5$$

056 답 ②

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2t}{t^2 + 4}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2(t^2 + 4) - 2t \times 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{-2(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2}$$

가속도가 0이면 $a = 0$ 이므로

$$\frac{-2(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2} = 0, \quad t^2 - 4 = 0 \quad (\because (t^2 + 4)^2 > 0)$$

$$(t + 2)(t - 2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

057 답 ①

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = (2t - 1)e^t + (t^2 - t - 1)e^t = (t^2 + t - 2)e^t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$(t^2 + t - 2)e^t = 0, \quad t^2 + t - 2 = 0 \quad (\because e^t > 0)$$

$$(t + 2)(t - 1) = 0 \quad \therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t = 1$ 일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

058 답 ⑤

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = p + \frac{q}{t}, \quad a = \frac{dv}{dt} = -\frac{q}{t^2}$$

$t = 1$ 에서 속도가 5이므로

$$p + q = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $t = 1$ 에서 가속도가 2이므로

$$-q = 2 \quad \therefore q = -2$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $p = 7$

$$\therefore p - q = 9$$

059 답 ②

$$\frac{dx}{dt} = 6, \quad \frac{dy}{dt} = 6 - 6t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(6, 6 - 6t)$$

점 P의 속력이 $6\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{6^2 + (6 - 6t)^2} = 6\sqrt{5}, \quad t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t + 1)(t - 3) = 0 \quad \therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

060 답 ⑤

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(2 \cos t, -\sin t)$$

따라서 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 속도는 $(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 구하는 속력은

$$\sqrt{1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

061 답 ④

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 5, \quad \frac{dy}{dt} = t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(2t - 5, t)$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(2t - 5)^2 + t^2} = \sqrt{5(t - 2)^2 + 5}$$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $t = 2$ 일 때 $\sqrt{5}$ 이다.

062 답 ②

$$\frac{dx}{dt} = 2at - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t} \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(2at - 1, 2\sqrt{t})$$

따라서 $t = 4$ 에서 점 P의 속도는 $(8a - 1, 4)$ 이고, 이때의 속력이 5이므로

$$\sqrt{(8a - 1)^2 + 4^2} = 5, \quad 8a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$(4a + 1)(2a - 1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

063 답 ②

$$\frac{dx}{dt} = 10, \quad \frac{dy}{dt} = -10t + 10 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 공의 속도는}$$

$$(10, -10t + 10)$$

한편 공이 지면에 떨어질 때는 $y = 0$ 이므로

$$-5t^2 + 10t = 0, \quad -5t(t - 2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t = 2$ 에서 공의 속도는 $(10, -10)$ 이므로 구하는 속력은

$$\sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2}$$

064 답 (0, 2)

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t} \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t})$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (e^t + e^{-t})^2} = \sqrt{2(e^{2t} + e^{-2t})}$$

$e^{2t} > 0, e^{-2t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$e^{2t} + e^{-2t} \geq 2\sqrt{e^{2t} \times e^{-2t}} = 2$$

이때 등호는 $e^{2t} = e^{-2t}$, 즉 $t = 0$ 일 때 성립하므로 구하는 속도는

$$(0, 2)$$

065 답 ③

$\frac{dx}{dt}=2, \frac{dy}{dt}=1-t^2$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2, 1-t^2)$

점 P의 속력이 $\sqrt{13}$ 이므로

$$\sqrt{2^2+(1-t^2)^2}=\sqrt{13}, (1-t^2)^2=9$$

$$1-t^2=\pm 3, t^2=4 (\because t>0)$$

$$\therefore t=2 (\because t>0)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-2t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(0, -2t)$

따라서 $t=2$ 에서 가속도는 $(0, -4)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$$

066 답 4

$\frac{dx}{dt}=2t, \frac{dy}{dt}=\frac{k}{t}$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2, \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{t^2}$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(2, -\frac{k}{t^2})$

따라서 $t=1$ 에서 가속도는 $(2, -k)$ 이고, 이때의 가속도의 크기가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{2^2+(-k)^2}=2\sqrt{5}, k^2=16$$

$$\therefore k=4 (\because k>0)$$

067 답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=4\cos 2t, \frac{dy}{dt}=-8\sin 2t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-8\sin 2t, \frac{d^2y}{dt^2}=-16\cos 2t$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-8\sin 2t, -16\cos 2t)$$

$$y=2\text{일 때 } 4\cos 2t=2, \cos 2t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore t=\frac{\pi}{6} (\because 0\leq t\leq \frac{\pi}{2})$$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$ 에서 점 P의 가속도는 $(-4\sqrt{3}, -8)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-8)^2}=4\sqrt{7}$$

068 답 ③

ㄱ. $t=2\pi$ 에서 점 P의 위치는

$$(\cos 2\pi, 2\pi-\sin 2\pi) \therefore (1, 2\pi)$$

ㄴ. $\frac{dx}{dt}=-\sin t, \frac{dy}{dt}=1-\cos t$ ㉠

시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(-\sin t, 1-\cos t)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{(-\sin t)^2+(1-\cos t)^2} &= \sqrt{\sin^2 t+1-2\cos t+\cos^2 t} \\ &= \sqrt{2-2\cos t} \end{aligned}$$

이때 $-1\leq \cos t\leq 1$ 이므로 $\cos t=-1$ 일 때 속력은 최대이고, 최댓값은 $\sqrt{2+2}=2$

ㄷ. ㉠에서 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t, \frac{d^2y}{dt^2}=\sin t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-\cos t, \sin t)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-\cos t)^2+(\sin t)^2}=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$$

따라서 가속도의 크기는 항상 1로 일정하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

핵심 유형 최종 점검하기

133~135쪽

1 답 ③

유형 01 곡선의 오목과 볼록

$f(x)=x^2+4\sin x$ 라고 하면

$$f'(x)=2x+4\cos x, f''(x)=2-4\sin x$$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은

$$\sin x=\frac{1}{2} \therefore x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5\pi}{6} (\because 0<x<2\pi)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 위로 볼록하다.

2 답 ②

유형 02 변곡점

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ 이라고 하면

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(x^2+1)^2-2x\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0\text{인 } x\text{의 값은 } x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}, x>\frac{\sqrt{3}}{3}\text{에서 } f''(x)>0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}\text{에서 } f''(x)<0$$

즉, $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변

곡점의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$ 이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\frac{\sqrt{3}}{3}-(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3 답 ②

유형 03 변곡점을 이용한 미정계수의 결정

$$f(x) = a \sin x + \cos x + bx \text{에서}$$

$$f'(x) = a \cos x - \sin x + b$$

$$f''(x) = -a \sin x - \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이므로 $f'(\frac{\pi}{6}) = 0$ 에서

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2} + b = 0 \quad \therefore \sqrt{3}a + 2b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

변곡점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $f''(\frac{\pi}{2}) = 0$ 에서

$$-a = 0 \quad \therefore a = 0$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $b = \frac{1}{2}$

$$\therefore a + b = \frac{1}{2}$$

4 답 ㄴ, ㄷ

유형 04 도함수를 이용한 그래프의 해석

$f'(x)$, $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	+

ㄱ. $x = b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $f(x)$ 의 극값은 1개이다.

ㄴ. $x = a$, $x = 0$, $x = c$, $x = d$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 그래프의 변곡점은 4개이다.

ㄷ. 구간 $(0, c)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

5 답 ④

유형 05 함수의 그래프

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = e$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은

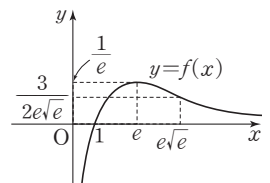
$$\ln x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = e^{\frac{3}{2}}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ 극대	$\searrow$	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ 변곡점	$\searrow$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 극댓값은 $f(e) = \frac{1}{e}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \leq \frac{1}{e}\}$ 이다.

③ $y = f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}})$ 의 1개이다.

④ 구간 $(e\sqrt{e}, \infty)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

⑤ $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 0$, $y = 0$ 이다. 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

6 답 1

유형 06 함수의 최대, 최소

$$f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \text{에서 } 0 < x \leq 1 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\sqrt{1-x^2} = x, 1-x^2 = x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because 0 < x \leq 1)$$

$0 < x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 극대	$\searrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 최댓값이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, M = \sqrt{2}$$

$$\therefore aM = 1$$

7 답 ④

유형 06 함수의 최대, 최소

$$f(x) = x^2 \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$\ln x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$ 이다.

8 답 $-\frac{1}{3}$

유형 06 함수의 최대, 최소

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x (\cos x + 2) - \sin x (-\sin x)}{(\cos x + 2)^2} \\ &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \cos x}{(\cos x + 2)^2} = \frac{1 + 2 \cos x}{(\cos x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 극소	$\nearrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 최솟값은

$$f(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로 최댓값과 최솟값의 곱은}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

9 답 π

유형 07 함수의 최대, 최소를 이용한 미정계수의 결정

$$f(x) = a + 2x \sin x + 2 \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = 2x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a+2$	$\nearrow$	$a+\pi$ 극대	$\searrow$	$a-3\pi$ 극소	$\nearrow$	$a+2$

즉, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(\frac{\pi}{2}) = a + \pi$ 이므로

$$a + \pi = 5\pi \quad \therefore a = 4\pi$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(\frac{3}{2}\pi) = 4\pi - 3\pi = \pi$

10 답 6

유형 08 치환을 이용한 함수의 최대, 최소

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3 x + 3 \cos^2 x + 2 = \sin^3 x + 3(1 - \sin^2 x) + 2 \\ &= \sin^3 x - 3 \sin^2 x + 5 \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = t^3 - 3t^2 + 5 \quad \therefore g'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$$

$g'(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 0$ ($\because -1 \leq t \leq 1$)

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	1	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	3

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(0) = 5$, 최솟값은 $g(-1) = 1$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + 1 = 6$

11 답 $\frac{1}{2e}$

유형 09 함수의 최대, 최소의 활용

점 A의 좌표를 $(t, e^{-2t}) (t > 0)$ 이라고 하면

$$\overline{AC} = t, \overline{AB} = e^{-2t}$$

직사각형 ACOB의 넓이를 $S(t)$ 라고 하면

$$S(t) = te^{-2t}$$

$$\therefore S'(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t} = (1 - 2t)e^{-2t}$$

$$S'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = \frac{1}{2} (\because e^{-2t} > 0)$$

$t > 0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e}$ 이므로 직사각형 ACOB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2e}$ 이다.

12 답 ②

유형 10 방정식의 실근의 개수 (1)

$$\ln x - x + 8 - a = 0 \text{에서 } \ln x - x + 8 = a$$

$$f(x) = \ln x - x + 8 \text{이라고 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

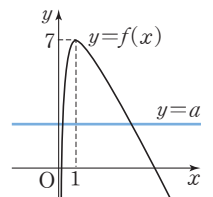
x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	7 극대	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 이

므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $a < 7$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.



13 답 ①

유형 10 방정식의 실근의 개수 (1)

$f(x) = 10 - e^x - e^{-x}$ 이라고 하면

$$f'(x) = -e^x + e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$e^x = e^{-x} \quad \therefore x = 0$$

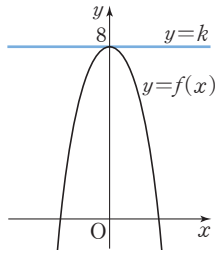
함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값은 8이다.



14 답 ①

유형 12 부등식에의 활용 (1)

$f(x) = e^{x-3} - x + a$ 라고 하면

$$f'(x) = e^{x-3} - 1$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$e^{x-3} = 1, x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-2 + a$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(3) = -2 + a$ 이므로 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-2 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

따라서 a 의 최솟값은 2이다.

15 답 ③

유형 12 부등식에의 활용 (2)

$\cos x > k - x^2$ 에서 $\cos x + x^2 - k > 0$

$f(x) = \cos x + x^2 - k$ 라고 하면

$$f'(x) = -\sin x + 2x$$

$$f''(x) = -\cos x + 2$$

$x > 0$ 일 때 $f''(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수 $f'(x)$ 는 증가하고

$f'(0) = 0$ 이므로 $f'(x) > 0$

또 $x > 0$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 도 증가하고 $f(0) = 1 - k$ 이므로 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$1 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 1$$

따라서 k 의 최댓값은 1이다.

16 답 $2e^2$

유형 14 직선 운동에서의 속도와 가속도

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = e^{2t} + 2(t+a)e^{2t} = (2t+2a+1)e^{2t}$$

점 P가 $t=1$ 에서 운동 방향을 바꾸고, 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$(3+2a)e^2 = 0 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

따라서 $v = (2t-2)e^{2t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라고 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 2e^{2t} + 2(2t-2)e^{2t} = (4t-2)e^{2t}$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 가속도는 $(4-2)e^2 = 2e^2$

17 답 ②

유형 14 직선 운동에서의 속도와 가속도

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = p \cos t - q \sin t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -p \sin t - q \cos t$$

$t = \frac{\pi}{4}$ 에서 점 P의 속도가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2}p - \frac{\sqrt{2}}{2}q = 2\sqrt{2} \quad \therefore p - q = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$t = \frac{\pi}{4}$ 에서 점 P의 가속도가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}p - \frac{\sqrt{2}}{2}q = \sqrt{2} \quad \therefore p + q = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $p = 1, q = -3 \quad \therefore pq = -3$

18 답 $2\sqrt{2}$

유형 15 평면 운동에서의 속도

$\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 2t - 4$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(2t)^2 + (2t-4)^2} = \sqrt{8(t-1)^2 + 8}$$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $t=1$ 일 때 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2\sqrt{2} \quad \therefore \alpha\beta = 2\sqrt{2}$$

19 답 $2e$

유형 16 평면 운동에서의 가속도

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} \\ = e^t \sqrt{2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{2}e^t$$

점 P의 속력이 $\sqrt{2}e$ 이므로 $\sqrt{2}e^t = \sqrt{2}e \quad \therefore t = 1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-2e^t \sin t)^2 + (2e^t \cos t)^2} = 2e^t$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 가속도의 크기는 $2e$ 이다.

08 여러 가지 함수의 부정적분

핵심
유형

유형01 2	유형02 e^2	유형03 2
유형04 ①	유형05 ③	유형06 -2
유형07 $\frac{3}{2e}-1$	유형08 $\frac{1}{2\ln 2}$	유형09 2
유형10 $\frac{3}{2}$	유형11 $\ln 5$	유형12 ⑤
유형13 $-e$	유형14 $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$	

핵심
유형

완성하기

001 $f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln x+4$	002 ③	003 $\frac{23}{3}$
004 $\frac{1}{2}$	005 ⑤	006 ④
007 $4e^x+C$	008 ⑤	009 ②
010 ⑤	011 $\ln 10$	012 ②
013 ③	014 ②	015 $\tan x - \cot x + C$
016 ④	017 ④	018 ⑤
019 2	020 ③	021 ⑤
022 $f(x)=-\frac{1}{2(2x-7)}-2$	023 ⑤	024 ①
025 ③	026 $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-4}+C$	027 7
028 ④	029 9	030 $\frac{1}{2e}$
031 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)$	032 $\frac{7\sqrt{2}}{3}$	033 5
034 ④	035 ③	036 ⑤
037 ④	038 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+1$	039 ④
040 ②	041 ②	042 $\frac{1}{2}$
043 ④	044 ⑤	045 ①
046 ⑤	047 ④	048 $h(x)=\ln x^2+2x-\cos x +3$
049 ②	050 ④	051 ④
052 ①	053 ②	054 ④
055 ①	056 $\ln 3 + \frac{1}{4}$	057 ②
058 ⑤	059 $\frac{1}{4}e^2$	060 $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} + 1$
061 3	062 $\frac{\pi^2}{4}-1$	063 4
064 $\frac{e-2}{e-1}$	065 2	

핵심
유형

최종 점검하기

1 ②	2 ①	3 $\frac{1}{4\ln 2}-2$	4 ④
5 ①	6 $\frac{81}{5}$	7 ③	8 ②
9 ⑤	10 ⑤	11 ⑤	12 ①
13 ②	14 ③	15 ③	16 $3e^2$
17 ④	18 ②		

핵심 유형 138~140쪽

유형01 답 2

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x^2} dx \\ &= \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+2x^{-2}\right) dx \\ &= x-3\ln|x|-2x^{-1}+C = x-3\ln|x|-\frac{2}{x}+C \\ f(e) &= e-\frac{2}{e} \text{이므로 } e-3-\frac{2}{e}+C=e-\frac{2}{e} \quad \therefore C=3 \\ \text{따라서 } f(x) &= x-3\ln|x|-\frac{2}{x}+3 \text{이므로} \\ f(1) &= 1-2+3=2 \end{aligned}$$

유형02 답 e^2

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{e^{2x}-x^2}{e^x+x} dx = \int \frac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x+x} dx \\ &= \int (e^x-x) dx = e^x-\frac{1}{2}x^2+C \\ f(0) &= 3 \text{이므로 } 1+C=3 \quad \therefore C=2 \\ \text{따라서 } f(x) &= e^x-\frac{1}{2}x^2+2 \text{이므로} \\ f(2) &= e^2-2+2=e^2 \quad \therefore a=e^2 \end{aligned}$$

유형03 답 2

$$\begin{aligned} \int \frac{27^x-1}{3^x-1} dx &= \int \frac{(3^x-1)(9^x+3^x+1)}{3^x-1} dx \\ &= \int (9^x+3^x+1) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{3^x}{\ln 3} + x + C \\ \text{따라서 } a &= \frac{1}{\ln 9}, b = \frac{1}{\ln 3} \text{이므로 } \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{\ln 3}}{\frac{1}{\ln 9}} = \frac{2\ln 3}{\ln 3} = 2 \end{aligned}$$

유형04 답 ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} dx = \int (1-\sin x) dx \\ &= x+\cos x+C \\ f(0) &= 1 \text{이므로 } 1+C=1 \quad \therefore C=0 \\ \text{따라서 } f(x) &= x+\cos x \text{이므로 } f(\pi) = \pi+\cos \pi = \pi-1 \end{aligned}$$

유형05 답 ③

$$\begin{aligned} x^2+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2x \text{이므로} \\ \int 2x(x^2+1)^4 dx &= \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5+C = \frac{1}{5}(x^2+1)^5+C \end{aligned}$$

유형06 답 -2

$$\begin{aligned} 9-2x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= -4x \text{이므로} \\ \int \frac{4x}{\sqrt{9-2x^2}} dx &= -\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= -2t^{\frac{1}{2}}+C = -2\sqrt{t}+C = -2\sqrt{9-2x^2}+C \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

유형07 답 $\frac{3}{2e}-1$

$x^2-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$f(x)=\int 3xe^{x^2-1}dx=\int e^t \times \frac{3}{2}dt$$

$$=\frac{3}{2}e^t+C=\frac{3}{2}e^{x^2-1}+C$$

$$f(1)=\frac{1}{2}\text{이므로 } \frac{3}{2}+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=-1$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{3}{2}e^{x^2-1}-1\text{이므로 } f(0)=\frac{3}{2e}-1$$

유형08 답 $\frac{1}{2\ln 2}$

$\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$$

$$=\int \frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt$$

$$=-t^{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln x}+C$$

$$\therefore f(4)-f(2)=\left(-\frac{1}{\ln 4}+C\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}+C\right)$$

$$=-\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}$$

유형09 답 2

$$\int (5-2\sin^2 x)dx=\int \{(1-2\sin^2 x)+4\}dx$$

$$=\int (\cos 2x+4)dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$$

$$\text{따라서 } a=\frac{1}{2}, b=4\text{이므로 } ab=2$$

유형10 답 $\frac{3}{2}$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx=\int \frac{\cos x \times \cos^2 x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int \frac{\cos x (1-\sin^2 x)}{1+\sin x}dx$$

$$=\int \frac{\cos x (1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$$

$$=\int \cos x (1-\sin x)dx$$

$\sin x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$ 이므로

$$f(x)=\int \cos x (1-\sin x)dx=\int (1-t)dt$$

$$=t-\frac{1}{2}t^2+C=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$$

$$f(0)=1\text{이므로 } C=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+1\text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

유형11 답 $\ln 5$

$$f(x)=\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx=\int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}dx$$

$$=\ln |x^2+x-1|+C$$

$$f(1)=0\text{이므로 } C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\ln |x^2+x-1|\text{이므로}$$

$$f(2)=\ln 5$$

유형12 답 ⑤

$$\frac{3x+5}{x^2+2x-3}=\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}\text{로 놓으면}$$

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A-B)}{(x-1)(x+3)}$$

위의 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=3, 3A-B=5$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } A=2, B=1$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{3x+5}{x^2+2x-3}dx$$

$$=\int \left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=2\ln |x-1|+\ln |x+3|+C$$

$$f(-1)=3\ln 2\text{이므로}$$

$$2\ln 2+\ln 2+C=3\ln 2 \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=2\ln |x-1|+\ln |x+3|\text{이므로}$$

$$f(5)=2\ln 4+\ln 8=4\ln 2+3\ln 2=7\ln 2$$

유형13 답 $-e$

$$u(x)=x-2, v'(x)=e^{2x}\text{이라고 하면 } u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\therefore f(x)=\int (x-2)e^{2x}dx=(x-2)\times \frac{1}{2}e^{2x}-\int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{4}e^{2x}\{2(x-2)-1\}+C$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-5)+C$$

$$f(0)=-\frac{5}{4}\text{이므로 } -\frac{5}{4}+C=-\frac{5}{4} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-5)\text{이므로 } f\left(\frac{1}{2}\right)=-e$$

유형14 답 $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

$$f(x)=x^2, g'(x)=\sin x\text{라고 하면}$$

$$f'(x)=2x, g(x)=-\cos x$$

$$\therefore \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \quad \dots\dots ㉠$$

$$\int 2x \cos x dx\text{에서 } u(x)=2x, v'(x)=\cos x\text{라고 하면}$$

$$u'(x)=2, v(x)=\sin x$$

$$\therefore \int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx$$

$$=2x \sin x + 2 \cos x + C_1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + (2x \sin x + 2 \cos x + C_1)$$

$$= (2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C$$

001 답 $f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln x+4$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx \\ &= \int \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= x - 2 \times 2x^{\frac{1}{2}} + \ln x + C = x - 4\sqrt{x} + \ln x + C \\ f(1) &= 1 \text{이므로 } 1 - 4 + C = 1 \quad \therefore C = 4 \\ \therefore f(x) &= x - 4\sqrt{x} + \ln x + 4 \end{aligned}$$

002 답 ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - x^{-2}\right) dx = \ln |x| + \frac{1}{x} + C \\ f(1) &= 0 \text{이므로 } 1 + C = 0 \quad \therefore C = -1 \\ \text{따라서 } f(x) &= \ln |x| + \frac{1}{x} - 1 \text{이므로} \\ f(e) &= 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

003 답 $\frac{23}{3}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} dx \\ &= \int (\sqrt{x}-1) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1) dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C \\ \therefore F(9) - F(4) &= \left(\frac{2}{3} \times 9\sqrt{9} - 9 + C\right) - \left(\frac{2}{3} \times 4\sqrt{4} - 4 + C\right) \\ &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

004 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} F(x) &= xf(x) - \frac{1+x\ln x}{x} \text{에서 } F(x) = xf(x) - \frac{1}{x} - \ln x \\ \text{이 식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= f(x) + xf'(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \\ \therefore f'(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx \\ &= \int (x^{-2} - x^{-3}) dx \\ &= -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C \\ f(1) &= 0 \text{이므로 } -1 + \frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } f(x) &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \text{이므로} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

005 답 ⑤

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \text{이므로 함수 } y=f(x) \text{의 그래프 위의 점 } (1, f(1)) \text{에서} \\ \text{의 접선의 방정식은} \\ y-f(1) &= 2(x-1) \quad \therefore y=2x+f(1)-2 \\ \text{이 접선의 방정식이 } y=2x-1 \text{이므로} \\ f(1)-2 &= -1 \quad \therefore f(1)=1 \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \ln x - 2x^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= \ln x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C \\ \text{이때 } f(1) &= 1 \text{이므로} \\ -2 + C &= 1 \quad \therefore C = 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= \ln x - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3 \text{이므로} \\ f(4) &= \ln 4 - 1 + 3 = 2\ln 2 + 2 \end{aligned}$$

006 답 ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1} dx \\ &= \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^{2x}-e^x+1} dx \\ &= \int (e^x+1) dx = e^x + x + C \\ f(0) &= 2 \text{이므로 } 1 + C = 2 \quad \therefore C = 1 \\ \text{따라서 } f(x) &= e^x + x + 1 \text{이므로} \\ f(1) &= e + 2 \end{aligned}$$

007 답 $4e^x + C$

$$\begin{aligned} &\int (e^x+1)^2 dx - \int (e^x-1)^2 dx \\ &= \int (e^{2x}+2e^x+1) dx - \int (e^{2x}-2e^x+1) dx \\ &= \int 4e^x dx = 4e^x + C \end{aligned}$$

008 답 ⑤

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} ex+2 & (x>0) \\ e^{-x}+1 & (x<0) \end{cases} \text{이므로} \\ f(x) &= \begin{cases} \frac{e}{2}x^2+2x+C_1 & (x>0) \\ -e^{-x}+x+C_2 & (x<0) \end{cases} \\ \text{함수 } f(x) \text{가 실수 전체의 집합에서 연속이면 } x=0 \text{에서 연속이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \\ \therefore C_1 &= -1 + C_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \text{한편 } f(-1) &= 0 \text{이므로} \\ -e-1+C_2 &= 0 \quad \therefore C_2 = e+1 \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } C_1 &= e \\ \text{따라서 } f(x) &= \begin{cases} \frac{e}{2}x^2+2x+e & (x\geq 0) \\ -e^{-x}+x+e+1 & (x\leq 0) \end{cases} \text{이므로} \\ f(2) &= 2e+4+e=3e+4 \end{aligned}$$

009 답 ②

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2k$ 에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2k$$

$f'(x) = e^{x+1} + k$ 에서 $f'(0) = e + k$ 이므로

$$e + k = 2k \quad \therefore k = e$$

즉, $f'(x) = e^{x+1} + e$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^{x+1} + e) dx = e^{x+1} + ex + C$$

$$f(0) = 0 \text{이므로 } e + C = 0 \quad \therefore C = -e$$

따라서 $f(x) = e^{x+1} + ex - e$ 이므로

$$f(-1) = 1 - e - e = 1 - 2e$$

$$\therefore k + f(-1) = e + (1 - 2e) = 1 - e$$

010 답 ⑤

$$\begin{aligned} \int \frac{8^x - 2^x}{2^x - 1} dx &= \int \frac{2^{3x} - 2^x}{2^x - 1} dx = \int \frac{2^x(2^{2x} - 1)}{2^x - 1} dx \\ &= \int \frac{2^x(2^x + 1)(2^x - 1)}{2^x - 1} dx = \int (4^x + 2^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

따라서 $a = \ln 4$, $b = \ln 2$ 이므로

$$a + b = \ln 4 + \ln 2 = 3 \ln 2$$

011 답 $\ln 10$

$y = \log x + 2$ 로 놓으면

$$y - 2 = \log x \quad \therefore x = 10^{y-2} \quad \therefore g(x) = 10^{x-2}$$

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int 10^{x-2} dx = \frac{1}{100} \int 10^x dx \\ &= \frac{1}{100} \times \frac{10^x}{\ln 10} + C = \frac{10^{x-2}}{\ln 10} + C \end{aligned}$$

$$\therefore a = \ln 10$$

012 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 3^x(3^x - 2) dx = \int (3^{2x} - 2 \times 3^x) dx \\ &= \int (9^x - 2 \times 3^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + C \\ &= \frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{3}{2 \ln 3} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2 \ln 3} - \frac{2}{\ln 3} + C = \frac{3}{2 \ln 3} \quad \therefore C = \frac{3}{\ln 3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{9}{2 \ln 3} - \frac{6}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} = \frac{3}{2 \ln 3}$$

013 답 ③

$$f(x) = \int 2^{x+1} dx = 2 \int 2^x dx = 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$$

$$f(1) = \frac{4}{\ln 2} \text{이므로 } \frac{4}{\ln 2} + C = \frac{4}{\ln 2} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2}$ 이므로

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{\ln 2}{2^{n+1}} = \ln 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = \frac{\ln 2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{2}$$

014 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx \\ &= \int (1 + \cos x) dx \\ &= x + \sin x + C \end{aligned}$$

$$\therefore f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\pi + C) - \left(\frac{\pi}{2} + 1 + C\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

015 답 $\tan x - \cot x + C$

$$\begin{aligned} \int (\tan x + \cot x)^2 dx &= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx \\ &= \int \{(\sec^2 x - 1) + 2 + (\csc^2 x - 1)\} dx \\ &= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx \\ &= \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

016 답 ④

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int (\cot x \csc x - \cot^2 x) dx \\ &= \int \{\csc x \cot x - (\csc^2 x - 1)\} dx \\ &= \int (\csc x \cot x - \csc^2 x + 1) dx \\ &= -\csc x + \cot x + x + C \end{aligned}$$

따라서 $p = -1$, $q = 1$, $r = 1$ 이므로

$$p + q + r = 1$$

017 답 ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (a \csc^2 x + b \sec^2 x) dx \\ &= -a \cot x + b \tan x + C \end{aligned}$$

곡선 $y = f(x)$ 가 두 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right)$ 을 지나므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{에서 } -a + b + C = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \text{에서 } a - b + C = \frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면

$$2a - 2b = 1 \quad \therefore a - b = \frac{1}{2}$$

018 ⑤

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C \\
 f(0) &= 1 \text{ 이므로 } -1 + C = 1 \quad \therefore C = 2 \\
 \text{따라서 } f(x) &= x - \cos x + 2 \text{ 이므로} \\
 f(\pi) &= \pi - (-1) + 2 = \pi + 3
 \end{aligned}$$

019 ②

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\
 &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x) \\
 \text{즉, } 2f'(x) &= \frac{4}{\cos 2x + 1} \text{ 이므로 } f'(x) = \frac{2}{\cos 2x + 1} \\
 \therefore f(x) &= \int \frac{2}{\cos 2x + 1} dx = \int \frac{2}{(2 \cos^2 x - 1) + 1} dx \\
 &= \int \sec^2 x dx = \tan x + C \\
 f(0) &= 1 \text{ 이므로 } C = 1 \\
 \text{따라서 } f(x) &= \tan x + 1 \text{ 이므로 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

020 ③

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 2 = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2x - 4 \text{ 이므로} \\
 f(x) &= \int (2x - 4)(x^2 - 4x + 2)^4 dx \\
 &= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} (x^2 - 4x + 2)^5 + C \\
 f(0) &= 6 \text{ 이므로 } \frac{32}{5} + C = 6 \quad \therefore C = -\frac{2}{5} \\
 \text{따라서 } f(x) &= \frac{1}{5} (x^2 - 4x + 2)^5 - \frac{2}{5} \text{ 이므로 } f(1) = -\frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

021 ⑤

$$\begin{aligned}
 3x - 1 = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 3 \text{ 이므로} \\
 \int (3x - 1)^6 dx &= \int t^6 \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{21} t^7 + C \\
 &= \frac{1}{21} (3x - 1)^7 + C \\
 \text{따라서 } a &= 21, b = 7 \text{ 이므로 } a + b = 28
 \end{aligned}$$

022 ④ $f(x) = -\frac{1}{2(2x-7)} - 2$

$$\begin{aligned}
 2x - 7 = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2 \text{ 이므로} \\
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{(2x-7)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} t^{-1} + C \\
 &= -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(2x-7)} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(3) &= -\frac{3}{2} \text{ 이므로 } \frac{1}{2} + C = -\frac{3}{2} \quad \therefore C = -2 \\
 \therefore f(x) &= -\frac{1}{2(2x-7)} - 2
 \end{aligned}$$

023 ⑤

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2 = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 3x^2 \text{ 이므로} \\
 f(x) &= \int x^2 (x^3 - 2)^5 dx = \int t^5 \times \frac{1}{3} dt \\
 &= \frac{1}{18} t^6 + C = \frac{1}{18} (x^3 - 2)^6 + C \\
 f(1) &= \frac{5}{9} \text{ 이므로 } \frac{1}{18} + C = \frac{5}{9} \quad \therefore C = \frac{1}{2} \\
 \therefore f(x) &= \frac{1}{18} (x^3 - 2)^6 + \frac{1}{2} \\
 \text{따라서 다항식 } f(x) \text{ 를 } x+1 \text{ 로 나누었을 때의 나머지는} \\
 f(-1) &= \frac{1}{18} \times 729 + \frac{1}{2} = 41
 \end{aligned}$$

024 ①

$$\begin{aligned}
 ax + 3 = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= a \text{ 이므로} \\
 f(x) &= \int (ax + 3)^7 dx = \int t^7 \times \frac{1}{a} dt \\
 &= \frac{1}{8a} t^8 + C = \frac{1}{8a} (ax + 3)^8 + C \\
 \text{따라서 } f(x) \text{ 의 최고차항의 계수가 } \sqrt{2} \text{ 이므로} \\
 \frac{1}{8a} \times a^8 &= \sqrt{2}, a^7 = (\sqrt{2})^7 \\
 \therefore a &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

025 ③

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int (3x^2 + 2x - 8) dx = x^3 + x^2 - 8x + C_1 \\
 f(0) &= -12 \text{ 이므로 } C_1 = -12 \\
 \therefore f(x) &= x^3 + x^2 - 8x - 12 \\
 \text{이때 } f(x) = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= f'(x) \text{ 이므로} \\
 F(x) &= \int f(x) f'(x) dx = \int t dt \\
 &= \frac{1}{2} t^2 + C_2 = \frac{1}{2} (x^3 + x^2 - 8x - 12)^2 + C_2 \\
 F(3) &= 0 \text{ 이므로 } C_2 = 0 \\
 \therefore F(x) &= \frac{1}{2} (x^3 + x^2 - 8x - 12)^2 = \frac{1}{2} \{(x+2)^2(x-3)\}^2 \\
 \text{따라서 곡선 } y=f(x) \text{ 가 } x \text{ 축과 만나는 두 점의 좌표는 } (-2, 0), \\
 (3, 0) \text{ 이므로 선분 AB의 길이는 } 5 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

026 ④ $\frac{1}{3} \sqrt{3x^2-4} + C$

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 4 = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 6x \text{ 이므로} \\
 \int \frac{x}{\sqrt{3x^2-4}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{6} dt \\
 &= \frac{1}{6} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \sqrt{t} + C \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{3x^2-4} + C
 \end{aligned}$$

027 답 7

$x^2+4=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$f(x)=\int x\sqrt{x^2+4}dx=\int \sqrt{t}\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}+C$$

$$f(0)=\frac{2}{3}\text{이므로 } \frac{8}{3}+C=\frac{2}{3} \quad \therefore C=-2$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2\text{이므로 } f(\sqrt{5})=7$$

028 답 ④

$x^2-6x+11=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-6$ 이므로

$$f(x)=\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+11}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2-6x+11}+C$$

$0\leq x\leq 7$ 에서 $x^2-6x+11=(x-3)^2+2$ 는 $x=3$ 일 때 최솟값을,
 $x=7$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$M=f(7)=3\sqrt{2}+C, \quad m=f(3)=\sqrt{2}+C$$

$$\therefore M-m=2\sqrt{2}$$

029 답 9

$2x-1=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$ 이고, $\frac{dt}{dx}=2$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx=\int \frac{t+1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{4}\sqrt{t}+\frac{1}{4\sqrt{t}}\right)dt=\int\left(\frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}t\sqrt{t}+\frac{1}{2}\sqrt{t}+C$$

$$=\frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1}+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{3}\text{이므로 } C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1}+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\text{이므로}$$

$$f(1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}, \quad f(5)=\frac{1}{6}\times 9\times 3+\frac{1}{2}\times 3=6$$

$$\therefore \frac{f(5)}{f(1)}=9$$

030 답 $\frac{1}{2e}$

$x^2-2x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x-1)e^{x^2-2x}dx=\int e^t\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}+C$$

$$f(2)=\frac{1}{2}\text{이므로 } \frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\text{이므로 } f(1)=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}$$

031 답 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)$

$f'(x)=e^{1-2x}$ 이므로 $f(x)=\int e^{1-2x}dx$

$1-2x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2$ 이므로

$$f(x)=\int e^{1-2x}dx=\int e^t\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{1-2x}+C$$

$$\therefore f(0)-f(1)=\left(-\frac{1}{2}e+C\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-1}+C\right)$$

$$=-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2e}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)$$

032 답 $\frac{7\sqrt{2}}{3}$

$e^x-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$ 이므로

$$f(x)=\int e^x\sqrt{e^x-1}dx=\int \sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}(e^x-1)\sqrt{e^x-1}+C$$

$$f(0)=\sqrt{2}\text{이므로 } C=\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{2}{3}(e^x-1)\sqrt{e^x-1}+\sqrt{2}\text{이므로}$$

$$f(\ln 3)=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2}+\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$$

033 답 5

(i) $x>0$ 일 때, $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ 이므로

$$f(x)=\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C_1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C_1$$

(ii) $x<0$ 일 때, $f'(x)=e^x(e^x+1)^2$ 이므로

$$e^x+1=t\text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx}=e^x$$

$$\therefore f(x)=\int e^x(e^x+1)^2dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{3}(e^x+1)^3+C_2$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C_1 & (x>0) \\ \frac{1}{3}(e^x+1)^3+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 0^-} f(x)=f(0)$$

$$C_1=\frac{8}{3}+C_2 \quad \therefore C_1-C_2=\frac{8}{3} \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore f(1)-f(-1)=\left(\frac{2}{3}+2+C_1\right)-\left\{\frac{1}{3}(e^{-1}+1)^3+C_2\right\}$$

$$=\frac{8}{3}+(C_1-C_2)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}+1\right)^3$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}+1\right)^3 \quad (\because ①)$$

$$\text{따라서 } a=\frac{16}{3}, \quad b=-\frac{1}{3}\text{이므로 } a+b=5$$

034 답 ④

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{(\ln x)^3}{4x} dx = \int \frac{1}{4} t^3 dt = \frac{1}{16} t^4 + C = \frac{1}{16} (\ln x)^4 + C$$

$$f(1) = 1 \text{이므로 } C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{16} (\ln x)^4 + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{16} \times (-2)^4 + 1 = 2$$

035 답 ③

$\ln 3x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\ln 3x + 1}{x} dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln 3x + 1)^2 + C$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \text{이므로 } \frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} (\ln 3x + 1)^2 - \frac{1}{2}$$

036 답 ⑤

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$f(e) = 1 \text{이므로 } 2 + C = 1 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = 2\sqrt{\ln x} - 1$ 이므로 $f(x) = 3$ 에서

$$2\sqrt{\ln x} - 1 = 3, \sqrt{\ln x} = 2, \ln x = 4 \quad \therefore x = e^4$$

037 답 ④

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \text{에서 } f'(x) = \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

$\ln(x^2+1) = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int t \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{4} \{\ln(x^2+1)\}^2 + C$$

$$f(0) = \frac{3}{4} \text{이므로 } C = \frac{3}{4}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4} \{\ln(x^2+1)\}^2 + \frac{3}{4}$ 이므로

$$f(\sqrt{e}-1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

038 답 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$= \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$f(0) = 1 \text{이므로 } C = 1 \quad \therefore f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$$

039 답 ④

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{\cos(\ln x)}{2x} dx = \int \cos t \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(\ln x) + C$$

$$f(1) = 8 \text{이므로 } C = 8$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} \sin(\ln x) + 8 \text{이므로 } f(\sqrt{e^\pi}) = \frac{17}{2}$$

040 답 ②

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\sin 2x + \cos x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C$$

$$f'(x) = \sin 2x + \cos x = 2 \sin x \cos x + \cos x$$

$$= \cos x (2 \sin x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \left(\because 0 < x < \frac{3}{2}\pi \right)$$

$0 < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	극대	\	극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대, $x = \frac{7}{6}\pi$ 에서 극소이고 극댓

값이 2이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ 에서

$$\frac{1}{2} + 1 + C = 2 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

즉, $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + \frac{1}{2}$ 이므로 극솟값은

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{4}$$

041 답 ②

$$\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x) \text{이므로}$$

$$xf(x) = \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \tan^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} - x + C$$

$xf(x) = 2 \tan \frac{x}{2} - x + C$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $C=0$

따라서 $xf(x) = 2 \tan \frac{x}{2} - x$ 이므로 양변에 $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} - 1$$

042 답 ① $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} dx &= \int \frac{\sin x \times \sin^2 x}{1-\cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x (1-\cos^2 x)}{1-\cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x (1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x} dx \\ &= \int \sin x (1+\cos x) dx\end{aligned}$$

$1+\cos x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sin x (1+\cos x) dx &= \int t \times (-1) dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + C \\ &= -\frac{1}{2}(1+\cos x)^2 + C\end{aligned}$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ 이므로 $a+b = \frac{1}{2}$

043 답 ④

$1+\sin x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int (1+\sin x)^3 \cos x dx \\ &= \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{4}(1+\sin x)^4 + C\end{aligned}$$

$f(\pi) = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}(1+\sin x)^4$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \times 2^4 = 4$$

044 답 ⑤

$\cot x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\csc^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \csc^2 x \cot x dx \\ &= \int t \times (-1) dt = -\frac{1}{2}t^2 + C \\ &= -\frac{1}{2}\cot^2 x + C\end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1 \text{에서 } -\frac{1}{2}\cot^2 \frac{\pi}{6} + C = 1 \\ -\frac{3}{2} + C &= 1 \quad \therefore C = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}\cot^2 x + \frac{5}{2}$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프가 점

$\left(\frac{\pi}{4}, a\right)$ 를 지나므로

$$a = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cot^2 \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2} = 2$$

045 답 ①

$$f(x) = \int \sin x \cos 2x dx = \int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx = \int (2t^2 - 1) \times (-1) dt \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + t + C = -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + C\end{aligned}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + 1$ 이므로 $f(\pi) = \frac{2}{3}$

046 답 ⑤

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 5} dx &= \int \frac{(x^3 - 3x^2 + 5)'}{x^3 - 3x^2 + 5} dx \\ &= \ln |x^3 - 3x^2 + 5| + C\end{aligned}$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ 이므로 $f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$

047 답 ④

$$f(x) = \int \frac{4e^{4x}}{e^{4x} + 3} dx = \int \frac{(e^{4x} + 3)'}{e^{4x} + 3} dx = \ln(e^{4x} + 3) + C$$

$f(0) = 0$ 이므로

$$\ln 4 + C = 0 \quad \therefore C = -\ln 4$$

따라서 $f(x) = \ln(e^{4x} + 3) - \ln 4$ 이므로

$$f(\ln 3) = \ln(e^{\ln 81} + 3) - \ln 4 = \ln 84 - \ln 4 = \ln 21$$

048 답 $h(x) = \ln |x^2 + 2x - \cos x| + 3$

$h(x) = 2f(x) + g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}h(x) &= 2 \int \frac{x+1}{x^2+2x-\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{x^2+2x-\cos x} dx \\ &= \int \frac{2x+2+\sin x}{x^2+2x-\cos x} dx = \int \frac{(x^2+2x-\cos x)'}{x^2+2x-\cos x} dx \\ &= \ln |x^2+2x-\cos x| + C\end{aligned}$$

$h(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

$$\therefore h(x) = \ln |x^2 + 2x - \cos x| + 3$$

049 답 ②

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x-1}{x^2-2x-2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-2x-2)'}{x^2-2x-2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-2| + C\end{aligned}$$

$$f(1) = \frac{\ln 3}{2} \text{이므로 } \frac{\ln 3}{2} + C = \frac{\ln 3}{2} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 2|$ 이므로 $f(x) = 0$ 에서

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 2| = 0 \quad \therefore |x^2 - 2x - 2| = 1$$

(i) $x^2 - 2x - 2 = 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

(ii) $x^2 - 2x - 2 = -1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

(i), (ii)에 의하여 자연수 x 의 값은 3이다.

050 ④

$$f'(x)=f(x) \text{에서 } \frac{f'(x)}{f(x)}=1 \text{이므로 양변을 } x \text{에 대하여 적분하면}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 1 dx$$

$$\ln f(x) = x + C \quad (\because f(x) > 0)$$

따라서 $f(x) = e^{x+C}$ 이므로

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{e^{2+C}}{e^{1+C}} = e$$

051 ④

$$f(x) = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx$$

$$= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = \ln |\sec x + \tan x|$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln \left| \sec \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \right| = \ln (\sqrt{2} + 1)$$

052 ①

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \text{로 놓으면}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

위의 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, 3A+2B=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-2, B=3$

$$\therefore f(x) = \int \frac{x}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) dx$$

$$= 3 \ln |x-3| - 2 \ln |x-2| + C$$

따라서 $a=3, b=-2$ 이므로 $ab=-6$

053 ②

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \text{이므로}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |x-1| - \ln |x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

054 ④

$$f(x) = \int \frac{2x^2+3x+2}{x+1} dx = \int \frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1} dx$$

$$= \int \left(2x+1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = x^2 + x + \ln |x+1| + C$$

$f(0)=1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x) = x^2 + x + \ln |x+1| + 1$ 이므로

$$f(1) = \ln 2 + 3$$

055 ①

$$f(x) = \int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{x^2+4x+3} dx = \int \frac{x(x^2+4x+3)+2}{x^2+4x+3} dx$$

$$= \int \left(x + \frac{2}{x^2+4x+3} \right) dx$$

$$= \int \left\{ x + \frac{2}{(x+1)(x+3)} \right\} dx$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \ln |x+1| - \ln |x+3| + C$$

$f(0) = -\ln 3$ 이므로

$$-\ln 3 + C = -\ln 3 \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \ln |x+1| - \ln |x+3|$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 4 = \frac{1}{2} - \ln 2$$

056 ① $\ln 3 + \frac{1}{4}$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x f'(x) = f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \text{로 놓으면}$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}$$

위의 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=0, 2A+B+C=0, A=1$$

$A+B=0$ 에서 $1+B=0 \quad \therefore B=-1$

$2A+B+C=0$ 에서 $2-1+C=0 \quad \therefore C=-1$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$$

$$= \ln x - \ln (x+1) + \frac{1}{x+1} + C$$

$f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$-\ln 2 + \frac{1}{2} + C = \ln 2 + \frac{1}{2} \quad \therefore C = 2 \ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln x - \ln (x+1) + \frac{1}{x+1} + 2 \ln 2$ 이므로

$$f(3) = \ln 3 - \ln 4 + \frac{1}{4} + 2 \ln 2 = \ln 3 + \frac{1}{4}$$

057 ②

$u(x)=2x+1, v'(x)=e^{x-1}$ 이라고 하면

$$u'(x)=2, v(x)=e^{x-1}$$

$$\therefore f(x) = \int (2x+1)e^{x-1} dx = (2x+1)e^{x-1} - \int 2e^{x-1} dx$$

$$= (2x+1)e^{x-1} - 2e^{x-1} + C = (2x-1)e^{x-1} + C$$

$f(1)=1$ 이므로 $1+C=1 \quad \therefore C=0$

$$\therefore f(x) = (2x-1)e^{x-1}$$

058 ⑤

$u(x)=2x, v'(x)=\sin x$ 라고 하면 $u'(x)=2, v(x)=-\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int 2x \sin x dx \\ &= 2x \times (-\cos x) - \int 2 \times (-\cos x) dx \\ &= -2x \cos x + 2 \sin x + C\end{aligned}$$

$f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-2x \cos x + 2 \sin x$ 이므로 $f(\pi)=2\pi$

059 ④ $\frac{1}{4}e^2$

$u(x)=\ln x, v'(x)=x$ 라고 하면 $u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int x \ln x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \\ &= \frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 1) + C\end{aligned}$$

$$f(1)=-\frac{1}{4}\text{이므로 } -\frac{1}{4}+C=-\frac{1}{4} \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 1)$ 이므로 $f(e)=\frac{1}{4}e^2$

060 ④ $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} + 1$

$u(x)=x, v'(x)=\sec^2 x$ 라고 하면 $u'(x)=1, v(x)=\tan x$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int x \sec^2 x dx = x \tan x - \int \tan x dx \\ &= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C\end{aligned}$$

$f(0)=1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x \tan x + \ln |\cos x| + 1$ 이므로

$$k=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}+1$$

061 ③

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+x f'(x)-2x \sin x-x^2 \cos x$$

$$x f'(x)=2x \sin x+x^2 \cos x$$

$$=x(2 \sin x+x \cos x)$$

따라서 $f'(x)=2 \sin x+x \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int (2 \sin x+x \cos x) dx \\ &= \int 2 \sin x dx + \int x \cos x dx \\ &= -2 \cos x + \int x \cos x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int x \cos x dx$ 에서 $u(x)=x, v'(x)=\cos x$ 라고 하면

$$u'(x)=1, v(x)=\sin x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int 1 \times \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= -2 \cos x + x \sin x + \cos x + C \\ &= x \sin x - \cos x + C\end{aligned}$$

$f(2\pi)=1$ 이므로

$$-1+C=1 \quad \therefore C=2$$

따라서 $f(x)=x \sin x - \cos x + 2$ 이므로 $f(\pi)=3$

062 ④ $\frac{\pi^2}{4}-1$

$u(x)=x^2, v'(x)=\cos x$ 라고 하면

$$u'(x)=2x, v(x)=\sin x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int x^2 \cos x dx \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int 2x \sin x dx$ 에서 $s(x)=2x, t'(x)=\sin x$ 라고 하면

$$s'(x)=2, t(x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int 2x \sin x dx &= -2x \cos x + \int 2 \cos x dx \\ &= -2x \cos x + 2 \sin x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \sin x - (-2x \cos x + 2 \sin x + C_1) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \\ &= (x^2-2) \sin x + 2x \cos x + C\end{aligned}$$

$f(0)=1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=(x^2-2) \sin x + 2x \cos x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2+1=\frac{\pi^2}{4}-1$$

063 ④

$u(x)=x^2-2x+3, v'(x)=e^x$ 이라고 하면

$$u'(x)=2x-2, v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int (x^2-2x+3)e^x dx \\ &= (x^2-2x+3)e^x - \int (2x-2)e^x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int (2x-2)e^x dx$ 에서 $s(x)=2x-2, t'(x)=e^x$ 이라고 하면

$$s'(x)=2, t(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int (2x-2)e^x dx &= (2x-2)e^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x-2)e^x - 2e^x + C_1 \\ &= (2x-4)e^x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\int (x^2-2x+3)e^x dx &= (x^2-2x+3)e^x - \{(2x-4)e^x + C_1\} \\ &= (x^2-4x+7)e^x + C\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+7$ 이므로

$$f(1)=1-4+7=4$$

064 답 $\frac{e-2}{e-1}$

$f'(x) = (\ln x)^2$ 이고 $u(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = 1$ 이라고 하면

$$u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (\ln x)^2 dx \\ &= x(\ln x)^2 - \int \frac{2 \ln x}{x} \times x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $s(x) = \ln x$, $t'(x) = 1$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} s'(x) &= \frac{1}{x}, t(x) = x \\ \therefore \int \ln x dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} \times x dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

$$f(1) = 2 + C$$

$$f(e) = e - 2e + 2e + C = e + C$$

따라서 두 점 $(1, f(1))$, $(e, f(e))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{(e + C) - (2 + C)}{e - 1} = \frac{e - 2}{e - 1}$$

065 답 2

$u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^x$ 이라고 하면

$$u'(x) = \cos x, v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx$ 에서 $s(x) = \cos x$, $t'(x) = e^x$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} s'(x) &= -\sin x, t(x) = e^x \\ \therefore \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + f(x) + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x - (e^x \cos x + f(x) + C_1) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - f(x) - C_1 \end{aligned}$$

$$2f(x) = e^x (\sin x - \cos x) - C_1$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{이므로 } C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$ 이므로 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{4}$ 에서

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4f(x)}{e^x} = \frac{2e^x (\sin x - \cos x)}{e^x} \\ &= 2(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

$$\therefore g(\pi) = 2$$

1 답 ②

유형 01 $y = x^n$ (n 은 실수)의 부정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$f(4) = \frac{4}{3} \text{이므로 } \frac{16}{3} - 4 + C = \frac{4}{3} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$ 이므로

$$f(1) = -\frac{4}{3}$$

2 답 ①

유형 02 밑이 e 인 지수함수의 부정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (e^x - 2)(e^{2x} + 2e^x + 4) dx = \int (e^{3x} - 8) dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} - 8x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{1}{3} \text{이므로 } \frac{1}{3} + C = \frac{1}{3} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3} e^{3x} - 8x$ 이므로 $f(1) = \frac{1}{3} e^3 - 8$

3 답 $\frac{1}{4 \ln 2} - 2$

유형 03 밑이 e 가 아닌 지수함수의 부정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx \\ &= \int (4^x - 2^x + 1) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C \end{aligned}$$

$f(0) = 0$ 이므로

$$\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 2} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2 \ln 2}$$

따라서 $f(x) = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + \frac{1}{2 \ln 2}$ 이고 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-1+2h) - F(-1)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-1+2h) - F(-1)}{2h} \\ &= 2F'(-1) = 2f(-1) \\ &= 2 \left(\frac{1}{8 \ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2} - 1 + \frac{1}{2 \ln 2} \right) \\ &= \frac{1}{4 \ln 2} - 2 \end{aligned}$$

4 답 ④

유형 04 삼각함수의 부정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \left(\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \cos x dx = \sin x + C \end{aligned}$$

$$f(a) = f(0) \text{에서 } \sin a + C = C \quad \therefore \sin a = 0$$

따라서 $0 < a < 2\pi$ 이므로 $a = \pi$

5 답 ①

유형 04 삼각함수의 부정적분

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx \\ &= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ &= \tan x - \sec x + C\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$ 이므로 $ab=-1$

6 답 $\frac{81}{5}$

유형 05 치환적분법 - 유리함수

$$\begin{aligned}x^3+6x^2-4=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 3x^2+12x \text{이므로} \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int x(x+4)(x^3+6x^2-4) dx \\ &= \int t^4 \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{15} t^5 + C = \frac{1}{15} (x^3+6x^2-4)^5 + C \\ f(-1) &= \frac{1}{15} \text{이므로 } \frac{1}{15} + C = \frac{1}{15} \quad \therefore C=0 \\ \text{따라서 } f(x) &= \frac{1}{15} (x^3+6x^2-4)^5 \text{이므로 } f(1) = \frac{81}{5}\end{aligned}$$

7 답 ③

유형 05 치환적분법 - 유리함수

$$\begin{aligned}4x-1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 4 \text{이므로} \\ f(x) &= \int \frac{1}{(4x-1)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{4} dt = -\frac{1}{4t} + C \\ &= -\frac{1}{4(4x-1)} + C = \frac{1}{4-16x} + C \\ f(0) &= \frac{1}{4} \text{이므로 } \frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \quad \therefore C=0 \\ \text{따라서 } f(x) &= \frac{1}{4-16x} \text{이므로 } f(x)=1 \text{에서} \\ \frac{1}{4-16x} &= 1, 4-16x=1 \quad \therefore x=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

8 답 ②

유형 06 치환적분법 - 무리함수

$$\begin{aligned}2x+1=t \text{로 놓으면 } x &= \frac{t-1}{2} \text{이고 } \frac{dt}{dx} = 2 \text{이므로} \\ f(x) &= \int \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{t-2}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt = \int \left(\frac{1}{2} \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} t\sqrt{t} - 2\sqrt{t} + C \\ &= \frac{1}{3} (2x+1)\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} + C = \frac{1}{3} (2x-5)\sqrt{2x+1} + C \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= 0 \text{이므로 } C=0 \quad \therefore f(x) = \frac{1}{3} (2x-5)\sqrt{2x+1} \\ \text{따라서 } f'(x) &= \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}} \text{에서 } f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \frac{1}{2} \text{이므로 함수} \\ f(x) \text{의 극솟값은} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} \times (-4) \times \sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

9 답 ⑤

유형 07 치환적분법 - 지수함수

$$\begin{aligned}e^x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= e^x \text{이므로} \\ f(x) &= \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{e^x+1} + C \\ f(0) &= 4\sqrt{2} \text{이므로 } 2\sqrt{2} + C = 4\sqrt{2} \quad \therefore C=2\sqrt{2} \\ \text{따라서 } f(x) &= 2\sqrt{e^x+1} + 2\sqrt{2} \text{이므로} \\ f(\ln 7) &= 2\sqrt{8} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

10 답 ⑤

유형 08 치환적분법 - 로그함수

$$\begin{aligned}\ln x+3=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{x} \text{이므로} \\ f(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x+3} + C \\ \therefore f(e) - f(1) &= (4+C) - (2\sqrt{3}+C) = 4-2\sqrt{3} \\ \text{따라서 } a=4, b=2 \text{이므로 } \frac{a}{b} &= 2\end{aligned}$$

11 답 ⑤

유형 09 치환적분법 - 삼각함수 (1)

$$\begin{aligned}h(x) &= \int 2 \sin 4x \cos^2 2x dx + \int 4 \sin^3 2x \cos 2x dx \\ &= \int (2 \sin 4x \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x \sin 4x) dx \\ &= \int 2 \sin 4x (\cos^2 2x + \sin^2 2x) dx \\ &= \int 2 \sin 4x dx = -\frac{1}{2} \cos 4x + C \\ h(\pi) &= \frac{1}{2} \text{이므로 } -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C=1 \\ \text{따라서 } h(x) &= -\frac{1}{2} \cos 4x + 1 \text{이므로} \\ h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

12 답 ①

유형 10 치환적분법 - 삼각함수 (2)

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \cos^3 x dx = \int \cos x \times \cos^2 x dx \\ &= \int \cos x (1-\sin^2 x) dx \\ \sin x=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= \cos x \text{이므로} \\ f(x) &= \int \cos x (1-\sin^2 x) dx = \int (1-t^2) dt \\ &= t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{3} \text{이므로 } 1 - \frac{1}{3} + C = \frac{1}{3} \quad \therefore C = -\frac{1}{3} \\ \text{따라서 } f(x) &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{3} \text{이므로} \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

13 답 ②

유형 11 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C \\ \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2} + C\right) - \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + C\right) \\ &= \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

14 답 ③

유형 11 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{4^x \ln 2 + x}{4^x + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4^x \ln 4 + 2x}{4^x + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(4^x + x^2)'}{4^x + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(4^x + x^2) + C \\ f(0) &= \frac{\ln 5}{2} \text{이므로 } C = \frac{\ln 5}{2} \\ \therefore f(x) &= \frac{1}{2} \ln(4^x + x^2) + \frac{\ln 5}{2} \\ \text{따라서 } f(-1) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4} + 1\right) + \frac{\ln 5}{2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{5}{4} + \ln 5\right) = \ln \frac{5}{2} \\ \text{이므로} \\ p=2, q=5 \quad \therefore pq=10 \end{aligned}$$

15 답 ③

유형 12 유리함수의 부정적분

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{(x^2-x-2)+x+4}{x^2-x-2} dx \\ &= \int \left(1 + \frac{x+4}{x^2-x-2}\right) dx \\ \text{이때 } \frac{x+4}{x^2-x-2} &= \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \text{로 놓으면} \\ \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} &= \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)} \\ \text{위의 식은 } x \text{에 대한 항등식이므로} \\ A+B=1, -2A+B &= 4 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } A &= -1, B=2 \\ \therefore \int \frac{x^2+2}{x^2-x-2} dx &= \int \left(1 + \frac{x+4}{x^2-x-2}\right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) dx \\ &= x - \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C \\ \text{따라서 } p=1, q=-1, r=2 \text{이므로 } p+q+r &= 2 \end{aligned}$$

16 답 3e²

유형 13 부분적분법

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \text{이므로 } F(x) = xf(x) - x^2 e^x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여} \\ &\text{미분하면} \\ f(x) &= f(x) + xf'(x) - 2xe^x - x^2 e^x \\ xf'(x) &= 2xe^x + x^2 e^x \quad \therefore f'(x) = (x+2)e^x \\ u(x) &= x+2, v'(x) = e^x \text{이라고 하면} \\ u'(x) &= 1, v(x) = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx \\ &= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C \\ f(1) &= 2e \text{이므로 } 2e + C = 2e \quad \therefore C=0 \\ \text{따라서 } f(x) &= (x+1)e^x \text{이므로 } f(2) = 3e^2 \end{aligned}$$

17 답 ④

유형 14 부분적분법 - 여러 번 적용하는 경우

$$\begin{aligned} u(x) &= x(x+1) = x^2 + x, v'(x) = e^x \text{이라고 하면} \\ u'(x) &= 2x+1, v(x) = e^x \\ \therefore f(x) &= \int x(x+1)e^x dx \\ &= x(x+1)e^x - \int (2x+1)e^x dx \quad \dots\dots ㉠ \\ \int (2x+1)e^x dx &\text{에서 } s(x) = 2x+1, t'(x) = e^x \text{이라고 하면} \\ s'(x) &= 2, t(x) = e^x \\ \therefore \int (2x+1)e^x dx &= (2x+1)e^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x+1)e^x - 2e^x + C_1 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+1)e^x - \{(2x+1)e^x - 2e^x + C_1\} \\ &= x(x+1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - x + 1)e^x + C \\ f(0) &= 1 \text{이므로 } 1 + C = 1 \quad \therefore C=0 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ 이므로 $f(3) = 7e^3$

18 답 ②

유형 14 부분적분법 - 여러 번 적용하는 경우

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos 2x, v'(x) = e^{-x} \text{이라고 하면} \\ u'(x) &= -2\sin 2x, v(x) = -e^{-x} \\ \therefore f(x) &= \int e^{-x} \cos 2x dx \\ &= -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx \quad \dots\dots ㉠ \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &\text{에서 } s(x) = \sin 2x, t'(x) = e^{-x} \text{이라고 하면} \\ s'(x) &= 2\cos 2x, t(x) = -e^{-x} \\ \therefore \int e^{-x} \sin 2x dx &= -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx \\ &= -e^{-x} \sin 2x + 2f(x) + C_1 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{-x} \cos 2x - 2(-e^{-x} \sin 2x + 2f(x) + C_1) \\ &= -e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4f(x) - 2C_1 \\ 5f(x) &= e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) - 2C_1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{5} e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + C$$

$$f(0) = -\frac{1}{5} \text{이므로 } \frac{1}{5} \times (-1) + C = -\frac{1}{5} \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{5} e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x)$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{4}} \times 2 = \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{4}}$$

09 여러 가지 함수의 정적분

핵심
유형

유형01 ①	유형02 3	유형03 ①
유형04 $2 - \frac{1}{e} + 2\ln 2$	유형05 ⑤	유형06 ④
유형07 ③	유형08 $\frac{5}{24}$	유형09 $\frac{\pi}{12}$
유형10 $\frac{\pi}{4}$	유형11 ①	유형12 $-\frac{1}{4}$
유형13 ①	유형14 ③	유형15 ②
유형16 ①	유형17 ④	유형18 ⑤

핵심
유형

완성하기

001 ⑤	002 ⑤	003 ③	004 ④	005 ③
006 3	007 ⑤	008 ①	009 $e^2 - 3$	010 33
011 ①	012 $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	013 $\frac{3}{4}$	014 2	
015 ④	016 ①	017 $\frac{1}{2} + \frac{2}{e}$	018 1	019 ③
020 ⑤	021 ③	022 ⑤	023 ④	024 ⑤
025 ①	026 $\frac{42}{5}$	027 ⑤	028 4	
029 $e^3 - 1$	030 ⑤	031 23	032 $\frac{5}{12}$	033 ④
034 $\ln 2$	035 $e - \frac{1}{e}$	036 ①	037 ②	038 ②
039 ②	040 ①	041 ②	042 ③	043 ⑤
044 ①	045 ②	046 ②	047 1	048 ②
049 ④	050 ②	051 ④	052 ③	053 ①
054 $f(x) = \sin x - 1$	055 ②	056 ②	057 ④	
058 ①	059 ③	060 ④	061 ③	062 ②
063 $-2\sqrt{3}\pi$	064 ④	065 ④	066 ①	
067 ②	068 $\frac{7}{4} - 4\ln 2$	069 ③	070 ③	
071 ②	072 8	073 $\frac{1}{2}$		

핵심
유형

최종 점검하기

1 ④	2 ①	3 ④	4 ④	5 ④
6 2	7 $\ln 3$	8 ②	9 ①	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ④	14 ③	15 ②
16 ②	17 ⑤	18 ②	19 ⑤	

핵심 유형 156~157쪽

유형01 답 ①

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x - 2 + \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| \right]_0^2 = 2\ln 3 - 2$$

유형02 답 3

$$\int_0^{\ln 2} \frac{(1-e^x)^2}{e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1-2e^x+e^{2x}}{e^x} dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^{-x} - 2 + e^x) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - 2x + e^x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{2} - 2\ln 2 + 2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$ 이므로 $ab = 3$

유형03 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x}{1+\cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) dx$$

$$= 2 \left[x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi - 2$$

유형04 답 $2 - \frac{1}{e} + 2\ln 2$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (e^x + 1) dx + \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx$$

$$= \left[e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[2\ln|x+1| \right]_0^1$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) + 2\ln 2 = 2 - \frac{1}{e} + 2\ln 2$$

유형05 답 ⑤

$f(x) = x^2 \tan x$, $g(x) = 2\sec^2 x$ 라고 하면

$f(-x) = (-x)^2 \tan(-x) = -x^2 \tan x = -f(x)$

$g(-x) = 2\sec^2(-x) = 2\sec^2 x = g(x)$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^2 \tan x + 2\sec^2 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x dx$$

$$= 4 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \times 1 = 4$$

유형06 답 ④

$x^2 - x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x - 1$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=7$ 이므로

$$\int_0^3 \frac{4x-2}{x^2-x+1} dx = \int_1^7 \frac{2}{t} dt = \left[2\ln|t| \right]_1^7 = 2\ln 7$$

따라서 $2\ln 7 = \ln a$ 이므로 $\ln 49 = \ln a \quad \therefore a = 49$

다른 풀이 $\int_0^3 \frac{4x-2}{x^2-x+1} dx = 2 \int_0^3 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx$
 $= 2 \left[\ln(x^2-x+1) \right]_0^3 = 2 \ln 7$

따라서 $2 \ln 7 = \ln a$ 이므로 $a = 49$

유형07 **답** ③

$$\int_0^1 (x+1)^2 e^{x^2} dx - \int_0^1 (x-1)^2 e^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \{(x+1)^2 - (x-1)^2\} e^{x^2} dx = \int_0^1 4xe^{x^2} dx$$

이때 $x^2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^1 4xe^{x^2} dx = 2 \int_0^1 e^t dt = 2 \left[e^t \right]_0^1 = 2(e-1)$$

유형08 **답** $\frac{5}{24}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \times \sin x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int_1^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) dt$$

$$= - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t^2) dt$$

$$= \left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{5}{24}$$

유형09 **답** $\frac{\pi}{12}$

$x = 2 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$

$x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

유형10 **답** $\frac{\pi}{4}$

$x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

핵심 유형 완성하기 158~163쪽

001 **답** ⑤

$$\int_1^5 \frac{x-3}{x+3} dx = \int_1^5 \frac{(x+3)-6}{x+3} dx = \int_1^5 \left(1 - \frac{6}{x+3} \right) dx$$

$$= \left[x - 6 \ln |x+3| \right]_1^5$$

$$= 5 - 6 \ln 8 - (1 - 6 \ln 4) = -6 \ln 2 + 4$$

따라서 $a = -6$, $b = 4$ 이므로 $b - a = 10$

002 **답** ⑤

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x} dx = \int_1^4 \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x} dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[x + 4\sqrt{x} + \ln |x| \right]_1^4$$

$$= 4 + 8 + \ln 4 - (1 + 4) = 2 \ln 2 + 7$$

003 **답** ③

$$\int_0^a \frac{3}{x^2+5x+4} dx = \int_0^a \frac{3}{(x+1)(x+4)} dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) dx$$

$$= \left[\ln |x+1| - \ln |x+4| \right]_0^a$$

$$= \ln(a+1) - \ln(a+4) - (-\ln 4)$$

$$= \ln \frac{4a+4}{a+4}$$

따라서 $\ln \frac{4a+4}{a+4} = \ln \frac{5}{2}$ 이므로 $\frac{4a+4}{a+4} = \frac{5}{2}$

$$2(4a+4) = 5(a+4) \quad \therefore a = 4$$

004 **답** ④

$$\int_2^4 \frac{2x^2-1}{x-1} dx - \int_4^2 \frac{2x}{1-x} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{2x^2-1}{x-1} dx - \int_2^4 \frac{2x}{x-1} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{2x^2-2x-1}{x-1} dx = \int_2^4 \frac{2x(x-1)-1}{x-1} dx$$

$$= \int_2^4 \left(2x - \frac{1}{x-1} \right) dx = \left[x^2 - \ln |x-1| \right]_2^4$$

$$= 16 - \ln 3 - 4 = -\ln 3 + 12$$

005 **답** ③

$F(x) = xf(x)$ 라고 하면 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} \right) dx = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} + C$$

이때 $f(1) = 6$ 이고 $F(1) = f(1)$ 이므로

$$6 + C = 6 \quad \therefore C = 0$$

즉, $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x}$ 이므로

$$xf(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} \quad \therefore f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$$

$$\therefore \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[4\sqrt{x} - \frac{4}{x} \right]_1^4$$

$$= 8 - 1 - (4 - 4) = 7$$

006 답 3

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \\
 &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x) dx \\
 &= \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) dx = \left[\sqrt{x} + x \right]_1^{n+1} \\
 &= \sqrt{n+1} + n + 1 - (1+1) = \sqrt{n+1} + n - 1 \\
 &\text{즉, } \sqrt{n+1} + n - 1 = 4 \text{ 이므로 } \sqrt{n+1} = 5 - n \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 &n + 1 = (5 - n)^2, \quad n^2 - 11n + 24 = 0 \\
 &(n - 3)(n - 8) = 0 \quad \therefore n = 3 \text{ 또는 } n = 8 \\
 &\text{그런데 } \textcircled{1} \text{에서 } n = 8 \text{ 이면 우변이 음수가 되어 성립하지 않으므로} \\
 &n = 3
 \end{aligned}$$

007 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ln 3} \frac{(e^x + 1)^2 - e^x}{e^x} dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x} dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} (e^x + 1 + e^{-x}) dx \\
 &= \left[e^x + x - e^{-x} \right]_0^{\ln 3} \\
 &= 3 + \ln 3 - \frac{1}{3} = \ln 3 + \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

008 답 ①

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} dx &= \int_0^1 \sqrt{(2^x - 1)^2} dx \\
 &= \int_0^1 (2^x - 1) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{\ln 2} - 1 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - 1
 \end{aligned}$$

009 답 $e^2 - 3$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x + x} dx + \int_2^0 \frac{x^2}{e^x + x} dx \\
 &= \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x + x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{e^x + x} dx = \int_0^2 \frac{e^{2x} - x^2}{e^x + x} dx \\
 &= \int_0^2 \frac{(e^x + x)(e^x - x)}{e^x + x} dx = \int_0^2 (e^x - x) dx \\
 &= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = e^2 - 3
 \end{aligned}$$

010 답 33

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (3^x - 2^x)(9^x + 6^x + 4^x) dx \\
 &= \int_0^1 (3^x - 2^x)(3^{2x} + 3^x \times 2^x + 2^{2x}) dx \\
 &= \int_0^1 (3^{3x} - 2^{3x}) dx = \int_0^1 (27^x - 8^x) dx \\
 &= \left[\frac{27^x}{\ln 27} - \frac{8^x}{\ln 8} \right]_0^1 = \frac{27}{\ln 27} - \frac{8}{\ln 8} - \left(\frac{1}{\ln 27} - \frac{1}{\ln 8} \right) \\
 &= \frac{26}{3 \ln 3} - \frac{7}{3 \ln 2} \\
 &\text{따라서 } a = 26, b = 7 \text{ 이므로 } a + b = 33
 \end{aligned}$$

011 답 ①

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\
 &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1
 \end{aligned}$$

012 답 $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\csc^4 x}{1 + \cot^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\csc^4 x}{\csc^2 x} dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x dx \\
 &= \left[-\cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

013 답 $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 $a = 1, b = -\frac{1}{4}$ 이므로 $a + b = \frac{3}{4}$

014 답 2

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx \\
 &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx \\
 &= \left[-2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2
 \end{aligned}$$

015 답 ④

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (e^{-x} + 2) dx + \int_0^3 3\sqrt{x+1} dx \\
 &= \left[-e^{-x} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[2(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\
 &= -1 - (-e - 2) + 16 - 2 = 15 + e
 \end{aligned}$$

016 답 ①

$$|2^x - 1| = \begin{cases} 2^x - 1 & (x \geq 0) \\ 1 - 2^x & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |2^x - 1| dx &= \int_{-1}^0 (1 - 2^x) dx + \int_0^1 (2^x - 1) dx \\ &= \left[x - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{\ln 2} - \left(-1 - \frac{1}{2\ln 2} \right) + \left(\frac{2}{\ln 2} - 1 \right) - \frac{1}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2\ln 2} \end{aligned}$$

017 답 $\frac{1}{2} + \frac{2}{e}$

$$\begin{aligned} S(n) &= \int_0^n f(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(-x + \frac{1}{e} + 1 \right) dx + \int_1^n e^{-x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{e} + 1 \right)x \right]_0^1 + \left[-e^{-x} \right]_1^n \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e^n} - \left(-\frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^n} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

018 답 1

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| &= \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & (x < -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -\frac{x-1}{x+1} & (-1 < x \leq 1) \end{cases} \text{이므로} \\ \int_0^3 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx &= \int_0^1 \left(-\frac{x-1}{x+1} \right) dx + \int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) dx + \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \left[2\ln|x+1| - x \right]_0^1 + \left[x - 2\ln|x+1| \right]_1^3 \\ &= 2\ln 2 - 1 + 3 - 2\ln 4 - (1 - 2\ln 2) = 1 \end{aligned}$$

019 답 ③

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cos x dx \\ &= \left[-3 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\sqrt{3} \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - (-3) + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

한편 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4(3 - \sqrt{3}) = 12 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

020 답 ⑤

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sin^2 x, g(x) = \cos x, h(x) = x \text{라고 하면} \\ f(-x) &= -x \sin^2(-x) = -x \sin^2 x = -f(x) \\ g(-x) &= \cos(-x) = \cos x = g(x) \\ h(-x) &= -x = -h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + \cos x + x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

021 답 ③

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(e^x - e^{-x}) \text{이라고 하면} \\ f(-x) &= x^2(e^{-x} - e^x) = -x^2(e^x - e^{-x}) = -f(x) \\ \therefore \int_{-2}^2 x^2(e^x - e^{-x}) dx &= 0 \end{aligned}$$

022 답 ⑤

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \sin x, h(x) = xf(x) \text{라고 하면} \\ g(-x) &= f(-x) \sin(-x) = -f(x) \sin x = -g(x) \\ h(-x) &= -xf(-x) = -xf(x) = -h(x) \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - x + 3)f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \sin x - xf(x) + 3f(x)\} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} 3f(x) dx = 6 \int_0^{\pi} f(x) dx = 6 \times 2 = 12 \end{aligned}$$

023 답 ④

$$\begin{aligned} \neg. f(-x) &= -f(x) \text{에서 } f(x) + f(-x) = 0 \\ \therefore \int_{-1}^1 \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx &= 0 \\ \neg. g(x) &= f(x) \cos x \text{라고 하면} \\ g(-x) &= f(-x) \cos(-x) = -f(x) \cos x = -g(x) \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx &= 0 \\ \neg. h(x) &= (2^x - 2^{-x})f(x) \text{라고 하면} \\ h(-x) &= (2^{-x} - 2^x)f(-x) = (2^x - 2^{-x})f(x) = h(x) \\ \therefore \int_{-2}^2 (2^x - 2^{-x})f(x) dx &= 2 \int_0^2 (2^x - 2^{-x})f(x) dx \neq 0 \\ \neg. r(x) &= \sin f(x) \text{라고 하면} \\ r(-x) &= \sin f(-x) = \sin \{-f(x)\} = -\sin f(x) = -r(x) \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

024 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x + 2 \\ x = -1 \text{일 때 } t &= 1, x = 2 \text{일 때 } t = 10 \text{이므로} \\ \int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx &= \int_1^{10} \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln |t| \right]_1^{10} = \frac{\ln 10}{2} \end{aligned}$$

다른 풀이 $\int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+2x+2) \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{\ln 10}{2} \end{aligned}$$

025 ①

$$4-2x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -4x$$

$x=1$ 일 때 $t=2$, $x=2$ 일 때 $t=-4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 x(4-2x^2)^3 dx &= \int_2^{-4} t^3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{4} \int_{-4}^2 t^3 dt \\ &= \frac{1}{16} \left[t^4 \right]_{-4}^2 = \frac{1}{16} \times (16-256) = -15 \end{aligned}$$

026 ② $\frac{42}{5}$

$$x+1=t \text{로 놓으면 } x=t-1 \text{이고 } \frac{dt}{dx} = 1$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^4 \frac{(t-1)^2-(t-1)+3}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^4 \frac{t^2-3t+5}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}-3t^{\frac{1}{2}}+5t^{-\frac{1}{2}}) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+10t^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{64}{5}-16+20-\left(\frac{2}{5}-2+10\right) = \frac{42}{5} \end{aligned}$$

027 ⑤

$$x-2=t \text{로 놓으면 } x=t+2 \text{이고 } \frac{dt}{dx} = 1$$

$x=2$ 일 때 $t=0$, $x=3$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^3 (x+1)\sqrt{x-2} dx &= \int_0^1 (t+3)\sqrt{t} dt \\ &= \int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5}+2 = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

따라서 $p=5$, $q=12$ 이므로 $p+q=17$

028 ④

$$x^3+8=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$x=0$ 일 때 $t=8$, $x=a$ 일 때 $t=a^3+8$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{3x^2}{x^3+8} dx &= \int_8^{a^3+8} \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_8^{a^3+8} \\ &= \ln(a^3+8) - \ln 8 = \ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right) \end{aligned}$$

따라서 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right) = 2\ln 3$ 이므로

$$\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right) = \ln 9, \quad \frac{a^3}{8}+1=9$$

$$a^3=64 \quad \therefore a=4$$

$$\begin{aligned} \text{다른 풀이} \quad \int_0^a \frac{3x^2}{x^3+8} dx &= \int_0^a \frac{(x^3+8)'}{x^3+8} dx = \left[\ln |x^3+8| \right]_0^a \\ &= \ln(a^3+8) - \ln 8 = \ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right) \end{aligned}$$

따라서 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right) = 2\ln 3$ 이므로 $a=4$

029 ③ e^3-1

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1} dx - \int_2^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1} dx \\ = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1} dx + \int_1^2 \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1} dx \\ = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1} dx \\ = \int_1^2 2xe^{x^2-1} dx \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x^2-1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_1^2 2xe^{x^2-1} dx = \int_0^3 e^t dt = \left[e^t \right]_0^3 = e^3-1$$

030 ⑤

$$2^x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2^x \ln 2$$

$x=0$ 일 때 $t=2$, $x=3$ 일 때 $t=9$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{2^x \ln 2}{2^x+1} dx &= \int_2^9 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_2^9 \\ &= \ln 9 - \ln 2 = \ln \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{다른 풀이} \quad \int_0^3 \frac{2^x \ln 2}{2^x+1} dx &= \int_0^3 \frac{(2^x+1)'}{2^x+1} dx \\ &= \left[\ln(2^x+1) \right]_0^3 = \ln \frac{9}{2} \end{aligned}$$

031 ② 23

$$\ln x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$x=1$ 일 때 $t=1$, $x=e^3$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^{e^3} \left(\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x} + \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} \right) dx \\ = \int_1^{e^3} \left(\sqrt{\ln x+1} + \frac{1}{\sqrt{\ln x+1}} \right) \times \frac{1}{x} dx \\ = \int_1^4 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \int_1^4 (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) dt \\ = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 \\ = \frac{16}{3} + 4 - \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=20$ 이므로 $p+q=23$

032 ③ $\frac{5}{12}$

$$\ln x-1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$x=1$ 일 때 $t=-1$, $x=e$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^e \frac{(\ln x-1)^n}{x} dx = \int_{-1}^0 t^n dt \\ &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{n+1} \times (-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \end{aligned}$$

따라서 $a_n a_{n+2} = \frac{(-1)^n}{n+1} \times \frac{(-1)^{n+2}}{n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

033 답 ④

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \times \cos x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx
\end{aligned}$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx &= \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\
&= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

034 답 ln 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (1 + \tan x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx$$

이때 $\tan x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln |1+t| \right]_0^1 = \ln 2$$

035 답 $e - \frac{1}{e}$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\pi$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(\cos x) \sin x dx &= \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx \\
&= \int_1^{-1} (-e^t) dt = \int_{-1}^1 e^t dt \\
&= \left[e^t \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

036 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) \cos x dx$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) \cos x dx &= \int_0^1 (1 - 2t^2) dt \\
&= \left[t - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

037 답 ②

$x = \sqrt{3} \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3} \cos \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sqrt{3-3\sin^2 \theta}} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sqrt{3\cos^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

038 답 ②

$x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\sin \theta) \cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\sin \theta) \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\sin \theta) d\theta \\
&= \left[\theta + \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

039 답 ②

$x = 3 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 3 \cos \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=3$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 \theta} \times 3 \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 \theta} \times 3 \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{9}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4} \pi
\end{aligned}$$

040 답 ①

$x = 2 \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \sec^2 \theta$

$x=2$ 일 때 $t=\frac{\pi}{4}$, $x=2\sqrt{3}$ 일 때 $t=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sec^2 \theta}{4 \tan^2 \theta + 4} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sec^2 \theta}{4 \sec^2 \theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

041 답 ②

$x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2+a^2 \tan^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta = \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a}
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

042 답 ③

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{2}{x^2-2x+2} dx &= \int_1^2 \frac{2}{(x-1)^2+1} dx \text{이므로} \\ x-1 &= \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta \\ x=1 \text{일 때 } \theta &= 0, x=2 \text{일 때 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{이므로} \\ \int_1^2 \frac{2}{(x-1)^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 d\theta \\ &= \left[2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

핵심 유형 164~165쪽

유형11 답 ①

$$\begin{aligned}f(x) &= x-1, g'(x) = e^x \text{으로 놓으면} \\ f'(x) &= 1, g(x) = e^x \\ \therefore \int_0^1 (x-1)e^x dx &= \left[(x-1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= 1 - \left[e^x \right]_0^1 = 1 - (e-1) \\ &= 2-e\end{aligned}$$

유형12 답 $-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x, g'(x) = e^x \text{으로 놓으면} \\ f'(x) &= -\sin x, g(x) = e^x \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad \dots\dots ㉠ \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &\text{에서 } u(x) = \sin x, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면} \\ u'(x) &= \cos x, v(x) = e^x \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } a &= \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{이므로 } ab = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

유형13 답 ①

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t) dt &= k \text{ (} k \text{는 상수)} \quad \dots\dots ㉠ \\ \text{로 놓으면 } f(x) &= e^x + 2x + k \\ \text{이를 ㉠에 대입하면} \\ \int_0^2 (e^t + 2t + k) dt &= k \\ \left[e^t + t^2 + kt \right]_0^2 &= k \\ e^2 + 4 + 2k - 1 &= k \\ \therefore k &= -e^2 - 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= e^x + 2x - e^2 - 3 \text{이므로} \\ f(2) &= e^2 + 4 - e^2 - 3 = 1\end{aligned}$$

유형14 답 ③

$$\begin{aligned}\text{주어진 등식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= -\sin x + 1 \quad \therefore f(\pi) = 1 \\ \text{주어진 등식의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면} \\ 0 &= 1 + a \quad \therefore a = -1 \\ \therefore a + f(\pi) &= -1 + 1 = 0\end{aligned}$$

유형15 답 ②

$$\begin{aligned}\int_1^x (x-t)f(t) dt &= x \ln x + ax + 1 \text{에서} \\ x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt &= x \ln x + ax + 1 \\ \text{위의 등식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ \int_1^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) &= \ln x + 1 + a \\ \therefore \int_1^x f(t) dt &= \ln x + 1 + a \\ \text{위의 등식의 양변을 다시 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= \frac{1}{x} \quad \therefore f(1) = 1 \\ \text{한편 주어진 등식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ 0 &= a + 1 \quad \therefore a = -1 \\ \therefore a \times f(1) &= -1 \times 1 = -1\end{aligned}$$

유형16 답 ①

$$\begin{aligned}\text{주어진 등식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= e - e^{-x} \\ f'(x) = 0 \text{에서 } e &= e^{-x} \quad \therefore x = -1 \\ \text{함수 } f(x) \text{의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.}\end{aligned}$$

x	$\dots$	-1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$\begin{aligned}\text{따라서 함수 } f(x) \text{는 } x = -1 \text{에서 극소이므로 극솟값은} \\ f(-1) &= \int_0^{-1} (e - e^{-t}) dt = \int_{-1}^0 (e^{-t} - e) dt \\ &= \left[-e^{-t} - et \right]_{-1}^0 = -1\end{aligned}$$

유형 17 답 ④

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (3 + 2 \sin x) \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } (3 + 2 \sin x) \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \quad (\because 3 + 2 \sin x > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$a = \frac{\pi}{2}$$

$$b = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2 \sin t) \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t + 2 \sin t \cos t) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin t + \sin 2t) \, dt$$

$$= \left[-3 \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$$

유형 18 답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f(t) \, dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) + F(1) - F(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-h) - F(1)}{-h}$$

$$= F'(1) + F'(1) = 2F'(1) = 2f(1)$$

$$= 2 \times \frac{e + e^{-1}}{2} = e + \frac{1}{e}$$

핵심 유형 완성하기 166~170쪽

043 답 ⑤

$$f(x) = 2x, g'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면 } f'(x) = 2, g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^1 2xe^{-x} \, dx = \left[-2xe^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} \, dx$$

$$= -\frac{2}{e} + \left[-2e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{e} + \left(-\frac{2}{e} + 2 \right) = 2 - \frac{4}{e}$$

따라서 $a = 2, b = -4$ 이므로 $a - b = 6$

044 답 ①

$$f(x) = \ln x, g'(x) = \frac{1}{x^2} \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x} \right) \, dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \\ &= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

045 답 ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx$$

$$f(x) = x, g'(x) = \cos 2x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 1, g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx &= \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

046 답 ②

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & (x \geq 0) \\ 1 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^0 \sin x \, dx + \int_0^{\pi} (1-x) \sin x \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^0 \sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[-\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad \dots\dots ㉠$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx \text{에서 } u(x) = x, v'(x) = \sin x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \pi \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = -\pi$$

047 답 1

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^x - 3ax)^2 dx &= \int_0^1 (e^{2x} - 6axe^x + 9a^2x^2) dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} + 9a^2x^2) dx - 6a \int_0^1 xe^x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 3a^2x^3 \right]_0^1 - 6a \int_0^1 xe^x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 + 3a^2 - \frac{1}{2} - 6a \int_0^1 xe^x dx \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

이때 $\int_0^1 xe^x dx$ 에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - (e - 1) = 1 \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^x - 3ax)^2 dx &= \frac{1}{2}e^2 + 3a^2 - \frac{1}{2} - 6a \\ &= 3(a-1)^2 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=1$ 일 때 주어진 정적분의 값이 최소가 된다.

048 답 ②

$f(x)=\sin 2x$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=2\cos 2x$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx &= \left[-e^{-x} \sin 2x \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx \\ &= 2 \int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

$\int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx$ 에서 $u(x)=\cos 2x$, $v'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$u'(x)=-2\sin 2x$, $v(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx &= \left[-e^{-x} \cos 2x \right]_0^\pi - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{e^\pi} + 1 - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx &= 2 \left(-\frac{1}{e^\pi} + 1 - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx \right) \\ 5 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{2}{e^\pi} + 2 \\ \therefore \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{2}{5e^\pi} + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

049 답 ④

$f(x)=x^2-x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=2x-1$, $g(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 x(x-1)e^x dx &= \int_{-1}^1 (x^2-x)e^x dx \\ &= \left[(x^2-x)e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx \\ &= -\frac{2}{e} - \int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx$ 에서 $u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx &= \left[(2x-1)e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x dx \\ &= e + \frac{3}{e} - \left[2e^x \right]_{-1}^1 \\ &= e + \frac{3}{e} - \left(2e - \frac{2}{e} \right) = -e + \frac{5}{e} \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$\int_{-1}^1 x(x-1)e^x dx = -\frac{2}{e} - \left(-e + \frac{5}{e} \right) = e - \frac{7}{e}$$

따라서 $a=1$, $b=-7$ 이므로 $a-b=8$

050 답 ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^2 \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2+2) \cos x dx$$

이때 $f(x)=2x^2+2$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=4x$, $g(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2+2) \cos x dx &= \left[(2x^2+2) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{2} + 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^2 \cos x dx &= \frac{\pi^2}{2} + 2 - 4 \times 1 = \frac{\pi^2}{2} - 2\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$ 이므로 $ab=-1$

051 답 ④

$$\int_0^2 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots ㉑$$

로 놓으면 $f(x)=2e^{2x}-e^x+k$

이를 ㉑에 대입하면

$$\int_0^2 (2e^{2t}-e^t+k) dt = k$$

$$\left[e^{2t}-e^t+kt \right]_0^2 = k$$

$$e^4 - e^2 + 2k = k$$

$$\therefore k = e^2 - e^4$$

따라서 $f(x)=2e^{2x}-e^x+e^2-e^4$ 이므로

$$f(2)=2e^4-e^2+e^2-e^4=e^4$$

052 답 ③

$$\int_1^e f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{로 놓으면 } f(x) = 2x + \frac{1}{x} + k$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e \left(2t + \frac{1}{t} + k \right) dt = k$$

$$\left[t^2 + \ln |t| + kt \right]_1^e = k$$

$$e^2 + 1 + ke - (1 + k) = k$$

$$(e-2)k = -e^2 \quad \therefore k = \frac{e^2}{2-e}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{e^2}{2-e} \text{이므로 } f(1) = 3 + \frac{e^2}{2-e}$$

$$\therefore (2-e)f(1) = 3(2-e) + e^2 = e^2 - 3e + 6$$

053 답 ①

$$\int_1^e f'(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{로 놓으면 } f(x) = \ln x + k \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = k, \quad \left[\ln |t| \right]_1^e = k \quad \therefore k = 1$$

따라서 $f(x) = \ln x + 1$ 이므로

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln x + 1) dx = \int_1^e \ln x dx + \int_1^e dx \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $\int_1^e \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = x \text{이므로}$$

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx = e - \int_1^e dx \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\int_1^e f(x) dx = e - \int_1^e dx + \int_1^e dx = e$$

054 답 $f(x) = \sin x - 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{로 놓으면 } f(x) = \sin x + 2k$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 2k) \cos t dt = k$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt + 2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = k$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + 2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = k$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2k \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + 2k = k \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \sin x - 1$$

055 답 ②

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \sin x + x \cos x + k \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x = \pi$ 를 대입하면

$$0 = k\pi - \pi \quad \therefore k = 1$$

$k = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $f(x) = \sin x + x \cos x + 1$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

056 답 ②

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \ln x + 1 + xf(x) \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(1) = 0$

따라서 ㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(1) = 1 + f(1) = 1 \quad (\because f(1) = 0)$$

057 답 ④

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -2 \sin 2x + 2ax$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \text{이므로 } a\pi = 2\pi \quad \therefore a = 2$$

주어진 등식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1$$

058 답 ①

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x + f(x)$$

$$xf'(x) = x(x+2)e^x \quad \therefore f'(x) = (x+2)e^x$$

이때 $u(x) = x+2$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = e^x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx$$

$$= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C \quad \dots\dots ㉠$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = e \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{또 ㉠의 양변에 } x = 1 \text{을 대입하면 } f(1) = 2e + C \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉡, ㉢ \text{에 의하여 } e = 2e + C \quad \therefore C = -e$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x+1)e^x - e \text{이므로 } f(2) = 3e^2 - e$$

059 답 ③

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^2 \ln x + \frac{1}{x} + k \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt = x^2 \ln x + \frac{1}{x} + k$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 2x \ln x + x - \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 2x \ln x + x - \frac{1}{x^2}$$

위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2 \ln x + 3 + \frac{2}{x^3} \quad \therefore f(1) = 5$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + k \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore k + f(1) = -1 + 5 = 4$$

060 ④

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = x \cos x - x \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = x \cos x - x$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \cos x - x \sin x - 1$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = \cos x - x \sin x - 1$$

위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - x \cos x$$

$$\therefore f(\pi) = \pi$$

061 ③

$$\int_1^x (x+t)f(t) dt = e^x \ln x - e^x + e \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt + \int_1^x t f(t) dt = e^x \ln x - e^x + e$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + x f(x) + x f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} - e^x$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt + 2x f(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right)$$

위의 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2f(1)=0 \quad \therefore f(1)=0$$

062 ②

$$\int_0^x (t-x)f'(t) dt = e^{2x} + ae^x + 1 \text{에서}$$

$$\int_0^x t f'(t) dt - x \int_0^x f'(t) dt = e^{2x} + ae^x + 1$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x f'(x) - \int_0^x f'(t) dt - x f'(x) = 2e^{2x} + ae^x$$

$$\therefore \int_0^x f'(t) dt = -2e^{2x} - ae^x$$

$$\left[f(t) \right]_0^x = -2e^{2x} - ae^x$$

$$f(x) - f(0) = -2e^{2x} - ae^x$$

$$\therefore f(x) = -2e^{2x} - ae^x + \frac{2}{e^4} \left(\because f(0) = \frac{2}{e^4} \right) \quad \dots\dots ①$$

한편 주어진 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + 1 \quad \therefore a = -2$$

$$a = -2 \text{를 } ① \text{에 대입하면 } f(x) = -2e^{2x} + 2e^x + \frac{2}{e^4}$$

$$\therefore f(a) = f(-2) = -\frac{2}{e^4} + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^4} = \frac{2}{e^2}$$

063 ④ $-2\sqrt{3}\pi$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2 \cos x - \sqrt{3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이고 $x = \frac{11}{6}\pi$ 에서 극소이므로

$$\begin{aligned} \alpha &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos t - \sqrt{3}) dt \\ &= \left[2 \sin t - \sqrt{3}t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \int_0^{\frac{11}{6}\pi} (2 \cos t - \sqrt{3}) dt \\ &= \left[2 \sin t - \sqrt{3}t \right]_0^{\frac{11}{6}\pi} \\ &= -1 - \frac{11\sqrt{3}}{6}\pi \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -2\sqrt{3}\pi$$

064 ④

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{4-x^2}{x} = 0$$

$$\frac{(2+x)(2-x)}{x} = 0 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^2 \frac{4-t^2}{t} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{4}{t} - t \right) dt \\ &= \left[4 \ln t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

065 ④

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \quad (\because e^{x^2+x} > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{-\frac{1}{2}} (2t+1)e^{t^2+t} dt = -\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2t+1)e^{t^2+t} dt$$

이때 $t^2+t=k$ 로 놓으면 $\frac{dk}{dt} = 2t+1$

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때 $k = -\frac{1}{4}$, $t=0$ 일 때 $k=0$ 이므로

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2t+1)e^{t^2+t} dt = -\int_{-\frac{1}{4}}^0 e^k dk$$

$$= -\left[e^k\right]_{-\frac{1}{4}}^0 = -(1 - e^{-\frac{1}{4}}) = e^{-\frac{1}{4}} - 1$$

따라서 $a = -\frac{1}{4}$, $b = -1$ 이므로 $ab = \frac{1}{4}$

066 답 ①

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sin x (2 \cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t (2 \cos t - 1) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin t \cos t - \sin t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2t - \sin t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}$$

067 답 ②

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e^x - 3$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = 3 \quad \therefore x = \ln 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\ln 3$	...
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \ln 3$ 에서 극소이면서 최소이므로

$$a = \ln 3$$

$$b = f(\ln 3) = \int_0^{\ln 3} (e^t - 3) dt$$

$$= \left[e^t - 3t \right]_0^{\ln 3} = 2 - 3 \ln 3$$

$$\therefore 3a + b = 3 \ln 3 + 2 - 3 \ln 3 = 2$$

068 답 $\frac{7}{4} - 4 \ln 2$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x+1) \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \left(\because x > 0 \right)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(1) = \int_2^1 (t+1) \ln t dt = -\int_1^2 (t+1) \ln t dt$$

이때 $u(t) = \ln t$, $v'(t) = t+1$ 로 놓으면

$$u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$\therefore f(1) = -\int_1^2 (t+1) \ln t dt$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}t^2 + t \right) \ln t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}t^2 + t \right) dt$$

$$= -4 \ln 2 + \left[\frac{1}{4}t^2 + t \right]_1^2 = \frac{7}{4} - 4 \ln 2$$

069 답 ③

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{e-h}^{e+2h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e) + F(e) - F(e-h)}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e) - F(e-h)}{-h}$$

$$= 2F'(e) + F'(e) = 3F'(e)$$

$$= 3f(e) = 3 \times \frac{e(1+e)}{3e^2} = \frac{e+1}{e}$$

070 답 ③

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x^2 - 1} \times (x+1)$$

$$= F'(1) \times 2 = 2f(1) = 2 \times 2e^2 = 4e^2$$

071 답 ②

$f(t) = e^t \ln t + te^{2t}$ 이라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} (e^t \ln t + te^{2t}) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x}) - F(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x}) - F(1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= F'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f(1) = \frac{e^2}{2}$$

072 답 8

$f(t) = t \cos t + a$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} (t \cos t + a) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+\frac{\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2})}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+\frac{\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2})}{x} \\ &= \frac{1}{2} F'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} f(\frac{\pi}{2}) = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 4$ 이므로 $a = 8$

073 답 $\frac{1}{2}$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(x-1)f(x) = \cos x - \cos x + (x-1)\sin x$$

$$\therefore f(x) = \sin x$$

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\pi}{6}}^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{F(x) - F(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} \\ &= F'(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

핵심 유형 최종 점검하기 *

171~173쪽

1 답 ④

유형 01 유리함수, 무리함수의 정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2}{x+2} = 2x - 4 + \frac{8}{x+2} \text{이므로} \\ \int_{-1}^{e-2} f(x) dx &= \int_{-1}^{e-2} \left(2x - 4 + \frac{8}{x+2} \right) dx \\ &= \left[x^2 - 4x + 8 \ln|x+2| \right]_{-1}^{e-2} = e^2 - 8e + 15 \end{aligned}$$

따라서 $a = -8$, $b = 15$ 이므로 $a+b=7$

2 답 ①

유형 02 지수함수의 정적분

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(ae^x + \frac{b}{e^x} \right) dx &= \int_0^1 (ae^x + be^{-x}) dx \\ &= \left[ae^x - be^{-x} \right]_0^1 \\ &= ae - \frac{b}{e} - (a - b) \\ &= ae - \frac{b}{e} - a + b \end{aligned}$$

따라서 $ae - \frac{b}{e} - a + b = e + \frac{2}{e} - 3$ 이므로

$$a=1, b=-2 \quad \therefore \frac{b}{a} = -2$$

3 답 ④

유형 03 삼각함수의 정적분

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x + 1} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\sin x - 1} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x + 1} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \sin x} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x + 1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sec^2 x dx = \left[2 \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \end{aligned}$$

4 답 ④

유형 04 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

$$\begin{aligned} |\sin x| + |\cos x| &= \begin{cases} \sin x - \cos x & \left(\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi \right) \\ -\sin x - \cos x & \left(\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \right) \end{cases} \text{이므로} \\ \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (|\sin x| + |\cos x|) dx \\ = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sin x - \cos x) dx \\ = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} + \left[\cos x - \sin x \right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = 2 \end{aligned}$$

5 답 ④

유형 05 그래프가 대칭인 함수의 정적분

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x - 2^{-x}, g(x) = 3^x + 3^{-x} \text{이라고 하면} \\ f(-x) &= 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x) \\ g(-x) &= 3^{-x} + 3^x = g(x) \\ \therefore \int_{-1}^1 (2^x + 3^x - 2^{-x} + 3^{-x}) dx &= 2 \int_0^1 (3^x + 3^{-x}) dx \\ &= 2 \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right]_0^1 = \frac{16}{3 \ln 3} \end{aligned}$$

6 답 2

유형 06 치환적분법을 이용한 정적분 - 유리함수, 무리함수

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \\ x=2 \text{일 때 } t=5, x=7 \text{일 때 } t=50 \text{이므로} \\ \int_2^7 \frac{5x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_5^{50} \frac{1}{t\sqrt{t}} \times \frac{5}{2} dt = \int_5^{50} \frac{5}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt \\ &= \left[-5t^{-\frac{1}{2}} \right]_5^{50} = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로 $a+2b=2$

7 답 $\ln 3$

유형 07 치환적분법을 이용한 정적분 - 지수함수, 로그함수

$$\begin{aligned} \ln x &= t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \\ x=1 \text{일 때 } t=0, x=e \text{일 때 } t=1 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2\ln x + 1}{x + x \ln x + x(\ln x)^2} dx &= \int_1^e \frac{2\ln x + 1}{1 + \ln x + (\ln x)^2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2t+1}{1+t+t^2} dt = \int_0^1 \frac{(1+t+t^2)'}{1+t+t^2} dt \\ &= \left[\ln(1+t+t^2) \right]_0^1 = \ln 3\end{aligned}$$

8 답 ②

유형 07 치환적분법을 이용한 정적분 - 지수함수, 로그함수

$$\begin{aligned}x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2x \\ x=-1 \text{일 때 } t=1, x=0 \text{일 때 } t=0, x=2 \text{일 때 } t=4 \text{이므로} \\ \int_{-1}^2 e^x f(x) dx &= \int_{-1}^0 (-xe^x) dx + \int_0^2 2xe^x dx \\ &= \int_1^0 \left(-\frac{1}{2}e^t\right) dt + \int_0^4 e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt + \int_0^4 e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^1 + \left[e^t \right]_0^4 = e^4 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ 이므로 $a+b = -1$

9 답 ①

유형 08 치환적분법을 이용한 정적분 - 삼각함수

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (1 - \cos x) \sin 2x dx &= \int_0^\pi (1 - \cos x) \times 2 \sin x \cos x dx \\ &= \int_0^\pi (2 \cos x - 2 \cos^2 x) \sin x dx \\ \text{이때 } \cos x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= -\sin x \\ x=0 \text{일 때 } t=1, x=\pi \text{일 때 } t=-1 \text{이므로} \\ \int_0^\pi (2 \cos x - 2 \cos^2 x) \sin x dx &= -\int_1^{-1} (2t - 2t^2) dt = \int_{-1}^1 (2t - 2t^2) dt = \left[t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right]_{-1}^1 = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

10 답 ⑤

유형 09 $\sqrt{a^2-x^2}$ ($a>0$) 꼴을 포함한 함수의 적분법

$$\begin{aligned}2x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} &= \frac{1}{2} \cos \theta \\ x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=\frac{1}{4} \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{6} \text{이므로} \\ \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-4x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \times \frac{1}{2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

따라서 $a=24$, $b=16$ 이므로 $a-b=8$

11 답 ④

유형 10 x^2+a^2 ($a>0$) 꼴을 포함한 함수의 적분법

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 \frac{x^2+10}{x^2+9} dx &= \int_{-3}^3 \left(1 + \frac{1}{x^2+9} \right) dx = \int_{-3}^3 dx + \int_{-3}^3 \frac{1}{x^2+9} dx \\ \int_{-3}^3 \frac{1}{x^2+9} dx \text{에서 } x=3 \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면} \\ \frac{dx}{d\theta} &= 3 \sec^2 \theta\end{aligned}$$

$x=-3$ 일 때 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $x=3$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 \frac{1}{x^2+9} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sec^2 \theta}{9 \tan^2 \theta + 9} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sec^2 \theta}{9 \sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} d\theta = \left[\frac{1}{3} \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6} \\ \therefore \int_{-3}^3 \frac{x^2+10}{x^2+9} dx &= \int_{-3}^3 dx + \int_{-3}^3 \frac{1}{x^2+9} dx = \left[x \right]_{-3}^3 + \frac{\pi}{6} = 6 + \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

12 답 ③

유형 11 부분적분법을 이용한 정적분

$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \\ &= \int_1^2 xe^x dx + \int_2^3 xe^x dx + \int_3^4 xe^x dx + \cdots + \int_n^{n+1} xe^x dx \\ &= \int_1^{n+1} xe^x dx \\ \text{이때 } u(x)=x, v'(x)=e^x \text{로 놓으면 } u'(x)=1, v(x)=e^x \\ \therefore \int_1^{n+1} xe^x dx &= \left[xe^x \right]_1^{n+1} - \int_1^{n+1} e^x dx \\ &= (n+1)e^{n+1} - e - \left[e^x \right]_1^{n+1} = ne^{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)}{f(1)+f(2)+f(3)} = \frac{6e^7}{3e^4} = 2e^3$$

13 답 ④

유형 12 부분적분법을 이용한 정적분 - 여러 번 적용하는 경우

$$\begin{aligned}f(x)=(\ln x)^2, g'(x)=4x+1 \text{로 놓으면} \\ f'(x)=\frac{2\ln x}{x}, g(x)=2x^2+x \\ \therefore \int_1^e (4x+1)(\ln x)^2 dx \\ &= \left[(2x^2+x)(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e (2x^2+x) \times \frac{2\ln x}{x} dx \\ &= 2e^2+e-2 \int_1^e (2x+1)\ln x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \int_1^e (2x+1)\ln x dx \text{에서 } u(x)=\ln x, v'(x)=2x+1 \text{로 놓으면} \\ u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=x^2+x \\ \therefore \int_1^e (2x+1)\ln x dx &= \left[(x^2+x)\ln x \right]_1^e - \int_1^e (x^2+x) \times \frac{1}{x} dx \\ &= e^2+e - \left[\frac{1}{2}x^2+x \right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_1^e (4x+1)(\ln x)^2 dx = 2e^2+e-2\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}\right) = e^2+e-3$$

14 답 ③

유형 13 적분 구간이 상수인 정적분을 포함한 등식

$$\int_1^4 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{로 놓으면 } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + k = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + k$$

이를 ①에 대입하면

$$\int_1^4 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + k \right) dt = k, \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t} + 2\sqrt{t} + kt \right]_1^4 = k \quad \therefore k = -\frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{10}{3} \text{이므로 } f(1) = -\frac{4}{3}$$

15 답 ②

유형 14 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e^x - f'(x)e^x, (e^x + 1)f'(x) = e^x$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

이때 $e^x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t} dt \\ = \ln t + C = \ln(e^x + 1) + C$$

위의 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = \ln 2 + C \quad \dots\dots ㉑$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒에 의하여

$$\ln 2 + C = 1 \quad \therefore C = 1 - \ln 2$$

$$\therefore f(x) = \ln(e^x + 1) + 1 - \ln 2$$

따라서 $f(1) = a$ 이므로 $\ln(e + 1) + 1 - \ln 2 = a$

$$\ln \frac{e(e+1)}{2} = a \quad \therefore e^a = \frac{e(e+1)}{2}$$

16 답 ②

유형 15 적분 구간과 적분하는 함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = xe^{-x} + \cos x - 1 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt = xe^{-x} + \cos x - 1$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = e^{-x} - xe^{-x} - \sin x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = (1-x)e^{-x} - \sin x$$

위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} - \cos x \\ = (x-2)e^{-x} - \cos x$$

$$\therefore f(0) = -2 - 1 = -3$$

17 답 ⑤

유형 16 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \cos 2x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos 2x - \sin x = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$(-2\sin x + 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < x < \pi) \quad \therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6}$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대, $x = \frac{5\pi}{6}$ 에서 극소이므로

$$M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t - \sin t) dt \\ = \left[\frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$$

$$m = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} (\cos 2t - \sin t) dt \\ = \left[\frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_0^{\frac{5\pi}{6}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$$

$$\therefore M - m = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

18 답 ②

유형 17 정적분으로 정의된 함수의 최대, 최소

$$f(x) = \int_0^x (x-t) \sin t dt$$

$$= x \int_0^x \sin t dt - \int_0^x t \sin t dt$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \int_0^x \sin t dt + x \sin x - x \sin x \\ = \int_0^x \sin t dt = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x$$

이때 $1 - \cos x \geq 0$, 즉 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가함수이다.

따라서 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0)$, 최댓값은 $f(\pi)$

이므로

$$m = f(0) = \int_0^0 (-t \sin t) dt = 0$$

$$M = f(\pi) = \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin t dt$$

이때 $u(t) = \pi - t$, $v'(t) = \sin t$ 로 놓으면

$$u'(t) = -1, v(t) = -\cos t \text{이므로}$$

$$M = \left[-(\pi - t) \cos t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t dt \\ = \pi - \left[\sin t \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\therefore M + m = \pi$$

19 답 ⑤

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 극한

$f(t) = \left| \frac{t}{\pi} \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을

$F(t)$ 라고 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\pi-h}^{\pi+3h} \left| \frac{t}{\pi} \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\pi-h}^{\pi+3h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+3h) - F(\pi-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+3h) - F(\pi) + F(\pi) - F(\pi-h)}{2h}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+3h) - F(\pi)}{3h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi) - F(\pi-h)}{-h}$$

$$= \frac{3}{2} F'(\pi) + \frac{1}{2} F'(\pi) = 2F'(\pi)$$

$$= 2f(\pi) = 2 \left| \tan \frac{3\pi}{4} \right| = 2$$

10 정적분의 활용

핵심
유형

유형01 ④	유형02 $\frac{65}{4}$	유형03 $\ln \frac{9}{2}$
유형04 ②	유형05 ⑤	유형06 ①
유형07 $\frac{4}{\pi}$		
유형08 $\frac{1}{2}$	유형09 ②	유형10 $\frac{26}{3}$
유형11 $\frac{1}{2}$		
유형12 $\frac{3}{\pi}$	유형13 5π	유형14 $\frac{62}{3}$

핵심
유형

완성하기

001 ⑤	002 $f(n) = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$	003 $\frac{13}{3}$
004 $\frac{10}{3}$	005 ③	006 $2\ln 2 - 1$
007 ③		
008 $\frac{4}{3}$	009 $\ln 5$	010 2
011 ④	012 ②	
013 1	014 ③	015 ②
016 ④	017 2	
018 ⑤	019 ①	020 ④
021 ②	022 4	
023 ②	024 $\frac{e}{2} - 1$	025 $\frac{1}{3}$
026 $\frac{e}{2} - \frac{3}{2e}$		
027 $\frac{1}{8}$	028 $-\frac{4}{\pi^2}$	029 $\frac{4}{3}$
030 $\frac{64}{9}$	031 2	
032 $\sqrt{e}$	033 $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$	034 $e - 1$
035 ①	036 ②	
037 ①	038 ④	039 ⑤
040 ③	041 8	
042 ③	043 29	044 18
045 ③	046 ⑤	
047 ①	048 ③	049 ④
050 ②	051 ①	
052 ③	053 ③	054 ④
055 ⑤	056 ②	

핵심
유형

최종 점검하기

1 ①	2 $\frac{5}{2}\pi - 1$	3 ①	4 $\frac{\pi^2}{2} - \pi$	5 ①
6 ④	7 ①	8 ④	9 4	10 1
11 26	12 $\frac{3}{4}$	13 ①		

핵심 유형 176~178쪽

유형01 답 ④

구간 $[0, 3]$ 을 n 등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝점의 x 좌표는 차례로

$$\frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \dots, \frac{3n}{n} (=3)$$

이고 이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2, \frac{1}{3} \times \left(\frac{6}{n}\right)^2, \frac{1}{3} \times \left(\frac{9}{n}\right)^2, \dots, \frac{1}{3} \times \left(\frac{3n}{n}\right)^2$$

이므로 각 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \frac{3}{n} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \frac{3}{n} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{9}{n}\right)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{3}{n} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{3n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \times \left\{ \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \left(\frac{9}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3n}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{3k}{n}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} \times 2 = \boxed{3} \end{aligned}$$

유형02 답 $\frac{65}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(2 + \frac{1}{n}\right)^3 + \left(2 + \frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(2 + \frac{n}{n}\right)^3 \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{k}{n}\right)^3 = \int_2^3 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_2^3 = \frac{81}{4} - 4 = \frac{65}{4} \end{aligned}$$

유형03 답 $\ln \frac{9}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \left(-\frac{2x}{x^2+2} \right) dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2} dx \\ = \left[-\ln(x^2+2) \right]_{-2}^0 + \left[\ln(x^2+2) \right]_0^1 \\ = -\ln 2 + \ln 6 + (\ln 3 - \ln 2) = \ln \frac{9}{2} \end{aligned}$$

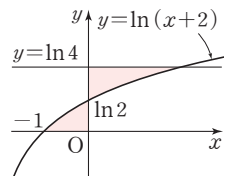
유형04 답 ②

$$y = \ln(x+2) \text{에서 } x+2 = e^y$$

$$\therefore x = e^y - 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \{ -(e^y - 2) \} dy + \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^y - 2) dy \\ = \left[2y - e^y \right]_0^{\ln 2} + \left[e^y - 2y \right]_{\ln 2}^{\ln 4} \\ = 2\ln 2 - 1 + 2 - 2\ln 2 = 1 \end{aligned}$$



유형05 답 ⑤

두 곡선 $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\cos x = \cos 2x \text{에서 } \cos x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

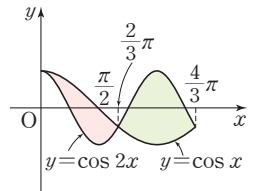
$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (\cos 2x - \cos x) dx \\ = \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \\ = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



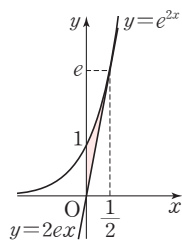
유형06 답 ①

$y' = 2e^{2x}$ 이므로 곡선 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, e\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $2e$ 이고 접선의 방정식은

$$y - e = 2e\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = 2ex$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{2x} - 2ex) dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} - ex^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e-2}{4} \end{aligned}$$



유형07 답 $\frac{4}{\pi}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\cos \frac{\pi}{2}x - ax \right) dx &= 0 \\ \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 &= 0 \\ \frac{2}{\pi} - \frac{a}{2} &= 0 \quad \therefore a = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

유형08 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y = \frac{3}{4}\sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라고 하면

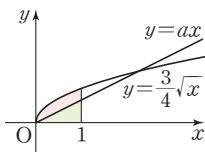
$$S_1 = \int_0^1 \frac{3}{4}\sqrt{x} dx = \left[\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

직선 $y=ax$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라고 하면

$$S_2 = \int_0^1 ax dx = \left[\frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{2}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$



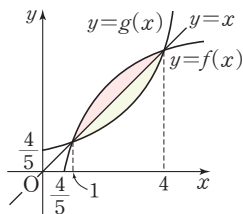
유형09 답 ②

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$\begin{aligned} \sqrt{5x-4} &= x \text{에서 } 5x-4=x^2 \\ x^2-5x+4 &= 0, (x-1)(x-4)=0 \\ \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_1^4 (\sqrt{5x-4} - x) dx &= 2 \left[\frac{2}{15}(5x-4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^4 \\ &= 2 \left(\frac{8}{15} + \frac{11}{30} \right) = \frac{9}{5} \end{aligned}$$



핵심 유형 완성하기 179~184쪽

001 답 ⑤

구간 $[0, 2]$ 를 n 등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝점의 x 좌표는 차례로

$$\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \dots, \frac{2n}{n} (=2)$$

이고 이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{4}{n}\right)^3, \left(\frac{6}{n}\right)^3, \dots, \left(\frac{2n}{n}\right)^3$$

이므로 각 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n} \right)^3 + \frac{2}{n} \left(\frac{6}{n} \right)^3 + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n} \right)^3 \\ &= \left(\frac{2}{n} \right)^4 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n} \right)^4 \times k^3 = \frac{16}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

002 답 $f(n) = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$

사각뿔의 높이를 n 등분 하여 만들어진 직육면체의 밑넓이는 위에서부터 차례로

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2, \left(\frac{2a}{n}\right)^2, \left(\frac{3a}{n}\right)^2, \dots, \left\{ \frac{(n-1)a}{n} \right\}^2$$

이고, 높이는 각각 $\frac{h}{n}$ 이므로 직육면체의 부피의 합 V_n 은

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{h}{n} \left(\frac{a}{n} \right)^2 + \frac{h}{n} \left(\frac{2a}{n} \right)^2 + \frac{h}{n} \left(\frac{3a}{n} \right)^2 + \dots + \frac{h}{n} \left\{ \frac{(n-1)a}{n} \right\}^2 \\ &= \frac{a^2 h}{n^3} \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\} = \frac{a^2 h}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{a^2 h}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^2 h}{6} \times \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \\ \therefore f(n) &= \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \end{aligned}$$

003 답 $\frac{13}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \times \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left(9 - \frac{1}{3} \right) = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

004 답 $\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(2 + \frac{3k}{n} \right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(2 + \frac{3k}{n} \right) \times \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_2^5 \sin x dx \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = 5$ 이므로 $abc = \frac{10}{3}$

005 답 ③

ㄱ. $f(x)=x^5$, $a=2$, $b=3$ 으로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = 2 + \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2 + \frac{k}{n}\right)^5 = \int_2^3 x^5 dx$$

ㄴ. $f(x)=(x+2)^5$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2 + \frac{k}{n}\right)^5 = \int_0^1 (x+2)^5 dx$$

ㄷ. $f(x)=(x-5)^5$, $a=7$, $b=8$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = 7 + \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2 + \frac{k}{n}\right)^5 = \int_7^8 (x-5)^5 dx$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

006 답 $2\ln 2 - 1$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{3}{n}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \ln x dx \\ &= \left[x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - \left[x \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

007 답 ③

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ f\left(\frac{2}{n}\right) + 2f\left(\frac{4}{n}\right) + 3f\left(\frac{6}{n}\right) + \cdots + nf\left(\frac{2n}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kf\left(\frac{2k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 xf(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 xe^x dx \\ &= \frac{1}{4} \left[xe^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= \frac{1}{4} (2e^2 - [e^x]_0^2) = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

008 답 $\frac{4}{3}$

$\triangle OA_k B_k$ 는 $\angle OA_k B_k = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{A_k B_k}^2 = \overline{OB_k}^2 - \overline{OA_k}^2 = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{A_k B_k}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} \times \frac{1}{n} \\ &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

009 답 $\ln 5$

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \left(-\frac{x}{x^2+1} \right) dx + \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 5 = \ln 5 \end{aligned}$$

010 답 2

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

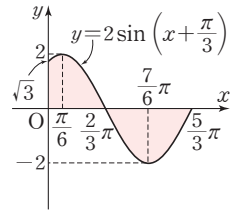
$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^2 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^2 = 2$$

011 답 ④

$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ 이므로

로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx \\ &+ \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \left\{ -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right\} dx \\ &= \left[-2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \\ &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

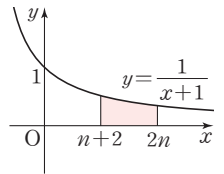


012 답 ②

오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{n+2}^{2n} \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln(x+1) \right]_{n+2}^{2n} \\ &= \ln(2n+1) - \ln(n+3) \\ &= \ln \frac{2n+1}{n+3} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n+1}{n+3} = \ln 2$$



013 답 1

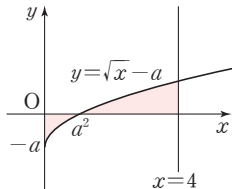
오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \{ -(\sqrt{x}-a) \} dx + \int_a^4 (\sqrt{x}-a) dx \\ &= \left[ax - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a + \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - ax \right]_a^4 \\ &= a^3 - \frac{2}{3} a^3 + \frac{16}{3} - 4a - \left(\frac{2}{3} a^3 - a^3 \right) \\ &= \frac{2}{3} a^3 - 4a + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3} a^3 - 4a + \frac{16}{3} = 2$ 이므로

$$a^3 - 6a + 5 = 0, (a-1)(a^2 + a - 5) = 0$$

이때 a 는 유리수이므로 $a=1$



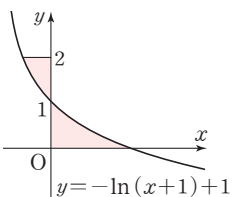
014 답 ③

$y = -\ln(x+1) + 1$ 에서 $\ln(x+1) = 1 - y$

$$x+1 = e^{1-y} \quad \therefore x = e^{1-y} - 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e^{1-y} - 1) dy + \int_1^2 \{ -(e^{1-y} - 1) \} dy \\ &= \left[-e^{1-y} - y \right]_0^1 + \left[y + e^{1-y} \right]_1^2 \\ &= e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$



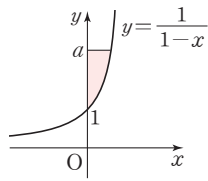
015 답 ②

$$y = \frac{1}{1-x} \text{에서 } 1-x = \frac{1}{y} \quad \therefore x = 1 - \frac{1}{y}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^a \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = \left[y - \ln y\right]_1^a \\ = a - 1 - \ln a$$

따라서 $a - 1 - \ln a = e - 2$ 이므로 $a = e$



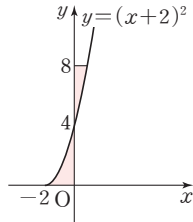
016 답 ④

$$y = (x+2)^2 \text{에서 } \sqrt{y} = x+2 \quad (\because x \geq -2)$$

$$\therefore x = \sqrt{y} - 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^4 \{-(\sqrt{y}-2)\} dy + \int_4^8 (\sqrt{y}-2) dy \\ = \left[2y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y\right]_4^8 \\ = \frac{8}{3} + \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{40}{3} = \frac{32}{3}(\sqrt{2}-1)$$



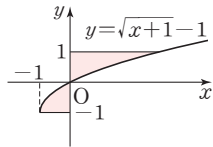
017 답 2

$$y = \sqrt{x+1} - 1 \text{에서 } y+1 = \sqrt{x+1}$$

$$(y+1)^2 = x+1 \quad \therefore x = y^2 + 2y$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0 \{-(y^2+2y)\} dy + \int_0^1 (y^2+2y) dy \\ = \left[-\frac{1}{3}y^3 - y^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_0^1 \\ = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$



018 답 ⑤

두 곡선 $y = \sqrt{2} \sin x$, $y = \sin 2x$ 의 교점의 x 좌표는

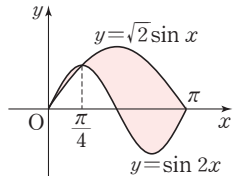
$$\sqrt{2} \sin x = \sin 2x \text{에서 } \sqrt{2} \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0, \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \sqrt{2} \sin x) dx \\ + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sqrt{2} \sin x - \sin 2x) dx \\ = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \sqrt{2} \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ + \left[-\sqrt{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ = \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{3}{2} = 3$$



019 답 ①

곡선 $y = \frac{x}{x^2+1}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}x$ 에서

$$2x = x(x^2+1), x^3 - x = 0, x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x\right) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \\ = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \\ = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

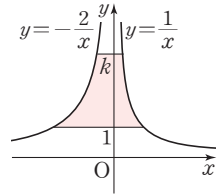
020 답 ④

$$y = \frac{1}{x} \text{에서 } x = \frac{1}{y}$$

$$y = -\frac{2}{x} \text{에서 } x = -\frac{2}{y}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^k \left\{\frac{1}{y} - \left(-\frac{2}{y}\right)\right\} dy = 3 \int_1^k \frac{1}{y} dy \\ = 3 \left[\ln y\right]_1^k \\ = 3 \ln k$$



즉, $3 \ln k = 6$ 이므로

$$\ln k = 2 \quad \therefore k = e^2$$

021 답 ②

$$y = \frac{1}{x} \text{에서 } x = \frac{1}{y}$$

$$y = x^2 \quad (x \geq 0) \text{에서 } x = \sqrt{y}$$

두 곡선 $x = \frac{1}{y}$, $x = \sqrt{y}$ 의 교점의 y 좌표는 $\frac{1}{y} = \sqrt{y}$ 에서

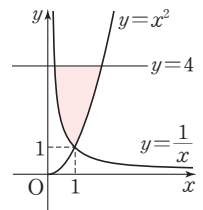
$$y\sqrt{y} = 1, y^3 = 1, (y-1)(y^2+y+1) = 0$$

$$\therefore y = 1 \quad (\because y^2+y+1 > 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{y}\right) dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \ln y\right]_1^4 \\ = \frac{14}{3} - \ln 4$$

$$\text{즉, } a = \frac{14}{3}, b = 4 \text{이므로 } a - b = \frac{2}{3}$$



022 답 4

곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{2}{x} = 2x$ 에서

$$x^2 = 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

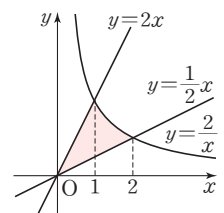
또 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x$ 에서

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \left(2x - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x\right) dx \\ = \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^1 + \left[2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 \\ = \frac{3}{4} + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = 2 \ln 2$$

$$\text{즉, } \ln a = 2 \ln 2 = \ln 4 \text{이므로 } a = 4$$

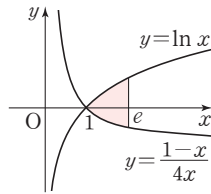


023 답 ②

두 곡선 $y=\ln x$, $y=\frac{1-x}{4x}$ 의 교점의 x 좌표는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left(\ln x - \frac{1-x}{4x} \right) dx \\ &= \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \frac{1-x}{4x} dx \\ &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4x} dx - \frac{1}{4} \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx \\ &= e - \left[x \right]_1^e - \frac{1}{4} \left[\ln x - x \right]_1^e = 1 - \frac{1}{4} (2 - e) = \frac{e}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



024 답 $\frac{e}{2} - 1$

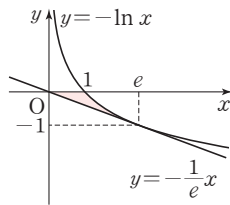
$f(x) = -\ln x$ 라고 하면 $f'(x) = -\frac{1}{x}$

점 $(e, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-1) = -\frac{1}{e}(x - e) \quad \therefore y = -\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times e \times 1 - \int_1^e \ln x dx \\ &= \frac{e}{2} - \left\{ \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right\} \\ &= \frac{e}{2} - \left(e - \left[x \right]_1^e \right) = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



025 답 $\frac{1}{3}$

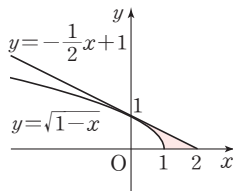
$f(x) = \sqrt{1-x}$ 라고 하면 $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \\ &= 1 - \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



026 답 $\frac{e}{2} - \frac{3}{2e}$

$f(x) = e^x$ 이라고 하면 $f'(x) = e^x$

점 $(1, e)$ 에서의 기울기는 e 이므로 접선의 방정식은

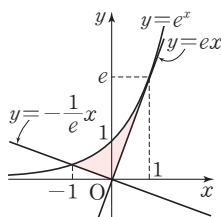
$$y - e = e(x - 1) \quad \therefore y = ex$$

이 접선과 수직이고 점 $(-1, \frac{1}{e})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}(x + 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \left\{ e^x - \left(-\frac{1}{e}x \right) \right\} dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[e^x + \frac{1}{2e}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{3}{2e} + \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - \frac{3}{2e} \end{aligned}$$



027 답 $\frac{1}{8}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

곡선 위의 점 $(t, \frac{\ln t}{t})$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1 - \ln t}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $-\frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2} \times (-t)$

$$\ln t = 1 - \ln t, \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

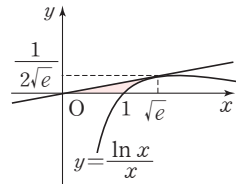
따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{e}, \frac{1}{2\sqrt{e}})$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이고, $x=1$

일 때 $t=0$, $x=\sqrt{e}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \sqrt{e} \times \frac{1}{2\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}} t dt = \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



028 답 $-\frac{4}{\pi^2}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^\pi \{ \sin x - a(x - \pi) \} dx = 0, \left[-\cos x - \frac{a}{2}x^2 + a\pi x \right]_0^\pi = 0$$

$$2 + \frac{a}{2}\pi^2 = 0 \quad \therefore a = -\frac{4}{\pi^2}$$

029 답 $\frac{4}{3}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^4 (\sqrt{x} - a) dx = 0, \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - ax \right]_0^4 = 0$$

$$\frac{16}{3} - 4a = 0 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

030 답 $\frac{64}{9}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (4\sqrt{x} - 2x) dx = 0, \left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 \right]_0^k = 0$$

$$\frac{8}{3}k\sqrt{k} - k^2 = 0, k\sqrt{k} \left(\frac{8}{3} - \sqrt{k} \right) = 0$$

$$\sqrt{k} = \frac{8}{3} (\because k > 4) \quad \therefore k = \frac{64}{9}$$

031 답 2

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k \{ xe^x - (e^x + 1) \} dx = 0, \left[xe^x \right]_0^k - \int_0^k e^x dx - \left[e^x + x \right]_0^k = 0$$

$$ke^k - \left[e^x \right]_0^k - (e^k + k - 1) = 0, (k-2)e^k - k + 2 = 0$$

$$(k-2)(e^k - 1) = 0 \quad \therefore k = 2 (\because k > \frac{3}{2})$$

032 답 $\sqrt{e}$

곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1, x=e$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라고 하면

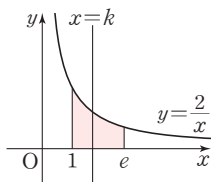
$$S_1 = \int_1^e \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln x \right]_1^e = 2$$

곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1, x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라고 하면

$$S_2 = \int_1^k \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln x \right]_1^k = 2 \ln k$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로 $2 \ln k = 1$

$$\ln k = \frac{1}{2} \quad \therefore k = \sqrt{e}$$



033 답 $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

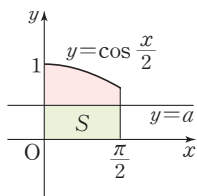
곡선 $y = \cos \frac{x}{2}$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 S의 넓이가

$$\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} \times a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$



034 답 $e-1$

곡선 $y = e^x$ 와 y 축 및 직선 $y=e$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 (e - e^x) dx = \left[ex - e^x \right]_0^1 = 1$$

따라서 직선 l 과 y 축 및 직선 $y=e$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가

$$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times (e - k) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = e - 1$$

035 답 ①

곡선 $y = \ln(x+1)$ 과 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라고 하자.

$x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$S_1 = \int_0^1 \ln(x+1) dx = \int_1^2 \ln t dt$$

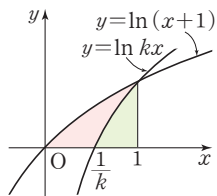
$$= \left[t \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 dt = 2 \ln 2 - \left[t \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

한편 곡선 $y = \ln kx$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표는

$$\ln kx = 0, kx = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{k}$$



곡선 $y = \ln kx$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라고 하면

$$S_2 = \int_{\frac{1}{k}}^1 \ln kx dx = \int_{\frac{1}{k}}^1 (\ln x + \ln k) dx$$

$$= \left[x \ln x \right]_{\frac{1}{k}}^1 - \int_{\frac{1}{k}}^1 dx + \left[x \ln k \right]_{\frac{1}{k}}^1$$

$$= -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} - \left[x \right]_{\frac{1}{k}}^1 + \ln k - \frac{1}{k} \ln k = \ln k + \frac{1}{k} - 1$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로 $\ln k + \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1)$

$$\ln k + \frac{1}{k} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \therefore k = 2$$

036 답 ②

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

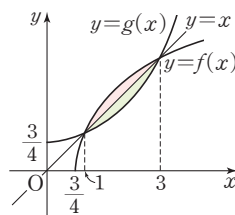
$$\sqrt{4x-3}=x \text{에서 } 4x-3=x^2$$

$$x^2-4x+3=0, (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

이때 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2 \int_1^3 (\sqrt{4x-3} - x) dx = 2 \left[\frac{1}{6} (4x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = \frac{2}{3}$$



037 답 ①

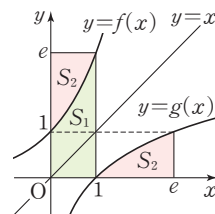
두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = S_1, \int_1^e g(x) dx = S_2$$

라고 하면

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_1^e g(x) dx = S_1 + S_2$$

$$= 1 \times e = e$$



038 답 ④

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \text{에서}$$

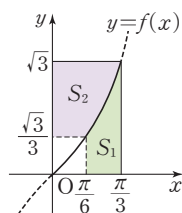
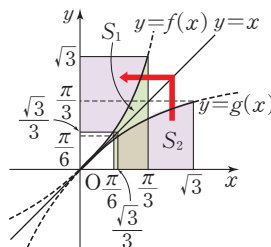
$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, g(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{이때 } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = S_1,$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x) dx = S_2 \text{라 하고, } S_2 \text{에 해당하는}$$

부분을 대칭이동하면 구하는 값은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x) dx = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{18} \pi$$



유형 10 **답** $\frac{26}{3}$

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{26}{3}$$

유형 11 **답** $\frac{1}{2}$

점 $(x, 0) (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = (\sqrt{\cos 2x})^2 = \cos 2x$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

유형 12 **답** $\frac{3}{\pi}$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때 $v(t) \geq 0$, $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} |\sin \pi t| dt &= \int_0^1 \sin \pi t dt - \int_1^{\frac{3}{2}} \sin \pi t dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 - \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi} \right) = \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

유형 13 **답** 5π

$$\frac{dx}{dt} = 3 \cos t + 4 \sin t, \frac{dy}{dt} = -3 \sin t + 4 \cos t$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{(3 \cos t + 4 \sin t)^2 + (-3 \sin t + 4 \cos t)^2} dt \\ = \int_0^{\pi} \sqrt{9(\cos^2 t + \sin^2 t) + 16(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ = \int_0^{\pi} 5 dt = \left[5t \right]_0^{\pi} = 5\pi \end{aligned}$$

유형 14 **답** $\frac{62}{3}$

$$f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} \text{라고 하면 } f'(x) = 2\sqrt{x}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^6 \sqrt{1 + (2\sqrt{x})^2} dx &= \int_0^6 \sqrt{1 + 4x} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}(1 + 4x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^6 = \frac{62}{3} \end{aligned}$$

039 **답** ⑤

밑면으로부터의 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \frac{2x+3}{x+1}$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(x) dx &= \int_0^2 \frac{2x+3}{x+1} dx = \int_0^2 \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left[2x + \ln(x+1) \right]_0^2 = \ln 3 + 4 \end{aligned}$$

040 **답** ③

물의 깊이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ cm²라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \pi \left(\sqrt{\sin \frac{\pi}{4} x} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} x$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(x) dx &= \int_0^2 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} x dx \\ &= \left[-2 \cos \frac{\pi}{4} x \right]_0^2 = 2 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

041 **답** 8

밑면으로부터의 높이가 x cm인 지점에서의 수면의 넓이를 $S(x)$ cm²라고 하면

$$S(x) = xe^x + 1$$

즉, 물통의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^4 S(x) dx &= \int_0^4 (xe^x + 1) dx \\ &= \left[xe^x \right]_0^4 - \int_0^4 e^x dx + \left[x \right]_0^4 \\ &= 4e^4 - \left[e^x \right]_0^4 + 4 = 3e^4 + 5 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=5$ 이므로 $a+b=8$

042 **답** ③

점 $(x, 0) (0 \leq x \leq \pi)$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2 \sin x})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} S(x) dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right]_0^{\pi} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

043 **답** 29

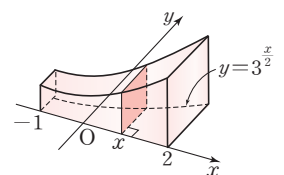
점 $(x, 0) (-1 \leq x \leq 2)$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (3^{\frac{x}{2}})^2 = 3^x$$

즉, 구하는 부피는

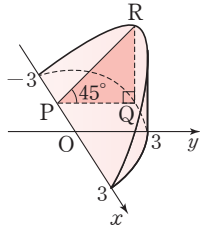
$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 S(x) dx &= \int_{-1}^2 3^x dx \\ &= \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{9}{\ln 3} - \frac{1}{3 \ln 3} = \frac{26}{3 \ln 3} \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=26$ 이므로 $a+b=29$



044 답 18

오른쪽 그림과 같이 구하는 입체도형의 밑면의 중심을 원점, 지름을 x 축으로 정하자. 이때 점 $(x, 0)$ ($-3 \leq x \leq 3$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle PQR$ 라고 하면



$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

$\triangle PQR$ 의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{9-x^2})^2 = \frac{1}{2}(9-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(x) dx &= \int_{-3}^3 \frac{1}{2}(9-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 18 \end{aligned}$$

045 답 ③

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 일 때 $v(t) \geq 0$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 |2\pi \cos \pi t| dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi \cos \pi t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi \cos \pi t dt \\ &= \left[2 \sin \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[2 \sin \pi t \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2 - (-2) = 4 \end{aligned}$$

046 답 ⑤

처음 위치 $x_0=0$ 이므로 시각 $t=2$ 에서 점 P의 위치 x 는

$$\begin{aligned} x &= 0 + \int_0^2 t e^t dt \\ &= \left[t e^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t dt = 2e^2 - \left[e^t \right]_0^2 \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1 \end{aligned}$$

047 답 ①

$v(t)=0$ 에서 $e - e^t = 0$

$$e^t = e \quad \therefore t = 1$$

즉, 점 P가 출발한 후 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=1$ 이고,

$0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이다.

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 (e - e^t) dt = \left[et - e^t \right]_0^1 = 1$$

048 답 ③

$v(t)=0$ 에서 $\cos t - \cos 2t = 0$

$$\cos t - (2 \cos^2 t - 1) = 0$$

$$2 \cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$(2 \cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$$

$$\cos t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos t = 1$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq t \leq \pi)$$

따라서 $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이고 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 점 P가 원점에서 가장 멀어질 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos t - \cos 2t) dt &= \left[\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

049 답 ④

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{3} \cos t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{3} \sin t - \cos t$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sqrt{3} \cos t - \sin t)^2 + (-\sqrt{3} \sin t - \cos t)^2} dt \\ = \int_0^{2\pi} \sqrt{3(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ = \int_0^{2\pi} 2 dt = \left[2t \right]_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

050 답 ②

$$\frac{dx}{dt} = t - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t}$$

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^a \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2} dt &= \int_1^a \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_1^a \sqrt{(t+1)^2} dt = \int_1^a (t+1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_1^a = \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{이므로 } a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a+4)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

051 답 ①

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)$$

따라서 시각 $t = \frac{1}{e}$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^2} dt &= \int_{\frac{1}{e}}^e \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{e}}^e = e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

052 답 ③

$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \sin \frac{t}{2}$$

이때 $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 속력이 최대가 되는 때는 $t = \pi$ 일 때이다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4$$

053 답 ③

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x} \text{ 이라고 하면 } f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx &= \int_1^3 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^3 = \frac{53}{6} \end{aligned}$$

054 답 ④

$$\frac{dx}{dt} = 4e^t, \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} - 2$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{16e^{2t} + 4(e^{2t} - 1)^2} dt &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{4(e^{2t} + 1)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} 2(e^{2t} + 1) dt = \left[e^{2t} + 2t\right]_0^{\ln 2} \\ &= 3 + 2\ln 2 \end{aligned}$$

055 답 ⑤

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \ln x \text{ 라고 하면 } f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$$

$1 \leq x \leq a$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^a \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)^2} dx &= \int_1^a \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^a \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln x\right]_1^a = \frac{1}{8}a^2 + \ln a - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{8}a^2 + \ln a - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} + 2\ln 2 \text{ 이므로 } a = 4$$

056 답 ②

$$\frac{dx}{d\theta} = 3\sin^2 \theta \cos \theta, \frac{dy}{d\theta} = -3\cos^2 \theta \sin \theta$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\sin^2 \theta \cos \theta)^2 + (-3\cos^2 \theta \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \\ &= -\frac{3}{4} [\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

핵심 유형 최종 점검하기 •

189~190쪽

1 답 ①

유형 02 정적분과 급수의 합 사이의 관계

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2 답 $\frac{5}{2}\pi - 1$

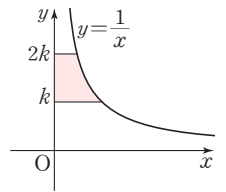
유형 03 곡선과 x축 사이의 넓이

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-x \cos x) dx \\ &= \left[x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \left[-x \sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi - \left[\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi \\ &= \frac{5}{2}\pi - 1 \end{aligned}$$

3 답 ①

유형 04 곡선과 y축 사이의 넓이

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{x} \text{ 에서 } x = \frac{1}{y} \\ \text{따라서 구하는 넓이는} \\ \int_k^{2k} \frac{1}{y} dy = \left[\ln y\right]_k^{2k} = \ln 2k - \ln k \\ = \ln 2 \end{aligned}$$



4 답 $\frac{\pi^2}{2} - \pi$

유형 05 두 곡선 사이의 넓이

곡선 $y = x \sin x$ 와 직선 $y = -x + \pi$ 의 교점의 x좌표를 k ($0 < k < \pi$)

라고 하면

$$S_1 - S_2$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^k (-x + \pi - x \sin x) dx - \int_k^\pi \{x \sin x - (-x + \pi)\} dx \\ &= \int_0^k (-x + \pi - x \sin x) dx + \int_k^\pi (-x + \pi - x \sin x) dx \\ &= \int_0^\pi (-x + \pi - x \sin x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \pi x\right]_0^\pi - \left\{\left[-x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx\right\} \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \pi - \left[\sin x\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \pi \end{aligned}$$

5 답 ①

유형 06 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

$$f(x) = ke^{x-1}, g(x) = 2x \text{ 로 놓으면}$$

$$f'(x) = ke^{x-1}, g'(x) = 2$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 의 접점의 x좌표를 t 라고 하면

$$f(t) = g(t) \text{ 에서 } ke^{t-1} = 2t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

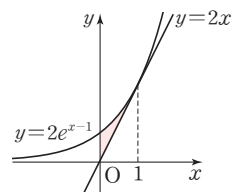
$$f'(t) = g'(t) \text{ 에서 } ke^{t-1} = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$t = 1, k = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2e^{x-1} - 2x) dx &= \left[2e^{x-1} - x^2\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$



6 답 ④

유형 07 두 도형의 넓이가 같을 조건

두 도형의 넓이가 서로 같으므로 $\int_{\frac{1}{e}}^a \frac{2\ln x}{x} dx = 0$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{e}$ 일 때 $t = -1$, $x = a$ 일 때 $t = \ln a$ 이므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^a \frac{2\ln x}{x} dx = 0, \int_{-1}^{\ln a} 2t dt = 0$$

$$\left[t^2 \right]_{-1}^{\ln a} = 0, (\ln a)^2 - 1 = 0$$

$$(\ln a)^2 = 1, \ln a = \pm 1 \quad \therefore a = e \quad (\because a > 1)$$

7 답 ①

유형 08 두 곡선 사이의 넓이의 활용

곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라고 하면

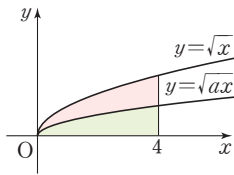
$$S_1 = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

곡선 $y = \sqrt{ax}$ 와 x 축 및 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라고 하면

$$S_2 = \int_0^4 \sqrt{ax} dx = \sqrt{a} \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{16}{3} \sqrt{a}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$\frac{16}{3} \sqrt{a} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3}, \sqrt{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$



8 답 ④

유형 09 함수와 그 역함수의 정적분

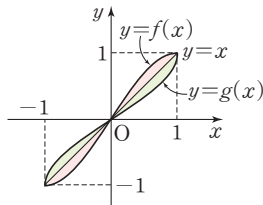
두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$\sin \frac{\pi}{2} x = x$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ ($\because -1 \leq x \leq 1$)

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \left| \sin \frac{\pi}{2} x - x \right| dx &= 4 \int_0^1 (\sin \frac{\pi}{2} x - x) dx \\ &= 4 \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{\pi} - 2 \end{aligned}$$



9 답 4

유형 10 입체도형의 부피 - 단면이 밑면과 평행한 경우

깊이가 a cm일 때의 물의 부피는

$$\int_0^a (e^{-x} + x) dx = \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^a = -\frac{1}{e^a} + \frac{1}{2} a^2 + 1 \text{ (cm}^3\text{)}$$

따라서 $-\frac{1}{e^a} + \frac{1}{2} a^2 + 1 = -\frac{1}{e^4} + 9$ 이므로 $a = 4$

10 답 1

유형 11 입체도형의 부피 - 단면이 밑면과 수직인 경우

점 $(x, 0)$ ($1 \leq x \leq e$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면 단면인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 이므로 빗변이 아닌 두 변의 길이는

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$\therefore S(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{x}} \right)^2 = \frac{1}{x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_1^e S(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^e = 1$$

11 답 26

유형 12 직선 위에서 점이 움직인 거리

$0 \leq t \leq 1$ 일 때 $v(t) \leq 0$, $1 \leq t \leq 3$ 일 때 $v(t) \geq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - 3^{t-1}) dt + \int_1^3 (3^{t-1} - 1) dt &= \left[t - \frac{3^{t-1}}{\ln 3} \right]_0^1 + \left[\frac{3^{t-1}}{\ln 3} - t \right]_1^3 \\ &= 1 - \frac{2}{3 \ln 3} + \frac{8}{\ln 3} - 2 \\ &= \frac{22}{3 \ln 3} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $a = 22$, $b = 3$, $c = 1$ 이므로 $a + b + c = 26$

12 답 $\frac{3}{4}$

유형 13 평면 위에서 점이 움직인 거리

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{dy}{dt} = 1$$

따라서 시각 $t = 0$ 에서 $t = \ln 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{(e^t - e^{-t})^2}{4} + 1} dt &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t - e^{-t} \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

13 답 ①

유형 14 곡선의 길이

$$\frac{dx}{dt} = e^t (\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t (\sin t + \cos t)$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t} (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^\pi \\ &= \sqrt{2} (e^\pi - 1) \end{aligned}$$