

01

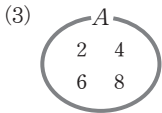
강 집합의 뜻과 표현

확인 문제

p. 6

1 1, 2, 3, 6

2 (1) $A = \{2, 4, 6, 8\}$
(2) $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{보다 작은 짝수}\}$



3 (1) 유한집합
(2) $B = \{2, 3, 5\}$: 유한집합
(3) $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$: 무한집합
(4) $D = \emptyset$: 유한집합

핵심 유형

교/과/서/속

맞은풀 문제

p. 7

1 '큰', '아름다운', '가까운', '유명한'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ⑤이다.

2 ㄴ. '높은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합이 아닌 것은 ㄴ이다.

3 $A = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$
④ $15 \notin A$

4 ① $-\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$ ② $0 \in \mathbb{Q}$ ④ $\frac{25}{4} \in \mathbb{Q}$ ⑤ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
따라서 옳은 것은 ③이다.

5 (1) $\{x | x \text{는 } -3 \leq x \leq 3 \text{인 정수}\}$
(2) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$

6 (1) $\{x | x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\}$
(2) $x^2 - 3x - 10 = 0$ 에서
 $(x+2)(x-5) = 0$
 $\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$
 $\therefore \{-2, 5\}$

7 $A = \{3, 4, 5, 6\}$ 이므로 $n(A) = 4$
 $B = \emptyset$ 이므로 $n(B) = 0$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$
따라서 $C = \{1, 2\}$ 이므로 $n(C) = 2$

8 $A = \{0\}$ 이므로 $n(A) = 1$
 $B = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로 $n(B) = 9$
 $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 이므로 $n(C) = 6$

02

강 집합 사이의 포함 관계

확인 문제

p. 8

1 집합 B 의 모든 원소가 집합 A 에 속하므로 $B \subset A$

2 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 에서
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$
 $\therefore B = \{-1, 3\}$
4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 $D = \{1, 2, 4\}$
따라서 서로 같은 집합은 A 와 D , B 와 C 이다.

3 집합 A 의 원소가 4개이므로
(1) $2^4 = 16$ (2) $2^4 - 1 = 15$

핵심 유형

교/과/서/속

맞은풀 문제

p. 9

1 $A = \{5, 10, 15\}$ 의 부분집합을 원소의 개수에 따라 구하면
원소가 0개인 것: $\emptyset$
원소가 1개인 것: $\{5\}, \{10\}, \{15\}$
원소가 2개인 것: $\{5, 10\}, \{5, 15\}, \{10, 15\}$
원소가 3개인 것: $\{5, 10, 15\}$

2 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 의 부분집합을 원소의 개수에 따라 구하면
원소가 0개인 것: $\emptyset$
원소가 1개인 것: $\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}$
원소가 2개인 것: $\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}$
원소가 3개인 것: $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}$
원소가 4개인 것: $\{1, 2, 4, 8\}$

3 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
① $3 \in A$ ② $4 \notin A$
③ $\{2, 4\} \not\subset A$ ④ $\{1, 3, 5\} \subset A$
따라서 옳은 것은 ④이다.

- 4 $A = \{4, 6, 8, 10\}$
 ⑤ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로
 $\{4, 6, 8, 10\} \subset A$

- 5 $A=B$ 이므로 $a-1=6, 2b=2$
 $\therefore a=7, b=1$

- 6 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A=B$ 이므로
 $a+b=3, a-b=1$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=2, b=1$

- 7 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로
 (1) $2^4=16$
 (2) $2^4-1=15$
 (3) $2^{4-1}=2^3=8$

- 8 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
 (1) $2^6=64$
 (2) $2^6-1=63$
 (3) $2^{6-2}=2^4=16$

01~02강 **즉답계** 기출문제

p. 10~13

1 ②	2 ②	3 ④	4 ③
5 ㄱ, ㄴ, ㄹ	6 6	7 ④	8 ⑤
9 ②	10 ①	11 ③	12 -1 또는 1
13 ③	14 ②	15 ⑤	16 ③
17 1	18 ②	19 ③	20 ⑤
21 $\frac{85}{8}$	22 ④	23 ③	24 (1) 풀이 참조
(2) 15	25 4	26 8	

- 1 ㄱ. '신나는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 ㄴ. '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 따라서 보기 중 집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 2 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$
 ② $2 \in A, 2 \in B$

- 3 ① $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$
 ② $A = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$
 ③ $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
 ④ $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
 ⑤ $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$
 따라서 바르게 나타낸 것은 ④이다.

- 4 집합 $C = \{z | z = x + y, x \in A, y \in B\}$ 의 원소를 구하면 다음 표와 같다.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7

$$\therefore C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

따라서 집합 C 의 모든 원소의 합은
 $2+3+4+5+6+7=27$

- 5 ㄱ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$: 유한집합
 ㄴ. $\{7, 14, 21, 28, \dots\}$: 무한집합
 ㄷ. $\emptyset$: 유한집합
 ㄹ. $\{10, 11, 12, 13, \dots, 99\}$: 유한집합
 따라서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

- 6 집합 A 가 공집합이 되려면 $5 \notin A$ 이어야 하므로 k 의 값이 될 수 있는 자연수는 6, 7, 8, 9이다.
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

- 7 ① $n(A)=4$
 ② $n(\emptyset)+n(\{0\})=0+1=1$
 ③ $A = \{1, 2, 4\}$ 이므로 $n(A)=3$
 ④ $A = \emptyset$ 이므로 $n(A)=0$
 ⑤ $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 2\})=3-2=1$
 따라서 옳은 것은 ④이다.

- 8 (i) $|x|=2, |y|=0$ 일 때
 $|x|=2$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
 $|y|=0$ 에서 $y=0$
 따라서 구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(-2, 0), (2, 0)$
 (ii) $|x|=1, |y|=1$ 일 때
 $|x|=1$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 $|y|=1$ 에서 $y=-1$ 또는 $y=1$
 따라서 구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$

- (iii) $|x|=0, |y|=2$ 일 때
 $|x|=0$ 에서 $x=0$
 $|y|=2$ 에서 $y=-2$ 또는 $y=2$
 따라서 구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, -2), (0, 2)$

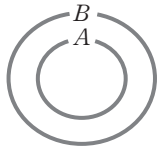
(i), (ii), (iii)에 의하여 순서쌍 (x, y) 는 모두 8개이므로
 $n(X)=8$

- 9 ① $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$
 ② $\{1\}$ 은 집합 A 의 부분집합이므로 $\{1\} \subset A$
 ③ $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 2\} \in A$
 ④ $\{2\}$ 는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{2\} \subset A$

⑤ $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{1, 2\} \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

10 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로
 $A \subset B$

따라서 두 집합 A, B 의 포함 관계를 벤
다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림
과 같다.



11 $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-2, 2\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
이므로 $B \subset A \subset C$

12 $A \subset B$ 가 성립하려면 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속
해야 하므로 $a \in B$ 이어야 한다.

즉, $a = -1$ 또는 $a = 1$ 또는 $a = 3$

(i) $a = -1$ 일 때

$A = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 $A \subset B$

(ii) $a = 1$ 일 때

$A = \{0, 1, 3\}$ 이므로 $A \subset B$

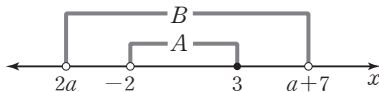
(iii) $a = 3$ 일 때

$A = \{0, 3, 5\}$ 이므로 $A \not\subset B$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a = -1$ 또는 $a = 1$

13 $A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내
면 다음 그림과 같다.



$2a \leq -2$, $a + 7 > 3$ 이어야 하므로

$-4 < a \leq -1$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1$ 의 3개이다.

14 조건 (가)에서 집합 B 는 집합 A 의 부분집합이고 조건 (나)에
서 집합 B 의 원소는 2개이며 조건 (다)에서 집합 B 는 원소 c
를 포함하지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 집합 B 는

$\{a, b\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$

의 3개이다.

15 $A = B$ 이므로

$2a - b = -4$, $3a + 2b = 1$

두 식을 연립하여 풀면

$a = -1$, $b = 2$

$\therefore b - a = 3$

16 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이므로

$a^2 + 1 = 1$, $a^2 = 0 \quad \therefore a = 0$

따라서 $A = \{-1, 1, 2\}$, $B = \{-1, 1, b-1\}$ 이므로

$b-1 = 2 \quad \therefore b = 3$

$\therefore a^2 + b^2 = 9$

17 $A = B$ 이므로

$a^2 - 3a = -2$, $a^2 - 3a + 2 = 0$, $(a-1)(a-2) = 0$

$\therefore a = 1$ 또는 $a = 2$

(i) $a = 1$ 일 때

$A = \{-2, 1, 3\}$, $B = \{-2, 1, 3\}$ 이므로

$A = B$

(ii) $a = 2$ 일 때

$A = \{-2, 3, 6\}$, $B = \{-2, 1, 3\}$ 이므로

$A \neq B$

(i), (ii)에 의하여 $a = 1$

18 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 이므로 원소 0은 포함하고 원소 1은 포
함하지 않는 집합 A 의 부분집합의 개수는

$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$

19 원소 1, 2를 포함하는 집합 A 의 진부분집합 X 의 개수는

$2^{6-2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$

20 $A = \{5, 8, 11, 14, 17\}$ 의 원소 중 홀수는 5, 11, 17이므로
집합 A 의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 부
분집합은 집합 A 의 모든 부분집합에서 홀수를 한 개도 포
함하지 않는 집합, 즉 집합 $\{8, 14\}$ 의 부분집합을 제외시키
면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$

21 원소 중 가장 큰 수가 1인 집합은 원소 1을 포함하는 부분
집합이므로 그 개수는

$2^{4-1} = 2^3 = 8$

원소 중 가장 큰 수가 $\frac{1}{2}$ 인 집합은 원소 1을 포함하지 않고

원소 $\frac{1}{2}$ 를 포함하는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{4-1-1} = 2^2 = 4$

원소 중 가장 큰 수가 $\frac{1}{4}$ 인 집합은 원소 1, $\frac{1}{2}$ 를 포함하지

않고 원소 $\frac{1}{4}$ 를 포함하는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{4-2-1} = 2$

원소 중 가장 큰 수가 $\frac{1}{8}$ 인 집합은 원소 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 를 포함

하지 않고 원소 $\frac{1}{8}$ 를 포함하는 부분집합이므로 그 개수는

1

따라서 각 부분집합에서 원소 중 가장 큰 수를 뽑아 모두 더하면

$$(1 \times 8) + \left(\frac{1}{2} \times 4\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) + \left(\frac{1}{8} \times 1\right) = \frac{85}{8}$$

22 x 와 $6-x$ 가 모두 자연수이므로

$$x \geq 1, 6-x \geq 1$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 5$$

따라서 x 가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5이고

$$1 \in A \text{이면 } 6-1=5 \in A$$

$$2 \in A \text{이면 } 6-2=4 \in A$$

$$3 \in A \text{이면 } 6-3=3 \in A$$

$$4 \in A \text{이면 } 6-4=2 \in A$$

$$5 \in A \text{이면 } 6-5=1 \in A$$

이므로 1과 5, 2와 4는 반드시 짝을 이루어 집합 A 의 원소로 포함되어야 하고, 3은 독립적으로 집합 A 의 원소로 포함될 수 있다.

집합 A 를 원소의 개수에 따라 구하면

원소가 1개인 것: $\{3\}$

원소가 2개인 것: $\{1, 5\}, \{2, 4\}$

원소가 3개인 것: $\{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$

원소가 4개인 것: $\{1, 2, 4, 5\}$

원소가 5개인 것: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 A 는 모두 7개이다.

23 $P(A)$ 는 집합 $A = \{a, \{b, c\}\}$ 의 부분집합을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A) = 2$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^2 = 4$$

$$\therefore n(P(A)) = 4$$

24 (1) 세 집합 X, Y, Z 를 원소나열법으로 각각 나타내면

$$X = \{6, 12, 18, 24\} \quad \dots\dots (가)$$

$$Y = \{3, 5, 7, 9, 11\} \quad \dots\dots (나)$$

$$Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \quad \dots\dots (다)$$

$$(2) n(X) = 4, n(Y) = 5, n(Z) = 6 \text{ 이므로} \quad \dots\dots (라)$$

$$n(X) + n(Y) + n(Z) = 15 \quad \dots\dots (마)$$

채점 기준	배점
(가) 집합 X 를 원소나열법으로 나타낸다.	1점
(나) 집합 Y 를 원소나열법으로 나타낸다.	1점
(다) 집합 Z 를 원소나열법으로 나타낸다.	1점
(라) $n(X), n(Y), n(Z)$ 를 구한다.	1점
(마) $n(X) + n(Y) + n(Z)$ 의 값을 구한다.	1점

25 $A \subset B$ 가 성립하려면 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속해야 하므로 $3 \in B$ 이어야 한다.

$$\therefore a+3=3 \text{ 또는 } 2a-1=3 \quad \dots\dots (가)$$

(i) $a+3=3$ 일 때

$$a=0 \text{ 이므로 } A = \{-1, 3\}, B = \{-1, 2, 3\}$$

$$\therefore A \subset B$$

(ii) $2a-1=3$ 일 때

$$a=2 \text{ 이므로 } A = \{1, 3\}, B = \{2, 3, 5\}$$

$$\therefore A \not\subset B$$

(i), (ii)에 의하여 $a=0$

$$\therefore B = \{-1, 2, 3\} \quad \dots\dots (나)$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$-1 + 2 + 3 = 4 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 집합 B 의 원소 중에서 3이 될 수 있는 원소를 안다.	2점
(나) 조건을 만족하는 집합 B 를 구한다.	3점
(다) 집합 B 의 모든 원소의 합을 구한다.	1점

26 두 집합 A, B 를 원소나열법으로 나타내면

$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad \dots\dots (가)$$

이때 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 1, 2, 4를 반드시 포함하는 집합이다. $\dots\dots (나)$

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3} = 2^3 = 8 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 두 집합 A, B 를 원소나열법으로 나타낸다.	2점
(나) 집합 X 의 조건을 구한다.	2점
(다) 집합 X 의 개수를 구한다.	2점

3 강 집합의 연산 (1)

확인 문제

p. 14

- (1) $\{1, 2, 4\}$
(2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

- (1) $\{4, 5, 7\}$ (2) $\{2, 4, 6\}$
(3) $\{2, 6\}$ (4) $\{5, 7\}$

교/과/서/숙 **핵심 유형** + **답은 풀 문제**

p. 15

- (1) $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ 이므로
 $A \cap B = \{2\}$
따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

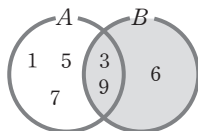
- (2) $x^2+2x-8=0$ 에서
 $(x+4)(x-2)=0$
 $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$
 즉, $A=\{-4, 2\}$
 $x^2-5x+6<0$ 에서
 $(x-2)(x-3)<0$
 $\therefore 2<x<3$
 즉, $B=\{x|2<x<3\}$
 따라서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.
- (3) $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 3\}$
 따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

- 2 (1) $A \cap B = \{x|x \text{는 정삼각형}\}$
 따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
- (2) $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$ 에서 $A \cap B = \emptyset$
 따라서 두 집합 A, B 는 서로소이다.
- (3) $2x^2-11x+5=0$ 에서
 $(2x-1)(x-5)=0$
 $\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$
 즉, $A=\{\frac{1}{2}, 5\}$
 따라서 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

- 3 $A \cap B = \{2, 8\}$ 이므로 $8 \in A$
 $a-1=8 \quad \therefore a=9$

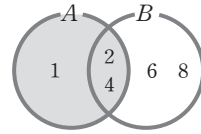
- 4 $A \cap B = \{-3, 0\}$ 이므로 $-3 \in B$
 $a^2-4a=-3$, $a^2-4a+3=0$
 $(a-1)(a-3)=0$
 $\therefore a=1$ 또는 $a=3$
- (i) $a=1$ 일 때
 $A=\{-3, -2, 0\}$, $B=\{-3, 0, 1\}$ 이므로
 $A \cap B = \{-3, 0\}$
- (ii) $a=3$ 일 때
 $A=\{-2, -1, 0\}$, $B=\{-3, 0, 1\}$ 이므로
 $A \cap B = \{0\}$
- (i), (ii)에 의하여 $a=1$

- 5 두 집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



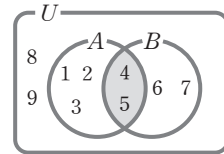
$$\therefore B = \{3, 6, 9\}$$

- 6 두 집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



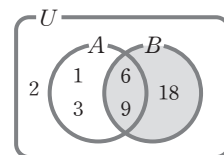
$$\therefore A = \{1, 2, 4\}$$

- 7 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore A \cap B = \{4, 5\}$$

- 8 $U = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore B = \{6, 9, 18\}$$

4 장 집합의 연산 (2)

확인 문제 p. 16

- 1 (1) $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5\}$
 (2) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5\}$
- 2 (1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 23 + 15 - 10$
 $= 28$
- (2) $n(A^c) = n(U) - n(A)$
 $= 30 - 23$
 $= 7$
- (3) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 23 - 10$
 $= 13$
- (4) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$
 $= 15 - 10$
 $= 5$

- 1 (1) $A \cup (A \cap B)^c = A \cup (A^c \cup B^c)$
 $= (A \cup A^c) \cup B^c$
 $= U \cup B^c$
 $= U$
 (2) $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$
 $= A^c \cap (B^c \cup B)$
 $= A^c \cap U$
 $= A^c$

- 2 (1) $(A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B)$
 $= (A \cup B) \cap U$
 $= A \cup B$
 (2) $(A \cup B) \cap (A^c - B) = (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c)$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup B)^c$
 $= \emptyset$

- 3 야구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라고 하면
 $n(A) = 23, n(B) = 17, n(A \cap B) = 12$
 $\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 23 + 17 - 12$
 $= 28$

따라서 야구 또는 축구를 좋아하는 학생 수는 28이다.

- 4 수학을 좋아하는 학생의 집합을 A , 영어를 좋아하는 학생의 집합을 B 라고 하면
 $n(A) = 19, n(B) = 13, n(A \cup B) = 25$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $25 = 19 + 13 - n(A \cap B)$
 $\therefore n(A \cap B) = 7$
 따라서 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생 수는 7이다.

- 5 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$ 이고
 $A = \{1, 2, 5, 10\}, B = \{5, 10, 15\}$ 이므로
 $A \cup B = \{1, 2, 5, 10, 15\}$
 $\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$
 $= 15 - 5 = 10$

- 6 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이고
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{3, 6, 9\}$ 이므로
 $A \cap B = \{6\}$
 $\therefore n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cap B)$
 $= 10 - 1 = 9$

- 1 (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$
 (2) $A^c = \{2, 5, 7, 8, 9\}$
 (3) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 8\}$
 (4) $A - B = \{1, 3, 6\}$
 (5) $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \{4\}$
 (6) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 6\} \cup \{2, 7, 9\}$
 $= \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$

- 2 (1) $A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
 $= \{3, 4, 6\}$
 (2) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\} \cap \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $= \{1, 3, 4, 6, 7\}$
 (3) $A - (C - B) = \{1, 3, 4, 6\} - \{3, 5, 6\} = \{1, 4\}$
 (4) $(A \cup B)^c \cap (B \cup C)$
 $= \{5, 8\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} = \{5\}$
 (5) $(A \cap B^c) - (A \cap C)^c$
 $= \{1, 3, 6\} - \{1, 2, 5, 7, 8, 9\} = \{3, 6\}$
 (6) $(B \cup C) \cap (A \cup C^c)$
 $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$
 $= \{2, 3, 4, 6, 9\}$

- 3 (1) $A \cap (A \cup B)^c = A \cap (A^c \cap B^c)$
 $= (A \cap A^c) \cap B^c$
 $= \emptyset \cap B^c = \emptyset$
 (2) $(A - B)^c \cap A = (A \cap B^c)^c \cap A$
 $= (A^c \cup B) \cap A$
 $= (A^c \cap A) \cup (B \cap A)$
 $= \emptyset \cup (B \cap A) = A \cap B$
 (3) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B$
 $= U \cap B = B$
 (4) $(A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$
 $= A \cup (B \cap B^c)$
 $= A \cup \emptyset$
 $= A$
 (5) $(A \cup B^c) \cap (A^c - B)^c$
 $= (A \cup B^c) \cap (A^c \cap B^c)^c$
 $= (A \cup B^c) \cap (A \cup B)$
 $= A \cup (B^c \cap B) = A \cup \emptyset = A$
 (6) $[(A^c \cup B) \cap (A \cup B)] \cup A$
 $= [(A^c \cap A) \cup B] \cup A$
 $= \emptyset \cup B \cup A = A \cup B$

- 4 (1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 45 + 37 - 21 = 61$

$$(2) n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) \\ = 45 - 21 = 24$$

$$(3) n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) \\ = 37 - 21 = 16$$

$$(4) \text{두 집합 } A-B \text{와 } B-A \text{는 서로소이므로} \\ n((A-B) \cup (B-A)) \\ = n(A-B) + n(B-A) \\ = 24 + 16 = 40$$

5 (1) $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$
 이므로
 $n(A \cup B) = n(U) - n(A^c \cap B^c) = 98 - 8 = 90$
 (2) $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 57 + 64 - 90 = 31$
 (3) $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) = 57 - 31 = 26$
 (4) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 98 - 57 = 41$
 (5) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 98 - 64 = 34$
 (6) $n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B)$
 $= 98 - 31 = 67$

6 (1) $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
 $\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 17 + 15 + 16 - 5 - 6 - 3 + 2 = 36$
 (2) $n(B \cap C) = 0$ 이므로 $n(A \cap B \cap C) = 0$
 $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
 $\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 5 + 4 + 3 - 1 - 0 - 2 + 0 = 9$

03~04강

즉집게 기출문제

p. 20~23

- | | | | | |
|----------------------------|-------|-------|-----------------------|------|
| 1 {4, 8} | 2 ② | 3 21 | 4 ④ | 5 10 |
| 6 4 | 7 ⑤ | 8 ④ | 9 $\perp, \subset$ | 10 ② |
| 11 ⑤ | 12 ③ | 13 ① | 14 $\subset, \supset$ | 15 ④ |
| 16 ③ | 17 20 | 18 8 | 19 ④ | 20 5 |
| 21 ③ | 22 ① | 23 15 | 24 27 | 25 ③ |
| 26 (1) -1 (2) {0, 1, 2, 5} | 27 8 | 28 27 | | |

1 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 5, 8, 11\}$, $C = \{4, 8, 12, \dots\}$
 이므로
 $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11\}$
 $\therefore (A \cup B) \cap C = \{2, 4, 5, 6, 8, 11\} \cap \{4, 8, 12, \dots\}$
 $= \{4, 8\}$

2 $A-B = \{5\}$ 이므로
 $A \cap B = \{2, 3, 2a-b\}$

$3 \in B$ 이어야 하므로

$$-a + 3b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$2a-b \in B$ 이어야 하므로

$$2a-b=9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

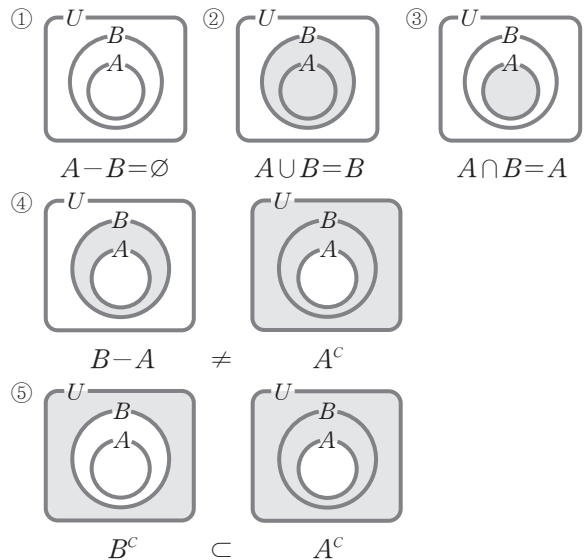
⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=6, b=3$$

$$\therefore a+b=9$$

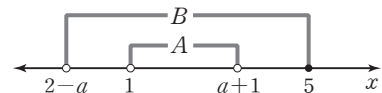
3 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{4, 6, 8\}$
 이므로 $A^c = \{4, 5, 7, 8, 9\}$
 $\therefore A^c - B = \{4, 5, 7, 8, 9\} - \{4, 6, 8\} = \{5, 7, 9\}$
 따라서 $A^c - B$ 의 모든 원소의 합은
 $5 + 7 + 9 = 21$

4 두 집합 A, B 사이의 관계를 나타낸 벤다이어그램을 이용한다.



따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

5 $A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$
 $A \subset B$ 를 만족하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$2-a \leq 1, a+1 \leq 5 \text{이어야 하므로 } 1 \leq a \leq 4$$

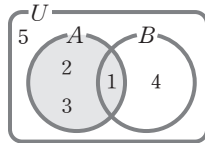
따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4이므로 모든 정수 a 의 값의 합은
 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

6 $B \cap X = X$ 이므로 $X \subset B$
 $(B-A) \cup X = X$ 이므로 $(B-A) \subset X$
 $\therefore (B-A) \subset X \subset B$
 이때 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ 이므로
 $B-A = \{5, 7, 11\}$
 $\therefore \{5, 7, 11\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7, 11\}$

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 5, 7, 11을 반드시 포함하는 집합이므로 집합 X 의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$

- 7 ① $A \cap B = \{7\}$
따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
② $A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 에서 $A \cap B = \{2\}$
따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
③ $A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$
따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
④ $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
⑤ $A \cap B^c = A$ 에서 $A - B = A$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$
따라서 두 집합 A, B 는 서로소이다.
따라서 두 집합 A, B 가 서로소인 것은 ⑤이다.

- 8 주어진 조건에서 $A \cap B = \{1\}$ ㉠
 $A^c \cap B = B - A = \{4\}$ ㉡
드모르간 법칙에 의하여
 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5\}$ ㉢
 $\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ㉣
따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
 $A = \{1, 2, 3\}$

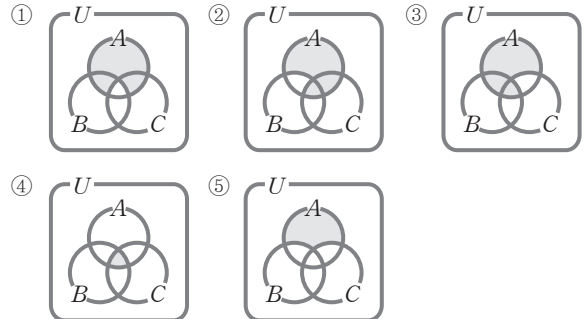


- 9 ㉠. $A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$
 $= \emptyset \cup (A \cap B)$
 $= A \cap B$
㉡. $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B$
 $= U \cap B$
 $= B$
㉢. $(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$
 $= A \cap (B^c \cup B)$
 $= A \cap U$
 $= A$
㉣. $(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$
 $= A - (B \cap C)$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

- 10 $(B - A)^c - A = (B \cap A^c)^c \cap A^c$
 $= (B^c \cup A) \cap A^c$
 $= (B^c \cap A^c) \cup (A \cap A^c)$
 $= (B^c \cap A^c) \cup \emptyset$
 $= B^c \cap A^c$
 $= (A \cup B)^c$

따라서 $(B - A)^c - A = (A \cup B)^c$ 이므로 이를 벤다이어그램으로 나타낸 것은 ②이다.

- 11 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ⑤이다.

- 12 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} [(A \cap B) \cup (B - A)] \cap A &= [(A \cap B) \cup (B \cap A^c)] \cap A \\ &= [(A \cap B) \cup (A^c \cap B)] \cap A \\ &= [(A \cup A^c) \cap B] \cap A \\ &= (U \cap B) \cap A \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

따라서 $B \cap A = B$ 이므로 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B \subset A$

- 13 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap A^c &= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= \emptyset \cup (B \cap A^c) \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A \end{aligned}$$

따라서 $B - A = B$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$

- 14 ㉠. 4의 배수는 모두 2의 배수이므로 $G_2 \cup G_4 = G_2$

㉡. 집합 $G_3 \cap G_{12}$ 는 3과 12의 공배수의 집합, 즉 12의 배수의 집합이므로 $G_3 \cap G_{12} = G_{12}$

㉢. 집합 $G_4 \cap G_5$ 는 4와 5의 공배수의 집합, 즉 20의 배수의 집합이므로 $G_2 \cup (G_4 \cap G_5) = G_2 \cup G_{20}$
20의 배수는 모두 2의 배수이므로
 $G_2 \cup (G_4 \cap G_5) = G_2 \cup G_{20} = G_2$

㉣. 6의 배수는 모두 3의 배수이므로
 $G_2 \cap (G_3 \cup G_6) = G_2 \cap G_3$
집합 $G_2 \cap G_3$ 은 2와 3의 공배수의 집합, 즉 6의 배수의 집합이므로 $G_2 \cap (G_3 \cup G_6) = G_2 \cap G_3 = G_6$

㉤. 집합 $G_4 \cap G_8$ 은 4와 8의 공배수의 집합, 즉 8의 배수의 집합이므로 $G_{16} \cup (G_4 \cap G_8) = G_{16} \cup G_8$
16의 배수는 모두 8의 배수이므로
 $G_{16} \cup (G_4 \cap G_8) = G_{16} \cup G_8 = G_8$

㉥. $G_3 \cap (G_4 \cup G_6) = (G_3 \cap G_4) \cup (G_3 \cap G_6)$
집합 $G_3 \cap G_4$ 는 3과 4의 공배수의 집합, 즉 12의 배수의 집합이고, 집합 $G_3 \cap G_6$ 은 3과 6의 공배수의 집합,

즉 6의 배수의 집합이므로
 $(G_3 \cap G_4) \cup (G_3 \cap G_6) = G_{12} \cup G_6$
 12의 배수는 모두 6의 배수이므로
 $G_3 \cap (G_4 \cup G_6) = G_{12} \cup G_6 = G_6$
 따라서 보기 중 옳지 않은 것은 ㄷ, ㅂ이다.

- 15 ① $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
 $= (B - A) \cup (A - B)$
 $= B \Delta A$
 ② $A^c \Delta B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$
 $= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$
 $= (B - A) \cup (A - B)$
 $= (A - B) \cup (B - A)$
 $= A \Delta B$
 ③ $A \Delta \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$
 $= A \cup \emptyset$
 $= A$
 ④ $A \Delta U = (A - U) \cup (U - A)$
 $= \emptyset \cup A^c$
 $= A^c$
 ⑤ $A \Delta A^c = (A - A^c) \cup (A^c - A)$
 $= A \cup A^c$
 $= U$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

16 $n(B \cap A^c) = n(B - A)$
 $= n(A \cup B) - n(A)$
 $= 43 - 35 = 8$

17 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로
 $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$ ㉠
 이때 $n(A \cup B)$ 를 구하면
 $n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A^c \cap B^c)$
 $= 30 - 18 = 12$
 따라서 $n(A \cup B) = 12$, $n(A \cap B) = 8$ 을 ㉠에 대입하면
 $n(A) + n(B) = 12 + 8 = 20$

18 $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
 $\quad - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
 ㉡

이때 $n(A \cap B)$, $n(B \cap C)$ 를 구하면
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 5 + 4 - 7 = 2$
 $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$
 $= 4 + 3 - 5 = 2$
 또 $A \cap C = \emptyset$ 이므로

$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$
 $\therefore n(A \cap C) = 0$, $n(A \cap B \cap C) = 0$
 따라서 $n(A) = 5$, $n(B) = 4$, $n(C) = 3$, $n(A \cap B) = 2$,
 $n(B \cap C) = 2$, $n(A \cap C) = 0$, $n(A \cap B \cap C) = 0$ 을 ㉡에
 대입하면
 $n(A \cup B \cup C) = 5 + 4 + 3 - 2 - 2 - 0 + 0 = 8$

- 19 $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$ 이므로
 $n(A \cap B) \leq n(A)$, $n(A \cap B) \leq n(B)$
 이때 $n(A) = 9$, $n(B) = 6$ 이므로 $n(A \cap B) \leq 6$
 $\therefore 3 \leq n(A \cap B) \leq 6$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로
 (i) $n(A \cap B) = 3$ 일 때
 $n(A \cup B) = 9 + 6 - 3 = 12$
 (ii) $n(A \cap B) = 6$ 일 때
 $n(A \cup B) = 9 + 6 - 6 = 9$
 (i), (ii)에 의하여 $9 \leq n(A \cup B) \leq 12$
 따라서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 12, 최솟값은 9이므로 구하
 는 합은 $12 + 9 = 21$

- 20 우리 반 학생 전체의 집합을 U , 야구 경기장에 가 본 학생
 의 집합을 A , 축구 경기장에 가 본 학생의 집합을 B 라고
 하면
 $n(U) = 35$, $n(A) = 9$, $n(B) = 13$
 이때 둘 다 가 보지 못한 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로
 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 18$
 $\therefore n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 35 - 18 = 17$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로
 $17 = 9 + 13 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 5$
 따라서 야구 경기장과 축구 경기장을 둘 다 가 본 학생 수는
 5이다.

- 21 전체 학생의 집합을 U , A 가수를 좋아하는 학생의 집합을
 A , B 가수를 좋아하는 학생의 집합을 B 라고 하면
 $n(U) = 54$, $n(A) = 28$, $n(B) = 30$
 이때 A와 B 두 가수를 모두 좋아하지 않는 학생의 집합은
 $A^c \cap B^c$ 이므로
 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 4$
 $\therefore n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c)$
 $= 54 - 4 = 50$ ㉢

A 가수만 좋아하는 학생의 집합은 $A - B$ 이므로
 $n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 50 - 30 = 20$
 따라서 A 가수만 좋아하는 학생 수는 20이다.

다른 풀이

㉢에서 $n(A \cup B) = 50$ 이므로
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 28 + 30 - 50 = 8$
 $\therefore n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 28 - 8 = 20$

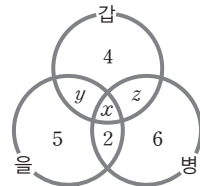
22 a, b, c 세 문제를 푼 학생의 집합을 각각 A, B, C 라고 하면
 $n(A \cup B \cup C) = 50, n(A \cap B \cap C) = 5,$
 $n(A) = 30, n(B) = 27, n(C) = 24$
 $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
 $\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) - n(A \cup B \cup C)$
 $= 30 + 27 + 24 + 5 - 50$
 $= 36$
 $\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 $= 36 - 15$
 $= 21$
따라서 두 문제만 푼 학생 수는 21이다.

23 $(N_{12} \cup N_{15}) \subset N_k$ 를 만족하는 k 의 최댓값은 12와 15의 최대공약수 3이므로
 $a = 3$
 $(N_3 \cap N_4) \supset N_l$ 를 만족하는 l 의 최솟값은 3과 4의 최소공배수 12이므로
 $b = 12$
 $\therefore a + b = 15$

24 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 이므로
 $a_1 \in B, a_4 \in B$
 $a_1 + a_4 = 10$ 이므로
 $a_1 = 1, a_4 = 9$ 또는 $a_1 = 9, a_4 = 1$
그런데 $a_1 < a_4$ 이므로
 $a_1 = 1, a_4 = 9$
 $\therefore A = \{1, a_2, a_3, 9, a_5\}, B = \{1, a_2^2, a_3^2, 81, a_5^2\}$
이때 $9 \in B$ 이므로
 $a_2^2 = 9$ 또는 $a_3^2 = 9$
(i) $a_2^2 = 9$ 일 때, $a_2 = 3$ 이므로
 $A = \{1, 3, a_3, 9, a_5\}, B = \{1, 9, a_3^2, 81, a_5^2\}$
 $\therefore A \cup B = \{1, 3, 9, 81, a_3, a_3^2, a_5, a_5^2\}$
 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합이 224이므로
 $94 + a_3 + a_3^2 + a_5 + a_5^2 = 224$
 $\therefore a_3 + a_3^2 + a_5 + a_5^2 = 130 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
이때 $a_4 < a_5$ 이므로 $a_5 > 9$
 $a_5 \geq 11$ 이라고 하면 $a_5 + a_5^2 \geq 132$
이것은 $\textcircled{1}$ 을 만족하지 않으므로 $a_5 = 10$
 $a_5 = 10$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $a_3 + a_3^2 + 10 + 10^2 = 130$
 $a_3^2 + a_3 - 20 = 0$
 $(a_3 + 5)(a_3 - 4) = 0$
 $\therefore a_3 = -5$ 또는 $a_3 = 4$
그런데 a_3 은 양의 정수이므로 $a_3 = 4$
 $\therefore A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$

(ii) $a_3^2 = 9$ 일 때, $a_3 = 3$
이때 $a_1 < a_2 < a_3$ 이므로 $1 < a_2 < 3$
 $\therefore a_2 = 2$
즉, $A = \{1, 2, 3, 9, a_5\}, B = \{1, 4, 9, 81, a_5^2\}$
 $\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 9, 81, a_5, a_5^2\}$
 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합이 224이므로
 $100 + a_5 + a_5^2 = 224$
 $\therefore a_5 + a_5^2 = 124$
이 등식을 만족하는 양의 정수 a_5 는 존재하지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$
따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은
 $1 + 3 + 4 + 9 + 10 = 27$

25 갑, 을, 병 세 사람이 가진 서로 다른 스티커의 종류의 수를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 세 사람이 모두 가지고 있는 스티커의 종류의 수를 x ,
갑과 을만 가지고 있는 스티커의 종류의 수를 y , 갑과 병만
가지고 있는 스티커의 종류의 수를 z 라고 하면
 $4 + 5 + 6 + 2 + x + y + z = 20$
 $\therefore x + y + z = 3$
따라서 $y = z = 0$ 일 때, x 의 값이 최대가 되므로 구하는 x 의
최댓값은 3이다.

26 (1) $A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로 $1 \in A$
 $a^2 = 1$ 이므로 $a = 1$ 또는 $a = -1 \quad \dots\dots \textcircled{가}$
(i) $a = 1$ 일 때
 $A = \{1, 2, 5\}, B = \{2, 3, 4\}$ 이므로
 $A \cap B = \{2\}$
(ii) $a = -1$ 일 때
 $A = \{1, 2, 5\}, B = \{0, 1, 2\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 2\}$
(i), (ii)에 의하여 $a = -1 \quad \dots\dots \textcircled{나}$
(2) $A = \{1, 2, 5\}, B = \{0, 1, 2\}$ 이므로
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 5\} \quad \dots\dots \textcircled{다}$

채점 기준	배점
가) $a = 1$ 또는 $a = -1$ 임을 안다.	2점
나) a 의 값을 구한다.	2점
다) $A \cup B$ 를 구한다.	2점

27 $A^c \cup B^c = U$ 에서 $(A \cap B)^c = U$
 $\therefore A \cap B = \emptyset$
즉, 두 집합 A, B 는 서로소이다. $\dots\dots \textcircled{가}$

이때 집합 B 는 전체집합 U 의 부분집합 중 2, 4, 6을 원소로 갖지 않는 집합이다. (나)

따라서 집합 B 의 개수는

$$2^{6-3} = 2^3 = 8 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 두 집합 A, B 가 서로소임을 구한다.	2점
(나) 집합 B 의 조건을 안다.	2점
(다) 집합 B 의 개수를 구한다.	2점

28 민호네 반 학생 전체의 집합을 U , 영화반에 가입한 학생의 집합을 A , 등산반에 가입한 학생의 집합을 B 라고 하면
 $n(U)=35, n(A)=24, n(B)=19 \quad \dots\dots (가)$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 24 + 19 - n(A \cup B)$
 $= 43 - n(A \cup B) \quad \dots\dots ㉠$

이때 $n(B) < n(A)$ 이므로 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 $B \subset A$ 일 때이고, $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 $A \cup B = U$ 일 때이다.

$$\therefore 24 \leq n(A \cup B) \leq 35 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots (나)$$

$$㉠, ㉡에서 \quad 8 \leq n(A \cap B) \leq 19 \quad \dots\dots (다)$$

따라서 영화반과 등산반에 모두 가입한 학생은 최대 19명, 최소 8명이므로

$$M=19, m=8 \quad \dots\dots (라)$$

$$\therefore M+m=27 \quad \dots\dots (마)$$

채점 기준	배점
(가) 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.	1점
(나) $n(A \cup B)$ 의 범위를 구한다.	2점
(다) $n(A \cap B)$ 의 범위를 구한다.	2점
(라) M, m 의 값을 구한다.	1점
(마) $M+m$ 의 값을 구한다.	1점

05 강 명제와 조건

확인 문제

p. 24

1 (2), (4)

2 가정: $ab=0$ 이다.
 결론: $a=0$ 또는 $b=0$ 이다.

3 (1) 어떤 실수 x 에 대하여 $|x| \leq 0$ 이다.
 (2) 모든 실수 x 에 대하여 $x+2 \neq 1$ 이다.

핵심 유형 + 교/과/서/속 많은 풀 문제

p. 25

1 (1) $1+3 \leq 2$ (거짓)
 (2) 3은 4의 약수가 아니다. (참)
 (3) $\sqrt{2}$ 는 무리수가 아니다. (거짓)
 (4) 직사각형은 평행사변형이다. (참)

2 (1) $2-5 = -3$ (참)
 (2) 4는 2의 배수가 아니다. (거짓)
 (3) 7은 짝수가 아니다. (참)
 (4) 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만나서 생기는 엇각의 크기는 같지 않다. (거짓)

3 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 (1) 조건 p 의 진리집합은
 $\{5, 10, 15\}$
 (2) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ 에서
 $(x-2)(x-4) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq x \leq 4$
 따라서 조건 q 의 진리집합은
 $\{2, 3, 4\}$

4 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 (1) $\sim p$: x 는 소수가 아니다.
 따라서 조건 $\sim p$ 의 진리집합은
 $\{1, 4, 6\}$
 (2) $\sim q$: $2x-1 \geq 5$
 이때 $2x-1 \geq 5$ 에서 $x \geq 3$
 따라서 조건 $\sim q$ 의 진리집합은
 $\{3, 4, 5, 6\}$

5 (1) 두 조건 ' $x^2-3x+2=0$ ', ' $x-2=0$ '의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $x^2-3x+2=0$ 에서
 $(x-1)(x-2)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
 $\therefore P = \{1, 2\}$
 $x-2=0$ 에서 $x=2$
 $\therefore Q = \{2\}$
 따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
 (2) 두 조건 '6의 배수이다.', '3의 배수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $P = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$
 $Q = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$
 따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

6 (1) 두 조건 ' $x-1 < 0$ ', ' $x-2 < 0$ '의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면

$$P = \{x | x < 1\}$$

$$Q = \{x | x < 2\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- (2) [반례] $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 는 유리수이지만 x , y 는 유리수가 아니다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

- 7 (1) ' $x^2 - 1 > 0$ '의 진리집합을 P 라고 하면

$$x^2 - 1 > 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 1$$

$$\therefore P = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 1\}$$

따라서 $P \neq U$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

- (2) ' $x^2 - 3x - 4 = 0$ '의 진리집합을 P 라고 하면

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\therefore P = \{-1, 4\}$$

따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- 8 (1) ' $|x-2| \geq 0$ '의 진리집합을 P 라고 하면

$$P = U$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

- (2) ' $x^2 < 0$ '의 진리집합을 P 라고 하면

$$P = \emptyset$$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

06

명제의 역과 대우, 필요조건, 충분조건

확인 문제

p. 26

- 1 (1) 역: $x^2 = 9$ 이면 $x = 3$ 이다.
대우: $x^2 \neq 9$ 이면 $x \neq 3$ 이다.
(2) 역: x 가 4의 약수이면 x 는 8의 약수이다.
대우: x 가 4의 약수가 아니면 x 는 8의 약수가 아니다.

- 2 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라고 하면

$$P = \{\sqrt{3}\}$$

$$x^2 = 3 \text{에서 } x = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore Q = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$$\therefore P \subset Q$$

- (1) $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

- (2) $p \Rightarrow q$ 이므로 q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

핵심+답은 풀 문제

p. 27

- 1 역: $x+y > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다. (거짓)
[반례] $x = -1$, $y = 2$ 이면 $x+y > 0$ 이지만 $x < 0$ 이고 $y > 0$ 이다.
대우: $x+y \leq 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다. (참)

- 2 역: $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다. (거짓)
[반례] $x = -2$, $y = 1$ 이면 $x^2 > y^2$ 이지만 $x < y$ 이다.
대우: $x^2 \leq y^2$ 이면 $x \leq y$ 이다. (거짓)
[반례] $x = 1$, $y = -2$ 이면 $x^2 \leq y^2$ 이지만 $x > y$ 이다.

- 3 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라고 하면

$$(1) P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, Q = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$P \supset Q \text{이므로 } p \text{는 } q \text{이기 위한 필요조건이다.}$$

$$(2) P = \left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}, Q = \{x \mid x < 4\}$$

$$P \subset Q \text{이므로 } p \text{는 } q \text{이기 위한 충분조건이다.}$$

$$(3) x^2 = 1 \text{에서 } x = \pm 1$$

$$\therefore P = \{-1, 1\}$$

$$|x| = 1 \text{에서 } x = \pm 1$$

$$\therefore Q = \{-1, 1\}$$

$$P = Q \text{이므로 } p \text{는 } q \text{이기 위한 필요충분조건이다.}$$

- 4 (1) 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라고 하면

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, Q = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$P \supset Q \text{이므로 } p \text{는 } q \text{이기 위한 필요조건이다.}$$

$$(2) ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0$$

$$\text{따라서 } p \text{는 } q \text{이기 위한 필요충분조건이다.}$$

- (3) 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라고 하면

$$P = \{3\}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore Q = \{1, 3\}$$

$$P \subset Q \text{이므로 } p \text{는 } q \text{이기 위한 충분조건이다.}$$

- 5 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라고 하면

$$2x + k = 0 \text{에서 } x = -\frac{k}{2} \quad \therefore P = \left\{-\frac{k}{2}\right\}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

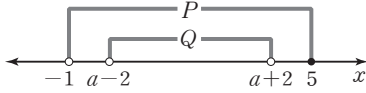
$$\therefore Q = \{-1, 4\}$$

$$p \text{가 } q \text{이기 위한 충분조건이 되려면 } P \subset Q \text{이어야 하므로}$$

$$-\frac{k}{2} = -1 \text{ 또는 } -\frac{k}{2} = 4$$

$$\therefore k = 2 \text{ 또는 } k = -8$$

- 6 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $x^2 - 4x - 5 < 0$ 에서 $(x+1)(x-5) < 0$
 $\therefore -1 < x < 5$
 $\therefore P = \{x \mid -1 < x < 5\}$
한편 $Q = \{x \mid a-2 \leq x \leq a+2\}$
 p 는 q 이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$ 이어야 하므로



$a-2 > -1$ 이고 $a+2 < 5 \quad \therefore 1 < a < 3$
따라서 정수 a 의 값은 2이다.

07 명제의 증명과 절대부등식

확인 문제

p. 28

- 1 (1) 정의 (2) 정리 (3) 정리 (4) 정의

- 2 (1) $3x-3 > 0$ 에서 $x > 1$
따라서 주어진 부등식은 $x > 1$ 일 때 성립한다.
(2) $x = -1$ 일 때, $(x+1)^2 = 0$
따라서 주어진 부등식은 $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
(3) 부등식 $|x-1| \geq 0$ 은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
(4) $x^2 - 2x - (-1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 - 2x \geq -1$
따라서 부등식 $x^2 - 2x \geq -1$ 은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 절대부등식은 (3), (4)이다.

핵심 유형 + 닳은꼴 문제

p. 29

- 1 (가) 홀수 (나) 홀수 (다) $2k^2 - 2k$
2 (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 짝수(또는 2의 배수)
3 $|a| + |b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 이므로
 $(|a| + |b|)^2 \geq |a+b|^2$ 임을 보이면 된다.
 $(|a| + |b|)^2 - |a+b|^2$
 $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
 $= 2(|ab| - ab)$

$|ab| \geq ab$ 이므로

$$2(|ab| - ab) \geq 0$$

따라서 $(|a| + |b|)^2 \geq |a+b|^2$ 이므로

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

이때 등호는 $|ab| = ab$, 즉 $|ab| \geq 0$ 일 때 성립한다.

$$\therefore \text{(가) } 0 \quad \text{(나) } (|a| + |b|)^2 \quad \text{(다) } ab$$

- 4 $\frac{a+b}{2} > 0$, $\sqrt{ab} > 0$ 이므로 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$ 임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

이때 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.

05~07장 족집게 기출문제

p. 30~33

1 ③	2 ③	3 ①	4 {1, 2}	5 ②
6 ⑤	7 ①	8 $\perp, \parallel$	9 ⑤	10 ④
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ⑤	15 -4
16 ④	17 (가) $3k+2$ (나) $3k^2+2k$ (다) $3k^2+4k+1$			
18 (가) $2\sqrt{b}$ (나) $b=0$	19 ⑤	20 ①	21 ③	
22 ⑤	23 $\perp$	24 해수, 현지, 수연		
25 $-2 \leq a \leq -1$	26 5	27 풀이 참조		

- 1 $\perp$, $x^2 = x$ 는 x 의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하므로 명제가 아니고 조건이다.
 $\square$, '날씨가 좋다.'는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 보기 중 명제인 것은 $\neg$, $\cap$, $\cup$ 이다.
- 2 '적어도 하나는 $\sim$ 이 아니다.'의 부정은 '모두 $\sim$ 이다.'이므로 주어진 조건의 부정은 ' x, y 는 모두 0이다.'
- 3 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 에서
 $a=b$ 이고 $b=c$ 이고 $c=a$ 이므로 $a=b=c$
따라서 이것의 부정은
 $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a$

- 4 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면

$$x^2 - x - 12 = 0 \text{에서 } (x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 $P = \{4\}$ 이므로

$$P^c = \{1, 2, 3, 5\}$$

또 16의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로

$$Q = \{1, 2, 4\}$$

따라서 ' $\sim p$ 이고 q '의 진리집합은

$$P^c \cap Q = \{1, 2\}$$

- 5 ① [반례] $x = -2$ 이면 $x^2 > 1$ 이지만 $x < 1$ 이다. (거짓)

- ② ' $2x - 1 = 3$ '의 진리집합을 P 라고 하면

$$2x = 4 \text{에서 } x = 2$$

$$\therefore P = \{2\}$$

' $x^2 - 4 = 0$ '의 진리집합을 Q 라고 하면

$$(x+2)(x-2) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore Q = \{-2, 2\}$$

$P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- ③ [반례] $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 x, y 는 무리수이지만 $x + y$ 는 유리수이다. (거짓)

- ④ [반례] $x = 2, y = -2$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x^2 + y^2 \neq 0$ 이다. (거짓)

- ⑤ [반례] $\angle A = 40^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 70^\circ$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이지만 $\angle A \neq \angle B$ 이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ②이다.

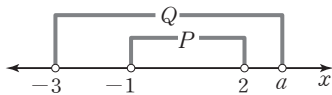
- 6 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면

$$P = \{x \mid -1 < x < 2\}$$

$$Q = \{x \mid -3 < x < a\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$

$P \subset Q$ 를 만족하도록 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



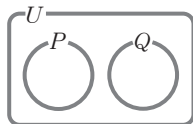
$$\therefore a \geq 2$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 2이다.

- 7 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $P \subset Q^c$

$$P - Q^c = \emptyset \quad \therefore P \cap Q = \emptyset$$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\textcircled{1} P \cap Q^c = P - Q = P$$

$$\textcircled{2} P^c \supset Q$$

$$\textcircled{3} P \cup Q^c = Q^c$$

$$\textcircled{4} P^c \cap Q = Q - P = Q$$

$$\textcircled{5} P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c \neq \emptyset (\because P \cup Q \neq U)$$

따라서 옳은 것은 ①이다.

- 8 ㄱ. [반례] 2는 소수이지만 짝수이다. (거짓)

$$\text{ㄴ. } x^2 = 2x \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이면 $x^2 = 2x$ 가 성립한다. (참)

$$\text{ㄷ. [반례] } x = 0 \text{이면 } 2x + 1 < 5 \text{이다. (거짓)}$$

ㄹ. 주어진 부등식의 좌변을 변형하면

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - x + 1 > 0$ 이 성립한다. (참)

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

- 9 주어진 명제의 대우는

$$' \sim (a=0 \text{ 또는 } b=0) \text{이면 } \sim (ab=0) \text{이다.}'$$

즉, ' $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 $ab \neq 0$ 이다.'

- 10 ① 역: 마름모이면 정사각형이다. (거짓)

대우: 마름모가 아니면 정사각형이 아니다. (참)

- ② 역: $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$ 이면 $ab \neq 6$ 이다. (거짓)

[반례] $a = 1, b = 6$ 이면 $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$ 이지만 $ab = 6$ 이다.

대우: $a = 2$ 이고 $b = 3$ 이면 $ab = 6$ 이다. (참)

- ③ 역: ab 가 정수이면 $a + b$ 는 정수이다. (거짓)

[반례] $a = 2, b = \frac{1}{2}$ 이면 ab 는 정수이지만 $a + b$ 는 정수가 아니다.

대우: ab 가 정수가 아니면 $a + b$ 는 정수가 아니다. (거짓)

[반례] $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 이면 ab 는 정수가 아니지만 $a + b$ 는 정수이다.

- ④ 역: $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이면 $|a| + |b| = 0$ 이다. (참)

대우: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $|a| + |b| \neq 0$ 이다. (참)

- ⑤ 역: $x > 10$ 이면 $x > 5$ 이다. (참)

대우: $x \leq 10$ 이면 $x \leq 5$ 이다. (거짓)

[반례] $x = 7$ 이면 $x \leq 10$ 이지만 $x > 5$ 이다.

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ④이다.

- 11 $Q \subset P^c$ 이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

따라서 이 명제의 대우 $p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

- 12 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 각각의 대우

$\sim q \rightarrow \sim p$ 와 $q \rightarrow \sim r$ 도 모두 참이다.

또 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제

$p \rightarrow \sim r$ 도 참이고, 이것의 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

13 ① $p: x=1, q: x=0$ 또는 $x=1$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이고, 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② $p: x=y, q: x=y$ 또는 $x=-y$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이고 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ $p: x=y, q: x=y$ 또는 $z=0$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이고, 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ 명제 $p \rightarrow q$ 는 참

명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓

[반례] $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 는 유리수이지만 x, y 는 무리수이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓

[반례] $x=\frac{1}{2}$ 이면 $x>0$ 이지만 $x<1$ 이다.

명제 $q \rightarrow p$ 는 참

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ⑤이다.

14 ① $p: x=y$ 또는 $x=-y, q: x=-y$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이고, 명제 $q \rightarrow p$ 는 참이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

② 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P \subset Q$

이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ $p: x=0$ 또는 $y=0, q: x=0$ 이고 $y=0$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이고, 명제 $q \rightarrow p$ 는 참이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

④ $p: x>2, q: x<-2$ 또는 $x>2$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이고, 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $p: x>0, y>0, q: x>0, y>0$

이므로 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 참이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ⑤이다.

15 주어진 네 조건을

$p: x \leq -4$ 또는 $-3 \leq x \leq -1,$

$q: x < a, r: x > b, s: x \geq 0$

이라 하고, 네 조건 p, q, r, s 의 진리집합을 각각 P, Q, R, S 라고 하면

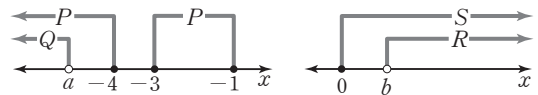
$P = \{x | x \leq -4 \text{ 또는 } -3 \leq x \leq -1\}$

$Q = \{x | x < a\}, R = \{x | x > b\}, S = \{x | x \geq 0\}$

이때 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

r 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $R \subset S$

따라서 $Q \subset P, R \subset S$ 를 만족하도록 집합 P 와 Q, R 와 S 를 수직선 위에 각각 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore a \leq -4, b \geq 0$$

따라서 a 의 최댓값은 $-4, b$ 의 최솟값은 0 이므로 그 합은 $-4+0=-4$

16 주어진 세 조건을

$p: 1 \leq x \leq 5, q: a \leq x \leq 7, r: b \leq x \leq 3$

이라 하고, 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라고 하면

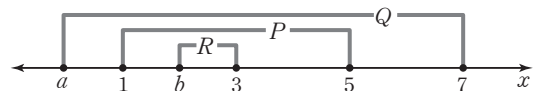
$P = \{x | 1 \leq x \leq 5\}, Q = \{x | a \leq x \leq 7\}, R = \{x | b \leq x \leq 3\}$

이때 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ ㉠

r 는 p 이기 위한 충분조건이므로 $R \subset P$ ㉡

㉠, ㉡에서 $R \subset P \subset Q$

따라서 $R \subset P \subset Q$ 를 만족하도록 세 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore a \leq 1, 1 \leq b \leq 3$$

따라서 $a=1, b=1, c=3$ 이므로

$$abc=3$$

17 (가) $3k+2$ (나) $3k^2+2k$ (다) $3k^2+4k+1$

18 $\sqrt{a-b}>0, \sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ 이므로

$(\sqrt{a-b})^2 \geq (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= a-b - (a-2\sqrt{ab}+b) \\ &= 2\sqrt{ab} - 2b \\ &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \end{aligned}$$

이때 $\sqrt{b} \geq 0, \sqrt{a}-\sqrt{b} > 0$ 이므로

$$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \geq 0$$

따라서 $(\sqrt{a-b})^2 \geq (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 이므로

$$\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

이때 $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$ 이므로 등호는 $\sqrt{b}=0$, 즉 $b=0$ 일 때 성립한다.

$$\therefore (가) 2\sqrt{b} \quad (나) b=0$$

19 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) = ab+4+1+\frac{4}{ab}$$

$$= ab + \frac{4}{ab} + 5$$

$$\geq 2\sqrt{ab \times \frac{4}{ab}} + 5$$

$$= 9$$

(단, 등호는 $ab = \frac{4}{ab}$, 즉 $ab=2$ 일 때 성립)

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은 9이다.

20 a, b, x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

$$24 \times 54 \geq (ax+by)^2, 36^2 \geq (ax+by)^2$$

$\therefore -36 \leq ax+by \leq 36$ (단, 등호는 $ay=bx$ 일 때 성립)

따라서 $ax+by$ 의 최솟값은 -36 이다.

21 x, y 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$$

$$25a \geq (3x+4y)^2$$

$\therefore -5\sqrt{a} \leq 3x+4y \leq 5\sqrt{a}$ (단, 등호는 $3y=4x$ 일 때 성립)

$3x+4y$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 $20\sqrt{2}$ 이므로

$$10\sqrt{a}=20\sqrt{2}, \sqrt{a}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore a=8$$

22 ㄱ. [반례] $x=\sqrt{2}$ 이면 $x^2=2$ 이므로 $x^2 \in Q$ 이지만 $x^3=2\sqrt{2}$ 이므로 $x^3 \notin Q$ 이다. (거짓)

ㄴ. (유리수) $\div$ (0이 아닌 유리수) = (유리수)이므로

$$x \in Q \text{이고 } x^3 \in Q \text{이면 } \frac{x^3}{x} = x^2 \in Q$$

$$\therefore (p \text{이고 } r) \Rightarrow q$$

ㄷ. (유리수) $\div$ (0이 아닌 유리수) = (유리수)이므로

$$x^2 \in Q \text{이고 } x^3 \in Q \text{이면 } \frac{x^3}{x^2} = x \in Q$$

$$\therefore (q \text{이고 } r) \Rightarrow p$$

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

23 $\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$$P \subset Q^c \quad \therefore Q \subset P^c$$

ㄱ. x 가 집합 Q 의 원소가 아니면 x 는 집합 P 의 원소이다.

$$\Leftrightarrow x \in Q^c \text{이면 } x \in P \text{이다.}$$

$$\Leftrightarrow Q^c \subset P \text{ (거짓)}$$

ㄴ. x 가 집합 Q 의 원소이면 x 는 집합 P 의 원소가 아니다.

$$\Leftrightarrow x \in Q \text{이면 } x \in P^c \text{이다.}$$

$$\Leftrightarrow Q \subset P^c \text{ (참)}$$

ㄷ. x 가 집합 P 의 원소가 아니면 x 는 집합 Q 의 원소이다.

$$\Leftrightarrow x \in P^c \text{이면 } x \in Q \text{이다.}$$

$$\Leftrightarrow P^c \subset Q \text{ (거짓)}$$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄴ이다.

24 각각의 주장이 참일 때를 T, 거짓일 때를 F라 하고 세 사람의 주장의 참, 거짓을 알아보자.

(i) 수연이의 주장이 참인 경우

수연	T	수연이는 도서관에 가지 않았다.
현지	F	현지는 서점에 갔다.
혜수	F	혜수는 서점에 가지 않았다.

현지는 서점에 갔고, 수연이는 도서관과 체육관 중 도서관에 가지 않았으므로 체육관에 간 것이고, 혜수는 도서관에 간 것이다.

(ii) 현지의 주장이 참인 경우

수연	F	수연이는 도서관에 갔다.
현지	T	현지는 서점에 가지 않았다.
혜수	F	혜수는 서점에 가지 않았다.

수연이가 도서관에 갔으므로 현지와 혜수 둘 중 한 명은 서점에 갔어야 하는데 둘 다 서점에 가지 않은 것이 되므로 모순이다.

(iii) 혜수의 주장이 참인 경우

수연	F	수연이는 도서관에 갔다.
현지	F	현지는 서점에 갔다.
혜수	T	혜수는 서점에 갔다.

현지와 혜수 둘 다 서점에 간 것이 되므로 모순이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 도서관, 서점, 체육관에 간 사람은 차례로 혜수, 현지, 수연이다.

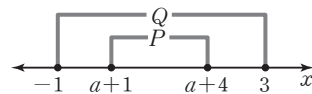
25 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면

$$P = \{x \mid a+1 \leq x \leq a+4\}$$

$$Q = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다. (가)

따라서 $P \subset Q$ 를 만족하도록 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$a+1 \geq -1, a+4 \leq 3$$

..... (나)

$$\therefore -2 \leq a \leq -1$$

..... (다)

채점 기준	배점
(가) 두 조건 p, q 의 진리집합 사이의 포함 관계를 구한다.	2점
(나) a 의 조건을 구한다.	2점
(다) a 의 값의 범위를 구한다.	1점

26 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

..... (가)

따라서 이 명제의 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

즉, $\sim q: x = -2, \sim p: x^2 + ax + 6 = 0$ 이므로 명제

' $x = -2$ 이면 $x^2 + ax + 6 = 0$ 이다.'는 참이다. (나)

$x = -2$ 를 $x^2 + ax + 6 = 0$ 에 대입하면

$$4 - 2a + 6 = 0$$

$$\therefore a = 5$$

..... (다)

채점 기준	배점
(가) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참임을 안다.	2점
(나) 대우가 참임을 알고 대우를 말한다.	2점
(다) a 의 값을 구한다.	2점

27 (1) 주어진 명제의 대우는

'자연수 a, b 에 대하여 a 와 b 가 모두 홀수이면 ab 는 홀수이다.' (가)

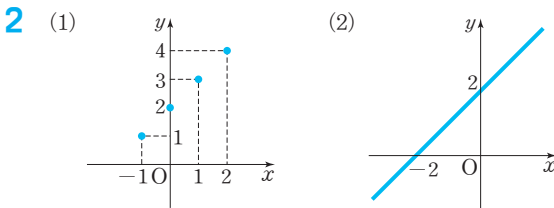
- (2) 주어진 명제의 대우가 참임을 보이면 된다.
 자연수 a, b 에 대하여 a 와 b 가 모두 홀수이면
 $a=2m+1, b=2n+1$ (m, n 은 음이 아닌 정수)
 로 나타낼 수 있다. (나)
 이때
 $ab=(2m+1)(2n+1)=2(2mn+m+n)+1$
 이므로 ab 는 홀수이다. (다)
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '자연수 a, b 에 대하여 ab 가 짝수이면 a 또는 b 는 짝수이다.'는 참이다. (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 명제의 대우를 말한다.	2점
(나) a, b 를 홀수로 표현한다.	2점
(다) ab 가 홀수임을 보인다.	2점
(라) 대우를 이용한 증명법을 이용하여 결론을 쓴다.	1점

8장 함수의 뜻과 그래프

확인 문제 p. 34

- 1 (3) 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, c\}$



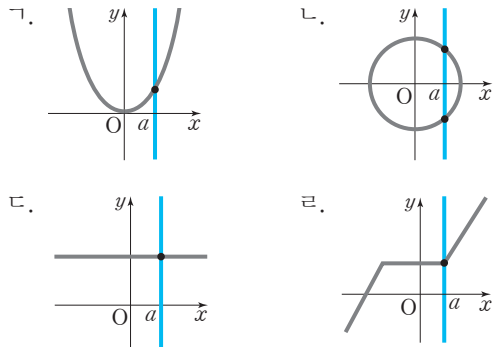
핵심 유형 + 닳은꼴 문제 p. 35

- 1 (1) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \text{는 실수}\}$
 (2) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \leq 8 \text{인 실수}\}$
- 2 (1) 정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$, 치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$
 (2) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \geq -3 \text{인 실수}\}$

- 3 ㄱ. $f(-1)=-1, g(-1)=1$ 이므로 $f \neq g$
 ㄴ. $f(-1)=-2, g(-1)=0$ 이므로 $f \neq g$
 ㄷ. $f(-1)=g(-1)=1, f(0)=g(0)=0,$
 $f(1)=g(1)=1$ 이므로 $f=g$
 따라서 보기 중 $f=g$ 인 것은 ㄷ이다.

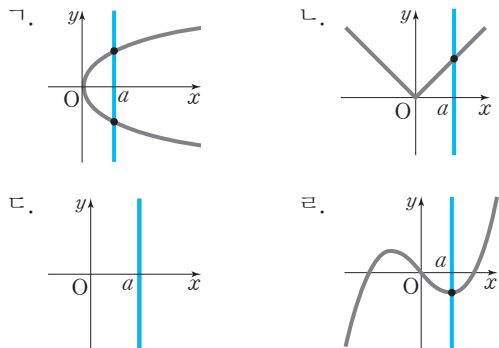
- 4 (1) 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 정의역과 공역은 각각 실수 전체의 집합이고 $f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로 $f=g$ 따라서 서로 같은 함수이다.
 (2) 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 정의역과 공역은 각각 실수 전체의 집합이고 $x < 0$ 일 때, $f(x) \neq g(x)$ 이므로 $f \neq g$ 따라서 서로 같은 함수가 아니다.

- 5 주어진 그래프 위에 직선 $x=a$ (a 는 정의역의 임의의 원소)를 그어 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.



따라서 보기 중 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

- 6 주어진 그래프 위에 직선 $x=a$ (a 는 정의역의 임의의 원소)를 그어 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.



따라서 보기 중 함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

9장 여러 가지 함수와 합성함수

확인 문제 p. 36

- 1 (1) 정의역에 속하는 임의의 서로 다른 두 원소에 대하여 함숫값이 항상 다르므로 일대일함수이지만 치역과 공역이 서로 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.

(2) 정의역에 속하는 임의의 서로 다른 두 원소에 대하여 함수값이 항상 다르므로 일대일함수이고, 치역과 공역이 서로 같으므로 일대일대응이다.

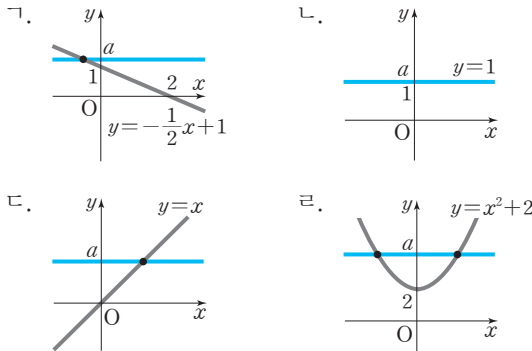
(3) $2 \neq 3$ 이지만 $f(2)=f(3)$ 이므로 일대일함수가 아니다. 따라서 일대일함수인 것은 (1), (2), 일대일대응인 것은 (2)이다.

- 2 (1) $(f \circ g)(-1)=f(g(-1))=f(1)=1$
 (2) $(g \circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-3)=9$

핵심 유형 + 답은 풀 문제

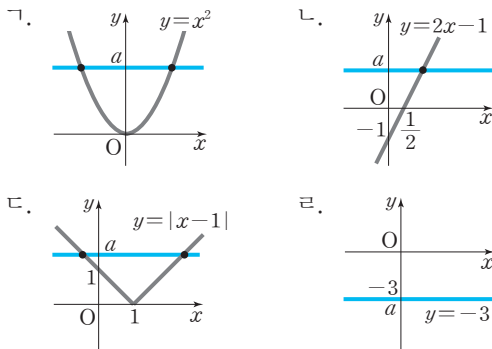
p. 37

- 1 주어진 함수의 그래프를 각각 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 $y=a$ (a 는 상수)와의 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



- (1) 일대일대응의 그래프는 공역의 임의의 원소 a 에 대하여 직선 $y=a$ 와 항상 한 점에서 만나는 그래프이므로 가, 다이다.
 (2) 항등함수의 그래프는 직선 $y=x$ 이므로 다이다.
 (3) 상수함수의 그래프는 x 축에 평행한 직선이므로 나이다.

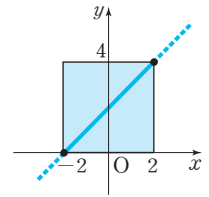
- 2 주어진 함수의 그래프를 각각 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 $y=a$ (a 는 치역의 임의의 원소)와의 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.



따라서 일대일함수인 것은 나이다.

- 3 함수 f 가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 한다.

따라서 함수 $f(x)=ax+b$ ($a>0$)에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, 0)$,



$(2, 4)$ 를 지나야 하므로

$$-2a+b=0 \quad \cdots \text{㉠}$$

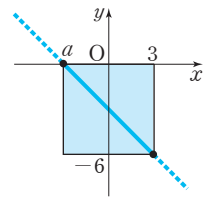
$$2a+b=4 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

- 4 함수 f 가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 한다.

따라서 함수 $f(x)=-x+b$ 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, 0)$,



$(3, -6)$ 을 지나야 하므로

$$-a+b=0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$-3+b=-6 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-3$$

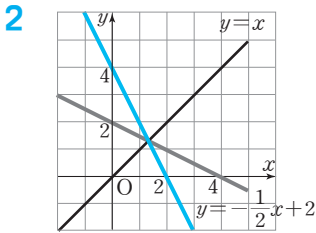
- 5 (1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))$
 $=g(x^2-1)$
 $=3(x^2-1)+1$
 $=3x^2-3+1$
 $=3x^2-2$
 (2) $(g \circ g)(x)=g(g(x))$
 $=g(3x+1)$
 $=3(3x+1)+1$
 $=9x+3+1$
 $=9x+4$

- 6 (1) $(g \circ h)(x)=g(h(x))$
 $=g(x^2+2)$
 $=\frac{1}{2}(x^2+2)+1$
 $=\frac{1}{2}x^2+1+1$
 $=\frac{1}{2}x^2+2$

- (2) $((f \circ g) \circ h)(x)=f(g(h(x)))$ 이고, (1)에서 $g(h(x))=\frac{1}{2}x^2+2$ 이므로

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= f\left(\frac{1}{2}x^2+2\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-4 \\ &= x^2+4-4 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

- 1 (1) 3
 (2) $(f \circ f^{-1})(c) = f(f^{-1}(c)) = f(2) = c$
 (3) $(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(b) = 1$



- 1 (1) $f(a) = 1$ 이므로 $2a - 3 = 1 \quad \therefore a = 2$
 (2) $f(b) = 7$ 이므로 $2b - 3 = 7 \quad \therefore b = 5$
- 2 $f(3) = 5$ 이므로 $3a - 2 = 5 \quad \therefore a = \frac{7}{3}$
 $g(4) = -2$ 이므로 $\frac{1}{2} \times 4 - b = -2 \quad \therefore b = 4$
- 3 (1) 함수 $y = 3x - 2$ 는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
 $y = 3x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면
 $3x = y + 2 \quad \therefore x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
 $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
- (2) 함수 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 를 x 에 대하여 풀면
 $\frac{1}{2}x = -y + 2 \quad \therefore x = -2y + 4$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
 $y = -2x + 4$
- 4 (1) 함수 $y = \frac{3}{2}x + 4$ 는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
 $y = \frac{3}{2}x + 4$ 를 x 에 대하여 풀면

$$\frac{3}{2}x = y - 4 \quad \therefore x = \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

- (2) 함수 $y = -2x - \frac{1}{3}$ 은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = -2x - \frac{1}{3}$ 을 x 에 대하여 풀면

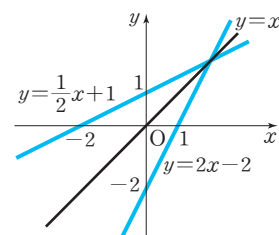
$$2x = -y - \frac{1}{3} \quad \therefore x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

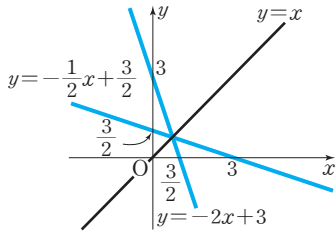
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$$

- 5 (1) $(g^{-1} \circ f)(-3) = g^{-1}(f(-3))$
 $= g^{-1}(-3)$
 $g^{-1}(-3) = k$ (k 는 상수)라고 하면 $g(k) = -3$ 이므로
 $\frac{1}{2}k - 4 = -3$ 에서 $k = 2 \quad \therefore g^{-1}(-3) = 2$
 $\therefore (g^{-1} \circ f)(-3) = 2$
- (2) $((g \circ f)^{-1} \circ g)(2) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(2)$
 $= f^{-1}(2)$
 $f^{-1}(2) = k$ (k 는 상수)라고 하면 $f(k) = 2$ 이므로
 $2k + 3 = 2$ 에서 $k = -\frac{1}{2} \quad \therefore f^{-1}(2) = -\frac{1}{2}$
 $\therefore ((g \circ f)^{-1} \circ g)(2) = -\frac{1}{2}$
- 6 (1) $(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2))$
 $= f^{-1}(4)$
 $f^{-1}(4) = k$ (k 는 상수)라고 하면 $f(k) = 4$ 이므로
 $k + 1 = 4$ 에서 $k = 3 \quad \therefore f^{-1}(4) = 3$
 $\therefore (f^{-1} \circ g)(2) = 3$
- (2) $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(-2) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(-2)$
 $= (g^{-1} \circ f)(-2)$
 $= g^{-1}(f(-2))$
 $= g^{-1}(-1)$
 $g^{-1}(-1) = k$ (k 는 상수)라고 하면 $g(k) = -1$ 이므로
 $3k - 2 = -1$ 에서 $k = \frac{1}{3} \quad \therefore g^{-1}(-1) = \frac{1}{3}$
 $\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(-2) = \frac{1}{3}$

- 7 함수 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 의 역함수는 $y = 2x - 2$ 이므로 두 함수의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



- 8 함수 $y = -2x + 3$ 의 역함수는 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 이므로 두 함수의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



08~10강

즉집게

기출문제

p. 40~43

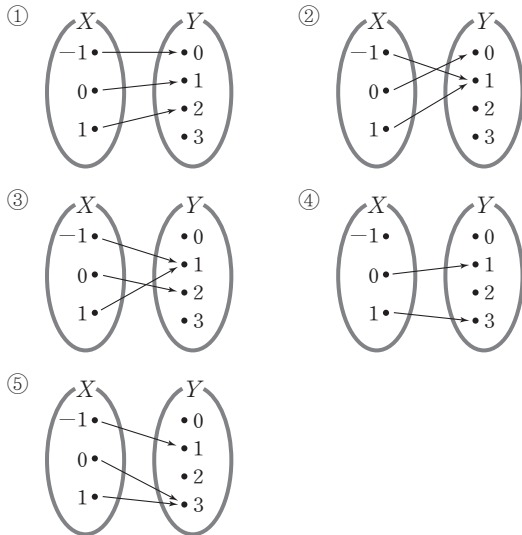
- 1 ④ 2 3 3 ②
 4 $\{-1, 0, 1, 5, 7, 9\}$ 5 ③ 6 3 7 ④
 8 ③ 9 $0 < a < 2$ 10 ⑤ 11 ②
 12 ③ 13 ③ 14 35 15 ③ 16 ④
 17 ③ 18 ② 19 -2 20 ⑤ 21 97
 22 2 23 ③ 24 3

25 (1) $(f \circ g)(x) = x - a + 4$, $(g \circ f)(x) = x - \frac{1}{2}a + 2$

(2) 4

26 $\sqrt{2}$

- 1 주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때 ④의 경우는 집합 X 의 원소 -1 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 이 대응은 함수가 아니다.

- 2 $\sqrt{2} + 1$ 은 무리수이므로
 $f(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$
 8은 유리수이므로
 $f(8) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 $\therefore f(\sqrt{2} + 1) - f(8) = (3 + 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} = 3$

3 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ㉠

㉠에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$f(0) = f(0) + f(0) \therefore f(0) = 0$

㉠에 $x=2, y=-2$ 를 대입하면

$f(0) = f(2) + f(-2)$

$0 = f(2) + 3 \therefore f(2) = -3$

- 4 함수 f 의 정의역은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$x \leq 3$ 일 때, $f(x) = -x + 2$ 이므로

$f(1) = -1 + 2 = 1$

$f(2) = -2 + 2 = 0$

$f(3) = -3 + 2 = -1$

$x > 3$ 일 때, $f(x) = 2x - 3$ 이므로

$f(4) = 2 \times 4 - 3 = 5$

$f(5) = 2 \times 5 - 3 = 7$

$f(6) = 2 \times 6 - 3 = 9$

따라서 구하는 치역은 $\{-1, 0, 1, 5, 7, 9\}$

- 5 주어진 네 함수

$f(x) = x^2, g(x) = x^3 - 2x, h(x) = -x, k(x) = 2|x| - 1$

에 정의역의 원소 $-1, 0, 1$ 을 각각 대입하면

㉠. $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$

㉡. $g(-1) = 1, g(0) = 0, g(1) = -1$

㉢. $h(-1) = 1, h(0) = 0, h(1) = -1$

㉣. $k(-1) = 1, k(0) = -1, k(1) = 1$

이때 $g(-1) = h(-1) = 1, g(0) = h(0) = 0,$

$g(1) = h(1) = -1$ 이므로 $g = h$

따라서 보기 중 서로 같은 함수는 ㉡, ㉢이다.

6 $f(1) = g(1)$ 에서 $a + b = -5$ ㉠

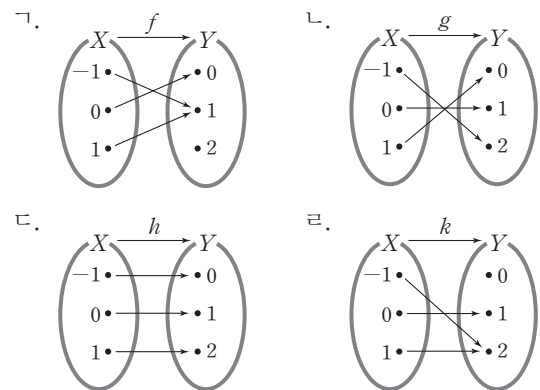
$f(2) = g(2)$ 에서 $2a + b = -6$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -1, b = -4$

$\therefore a - b = 3$

- 7 주어진 함수의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

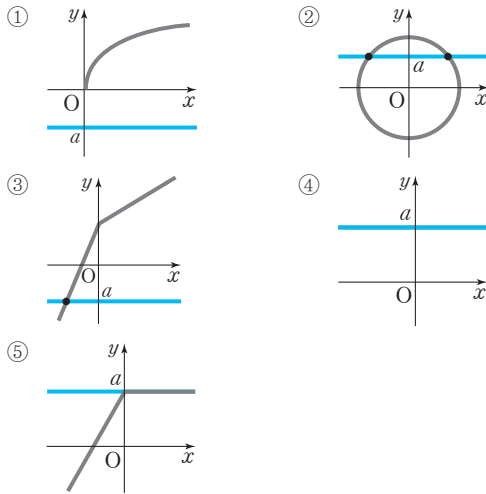


㉠. $f(-1) = f(1) = 1$ 이므로 일대일함수가 아니다.

㉡. $k(-1) = k(1) = 2$ 이므로 일대일함수가 아니다.

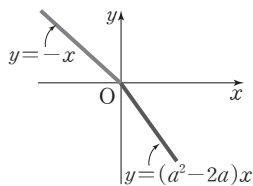
따라서 보기 중 일대일함수인 것은 ㉢, ㉣이다.

- 8 주어진 그래프에 직선 $y=a$ (a 는 공역의 임의의 원소)를 그어 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.



따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ③이다.

- 9 함수 f 가 일대일대응이 되려면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.
 $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = -x$ 의 그래프는 기울기가 음수이므로 다음 그림과 같이 $x > 0$ 일 때도 $f(x) = (a^2 - 2a)x$ 의 그래프의 기울기가 음수이어야 한다.



즉, $a^2 - 2a < 0$ 에서 $a(a-2) < 0 \quad \therefore 0 < a < 2$

- 10 집합 X 에서 X 로의 일대일대응을 $f: X \rightarrow X$ 라고 하면 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개, $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$ 의 값을 제외한 2개, $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 1개이다.

따라서 일대일대응의 개수 a 는

$$a = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

항등함수는 정의역의 원소 1, 2, 3에 각각 1, 2, 3을 대응시키는 함수이므로 1개이다.

$$\therefore b = 1$$

상수함수는 정의역의 원소 1, 2, 3에 1 또는 2 또는 3을 대응시키는 함수이므로 3개이다.

$$\therefore c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 10$$

- 11 $(h \circ (g \circ f))(2) = (h \circ g \circ f)(2)$
 $= h(g(f(2)))$
 $= h(g(5))$
 $= h(4) = 9$

- 12 $(g \circ f)(x)$ 와 $(f \circ g)(x)$ 를 각각 구하면

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+k) \\ &= 3(x+k)^2 \\ &= 3x^2 + 6kx + 3k^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x^2) \\ &= 3x^2 + k \end{aligned}$$

이때 $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ 이므로

$$3x^2 + 6kx + 3k^2 = 3x^2 + k$$

이 식이 x 에 대한 항등식이어야 하므로

$$6k = 0, 3k^2 = k$$

$$\therefore k = 0$$

- 13 $(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= g(x) \\ \therefore h(x-3) &= 2x+4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $x-3=t$ 로 놓으면

$$x = t+3$$

이를 ①에 대입하면

$$h(t) = 2(t+3) + 4 = 2t + 10$$

$$\therefore h(x) = 2x + 10$$

다른 풀이

세 함수 f, g, h 는 각각 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이다.

이때 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재하므로

$$h \circ f = g \text{에서}$$

$$h \circ f \circ f^{-1} = g \circ f^{-1}$$

$$\therefore h = g \circ f^{-1}$$

$$f(x) = x-3 \text{에서 } f^{-1}(x) = x+3 \text{이므로}$$

$$h(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$= g(f^{-1}(x))$$

$$= g(x+3)$$

$$= 2(x+3) + 4$$

$$= 2x + 10$$

- 14 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$ 이므로

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (\sqrt{x} \text{가 유리수}) \\ 1 & (\sqrt{x} \text{가 무리수}) \end{cases}$$

따라서 $1 \leq x \leq 25$ 를 만족하는 자연수 x 중 $\sqrt{x}$ 가 유리수인 x 의 값은

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \text{ 즉 } 1, 4, 9, 16, 25$$

이고, $\sqrt{x}$ 가 무리수인 x 의 값은 1, 4, 9, 16, 25를 제외한 x 의 값이다.

$$\begin{aligned} \therefore h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(25) \\ &= \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} + 1 \times 20 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

15 $f(0)=2, f(1)=0, f(2)=1$ 이므로

$$f^1(0)=f(0)=2$$

$$f^2(0)=(f \circ f)(0)=f(f(0))=f(2)=1$$

$$f^3(0)=(f \circ f^2)(0)=f(f^2(0))=f(1)=0$$

$$f^4(0)=(f \circ f^3)(0)=f(f^3(0))=f(0)=2$$

$$f^5(0)=(f \circ f^4)(0)=f(f^4(0))=f(2)=1$$

$$f^6(0)=(f \circ f^5)(0)=f(f^5(0))=f(1)=0$$

$$f^7(0)=(f \circ f^6)(0)=f(f^6(0))=f(0)=2$$

⋮

따라서 $f^n(0)$ 의 함숫값은 2, 1, 0이 이 순서대로 반복되므로

$$f^{3k+1}(0)=2, f^{3k+2}(0)=1, f^{3k+3}(0)=0$$

(k 는 음이 아닌 정수)

$$\therefore f^{100}(0)=f^{3 \times 33+1}(0)=2$$

16 $y=ax+3$ 에서 $ax=y-3$

$$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{3}{a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}=bx+1$ 이므로

$$\frac{1}{a}=b, -\frac{3}{a}=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab=1$$

다른 풀이

$(f \circ g)(x)=x$ 이므로

$$a(bx+1)+3=x, abx+a+3=x$$

$$\therefore ab=1, a+3=0$$

17 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 는 일대일대응이어야 한다.

$$f(x)=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

함수 f 가 일대일대응이 되려면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

따라서 함수 f 의 정의역은 오른쪽

그림에서 직선 $x=\frac{1}{2}$ 을 기준으로

왼쪽 또는 오른쪽이어야 한다.

$$\text{그런데 } X=\{x|x \geq k\} \text{이므로 } k \geq \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 일대일대응이 되려면 함수 f 의 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x \geq k\}$ 에 대하여 치역도 $\{y|y \geq k\}$ 이어야 한다.

즉, $f(k)=k$ 이므로

$$k^2-k=k, k^2-2k=0, k(k-2)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=2$$

⋯⋯⋯ ㉔

㉑, ㉔에 의하여 $k=2$

18 $(f \circ f)(3)=f(f(3))=f(6)=12$

$f^{-1}(-5)=k$ (k 는 상수)라고 하면

$$f(k)=-5$$

(i) $k \geq 2$ 일 때

$$f(k)=2k \text{이므로 } 2k=-5$$

$$\therefore k=-\frac{5}{2}$$

그런데 $k \geq 2$ 이므로 이는 모순이다.

(ii) $k < 2$ 일 때

$$f(k)=-k^2+4k \text{이므로}$$

$$-k^2+4k=-5, k^2-4k-5=0$$

$$(k+1)(k-5)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=5$$

그런데 $k < 2$ 이므로 $k=-1$

(i), (ii)에 의하여

$$k=-1$$

$$\therefore f^{-1}(-5)=-1$$

$$\therefore (f \circ f)(3)+f^{-1}(-5)=12+(-1)=11$$

19 $(f \circ g \circ h)(x)=(f \circ g)(h(x))=h(x)$

이므로 $f \circ g$ 는 항등함수이다.

이때 f 가 일대일대응이므로 g 는 f 의 역함수이다.

따라서 $g(2)=k$ (k 는 상수)라고 하면

$$f(k)=2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}k+3=2 \text{에서 } k=-2$$

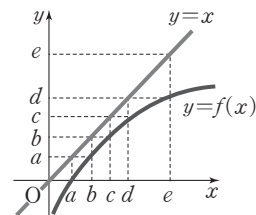
$$\therefore g(2)=-2$$

20 $(f \circ f)^{-1}(c)=(f^{-1} \circ f^{-1})(c)$

$$=f^{-1}(f^{-1}(c)) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $f^{-1}(c)=k$ (k 는 상수)라고 하면

$$f(k)=c$$



직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 구하여 표시하면 위의 그림과 같다.

위의 그래프에서 $f(k)=c$ 를 만족하는 k 의 값은

$$k=d \quad \therefore f^{-1}(c)=d$$

이를 ㉑에 대입하면

$$(f \circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(d)$$

$$f^{-1}(d)=l \text{ (} l \text{은 상수)라고 하면}$$

$$f(l)=d$$

위의 그래프에서 $f(l)=d$ 를 만족하는 l 의 값은

$$l=e \quad \therefore f^{-1}(d)=e$$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(c)=e$$

21 2에서 100까지의 짝수 중 2의 배수는 50개, 2^2 의 배수는 25개, 2^3 의 배수는 12개, 2^4 의 배수는 6개, 2^5 의 배수는 3개, 2^6 의 배수는 1개이다.

2와 서로소인 자연수 m 에 대하여

$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 98 \times 100$ 을 $2^y \times m$ 꼴로 나타내면

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 98 \times 100 = 2^{50} \times 2^{25} \times 2^{12} \times 2^6 \times 2^3 \times 2^1 \times m \\ = 2^{97} \times m$$

$$\therefore f(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 98 \times 100) = f(2^{97} \times m) \\ = 97$$

22 $f(2)$ 는 2^{121} 을 10으로 나누었을 때의 나머지이므로 2^{121} 의 일의 자리의 숫자와 같다.

이때 $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, ...

이므로 2^n (n 은 자연수)의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $121=4 \times 30 + 1$ 에서 2^{121} 의 일의 자리의 숫자는 2^1 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 2이다.

$$\therefore f(2)=2$$

$$\therefore (f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) \\ = f(f(2)) \\ = f(2) \\ = 2$$

23 함수 $g(x)$ 의 함수식을 구하면 다음과 같다.

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$f(x) = x^0 \text{이고 } (g \circ f)(x) = 2x^0 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x)$$

$$= 2x \quad (0 \leq x < 1)$$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때

$$f(x) = 1 \text{이고 } (g \circ f)(x) = 2^0 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(1)$$

$$= 2$$

(iii) $2 \leq x \leq 3$ 일 때

$$f(x) = x-1 \text{이고 } (g \circ f)(x) = -2x+6 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x-1)$$

$$= -2x+6$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x=t+1$ 이므로

$$g(t) = -2(t+1)+6$$

$$= -2t+4$$

그런데 $2 \leq x \leq 3$ 이므로 $1 \leq t \leq 2$

$$\therefore g(x) = -2x+4 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -2x+4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 ③이다.

24 두 함수 f, g 의 정의역이 집합 X 로 같으므로 $f=g$ 이라면 정의역 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이어야 한다. (가)

$$f(x)=g(x) \text{에서}$$

$$x^2+7x-7=2x+7$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$(x+7)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-7 \text{ 또는 } x=2$$

..... (나)

이때 정의역 X 가 공집합이면 두 함수 f, g 도 존재하지 않으므로 X 는 공집합이 아닌 집합 $\{-7, 2\}$ 의 부분집합이다. (다)

따라서 $f=g$ 가 되도록 하는 정의역 X 의 개수는

$$2^2-1=3$$

..... (라)

채점 기준	배점
(가) 두 함수가 서로 같을 조건을 안다.	1점
(나) 정의역 X 의 원소가 될 수 있는 값을 구한다.	2점
(다) 정의역 X 의 조건을 구한다.	2점
(라) 정의역 X 의 개수를 구한다.	1점

25 (1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{1}{2}x+2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x+2\right)-a$$

$$= x-a+4$$

..... (가)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(2x-a)$$

$$= \frac{1}{2}(2x-a)+2$$

$$= x-\frac{1}{2}a+2$$

..... (나)

(2) $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 에서

$$(f \circ g)^{-1} = (g \circ f)^{-1} \text{이므로}$$

$$f \circ g = g \circ f$$

..... (다)

$$\text{이때 } (f \circ g)(x) = x-a+4,$$

$$(g \circ f)(x) = x-\frac{1}{2}a+2 \text{이므로}$$

$$x-a+4 = x-\frac{1}{2}a+2$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-a+4 = -\frac{1}{2}a+2$$

$$-\frac{1}{2}a = -2$$

$$\therefore a=4$$

..... (라)

채점 기준	배점
(가) $(f \circ g)(x)$ 를 구한다.	1점
(나) $(g \circ f)(x)$ 를 구한다.	1점
(다) $f \circ g = g \circ f$ 임을 안다.	2점
(라) a 의 값을 구한다.	1점

- 26 집합 X 에서 함수 $f(x) = (x-1)^2 + 1$ 은 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다. (가)

$y=(x-1)^2+1$ 과 $y=x$ 에서 y 를 소거하면

$$(x-1)^2+1=x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \quad \dots\dots (나)$$

두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 좌표는

$$(1, 1), (2, 2) \quad \dots\dots (다)$$

따라서 이 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2} \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점이 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 일치함을 이해한다.	2점
(나) 방정식 $f(x)=x$ 를 푼다.	2점
(다) 두 교점의 좌표를 구한다.	1점
(라) 두 교점 사이의 거리를 구한다.	1점

11

강 유리식과 유리함수

확인 문제

p. 44

- 1 (1) $\frac{x-2}{x^2-x-2} = \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$
 (2) $\frac{x(x-y)}{y(y-x)} = \frac{x(x-y)}{-y(x-y)} = -\frac{x}{y}$

- 2 (2), (3), (4)

핵심 유형

교/과/서/속

답은풀 문제

p. 45

- 1 (1) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x(x+2)+2(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$$= \frac{x^2+4x-4}{(x-2)(x+2)}$$

 (2) $\frac{x+1}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2-x-2} = \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x-2)(x+1)}$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x-2-3}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x-5}{(x-2)(x+1)}$$

$$(3) \frac{x^2+3x+2}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^2-4}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)} \times \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x+1}{x(x-2)}$$

$$(4) \frac{x^2+3x-4}{x^2-9} \div \frac{x^2+x-2}{x-3}$$

$$= \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)(x+3)} \div \frac{(x-1)(x+2)}{x-3}$$

$$= \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{x-3}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x+4}{(x+3)(x+2)}$$

2

$$(1) 2 + \frac{3}{3x+1} = \frac{2(3x+1)+3}{3x+1} = \frac{6x+5}{3x+1}$$

$$(2) \frac{x+1}{x-2} - \frac{x+3}{x^2+x-6} = \frac{x+1}{x-2} - \frac{x+3}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{x}{x-2}$$

$$(3) \frac{x^2-1}{(x-3)^2} \times \frac{2x-6}{x^2+x} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)^2} \times \frac{2(x-3)}{x(x+1)}$$

$$= \frac{2(x-1)}{x(x-3)}$$

$$(4) \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \div \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} \div \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} \times \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{x-2}{x+2}$$

3

$$(1) \frac{1}{\frac{1}{x-1}-1} = \frac{1}{\frac{1-(x-1)}{x-1}} = \frac{1}{\frac{-x+2}{x-1}} = \frac{x-1}{2-x}$$

$$(2) \frac{1-\frac{x-y}{x+y}}{1+\frac{x-y}{x+y}} = \frac{\frac{x+y-(x-y)}{x+y}}{\frac{x+y+x-y}{x+y}} = \frac{\frac{2y}{x+y}}{\frac{2x}{x+y}}$$

$$= \frac{2y(x+y)}{2x(x+y)} = \frac{y}{x}$$

4

$$(1) \frac{2-\frac{1}{x+1}}{2+\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{2(x+1)-1}{x+1}}{\frac{2(x+1)+1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{2x+1}{x+1}}{\frac{2x+3}{x+1}}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1)}{(2x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{2x+1}{2x+3}$$

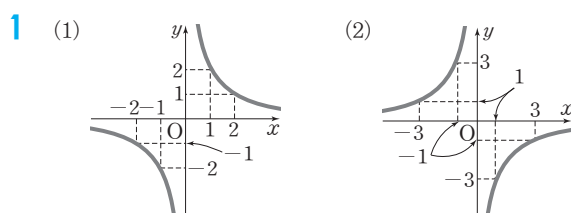
$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}} &= \frac{\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{x+y-(x-y)}{(x-y)(x+y)}} \\
 &= \frac{2x}{\frac{2y}{(x-y)(x+y)}} \\
 &= \frac{2x(x-y)(x+y)}{2y(x-y)(x+y)} = \frac{x}{y}
 \end{aligned}$$

- 5 (1) $x+3 \neq 0$ 에서 $x \neq -3$
따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \neq -3 \text{인 실수}\}$
(2) 주어진 함수는 모든 실수에서 정의되므로 정의역은
 $\{x | x \text{는 실수}\}$

- 6 (1) $x+2 \neq 0$ 에서 $x \neq -2$
따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \neq -2 \text{인 실수}\}$
(2) $x^2 - 1 \neq 0$ 에서 $x \neq -1, x \neq 1$
따라서 주어진 함수의 정의역은
 $\{x | x \neq -1, x \neq 1 \text{인 실수}\}$

12 강 유리함수의 그래프

확인 문제 p. 46

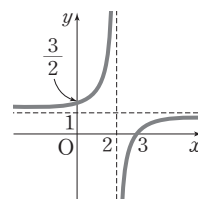


2 2, -1

핵심 유형 + **답은꼴 문제**

p. 47

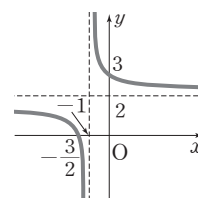
- 1 (1) $y = -\frac{1}{x-2} + 1$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 다음 그림과 같다.



이때 점근선의 방정식은 $x=2, y=1$ 이고, 정의역은
 $\{x | x \neq 2 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y | y \neq 1 \text{인 실수}\}$ 이다.

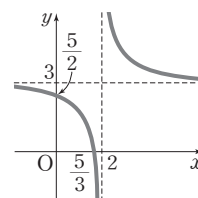
$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} \\
 &= \frac{1}{x+1} + 2
 \end{aligned}$$

따라서 $y = \frac{2x+3}{x+1}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동
한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 점근선의 방정식은 $x=-1, y=2$ 이고, 정의역은
 $\{x | x \neq -1 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y | y \neq 2 \text{인 실수}\}$ 이다.

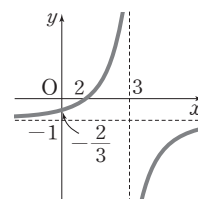
- 2 (1) $y = \frac{1}{x-2} + 3$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방
향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이
므로 다음 그림과 같다.



이때 점근선의 방정식은 $x=2, y=3$ 이고, 정의역은
 $\{x | x \neq 2 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y | y \neq 3 \text{인 실수}\}$ 이다.

$$(2) \quad y = \frac{2-x}{x-3} = \frac{-(x-3)-1}{x-3} = -\frac{1}{x-3} - 1$$

따라서 $y = \frac{2-x}{x-3}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동
한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 점근선의 방정식은 $x=3, y=-1$ 이고, 정의역은
 $\{x | x \neq 3 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y | y \neq -1 \text{인 실수}\}$ 이다.

$$3 \quad y = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} \\ = \frac{1}{x-2} + 3$$

따라서 $y = \frac{3x-5}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $a=2, b=3, k=1$

$$4 \quad y = \frac{3-4x}{2x+1} = \frac{-2(2x+1)+5}{2x+1} \\ = \frac{5}{2x+1} - 2$$

따라서 이 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{5}{2(x-a)+1} - 2 + b \\ = \frac{5}{2x-2a+1} - 2 + b$$

이 그래프가 $y = \frac{5}{2x}$ 의 그래프와 일치해야 하므로

$$-2a+1=0, -2+b=0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 2$$

5 두 직선 $x=1, y=2$ 를 점근선으로 가지므로 주어진 유리함수의 식은

$$y = \frac{k}{x-1} + 2 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -k + 2 \quad \therefore k = 1$$

$k=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$y = \frac{1}{x-1} + 2$$

이 식을 $y = \frac{a}{x-b} + c$ 와 비교하면

$$a=1, b=1, c=2$$

6 두 직선 $x=-1, y=3$ 을 점근선으로 가지므로 주어진 유리함수의 식은

$$y = \frac{k}{x+1} + 3 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ㉡$$

㉡의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2} + 3$$

$$\therefore k = -6$$

$k=-6$ 을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$y = \frac{-6}{x+1} + 3 = \frac{3x-3}{x+1}$$

이 식을 $y = \frac{ax+b}{x-c}$ 와 비교하면

$$a=3, b=-3, c=-1$$

11~12장 **즉집게** 기출문제

p. 48~51

1 ②	2 ③	3 ⑤	4 ①	
5 $\frac{3}{x(x+6)}$		6 ⑤	7 ③	8 $-\frac{1}{2}$
9 ②	10 ④	11 ①	12 ⑤	13 ④
14 ④	15 ③	16 8	17 ③	18 ②
19 ①	20 ③	21 ②	22 ③	23 $-\frac{1}{6}$
24 4	25 12			

$$1 \quad \frac{x+2}{x^2-1} \div \frac{x^2+5x+6}{x^2+x} \times \frac{2x^2+4x-6}{5x-2x^2} \\ = \frac{x+2}{x^2-1} \times \frac{x^2+x}{x^2+5x+6} \times \frac{2x^2+4x-6}{5x-2x^2} \\ = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)} \times \frac{2(x-1)(x+3)}{x(5-2x)} \\ = \frac{2}{5-2x}$$

$$2 \quad \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} \\ = - \left\{ \frac{x^2}{(x-y)(z-x)} + \frac{y^2}{(x-y)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(y-z)} \right\} \\ = - \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 ㉠의 분자를 인수분해하면

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\ = x^2(y-z) + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2 \\ = x^2(y-z) - x(y^2-z^2) + y^2z - yz^2 \\ = x^2(y-z) - x(y-z)(y+z) + yz(y-z) \\ = (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\} \\ = (y-z)(x-y)(x-z) \\ = -(x-y)(y-z)(z-x)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(\text{주어진 식}) = - \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ = - \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

$$3 \quad \frac{3x}{x^2-3x+2} + \frac{4}{1-x} = \frac{3x}{(x-1)(x-2)} - \frac{4}{x-1} \\ = \frac{3x-4(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ = \frac{-x+8}{(x-1)(x-2)}$$

따라서 주어진 등식은

$$\frac{-x+8}{(x-1)(x-2)} = \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=2, c=-1, d=8$$

$$\text{또는 } a=2, b=1, c=-1, d=8$$

$$\therefore ab-cd = 2 - (-8) = 10$$

4 $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} + \frac{x+5}{x+4}$

$$= \frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} - \frac{(x+3)+1}{x+3} + \frac{(x+4)+1}{x+4}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x+1} - 1 - \frac{1}{x+2} - 1 - \frac{1}{x+3} + 1 + \frac{1}{x+4}$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right)$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{(x+3)(x+4) - (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

따라서 주어진 등식은

$$\frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{ax+b}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a=4, b=10$$

$$\therefore a-b=-6$$

5 $\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{x+6-x}{x(x+6)}$$

$$= \frac{3}{x(x+6)}$$

6 $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}}}$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{x+2}{x+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{x+2}} = 1 + \frac{x+2}{2x+3}$$

$$= \frac{3x+5}{2x+3}$$

7 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ 에서

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3 + 2 = 5$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (\sqrt{5})^3 - 3 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

8 주어진 식을 간단히 하면

$$\frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}$$

$$= \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2+1}{2x}$$

$x^2+x+1=0$ 에서 $x^2+1=-x$ 이므로

$$(\text{주어진 식}) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

9 모든 실수 x, y 에 대하여 $\frac{-3x+ay+b}{2x-3y-1}$ 가 항상 일정한 값

k (k 는 상수)를 가진다고 하면

$$\frac{-3x+ay+b}{2x-3y-1} = k$$

$2x-3y-1 \neq 0$ 이므로 $2x-3y-1 \neq 0$

양변에 $2x-3y-1$ 을 곱하면

$$-3x+ay+b = k(2x-3y-1)$$

$$(2k+3)x - (3k+a)y - k - b = 0$$

이 등식은 x, y 에 대한 항등식이므로

$$2k+3=0, 3k+a=0, -k-b=0$$

세 식을 연립하여 풀면

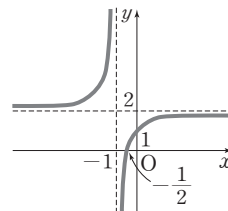
$$k = -\frac{3}{2}, a = \frac{9}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=6$$

10 $y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1}$

$$= -\frac{1}{x+1} + 2$$

이므로 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

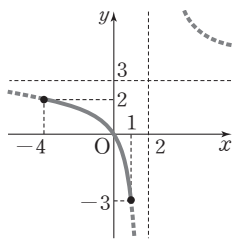


따라서 주어진 유리함수의 그래프는 위의 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

11 $y = \frac{3x}{x-2} = \frac{3(x-2)+6}{x-2}$

$$= \frac{6}{x-2} + 3$$

이므로 $y = \frac{3x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $-4 \leq x \leq 1$ 에서 주어진 유리함수의 그래프는 위의 그림과 같다.

$x = -4$ 일 때, $M = 2$

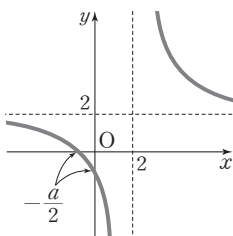
$x = 1$ 일 때, $m = -3$

$\therefore M + m = -1$

$$\begin{aligned} 12 \quad y &= \frac{2x+a}{x-2} = \frac{2(x-2)+a+4}{x-2} \\ &= \frac{a+4}{x-2} + 2 \end{aligned}$$

이므로 $y = \frac{2x+a}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{a+4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 주어진 유리함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



$a+4 > 0$ 이어야 하므로

$a > -4$ ㉠

$x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 하므로

$-\frac{a}{2} < 0 \quad \therefore a > 0$ ㉡

$y = 0$ 일 때, $x < 0$ 이어야 하므로

$-\frac{a}{2} < 0 \quad \therefore a > 0$ ㉢

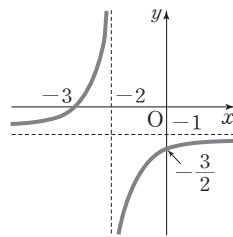
㉠, ㉡, ㉢에서 $a > 0$

따라서 정수 a 의 최솟값은 1이다.

$$\begin{aligned} 13 \quad y &= \frac{-x-3}{x+2} = \frac{-(x+2)-1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{x+2} - 1 \end{aligned}$$

이므로 $y = \frac{-x-3}{x+2}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 주어진 유리함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x < -2$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 옳지 않은 것은 ㉣이다.

$$14 \quad ① \quad y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = -\frac{2}{x+1} + 1$$

$$② \quad y = \frac{-x+1}{x+1} = \frac{-(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1$$

$$③ \quad y = \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-2)-1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} + 1$$

$$④ \quad y = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-5}{x+2} = -\frac{5}{x+2} + 2$$

$$⑤ \quad y = \frac{2x-4}{2x-1} = \frac{(2x-1)-3}{2x-1} = -\frac{3}{2x-1} + 1$$

따라서 평행이동하여 $y = -\frac{5}{x}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㉣이다.

$$15 \quad y = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a(x-1)+a-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=1, y=a$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, a)$

에 대하여 대칭이므로

$$a=2, b=1 \quad \therefore a+b=3$$

16 주어진 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=2, y=1$ 이므로 유리함수의 식은

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \quad (k < 0) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 그래프는 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{0-2} + 1 \quad \therefore k = -2$$

$k = -2$ 를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y = \frac{-2}{x-2} + 1 = \frac{x-4}{x-2}$$

이 식을 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 와 비교하면

$$a=1, b=-4, c=-2$$

$$\therefore abc = 8$$

$$17 \quad f^1(-1) = f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$f^2(-1) = (f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$f^3(-1) = (f \circ f^2)(-1) = f(f^2(-1)) = f(2) = -1$$

$$f^4(-1) = (f \circ f^3)(-1) = f(f^3(-1)) = f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$f^5(-1) = (f \circ f^4)(-1) = f(f^4(-1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

⋮

따라서 $f^n(-1)$ 의 함숫값은 $\frac{1}{2}, 2, -1$ 이 이 순서대로 반복되므로

$$f^{3k+1}(-1) = \frac{1}{2}, f^{3k+2}(-1) = 2, f^{3k+3}(-1) = -1$$

(k 는 음이 아닌 정수)

$$\therefore f^{2020}(-1) = f^{3 \times 673 + 1}(-1) = \frac{1}{2}$$

18 $(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g(x) = f^{-1}(x)$

$$y = \frac{2x-1}{x-1} \text{을 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$xy - y = 2x - 1, x(y-2) = y-1$$

$$\therefore x = \frac{y-1}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

다른 풀이 $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 역함수 구하기

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1} \quad \begin{array}{c} 2와 -1의 위치와 \\ 부호를 바꿈 \end{array} \quad f^{-1}(x) = \frac{1 \times x - 1}{x-2}$$

19 $y = \frac{bx+1}{x+a}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$xy + ay = bx + 1, x(y-b) = -ay + 1$$

$$\therefore x = \frac{-ay+1}{y-b}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-ax+1}{x-b}$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{-1}(x) &= \frac{-ax+1}{x-b} \\ &= \frac{-a(x-b)-ab+1}{x-b} \\ &= \frac{-ab+1}{x-b} - a \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = b, y = -a$$

주어진 조건에서 역함수의 그래프의 점근선이 두 직선

$$x = -1, y = 2 \text{이므로}$$

$$a = -2, b = -1$$

다른 풀이 $f(x) = \frac{bx+1}{x+a}$ 의 역함수 구하기

$$f(x) = \frac{bx+1}{x+a} \quad \begin{array}{c} b와 a의 위치와 \\ 부호를 바꿈 \end{array} \quad f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{x-b}$$

20 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 과 $y = -x+m$ 에서 y 를 소거하면

$$\frac{x+1}{x-3} = -x+m, m+1 = (-x+m)(x-3)$$

$$x+1 = -x^2 + (m+3)x - 3m$$

$$x^2 - (m+2)x + 3m+1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$D = (m+2)^2 - 4(3m+1) < 0$$

$$m^2 - 8m < 0, m(m-8) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 8$$

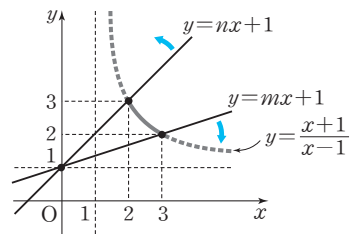
따라서 정수 m 의 최댓값은 7이다.

$$21 \quad y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

이므로 $2 \leq x \leq 3$ 에서 주어진 부등식이 성립하도록

$$y = \frac{x+1}{x-1}, y = mx+1, y = nx+1$$

의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



즉, 직선 $y = nx+1$ 은 점 $(2, 3)$ 을 지나거나 위쪽에 있어야 하고, 직선 $y = mx+1$ 은 점 $(3, 2)$ 을 지나거나 아래쪽에 있어야 한다.

(i) 직선 $y = nx+1$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지날 때

$$3 = 2n+1 \quad \therefore n = 1$$

따라서 직선 $y = nx+1$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나거나 위쪽에 있으려면 $n \geq 1$

(ii) 직선 $y = mx+1$ 이 점 $(3, 2)$ 을 지날 때

$$2 = 3m+1 \quad \therefore m = \frac{1}{3}$$

따라서 직선 $y = mx+1$ 이 점 $(3, 2)$ 을 지나거나 아래쪽에 있으려면 $m \leq \frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 상수 m 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 상수 n 의 최솟값은 1이므로 구하는 m 의 최댓값과 n 의 최솟값의 곱은 $\frac{1}{3}$ 이다.

22 주어진 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x = m$,

$y = n$ 이므로 유리함수의 식은

$$y = \frac{k}{x-m} + n \quad (k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 그래프는 점 $(0, l)$ 을 지나므로

$$l = \frac{k}{0-m} + n \quad \therefore k = -m(l-n)$$

이를 ①에 대입하면

$$y = \frac{-m(l-n)}{x-m} + n$$

이 식을 $y = \frac{b}{x-a} + c$ 와 비교하면

$$a = m, b = -m(l-n), c = n$$

$$\neg. m > n \text{이므로 } a - c = m - n > 0$$

$$\neg. a = m > 0, c = n > 0$$

$$\text{또 주어진 그래프에서 } b > 0$$

$$\therefore a + b + c > 0$$

$$\neg. ac = mn, b = -m(l - n) = mn - lm$$

$$\text{이때 } m > 0, l < 0 \text{에서 } lm < 0 \text{이므로}$$

$$mn < mn - lm \quad \therefore ac < b$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

$$23 \quad \frac{2x+y}{5} = \frac{x+2y}{7} \text{에서 } 7(2x+y) = 5(x+2y)$$

$$\therefore y = 3x$$

..... (가)

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x^2 - xy}{xy + y^2} = \frac{x^2 - x \times 3x}{x \times 3x + (3x)^2}$$

$$= \frac{-2x^2}{12x^2} = -\frac{1}{6}$$

..... (나)

채점 기준	배점
(가) y 를 x 에 관한 식으로 나타낸다.	3점
(나) 주어진 식의 값을 구한다.	3점

다른 풀이

$$\frac{2x+y}{5} = \frac{x+2y}{7} = k \text{로 놓으면}$$

$$2x + y = 5k, x + 2y = 7k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = k, y = 3k \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

..... (가)

$$xy \neq 0 \text{이므로 } k \neq 0$$

$\textcircled{가}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x^2 - xy}{xy + y^2} = \frac{k^2 - k \times 3k}{k \times 3k + (3k)^2}$$

$$= \frac{-2k^2}{12k^2} = -\frac{1}{6}$$

..... (나)

채점 기준	배점
(가) $\frac{2x+y}{5} = \frac{x+2y}{7} = k$ 로 놓고, x, y 를 k 에 관한 식으로 나타낸다.	4점
(나) 주어진 식의 값을 구한다.	2점

$$24 \quad y = \frac{3x+a}{x+1} = \frac{3(x+1)+a-3}{x+1}$$

$$= \frac{a-3}{x+1} + 3$$

..... (가)

따라서 $y = \frac{a-3}{x+1} + 3$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹처지므로

$$a - 3 = 1 \quad \therefore a = 4$$

..... (나)

채점 기준	배점
(가) 주어진 유리함수의 식을 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 변형한다.	2점
(나) a 의 값을 구한다.	3점

$$25 \quad y = \frac{x-1}{x+1} \\ = \frac{(x+1)-2}{x+1} \\ = -\frac{2}{x+1} + 1$$

이므로 점근선의 방정식은

$$x = -1, y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

..... (가)

$$y = \frac{bx+1}{x-a} \\ = \frac{b(x-a)+ab+1}{x-a} \\ = \frac{ab+1}{x-a} + b$$

이므로 점근선의 방정식은

$$x = a, y = b \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

..... (나)

따라서 $\textcircled{가}$, $\textcircled{나}$ 으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 각각

$$a+1, b-1 (\because a, b \text{는 자연수})$$

인 직사각형이다.

..... (다)

이 직사각형의 넓이가 11이므로

$$(a+1)(b-1) = 11$$

이때 a, b 는 자연수이므로 $a+1$ 은 2 이상의 정수, $b-1$ 은 음이 아닌 정수이다.

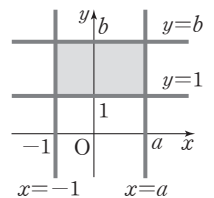
따라서 $a+1=11, b-1=1$ 이므로

$$a=10, b=2$$

..... (라)

$$\therefore a+b=12$$

..... (마)



채점 기준	배점
(가) $y = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.	2점
(나) $y = \frac{bx+1}{x-a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.	2점
(다) 점근선으로 둘러싸인 도형이 어떤 모양인지 안다.	1점
(라) a, b 의 값을 구한다.	2점
(마) $a+b$ 의 값을 구한다.	1점

13 장 무리식과 무리함수

확인 문제

p. 52

$$1 \quad (1) x+1 \geq 0 \text{이어야 하므로} \\ x \geq -1$$

$$(2) 1-x > 0 \text{이어야 하므로} \\ x < 1$$

$$2 \quad (2), (4)$$

1 $\sqrt{x-2}$ 에서 $x-2 \geq 0$

$\therefore x \geq 2$ ㉠

$\sqrt{3-x}$ 에서 $3-x \geq 0$

$\therefore x \leq 3$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $2 \leq x \leq 3$

2 $\sqrt{6-2x}$ 에서 $6-2x \geq 0$ $\therefore x \leq 3$ ㉢

$\sqrt{x}$ 에서 $x \geq 0$ ㉣

$\sqrt{x-1} \neq 0$ 에서 $x \neq 1$ ㉤

㉢, ㉣, ㉤에서

$0 \leq x < 1$ 또는 $1 < x \leq 3$

3 (1) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2$

$= x+1-x=1$

(2) $\frac{1}{1-\sqrt{x-2}} + \frac{1}{1+\sqrt{x-2}}$

$= \frac{1+\sqrt{x-2}+1-\sqrt{x-2}}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}$

$= \frac{2}{1^2 - (\sqrt{x-2})^2}$

$= \frac{2}{1 - (x-2)}$

$= \frac{2}{3-x}$

4 (1) $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})$

$= (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2$

$= x+2 - (x-2) = 4$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}$

$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}+\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x}+\sqrt{x-y})}$

$= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-y})^2} = \frac{2\sqrt{x}}{x - (x-y)}$

$= \frac{2\sqrt{x}}{y}$

5 (1) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})}$

$= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{(x+1)-(x-2)}$

$= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{3}$

(2) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

$= \frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{(x+1)-(x-1)}$

$= x+\sqrt{x^2-1}$

6 (1) $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$

$= x+\sqrt{x^2-1}$

(2) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}$

$= \frac{\sqrt{4x^2+2x-2x}}{2x+1-2x}$

$= \sqrt{4x^2+2x-2x}$

7 (1) $2x-1 \geq 0$ 에서

$x \geq \frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | x \geq \frac{1}{2}\}$

(2) $5-x \geq 0$ 에서

$x \leq 5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | x \leq 5\}$

8 (1) $3x-6 \geq 0$ 에서

$x \geq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | x \geq 2\}$

(2) $1-x^2 \geq 0$ 에서

$(x+1)(x-1) \leq 0$

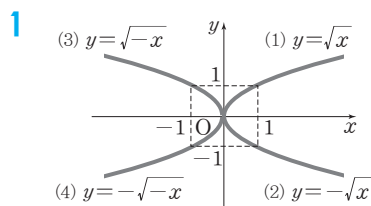
$\therefore -1 \leq x \leq 1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | -1 \leq x \leq 1\}$

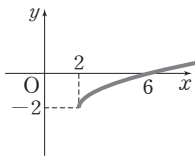
14 강 무리함수의 그래프

확인 문제 p. 54



2 1, -2

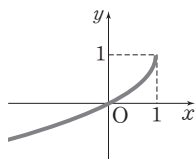
- 1 (1) $y = \sqrt{x-2} - 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$, 치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.

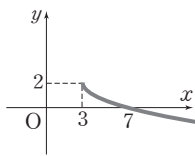
- (2) $y = -\sqrt{-x+1} + 1 = -\sqrt{-(x-1)} + 1$

따라서 $y = -\sqrt{-x+1} + 1$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x \leq 1\}$, 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.

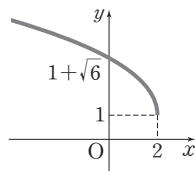
- 2 (1) $y = 2 - \sqrt{x-3}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x \geq 3\}$, 치역은 $\{y|y \leq 2\}$ 이다.

- (2) $y = \sqrt{6-3x} + 1 = \sqrt{-3(x-2)} + 1$

따라서 $y = \sqrt{6-3x} + 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$, 치역은 $\{y|y \geq 1\}$ 이다.

- 3 $y = \sqrt{2-4x} - 3 = \sqrt{-4(x-\frac{1}{2})} - 3$
따라서 $y = \sqrt{2-4x} - 3$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로
 $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$

- 4 $y = -\sqrt{kx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
 $y = -\sqrt{k(x-a)} + b = -\sqrt{kx-ak} + b$
이 그래프가 $y = -\sqrt{2x-6} + 1$ 의 그래프와 일치해야 하므로
 $k=2$, $-ak=-6$, $b=1$
 $\therefore a=3$, $b=1$, $k=2$

- 5 주어진 무리함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은

$$y = \sqrt{a(x+1)} + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{a} + 2, \sqrt{a} = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = \sqrt{x+1} + 2$$

$$\therefore a=1, b=1, c=2$$

- 6 주어진 무리함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은

$$y = -\sqrt{a(x-2)} + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\sqrt{a} + 2, \sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

$a=4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$y = -\sqrt{4(x-2)} + 2 = -\sqrt{4x-8} + 2$$

$$\therefore a=4, b=-8, c=2$$

13~14경

즉집게

기출문제

p. 56~59

1 ③	2 ④	3 ⑤	4 ④	5 ④
6 ④	7 ①	8 ⑤	9 ④	10 ②
11 ③	12 제4사분면	13 ⑤	14 ③	
15 ②	16 ①	17 ③	18 ⑤	
19 $-\frac{11}{4} < a < 3$	20 $\frac{1}{8}$	21 3		
22 (1) 8 (2) 1	23 5			

- 1 $6-3x \geq 0$, $x+2 \geq 0$, $3-x \neq 0$ 에서
 $-2 \leq x \leq 2$
따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로
 $M+m=0$

- 2 $x+1 \geq 0$, $2-x \geq 0$ 에서 $-1 \leq x \leq 2$
따라서 $x+2 > 0$, $x-3 < 0$ 이므로
 $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{4x^2-24x+36}$
 $= \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{4(x-3)^2}$
 $= |x+2| + 2|x-3|$
 $= x+2 - 2(x-3)$
 $= -x+8$

- 3 $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$
 $= \frac{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}) - \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$
 $= \frac{x+2+\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+2x}+x}{x+2-x}$

$$= \frac{2x+2}{2}$$

$$= x+1$$

4 $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3+2\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{2x+2}{x-1}$$

$$= \frac{2(3+2\sqrt{2})+2}{3+2\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{8+4\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

5 $y = -\sqrt{ax-3}+4$ 의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로

$$3 = -\sqrt{2a-3}+4, \sqrt{2a-3}=1$$

$$\therefore a=2$$

$a=2$ 를 주어진 식에 대입하여 정리하면

$$y = -\sqrt{2x-3}+4 = -\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+4$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x \mid x \geq \frac{3}{2}\}$$

6 $y = 2\sqrt{2x+1}+3 = 2\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}+3$

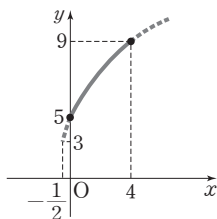
이므로 $y = 2\sqrt{2x+1}+3$ 의 그래프는 $y = 2\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$x=4 \text{ 일 때, } M=9$$

$$x=0 \text{ 일 때, } m=5$$

$$\therefore M-m=4$$



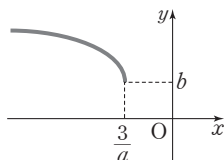
7 $y = \sqrt{ax-3}+b = \sqrt{a\left(x-\frac{3}{a}\right)}+b$

이므로 $y = \sqrt{ax-3}+b$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 정의역이 $\{x \mid x \leq -1\}$, 치역

이 $\{y \mid y \geq 1\}$ 이므로 이를 만족하도록 주어진 함수의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 정의역은



$$\{x \mid x \leq \frac{3}{a}\}, \text{ 치역은 } \{y \mid y \geq b\} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{a} = -1, b = 1 \quad \therefore a = -3, b = 1$$

$$\therefore ab = -3$$

8 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$$y = \sqrt{-2(x-2)}+3$$

$$\therefore y = \sqrt{-2x+4}+3$$

이 그래프가 $y = \sqrt{-2x+a}+b$ 의 그래프와 일치해야 하므로

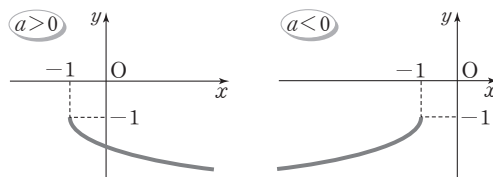
$$a=4, b=3 \quad \therefore ab=12$$

9 ④ $y = \sqrt{2-x} = \sqrt{-(x-2)}$

이므로 $y = \sqrt{2-x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

10 $y = -\sqrt{ax+a}-1 = -\sqrt{a(x+1)}-1 (a \neq 0)$

이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



① $a > 0$ 일 때, 정의역은 $\{x \mid x \geq -1\}$

$a < 0$ 일 때, 정의역은 $\{x \mid x \leq -1\}$

② $a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때 모두 치역은 $\{y \mid y \leq -1\}$

③ 주어진 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y = -\sqrt{ax+a}-1 \quad \therefore y = \sqrt{ax+a}+1$$

④ 주어진 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -\sqrt{a(-x)+a}-1 \quad \therefore y = -\sqrt{-ax+a}-1$$

⑤ 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

11 주어진 무리함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax} (a < 0)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은

$$y = \sqrt{a(x-4)}+2 (a < 0) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 그래프가 점 (0, 4)를 지나므로

$$4 = \sqrt{-4a}+2, \sqrt{-4a}=2 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y = \sqrt{-(x-4)}+2 = \sqrt{-x+4}+2$$

이 식을 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 비교하면

$$a = -1, b = 4, c = 2$$

$$\therefore abc = -8$$

- 12 주어진 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$ 이므로 유리함수의 식은

$$y = \frac{k}{x-1} + 2 \quad (k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{k}{-1} + 2 \quad \therefore k = 1$$

$k=1$ 을 ①에 대입하여 정리하면

$$y = \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{2x-1}{x-1}$$

이 식을 $y = \frac{bx+c}{ax-1}$ 와 비교하면

$$a=1, b=2, c=-1$$

따라서 $y = \sqrt{ax+b}+c = \sqrt{x+2}-1$

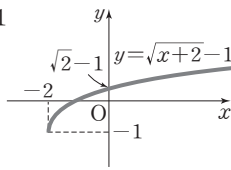
의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의

방향으로 -1 만큼 평행이동한 것

이므로 오른쪽 그림과 같이 제4

사분면을 지나지 않는다.



- 13 주어진 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서

(i) 아래로 볼록하므로 $a > 0$

(ii) 축의 방정식은 $x = -\frac{b}{2a}$

이때 축이 y 축의 오른쪽에 위치하므로

$$-\frac{b}{2a} > 0$$

그런데 (i)에서 $a > 0$ 이므로 $b < 0$

(iii) y 절편이 음수이므로 $c < 0$

$$y = \sqrt{cx+b}+a = \sqrt{c\left(x+\frac{b}{c}\right)}+a$$

이므로 $y = \sqrt{cx+b}+a$ 의 그래프는 $y = \sqrt{cx}$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 $-\frac{b}{c}$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한

것이다.

따라서 $c < 0$, $-\frac{b}{c} < 0$, $a > 0$ 이므로 $y = \sqrt{cx+b}+a$ 의 그래

프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다.

- 14 $y = \sqrt{2-x}-1$ 을 x 에 대하여 풀면

$$\sqrt{2-x} = y+1, \quad 2-x = (y+1)^2$$

$$\therefore x = -(y+1)^2 + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -(x+1)^2 + 2$$

이때 주어진 무리함수의 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$, 치역은

$\{y|y \geq -1\}$ 이므로 주어진 무리함수의 역함수의 정의역은

$\{x|x \geq -1\}$, 치역은 $\{y|y \leq 2\}$ 이다.

따라서 구하는 역함수는

$$y = -(x+1)^2 + 2 \quad (x \geq -1)$$

- 15 $f^{-1}(4) = a$ 에서 $f(a) = 4$ 이므로

$$\frac{a+2}{a-1} = 4 \quad \therefore a = 2$$

$$(f \circ (g \circ f)^{-1})(2) = b \text{에서}$$

$$(f \circ (g \circ f)^{-1})(2) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(2)$$

$$= g^{-1}(2) = b$$

$$\text{따라서 } g(b) = 2 \text{이므로 } \sqrt{2b-1} = 2 \quad \therefore b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore ab = 5$$

- 16 두 함수 f 와 f^{-1} 는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수

$y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 무리함수 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$ 는 x 의 값이 증가할 때, y

의 값도 증가하므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프

의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$y = \sqrt{x-2}+2$ 와 $y = x$ 에서 y 를 소거하면

$$\sqrt{x-2}+2 = x, \quad \sqrt{x-2} = x-2$$

양변을 제곱하면

$$x-2 = x^2-4x+4, \quad x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 두 교점 P, Q의 좌표는

$$P(2, 2), Q(3, 3) \text{ 또는 } P(3, 3), Q(2, 2)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

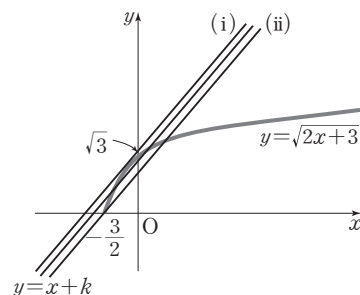
- 17 $y = \sqrt{2x+3} = \sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프와 직선 $y = x+k$ 가 서로 다른 두 점에

서 만나려면 다음 그림과 같이 직선 $y = x+k$ 가 두 직선 (i)

과 (ii) 사이를 지나거나 직선 (ii)일 때이다.



(i) $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프와 직선 $y = x+k$ 가 접할 때

$$\sqrt{2x+3} = x+k \text{에서 양변을 제곱하여 정리하면}$$

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = 0$$

$$-2k + 4 = 0 \quad \therefore k = 2$$

(ii) 직선 $y = x+k$ 가 점 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지날 때

$$0 = -\frac{3}{2} + k \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{3}{2} \leq k < 2$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$ 이므로 $ab = 3$

18 $f(x) = \sqrt{x} + 1 + |\sqrt{x} - 1|$ 에서

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 - (\sqrt{x} - 1) = 2$$

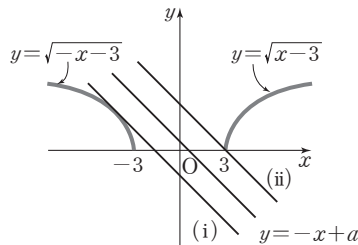
(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 + (\sqrt{x} - 1) = 2\sqrt{x}$$

(i), (ii)에 의하여 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다.

19 $y = \begin{cases} \sqrt{x-3} & (x \geq 0) \\ \sqrt{-x-3} & (x < 0) \end{cases}$

이때 $y = \sqrt{|x| - 3}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + a$ 가 만나지 않으려면 다음 그림과 같이 직선 $y = -x + a$ 가 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) $y = \sqrt{-x-3}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + a$ 가 접할 때

$\sqrt{-x-3} = -x + a$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - (2a-1)x + a^2 + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = \{-(2a-1)\}^2 - 4(a^2 + 3) = 0$$

$$-4a - 11 = 0 \quad \therefore a = -\frac{11}{4}$$

(ii) 직선 $y = -x + a$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -3 + a \quad \therefore a = 3$$

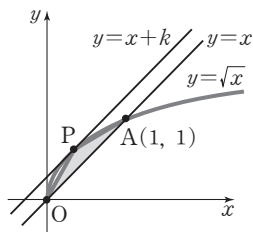
(i), (ii)에 의하여

$$-\frac{11}{4} < a < 3$$

20 직선 OA는 기울기가 1이고 원점을 지나는 직선이므로 직선

OA의 방정식은 $y = x$

다음 그림과 같이 점 P가 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프의 접선 중 기울기가 1인 접선과의 접점일 때, $\triangle OAP$ 의 넓이가 최대가 된다.



이때 접선의 방정식을 $y = x + k$ (k 는 상수)라고 하자.

$\sqrt{x} = x + k$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (2k-1)^2 - 4k^2 = 0$$

$$-4k + 1 = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

$\triangle OAP$ 의 높이 h 는 직선 $y = x + \frac{1}{4}$ 위의 점 $(0, \frac{1}{4})$ 과 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$h = \frac{\left| -\frac{1}{4} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

또 $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 이므로 $\triangle OAP$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times OA \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{8}$$

21 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = \sqrt{k(x-2)} - 1 \quad \dots\dots (가)$$

이 함수의 그래프가 점 $(5, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \sqrt{3k} - 1, \sqrt{3k} = 3$$

양변을 제곱하면 $3k = 9$

$$\therefore k = 3 \quad \dots\dots (나)$$

채점 기준	배점
(가) 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구한다.	3점
(나) k 의 값을 구한다.	2점

22 (1) $y = \sqrt{a-2x} - 1$

$$= \sqrt{-2\left(x - \frac{a}{2}\right)} - 1$$

이므로 $y = \sqrt{a-2x} - 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다. $\dots\dots (가)$

따라서 $-4 \leq x \leq 2$ 에서 $y = \sqrt{a-2x} - 1$ 은 $x = -4$ 일 때 최댓값 3을 가지므로

$$\sqrt{a+8} - 1 = 3, \sqrt{a+8} = 4$$

양변을 제곱하면 $a+8 = 16$

$$\therefore a = 8 \quad \dots\dots (나)$$

(2) $a = 8$ 이므로 주어진 함수는

$$y = \sqrt{8-2x} - 1$$

$-4 \leq x \leq 2$ 에서 주어진 함수는 $x = 2$ 일 때 최솟값을 가지므로 $x = 2$ 를 대입하면

$$y = \sqrt{8-4} - 1 = 1$$

따라서 구하는 함수의 최솟값은 1이다. $\dots\dots (다)$

채점 기준	배점
(가) 주어진 무리함수의 그래프의 개형을 안다.	2점
(나) a 의 값을 구한다.	2점
(다) 함수의 최솟값을 구한다.	2점

23 두 함수 f 와 f^{-1} 는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 무리함수 $f(x)=\sqrt{3x-a}+1$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

따라서 $y=\sqrt{3x-a}+1$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이다. (가)

$$\sqrt{3x-a}+1=x \text{에서 } \sqrt{3x-a}=x-1$$

양변을 제곱하면

$$3x-a=x^2-2x+1$$

$$\therefore x^2-5x+a+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

이때 두 교점의 좌표를 (α, α) , (β, β) 라고 하면 α, β 는 이차방정식 $\textcircled{나}$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=a+1 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

그런데 두 점 (α, α) , (β, β) 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2} &= \sqrt{2(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta} \\ &= \sqrt{2 \times 5^2 - 8(a+1)} \\ &= \sqrt{42-8a} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 42-8a=2 \quad \therefore a=5 \quad \dots\dots \textcircled{다}$$

채점 기준	배점
(가) $y=\sqrt{3x-a}+1$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 임을 안다.	2점
(나) 두 교점의 좌표를 (α, α) , (β, β) 로 놓고 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 값을 구한다.	3점
(다) a 의 값을 구한다.	2점

15 장 경우의 수

확인 문제

p. 60

- 1부터 10까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 구하는 경우의 수는
5
- 1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수는 6개, 10의 배수는 2개이다.
이때 1부터 20까지의 자연수 중 3의 배수이면서 10의 배수인 수는 없으므로 구하는 자연수의 개수는
 $6+2=8$
- 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우이다.
따라서 구하는 경우의 수는
 $3 \times 3 = 9$

1 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 차가 0인 경우

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

이므로 그 경우의 수는 6

(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우

$$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)$$

$$(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$$

이므로 그 경우의 수는 10

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$6+10=16$$

2 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우를 순서쌍으로 나타내면

합이 3인 경우: (1, 2), (2, 1)

합이 6인 경우: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

합이 9인 경우: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

합이 12인 경우: (6, 6)

즉, 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$$2+5+4+1=12$$

두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우를 순서쌍으로 나타내면

합이 4인 경우: (1, 3), (2, 2), (3, 1)

합이 8인 경우: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

합이 12인 경우: (6, 6)

즉, 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$$3+5+1=9$$

이때 두 눈의 수의 합이 3의 배수이면서 4의 배수, 즉 12의 배수인 경우의 수는 (6, 6)으로 1

따라서 구하는 경우의 수는

$$12+9-1=20$$

3 방정식 $2x+2y+z=10$ 을 만족하는 x 의 값에 따른 y, z 의 값을 순서쌍 (y, z) 로 나타내면

(i) $x=1$ 일 때, $2y+z=8$

$$(1, 6), (2, 4), (3, 2) \text{이므로 그 개수는 } 3$$

(ii) $x=2$ 일 때, $2y+z=6$

$$(1, 4), (2, 2) \text{이므로 그 개수는 } 2$$

(iii) $x=3$ 일 때, $2y+z=4$

$$(1, 2) \text{이므로 그 개수는 } 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$3+2+1=6$$

4 부등식 $3x+2y \leq 15$ 를 만족하는 x, y 의 값을 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

(i) $x=1$ 일 때 $2y \leq 12$, 즉 $y \leq 6$

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$

이므로 그 개수는 6

- (ii) $x=2$ 일 때 $2y \leq 9$, 즉 $y \leq 4.5$
 $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$
 이므로 그 개수는 4
- (iii) $x=3$ 일 때 $2y \leq 6$, 즉 $y \leq 3$
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3)$
 이므로 그 개수는 3
- (iv) $x=4$ 일 때 $2y \leq 3$, 즉 $y \leq 1.5$
 $(4, 1)$ 이므로 그 개수는 1
- (i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $6+4+3+1=14$

- 5** (1) 112를 소인수분해하면
 $112=2^4 \times 7$
 그런데 2^4 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 으로 5개, 7의 양의 약수는 1, 7로 2개이다.
 따라서 구하는 양의 약수의 개수는
 $5 \times 2 = 10$
- (2) 300을 소인수분해하면
 $300=2^2 \times 3 \times 5^2$
 그런데 2^2 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 으로 3개, 3의 양의 약수는 1, 3으로 2개, 5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 으로 3개이다.
 따라서 구하는 양의 약수의 개수는
 $3 \times 2 \times 3 = 18$

- 6** (1) 280을 소인수분해하면
 $280=2^3 \times 5 \times 7$
 그런데 2^3 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , 2^3 으로 4개, 5의 양의 약수는 1, 5로 2개, 7의 양의 약수는 1, 7로 2개이다.
 따라서 구하는 양의 약수의 개수는
 $4 \times 2 \times 2 = 16$
- (2) 450을 소인수분해하면
 $450=2 \times 3^2 \times 5^2$
 그런데 2의 양의 약수는 1, 2로 2개, 3^2 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 으로 3개, 5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 으로 3개이다.
 따라서 구하는 양의 약수의 개수는
 $2 \times 3 \times 3 = 18$

- 7** (i) $A \rightarrow C$ 로 가는 방법의 수는 2
 (ii) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 방법의 수는 $3 \times 2 = 6$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $2+6=8$

- 8** (i) $A \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 1
 (ii) $A \rightarrow B \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 $3 \times 3 = 9$
 (iii) $A \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는 $2 \times 3 = 6$
 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $1+9+6=16$

- 1** (1) ${}_5P_1=5$
 (2) ${}_7P_3=7 \times 6 \times 5=210$
 (3) ${}_8P_2=8 \times 7=56$
 (4) ${}_6P_4=6 \times 5 \times 4 \times 3=360$
- 2** (1) $4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$
 (2) ${}_5P_5=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$
 (3) ${}_7P_0=1$
 (4) $3! \times {}_4P_2=(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3)=72$

- 3** (1) 구하는 방법의 수는 서로 다른 8개 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_8P_2=8 \times 7=56$
 (2) $4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$

해심+ 교/과/서/숙 유형 + 닳은꼴 문제

- 1** (1) ${}_nP_2=72$ 에서
 $n(n-1)=72$
 $n^2-n-72=0$
 $(n+8)(n-9)=0$
 $\therefore n=-8$ 또는 $n=9$
 그런데 $n \geq 2$ 이므로 $n=9$
- (2) ${}_{n+1}P_4=7{}_nP_3$ 에서
 $(n+1)n(n-1)(n-2)=7n(n-1)(n-2)$
 이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)(n-2)$ 로 나누면
 $n+1=7 \quad \therefore n=6$

- 2** (1) ${}_6P_n=120$ 에서 $120=6 \times 5 \times 4$ 이므로
 $n=3$
- (2) ${}_nP_3 : {}_{n+1}P_3=2:3$ 에서
 ${}_2P_3=3{}_nP_3$
 $2(n+1)n(n-1)=3n(n-1)(n-2)$
 이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면
 $2(n+1)=3(n-2) \quad \therefore n=8$

- 3** (1) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개이다.
 나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_4P_3=24$
 따라서 구하는 정수의 개수는
 $4 \times 24=96$

- (2) 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3으로 2개이다.
 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리에 온 숫자와 0을 제외한 3개이다.
 나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_3P_2=6$
 따라서 구하는 정수의 개수는
 $2 \times 3 \times 6=36$

- 4** (1) 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개이다.
 나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 만의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_5P_4=120$
 따라서 구하는 정수의 개수는
 $5 \times 120=600$
- (2) 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5이다.
 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
 나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_5P_4=120$
- (ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우
 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리에 온 숫자와 0을 제외한 4개이다.
 나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 만의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_4P_3=24$
 즉, 일의 자리의 숫자가 5인 경우의 수는
 $4 \times 24=96$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 정수의 개수는
 $120+96=216$

- 5** (1) 여학생 4명을 묶어 한 명으로 생각하면 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $4!=24$
 그 각각에 대하여 여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $4!=24$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 24=576$
- (2) 여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $4!=24$
 그 각각에 대하여 여학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는
 ${}_5P_3=60$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 60=1440$

- (3) 여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $4!=24$
 그 각각에 대하여 여학생 사이사이의 3개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는
 $3!=6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 6=144$

- 6** (1) a 와 d 를 묶어 한 문자로 생각하면 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $4!=24$
 그 각각에 대하여 a 와 d 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2!=2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 2=48$
- (2) 세 문자 a, c, e 를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $3!=6$
 그 각각에 대하여 세 문자 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 b, d 를 배열하는 경우의 수는
 ${}_4P_2=12$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 12=72$
- (3) 양 끝에 b, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $2!=2$
 그 각각에 대하여 b, c 를 제외한 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $3!=6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 6=12$

17 장 조합

확인 문제 p. 64

- 1** (1) ${}_6C_0 \times {}_6C_6=1 \times 1=1$
 (2) ${}_5C_0 + {}_4C_1 + {}_3C_2=1+4+1=6$
 (3) ${}_6C_2=\frac{6 \times 5}{2 \times 1}=15$
 (4) ${}_{10}C_3=\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}=120$
- 2** 구하는 방법의 수는 서로 다른 7개 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
 ${}_7C_3=\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}=35$

3 (1) ${}_7C_5 = {}_7C_2$

$$= \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

(2) ${}_8C_6 = {}_8C_2$

$$= \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

4 (1) ${}_nC_8 = {}_nC_{n-8}$ 이므로
 ${}_nC_{n-8} = {}_nC_7$
 $\therefore n-8=7$
 $\therefore n=15$

(2) ${}_{12}C_r = {}_{12}C_{2r}$ 이므로
 $r+2r=12$
 $\therefore r=4$

1 (1) ${}_nC_2 = 10$ 에서

$$\frac{n(n-1)}{2} = 10$$

 $n(n-1) = 20$
 $n^2 - n - 20 = 0$
 $(n+4)(n-5) = 0$
 $\therefore n = -4$ 또는 $n = 5$
 그런데 $n \geq 2$ 이므로
 $n = 5$

(2) ${}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_{(n+2)-n} = {}_{n+2}C_2$ 이므로
 ${}_{n+2}C_2 = 28$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 28$$

 $(n+2)(n+1) = 56$
 $n^2 + 3n - 54 = 0$
 $(n+9)(n-6) = 0$
 $\therefore n = -9$ 또는 $n = 6$
 그런데 n 은 자연수이므로
 $n = 6$

2 (1) ${}_nC_3 = 84$ 에서

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 84$$

 $n(n-1)(n-2) = 504$
 이때 $504 = 9 \times 8 \times 7$ 이고 n 은 3 이상의 자연수이므로
 $n = 9$

(2) ${}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_{(n+3)-n} = {}_{n+3}C_3$ 이므로
 ${}_{n+3}C_3 = 10$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

 $(n+3)(n+2)(n+1) = 60$

이때 $60 = 5 \times 4 \times 3$ 이고 n 은 자연수이므로
 $n = 2$

3 (1) 남학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$
 여학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
 ${}_6C_2 = 15$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $10 \times 15 = 150$

(2) 구하는 경우의 수는 기태와 진희를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 조합의 수와 같으므로
 ${}_9C_3 = 84$

4 (1) 1학년 학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = 6$
 2학년 학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
 ${}_6C_2 = 15$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 15 = 90$

(2) 학생 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
 ${}_{10}C_4 = 210$
 뽑은 학생 4명이 모두 2학년 학생인 경우의 수는
 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $210 - 15 = 195$

5 (1) 구하는 삼각형의 개수는 서로 다른 8개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
 ${}_8C_3 = 56$
 (2) 직각삼각형이 되는 경우는 삼각형의 한 변이 원의 지름인 경우이다.
 주어진 8개의 점 중에서 2개의 점을 이어서 만들 수 있는 원의 지름의 개수는
 4
 그 각각에 대하여 나머지 6개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는
 ${}_6C_1 = 6$
 따라서 구하는 직각삼각형의 개수는
 $4 \times 6 = 24$

6 가로 방향의 4개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = 6$
 세로 방향의 5개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
 ${}_5C_2 = 10$
 따라서 구하는 평행사변형의 개수는
 $6 \times 10 = 60$

- 1 (1) 20
(2) 720
(3) 6
(4) 1
(5) 720
(6) $\frac{{}_8P_5}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$
- 2 (1) ${}_nP_2 = 42$ 에서 $n(n-1) = 42$
 $n^2 - n - 42 = 0$
 $(n+6)(n-7) = 0$
 $\therefore n = -6$ 또는 $n = 7$
 그런데 $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$
 (2) ${}_nP_2 = 30$ 에서 $n(n-1) = 30$
 $n^2 - n - 30 = 0$
 $(n+5)(n-6) = 0$
 $\therefore n = -5$ 또는 $n = 6$
 그런데 $n \geq 2$ 이므로 $n = 6$
 (3) ${}_5P_r = 60 = 5 \times 4 \times 3$ 이므로
 $r = 3$
 (4) ${}_4P_r = 12 = 4 \times 3$ 이므로
 $r = 2$
 (5) $n! = 6 = 3 \times 2 \times 1$ 이므로
 $n = 3$
 (6) ${}_nP_3 = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10$ 이므로
 $n = 12$
 (7) ${}_{n+1}P_3 = \frac{9!}{7!} \times 10 = 10 \times 9 \times 8$ 이므로
 $n+1 = 10$
 $\therefore n = 9$
 (8) ${}_6P_r \times 4! = 720$ 에서
 ${}_6P_r \times 24 = 720$
 ${}_6P_r = 30 = 6 \times 5$
 $\therefore r = 2$

- 3 (1) $5! = 120$
(2) ${}_5P_2 = 20$
(3) ${}_5P_2 = 20$

- 4 (1) 10
(2) 6
(3) 1
(4) ${}_{15}C_{14} = {}_{15}C_1 = 15$
(5) ${}_4C_2 \times {}_3C_2 = 6 \times 3 = 18$
(6) $\frac{{}_8C_5}{{}_4C_1} = \frac{{}_8C_3}{{}_4C_1} = \frac{56}{4} = 14$

- 5 (1) ${}_nC_4 = {}_nC_{n-4}$ 이므로
 ${}_nC_2 = {}_nC_{n-4}$
 즉, $2 = n - 4 \quad \therefore n = 6$
 (2) ${}_{15}C_{2r} = {}_{15}C_{3r}$ 이므로
 $2r + 3r = 15$
 $5r = 15 \quad \therefore r = 3$
 (3) ${}_nC_2 = 15$ 에서
 $\frac{n(n-1)}{2} = 15$
 $n^2 - n - 30 = 0, (n+5)(n-6) = 0$
 $\therefore n = -5$ 또는 $n = 6$
 그런데 $n \geq 2$ 이므로 $n = 6$
 (4) ${}_nC_3 = 35$ 에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 35$
 $n(n-1)(n-2) = 210$
 이때 $210 = 7 \times 6 \times 5$ 이고 n 은 3 이상의 자연수이므로
 $n = 7$
 (5) ${}_{n+2}C_n = 66$ 에서 ${}_{n+2}C_2 = 66$ 이므로
 $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 66$
 $n^2 + 3n - 130 = 0$
 $(n+13)(n-10) = 0$
 $\therefore n = -13$ 또는 $n = 10$
 그런데 n 은 자연수이므로
 $n = 10$
 (6) ${}_{n+1}C_{n-1} = 36$ 에서 ${}_{n+1}C_2 = 36$ 이므로
 $\frac{(n+1) \times n}{2} = 36$
 $n^2 + n - 72 = 0$
 $(n+9)(n-8) = 0$
 $\therefore n = -9$ 또는 $n = 8$
 그런데 n 은 자연수이므로 $n = 8$
 (7) ${}_{n+2}C_{n+1} = {}_{n+2}C_1 = 1$ 이므로
 ${}_nC_1 + {}_{n-1}C_1 = {}_{n+2}C_1$
 $n + (n-1) = n+2$
 $\therefore n = 3$
 (8) ${}_{n-2}C_2 + {}_nC_2 = {}_{n+1}C_2$ 에서
 $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1) \times n}{2}$
 양변에 2를 곱하면 정리하면
 $n^2 - 7n + 6 = 0$
 $(n-1)(n-6) = 0$
 $\therefore n = 1$ 또는 $n = 6$
 그런데 $n \geq 4$ 이므로
 $n = 6$

- 6 (1) ${}_5C_2 = 10$
(2) ${}_6C_3 = 20$
(3) ${}_{10}C_2 \times {}_{12}C_2 = 45 \times 66 = 2970$

1 ③	2 4	3 ③	4 17	5 ②
6 ①	7 ②	8 10	9 54	10 ④
11 ②	12 ①	13 ④	14 ②	15 ③
16 ④	17 ①	18 6	19 ⑤	20 ②
21 ②	22 ①	23 ⑤	24 ③	25 ①
26 (1) 0, 2, 4 또는 0, 4, 8 또는 2, 4, 6 또는 4, 6, 8 (2) 20				
27 dbace 28 18				

1 36을 소인수분해하면

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

즉, 36과 서로소가 아닌 자연수는 2 또는 3을 소인수로 갖는 자연수이므로 2의 배수 또는 3의 배수이다.

1부터 100까지의 자연수 중에서 2의 배수는 50개, 3의 배수는 33개이다.

이때 2의 배수이면서 3의 배수인 수, 즉 6의 배수는 16개이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$50 + 33 - 16 = 67$$

2 한 개의 가격이 400원, 800원인 빵을 각각 x 개, y 개 산다고 하면

$$400x + 800y = 3600$$

$$\therefore x + 2y = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 x, y 는 자연수이므로 방정식 ①을 만족하는 x, y 의 값을 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

$(1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1)$

이므로 구하는 방법의 수는 4이다.

3 네 학생 A, B, C, D의 학생증을 각각 a, b, c, d 라고 하면 네 학생이 모두 자신의 것이 아닌 학생증을 받는 경우는 다음과 같다.

$$A - B - C - D$$

$$b \begin{cases} a - d - c \\ c - d - a \\ d - a - c \end{cases}$$

$$c \begin{cases} a - d - b \\ d \begin{cases} a - b \\ b - a \end{cases} \end{cases}$$

$$d \begin{cases} a - b - c \\ c \begin{cases} a - b \\ b - a \end{cases} \end{cases}$$

따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

4 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 같다.

즉, 10000원짜리 지폐 1장을 5000원짜리 지폐 2장으로 생각하면 구하는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 2장, 5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 0원,

1000원, 2000원으로 그 금액의 수는 3

5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액은 0원,

5000원, 10000원, 15000원, 20000원, 25000원으로 그 금액의 수는 6

이때 0원을 지불하는 경우는 제외하므로 구하는 금액의 수는 $3 \times 6 - 1 = 17$

5 영역 C에 칠할 수 있는 색은 5가지, 영역 A에 칠할 수 있는 색은 영역 C에 칠한 색을 제외한 4가지, 영역 B에 칠할 수 있는 색은 두 영역 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지, 영역 E에 칠할 수 있는 색은 두 영역 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지, 영역 D에 칠할 수 있는 색은 두 영역 C, E에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$$

6 540을 소인수분해하면

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

즉, 540의 홀수인 약수는 $3^3 \times 5$ 의 양의 약수와 같다.

이때 3^3 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 , 3^3 으로 4개, 5의 양의 약수는 1, 5로 2개이다.

따라서 구하는 홀수인 약수의 개수는

$$4 \times 2 = 8$$

7 $(x+y)^2(a+b+c) = (x^2+2xy+y^2)(a+b+c) \dots\dots \textcircled{1}$

두 다항식 $x^2+2xy+y^2, a+b+c$ 의 항의 개수는 각각 3

따라서 ①의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

8 n 명 중에서 3명을 택하는 순열의 수가 720이므로

$${}_nP_3 = 720$$

$$n(n-1)(n-2) = 720$$

이때 $720 = 10 \times 9 \times 8$ 이고 n 은 3 이상의 자연수이므로

$$n = 10$$

9 57□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$3! = 6$$

6□□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

7□□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 24 + 24 = 54$$

- 10 (i) 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우
20대 참가자 3명 중에서 2명을 뽑아 첫 번째와 마지막 무대에 세우는 경우의 수는

$${}_3P_2=6$$

나머지 참가자 4명을 무대에 세우는 경우의 수는

$$4!=24$$

즉, 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

- (ii) 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우
30대 참가자 2명을 첫 번째와 마지막 무대에 세우는 경우의 수는

$$2!=2$$

나머지 참가자 4명을 무대에 세우는 경우의 수는

$$4!=24$$

즉, 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수는

$$2 \times 24 = 48$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$144 + 48 = 192$$

- 11 부부끼리 묶어 한 사람으로 생각하면 3명이 일렬로 앉는 방법의 수는

$$3!=6$$

부부끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각

$$2!=2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

- 12 (i) 수학책 사이에 과학책 2권만 끼는 경우
수학책 2권과 그 사이의 과학책 2권을 묶어 1권으로 생각하면 2권을 일렬로 끼는 방법의 수는

$$2!=2$$

수학책끼리, 과학책끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각

$$2!=2$$

즉, 수학책 사이에 과학책 2권만 끼는 방법의 수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

- (ii) 수학책 사이에 과학책 2권, 사회책 1권을 끼는 경우
수학책 2권을 양 끝에 끼는 방법의 수는

$$2!=2$$

나머지 3권을 일렬로 끼는 방법의 수는

$$3!=6$$

즉, 수학책 사이에 과학책 2권, 사회책 1권을 끼는 방법의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$8 + 12 = 20$$

- 13 선수 9명의 순서를 정하는 방법의 수는 선수 9명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같다.

오른손 타자인 주장을 맨 앞에 세우는 방법의 수는

$$1$$

나머지 오른손 타자 5명을 주장 뒤로 일렬로 세우는 방법의 수는

$$5!=120$$

왼손 타자 3명을 오른손 타자 사이사이와 맨 뒤의 6개의 자리에 세우는 방법의 수는

$${}_6P_3=120$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$1 \times 120 \times 120 = 14400$$

- 14 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$6!=720$$

4개의 자음 L, M, N, D 중에서 양 끝에 오는 2개의 자음을 택하는 경우의 수는

$${}_4P_2=12$$

그 각각에 대하여 나머지 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$4!=24$$

즉, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는

$$12 \times 24 = 288$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$720 - 288 = 432$$

- 15 ① ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$ 이므로

$${}_nC_0={}_nC_n$$

$$\textcircled{2} \quad {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!} \text{이므로}$$

$${}_nP_r={}_nC_r \times r!$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \quad {}_nC_r={}_nC_{n-r} \text{이므로}$$

$${}_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n+1-r}$$

$$\textcircled{5} \quad n \times {}_{n-1}C_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$r \times {}_nC_r = r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$\therefore n \times {}_{n-1}C_{r-1} = r \times {}_nC_r$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

- 16 ${}_{n+3}C_{n+1}=28$ 에서

$${}_{n+3}C_{n+1}={}_{n+3}C_{(n+3)-(n+1)}={}_{n+3}C_2 \text{이므로}$$

$${}_{n+3}C_2=28$$

$$\frac{(n+3)(n+2)}{2}=28$$

$$n^2+5n-50=0$$

$$(n+10)(n-5)=0$$

$$\therefore n=-10 \text{ 또는 } n=5$$

이때 n 은 자연수이므로

$$n=5$$

등식 ${}_{11}C_{r+2} = {}_{11}C_{3r-3}$ 에서 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $r+2=3r-3$ 이면

$$r=\frac{5}{2}$$

(ii) ${}_{11}C_{r+2} = {}_{11}C_{11-(r+2)} = {}_{11}C_{9-r} = {}_{11}C_{3r-3}$ 이므로

$$9-r=3r-3 \text{ 이면}$$

$$4r=12$$

$$\therefore r=3$$

그런데 r 는 자연수이므로

$$r=3$$

$$\therefore n+r=5+3=8$$

17 A 음식점에서 주문하는 방법의 수는

$${}_3C_2 \times {}_2C_1 = {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 3 \times 2 = 6$$

B 음식점에서 주문하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$$

C 음식점에서 주문하는 방법의 수는

$${}_2C_2 \times {}_5C_1 = 1 \times 5 = 5$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$6+24+5=35$$

18 구하는 집합의 개수는 집합 A 의 원소 중에서 6의 약수, 즉 1, 2, 3, 6을 제외한 원소 4, 5, 7, 8에서 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_2=6$$

19 15명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{15}C_4=1365$$

4명을 모두 여자로 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

4명을 모두 남자로 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4=126$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$1365 - (15+126) = 1224$$

20 성은이와 희근이를 포함하여 5명을 뽑는 방법의 수는 성은이와 희근이를 제외한 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_7C_3=35$$

성은이와 희근이를 한 사람으로 생각하면 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$4!=24$$

성은이와 희근이가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$35 \times 24 \times 2 = 1680$$

21 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수는

$${}_8C_2=28$$

이때 팔각형의 변의 개수는 8이다.

따라서 구하는 대각선의 개수는

$$28-8=20$$

22 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_7C_3=35$$

반원의 지름 위의 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$35-4=31$$

23 같은 학년 학생이 앉는 자리를 같은 색으로 나타내어 좌석 6개를 3개의 영역으로 나누면 같은 학년 학생끼리 앞뒤로 앉거나 옆으로 나란히 앉는 방법은 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

(i)

F1	F2	F3
----	----	----

G1	G2	G3
----	----	----

(ii)

F1	F2	F3
----	----	----

G1	G2	G3
----	----	----

(iii)

F1	F2	F3
----	----	----

G1	G2	G3
----	----	----

같은 학년 학생을 묶어 한 사람으로 생각하면 3명이 3개의 영역에 앉는 방법의 수는

$$3!=6$$

그 각각에 대하여 같은 학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각

$$2!=2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$3 \times 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 144$$

24 조건 (가)에 의하여 먼저 ♡ 모양이 그려진 타일 9장을 배열한 다음 그 사이사이와 양 끝에 ♥ 모양이 그려진 타일을 배열하면 된다.

(i) 맨 앞에 ♡ 모양이 그려진 타일을 붙이는 경우

조건 (나)에 의하여 맨 뒤에는 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙여야 한다.

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

위의 그림에서 ♡ 자리에 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙이면 되므로 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙이는 방법의 수는 ♡ 모양이 그려진 타일 사이사이의 8개의 자리 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$$\therefore {}_8C_3=56$$

$$\therefore {}_9C_3 = 84$$
$$56 + 84 = 140$$
$${}_6C_2 \times {}_6C_2 = 225$$
$${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 25$$
$$225 - 25 = 200$$

0, 2, 4 또는 0, 4, 8 또는 2, 4, 6 또는 4, 6, 8 …… (가)

$$2 \times 2! = 4$$
$$2 \times 2! = 4$$
$$3! = 6$$
$$3! = 6 \qquad \dots\dots (L)$$
$$4+4+6+6=20 \quad \dots\dots (d)$$

채점 기준	배점
(가) 3의 배수가 되도록 3개의 숫자를 택하는 경우를 모두 구한다.	2점
(나) 각 경우에서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구한다.	4점
(다) 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수를 구한다.	1점

즉, a 로 시작하는 문자열부터 da 로 시작하는 문자열까지의 총 개수는

$$24+24+24+6=78 \quad \dots\dots (4)$$

따라서 79번째에 오는 문자열은 *dbace*이다. (다)

채점 기준	배점
(가) a, b, c 로 시작하는 문자열의 개수를 각각 구한다.	3점
(나) da 로 시작하는 문자열까지의 총 개수를 구한다.	2점
(다) 79번째에 오는 문자열을 구한다.	2점

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3 \quad \dots\dots (7)$$
$${}_4C_2=6 \qquad \dots\dots (4)$$
 $3 \times 6 = 18$ (다)

채점 기준	배점
(가) 원소 $-2, -1$ 에 대응시키는 방법의 수를 구한다.	3점
(나) 원소 1, 2에 대응시키는 방법의 수를 구한다.	3점
(다) 함수 f 의 개수를 구한다.	2점

01~02 내공 점검

p. 74~75

1 ④	2 ③	3 ②	4 ④	5 ②
6 ④	7 ⑤	8 ③	9 ⑤	10 ②
11 0	12 37	13 9		

- 1 ① $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$
 ② $\{11, 12, 13, \dots\}$
 ③ $\emptyset$
 ④ '조금 큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 ⑤ $\{9, 11\}$
 따라서 집합이 아닌 것은 ④이다.

- 2 $\neg$. $\{x|x=2n-1, n \text{은 정수}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$
 $\neg$. $\{x|x=2k+1, k \text{는 음이 아닌 정수}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$
 $\cap$. $\{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수보다 } 1 \text{이 큰 자연수}\} = \{3, 5, 7, \dots\}$
 $\cap$. $\{x|x \text{는 홀수가 아닌 자연수}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$
 $\cap$. $\{x|x \text{는 } 2 \text{로 나누어떨어지지 않는 자연수}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$
 따라서 보기 중 서로 같은 집합은 $\neg$, $\cap$ 이다.

- 3 $X = \{2, 4, 5, 8, 10\}$
 $\therefore n(X) = 5$

- 4 ③ $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로
 $n(A) = 4$
 ④ $n(\{1, 2\}) - n(\emptyset) = 2 - 0 = 2$
 ⑤ $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 이므로
 $n(B) = 8$
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

- 5 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이고,
 조건 (나)에서 $x \in A$ 이면 $2x+1 \in A$ 이므로
 $2 \times 1 + 1 = 3 \in A$
 $3 \in A$ 이면 $2 \times 3 + 1 = 7 \in A$
 $7 \in A$ 이면 $2 \times 7 + 1 = 15 \in A$ ($\neg$)
 $\vdots$
 한편 $x \in A$ 이면 $2x+1 \in A$ 이므로
 $2x+1 \in A$ 이면 $2(2x+1)+1 = 4x+3 \in A$ ($\cap$)
 따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.

- 6 $X \subset A$ 이고 $A \not\subset X$ 인 집합 X 는 집합 A 의 진부분집합이다.
 $A = \{x | |x| \leq 2, x \text{는 정수}\}$ 에서
 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 따라서 집합 X 의 개수는
 $2^5 - 1 = 31$

- 7 ⑤ $\{1, 2, 3\} \not\subset A$

- 8 $-1 \in A$ 이므로 $-1 \in B$
 $\therefore a-1 = -1$ 또는 $2a+3 = -1$
 (i) $a-1 = -1$ 일 때, $a=0$ 이므로
 $A = \{-1, 2\}, B = \{-1, 2, 3\}$
 $\therefore A \subset B$
 (ii) $2a+3 = -1$ 일 때, $a = -2$ 이므로
 $A = \{-1, 0\}, B = \{-3, -1, 2\}$
 $\therefore A \not\subset B$
 (i), (ii)에 의하여 $a=0$
 $\therefore B = \{-1, 2, 3\}$
 따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은
 $-1+2+3=4$

- 9 $a \neq 0$ 이므로
 $a+1 \neq 1, 2a+1 \neq 1, 3-a \neq 3$
 따라서 $3-a=1$ 이므로 $a=2$
 이때 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5\}$ 이므로 $A=B$
 $\therefore a=2$

- 10 집합 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 중 원소 f 는 반드시 포함하고 원소 a, b 는 포함하지 않는 집합은 집합 A 에서 원소 a, b, f 를 제외한 집합 $\{c, d, e\}$ 의 부분집합에 원소 f 를 넣은 것과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는
 $2^3 = 8$

- 11 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ 이므로
 $n(A) = 4$ (가)
 $B = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$ 이므로
 $n(B) = 3$ (나)
 $C = \{x+y | x \in A, y \in B\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
 $n(C) = 7$ (다)
 $\therefore n(A) + n(B) - n(C) = 4 + 3 - 7 = 0$ (라)

채점 기준	배점
(가) $n(A)$ 를 구한다.	2점
(나) $n(B)$ 를 구한다.	3점
(다) $n(C)$ 를 구한다.	3점
(라) $n(A) + n(B) - n(C)$ 의 값을 구한다.	2점

- 12 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 가장 작은 원소가 1인 부분집합의 개수는 집합 A 의 부분집합 중 1을 반드시 포함하는 집합의 개수와 같으므로
 $2^{4-1} = 8$ (가)
 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 가장 작은 원소가 3인 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 3을 반드시 포함하는 집합의 개수와 같으므로
 $2^{3-1} = 4$ (나)

집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 가장 작은 원소가 5인 부분집합의 개수는 집합 $\{5, 7\}$ 의 부분집합 중 5를 반드시 포함하는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{2-1} = 2 \quad \dots\dots (다)$$

집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 가장 작은 원소가 7인 부분집합은 집합 $\{7\}$ 뿐이므로 개수는

$$1 \quad \dots\dots (라)$$

따라서 각 집합에서 가장 작은 원소를 모두 더한 값은

$$1 \times 8 + 3 \times 4 + 5 \times 2 + 7 \times 1 = 37 \quad \dots\dots (마)$$

채점 기준	배점
(가) 가장 작은 원소가 1인 부분집합의 개수를 구한다.	2점
(나) 가장 작은 원소가 3인 부분집합의 개수를 구한다.	2점
(다) 가장 작은 원소가 5인 부분집합의 개수를 구한다.	2점
(라) 가장 작은 원소가 7인 부분집합의 개수를 구한다.	2점
(마) 각 집합에서 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 구한다.	2점

- 13 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 는 집합 A 의 원소를 모두 포함하는 집합 B 의 부분집합이다. $\dots\dots (가)$

$A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로

$$n(A) = 4 \quad \dots\dots (나)$$

$B = \{x \mid 0 < x < k \text{인 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$ 이므로

$$n(B) = k-1 \quad \dots\dots (다)$$

집합 X 의 개수가 16이므로

$$2^{(k-1)-4} = 16, \quad 2^{k-5} = 2^4$$

$$\therefore k = 9 \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 를 안다.	2점
(나) $n(A)$ 를 구한다.	2점
(다) $n(B)$ 를 구한다.	2점
(라) 자연수 k 의 값을 구한다.	4점

03~04강 내공 점검

p. 76~77

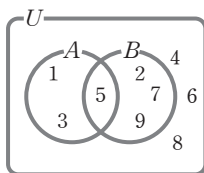
- 1 ② 2 ① 3 ③ 4 ④ 5 ②
 6 ⑤ 7 ④ 8 ③ 9 ② 10 ②
 11 10 12 5 13 최댓값: 3, 최솟값: -5

- 1 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B = \{2, 5, 7, 9\}$$

따라서 집합 B 의 원소가 아닌 것은

- ② 4이다.



- 2 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $(A \cap C) - B = (A \cap C) \cap B^c = A \cap B^c \cap C$

- 3 $M = \{2, 3, 5, 7\}, N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

조건 (가)에서 $X \subset (M \cup N)$

조건 (나)에서 $(M \cap N) \subset X$

$$\therefore (M \cap N) \subset X \subset (M \cup N)$$

이때 $M \cap N = \{3, 5, 7\}, M \cup N = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로

$$\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중 원소 3, 5, 7을 반드시 포함하는 집합이므로 집합 X 의 개수는 $2^{6-3} = 2^3 = 8$

- 4 ① $A - B = A$

$$\textcircled{2} B \subset A^c$$

$$\textcircled{3} A \cap B = \emptyset \text{이므로 } n(A \cap B) = 0$$

$$\textcircled{4} A \subset B^c \text{이므로 } A \cup B^c = B^c$$

$$\textcircled{5} A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \emptyset^c = U$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

- 5 $\neg, (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c$
 $= \emptyset$

$$\neg, (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c)$$

$$= A \cup \emptyset = A$$

$$\neg, A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$$

$$= (A \cup B) \cap U$$

$$= A \cup B$$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

- 6 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\},$

$$A \cap B = \{1, 2\}, A - B = \{5, 6\},$$

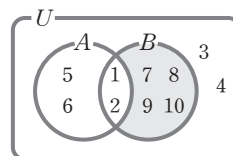
$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{3, 4\}$$

이므로 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B - A = \{7, 8, 9, 10\}$$

따라서 $B - A$ 의 모든 원소의 합은

$$7 + 8 + 9 + 10 = 34$$



- 7 $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$
 $= [(A \cup B^c) \cap A^c] \cup [(A \cup B^c) \cap B]$
 $= [(A \cap A^c) \cup (B^c \cap A^c)] \cup [(A \cap B) \cup (B^c \cap B)]$
 $= [\emptyset \cup (A^c \cap B^c)] \cup [(A \cap B) \cup \emptyset]$
 $= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$
 따라서 $(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) = A^c \cap B^c$ 이므로
 $(A \cap B) \subset (A^c \cap B^c)$
 이것이 성립하려면 $A \cap B = \emptyset$

- 8 $A_4 = \{x \mid f(4x) = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ 에서
 $f(4x) = 4x - [4x] = 0$

즉, A_4 는 $0 \leq x \leq 1$ 일 때, $4x$ 가 정수가 되도록 하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이므로

$$A_4 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

$A_6 = \{x \mid f(6x) = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ 에서

$$f(6x) = 6x - [6x] = 0$$

즉, A_6 은 $0 \leq x \leq 1$ 일 때, $6x$ 가 정수가 되도록 하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이므로

$$A_6 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$$

따라서 $A_4 \cup A_6 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 1\right\}$ 이므로

$$n(A_4 \cup A_6) = 9$$

9 $\neg, A \triangle U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^c$

$\neg, A \triangle \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A$

$\neg, A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$= (B \cup A) - (B \cap A) = B \triangle A$$

$\neg, U \triangle \emptyset = (U \cup \emptyset) - (U \cap \emptyset) = U - \emptyset = U$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

10 우리 반 학생 전체의 집합을 U , 경주에 가 본 학생의 집합을 A , 부여에 가 본 학생의 집합을 B 라고 하면

$$n(U) = 45, n(A) = 30, n(B) = 17, n(A \cap B) = 9$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 30 + 17 - 9 = 38$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 45 - 38 = 7$$

따라서 두 곳 모두 가 보지 못한 학생은 7명이다.

11 $A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 $3 \in A$

$$a^2 + 2a = 3, a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

..... (가)

(i) $a = -3$ 일 때

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{-2, -1, 0\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

(ii) $a = 1$ 일 때

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

(i), (ii)에 의하여 $a = 1$

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\} \text{이므로}$$

..... (나)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

..... (다)

따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

..... (라)

채점 기준	배점
(가) $a^2 + 2a = 3$ 을 만족하는 a 의 값을 구한다.	3점
(나) 조건을 만족하는 두 집합 A, B 를 구한다.	4점
(다) $A \cup B$ 를 구한다.	2점
(라) $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구한다.	1점

12 $A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$

$$(A \cap B) \cup X = X \text{이므로 } (A \cap B) \subset X$$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$$

즉, 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 $A \cap B$ 의 원소를 모두 포함하는 집합이다. (가)

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이고 집합 X 의 개수가 $8 = 2^3 = 2^{5-2}$ 이므로

$$n(A \cap B) = 2$$

..... (나)

(i) $2a + 1 = 1, 2a + 3 = 3$ 일 때, $a = 0$

(ii) $2a - 3 = 7, 2a - 1 = 9$ 일 때, $a = 5$

(i), (ii)에 의하여 자연수 a 의 값은 5이다. (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 조건을 만족하는 집합 X 를 안다.	2점
(나) $n(A \cap B)$ 를 구한다.	4점
(다) 자연수 a 의 값을 구한다.	4점

13 $A \cap (B \cup A^c) = (A \cap B) \cup (A \cap A^c)$

$$= (A \cap B) \cup \emptyset$$

$$= A \cap B = B$$

이므로 $B \subset A$

..... (가)

집합 A 에서

$$x^2 - 4x - 45 \leq 0$$

$$(x+5)(x-9) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq x \leq 9$$

$$\therefore A = \{x \mid -5 \leq x \leq 9\}$$

집합 B 에서

$$x^2 + 2x - a^2 - 2a \leq 0$$

$$(x+a+2)(x-a) \leq 0$$

(i) $a \geq -a-2$, 즉 $a \geq -1$ 일 때

$$B = \{x \mid -a-2 \leq x \leq a\} \text{이므로}$$

$$-a-2 \geq -5, a \leq 9$$

$$\therefore a \leq 3$$

그런데 $a \geq -1$ 이므로

$$-1 \leq a \leq 3$$

(ii) $a < -a-2$, 즉 $a < -1$ 일 때

$$B = \{x \mid a \leq x \leq -a-2\} \text{이므로}$$

$$a \geq -5, -a-2 \leq 9$$

$$\therefore a \geq -5$$

그런데 $a < -1$ 이므로

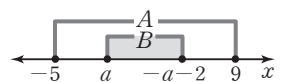
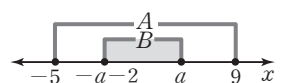
$$-5 \leq a < -1$$

(i), (ii)에 의하여 $-5 \leq a \leq 3$

..... (나)

따라서 상수 a 의 최댓값은 3, 최솟값은 -5이다. (다)

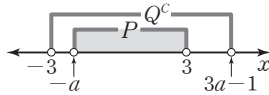
채점 기준	배점
(가) 두 집합 A, B 의 포함 관계를 안다.	3점
(나) 상수 a 의 값의 범위를 구한다.	5점
(다) 상수 a 의 최댓값과 최솟값을 구한다.	2점



- 1 ① 2 ① 3 ③ 4 ① 5 ④
 6 ① 7 ② 8 ④ 9 ⑤ 10 ⑤
 11 풀이 참조 12 1 13 5

- 1 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $P = \{2, 5\}, Q = \{1, 2, 4, 8\}$
 ‘ p 또는 $\sim q$ ’의 진리집합은
 $P \cup Q^c = \{2, 5\} \cup \{3, 5, 6, 7\}$
 $= \{2, 3, 5, 6, 7\}$
 따라서 집합 $P \cup Q^c$ 의 모든 원소의 합은
 $2+3+5+6+7=23$

- 2 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면
 $P = \{x | -a < x < 3\}, Q = \{x | x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 3a-1\}$
 조건 $\sim q$ 의 진리집합은 Q^c 이므로
 $Q^c = \{x | -3 < x < 3a-1\}$
 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면
 $P \subset Q^c$ 이므로
 $-a \geq -3, 3a-1 \geq 3$
 $\therefore \frac{4}{3} \leq a \leq 3$
 따라서 자연수 a 는 2, 3의 2개이다.



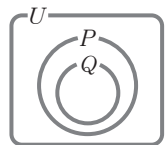
- 3 주어진 명제의 대우는
 ‘ $\sim(x+y \geq 0)$ 이면 $\sim(x > 0 \text{이고 } y > 0)$ 이다.’이므로
 ‘ $x+y < 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다.’
 4 $\neg$. 역: $x+y$ 가 정수이면 x, y 는 정수이다. (거짓)
 [반례] $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 는 정수이지만 x, y 는 정수가 아니다.
 $\neg$. 역: $ab=0$ 이면 $a=0$ 이다. (거짓)
 [반례] $a=2, b=0$ 이면 $ab=0$ 이지만 $a \neq 0$ 이다.
 $\neg$. 역: $\angle B = \angle C$ 이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. (참)
 따라서 보기의 명제 중 그 역이 참인 것은 ㄷ이다.

- 5 카드의 한쪽 면에 모음이 적혀 있으면 반대쪽 면에는 짝수가 적혀 있다고 했으므로 모음이 적혀 있는 카드 [e]의 반대쪽 면을 확인해야 한다.
 또 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이므로 카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 반대쪽 면에는 자음이 적혀 있어야 한다.
 즉, 홀수가 적혀 있는 카드 [3]의 반대쪽 면을 확인해야 한다.
 따라서 보기 중 반대쪽 면을 확인해야 하는 카드는 ㄴ, ㄹ이다.

- 6 ①, ② 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow r$ 도 참이다.
 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 참이므로 삼단논법에 의해 명제 $p \rightarrow r$ 는 참이다.
 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 거짓이므로 그 대우 $r \rightarrow p$ 는 거짓이다.
 즉, p 는 r 이기 위한 충분조건이다.
 ③, ④ 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow r$ 도 참이다.
 명제 $\sim q \rightarrow \sim r$ 가 거짓이므로 그 대우 $r \rightarrow q$ 도 거짓이다.
 즉, q 는 r 이기 위한 충분조건이다.
 ⑤ p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 r 는 p 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 옳은 것은 ①이다.

- 7 ① $p: a = -1$ 또는 $a = 1, q: a = 1$
 이므로 $p \Leftarrow q$
 따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 ② $p: a = 0, b = 0, q: a = 0$ 또는 $b = 0$
 이므로 $p \Rightarrow q$
 따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ③ $p: a \neq 0$ 또는 $b \neq 0, q: a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$
 이므로 $p \Leftarrow q$
 따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 ④ $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 ⑤ $p: ab \geq 0, q: ab > 0$ 이므로 $p \Leftarrow q$
 따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ②이다.

- 8 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $P \supset Q$
 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
 ① $P \cap Q = Q$
 ② $P \cup Q = P$
 ③ $P \cap Q^c = P - Q \neq \emptyset$
 ④ $P \cup Q^c = U$
 ⑤ $P^c - Q = P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c = P^c$
 따라서 항상 옳은 것은 ④이다.



- 9 $a^2 + b^2 - 2(a-b-1) = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1)$
 $= (a-1)^2 + (b+1)^2$
 이때 $(a-1)^2 \geq 0, (b+1)^2 \geq 0$ 이므로
 $a^2 + b^2 - 2(a-b-1) \geq 0$
 따라서 $a^2 + b^2 \geq 2(a-b-1)$ 이다.
 이때 등호는 $a-1=0, b+1=0$, 즉 $a=1, b=-1$ 일 때 성립한다.
 $\therefore$ (가) $(b+1)^2$ (나) $a=1, b=-1$

- 10 x, y 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)(x^2 + y^2) \geq \left(2x + \frac{y}{2}\right)^2$$
(단, 등호는 $2y = \frac{x}{2}$ 일 때 성립)

$$\frac{17}{4}(x^2 + y^2) \geq (2\sqrt{17})^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 16$$

따라서 $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 16이다.

- 11 (1) '자연수 n 에 대하여 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'
..... (가)

(2) 주어진 명제의 대우가 참임을 보이면 된다.

n 이 짝수이면 $n = 2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있다.

..... (나)

이때 $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ 이므로 n^2 은 짝수이다.

..... (다)

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제 '자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.'는 참이다.
..... (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 명제의 대우를 말한다.	2점
(나) n 을 짝수로 표현한다.	3점
(다) n^2 이 짝수임을 보인다.	3점
(라) 대우를 이용한 증명법을 이용하여 결론을 쓴다.	2점

- 12 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라고 하면

$$x^2 - x - 2 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore P = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\} \quad \text{..... (가)}$$

q 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$$P \subset Q \quad \text{..... (나)}$$

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset R \quad \text{..... (다)}$$

$P \subset Q, P \subset R$ 를 만족하도록

세 집합 P, Q, R 를 수직선

위에 나타내면 오른쪽 그림과

같다.

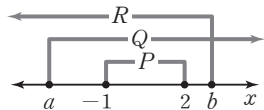
$$\therefore a \leq -1, b \geq 2 \quad \text{..... (라)}$$

따라서 a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 2 이므로

구하는 합은

$$-1 + 2 = 1 \quad \text{..... (바)}$$

채점 기준	배점
(가) 집합 P 를 구한다.	2점
(나) 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 구한다.	1점
(다) 두 집합 P, R 사이의 포함 관계를 구한다.	1점
(라) a, b 의 값의 범위를 구한다.	2점
(마) a 의 최댓값과 b 의 최솟값을 구한다.	2점
(바) a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구한다.	2점



- 13 $x > 0$ 일 때, $\frac{x^2+1}{x} > 0, \frac{4x}{x^2+1} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = \frac{x^2+1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} \geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x} \times \frac{4x}{x^2+1}} = 4 \quad \text{..... (가)}$$

$$\therefore b = 4 \quad \text{..... (나)}$$

이때 등호는 $\frac{x^2+1}{x} = \frac{4x}{x^2+1}$ 일 때 성립하므로

$$(x^2+1)^2 = 4x^2, x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2-1)^2 = 0, x^2 = 1$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 1$

$$\therefore a = 1 \quad \text{..... (다)}$$

$$\therefore a + b = 5 \quad \text{..... (라)}$$

채점 기준	배점
(가) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.	2점
(나) b 의 값을 구한다.	3점
(다) a 의 값을 구한다.	3점
(라) $a+b$ 의 값을 구한다.	2점

08~10 내공 점검

p. 80~81

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ①
6 ③ 7 ⑤ 8 ④ 9 ③ 10 ①
11 (1) $n(A) = 24, n(B) = 16$ (2) 34 12 1 13 12

- 1 ⑤ X 의 각 원소 $-1, 0, 1$ 에 Y 의 원소 $3, 1, 2$ 가 하나씩 대응되므로 함수이다.

$$2 \quad f(-2) = \frac{4}{a} + 1, f(-1) = \frac{1}{a} + 1, f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{a} + 1,$$

$$f(2) = \frac{4}{a} + 1$$

이고, 치역의 모든 원소의 합이 10이므로

$$\left(\frac{4}{a} + 1\right) \times 2 + \left(\frac{1}{a} + 1\right) \times 2 + 1 = 10, \frac{10}{a} = 5$$

$$\therefore a = 2$$

- 3 ㄱ. $f(xy) = f(x) + f(y)$ 에 $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } f(2) = 2 \text{이므로 } f(xy) = f(x) + f(y) \text{에 } x = 2, y = \frac{1}{2} \text{을}$$

대입하면

$$f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right), 0 = 2 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $a > 0$ 이므로 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 에 $x = a, y = \frac{1}{a}$ 을 대입하면

$$f\left(a \times \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \quad \therefore f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a) \text{ (참)}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4
$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

이때 함수 f 가 일대일대응이 되려면 $x \geq 1$ 일 때 기울기가 양수이므로 $x < 1$ 일 때도 기울기가 양수이어야 한다.

$$-2(a-1) > 0 \text{에서 } a-1 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

5 $(f \circ g)(x) = 2(-x+k) + 1 = -2x + 2k + 1$

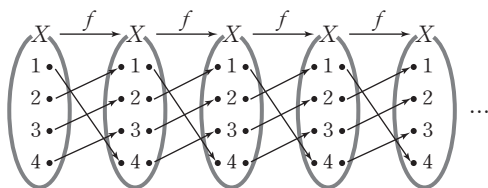
$$(g \circ f)(x) = -(2x+1) + k = -2x - 1 + k$$

이때 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 이므로

$$-2x + 2k + 1 = -2x - 1 + k$$

$$\therefore k = -2$$

6 함수 f 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $f^4(x) = x$ 이므로

$$f^{2021}(1) = f^{4 \times 505 + 1}(1) = f(1) = 2, f^{2020}(4) = f^{4 \times 505}(4) = 4$$

$$\therefore f^{2021}(1) - f^{2020}(4) = 0$$

7 $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ 이고 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x - \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3}g(x) - 1 = x - \frac{1}{3}$$

$$\therefore g(x) = 3x + 2$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{3} + 2 = 3$$

8 $f\left(2f^{-1}(x) + \frac{x}{x-1}\right) = x$ 에서

$$2f^{-1}(x) + \frac{x}{x-1} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$f(2) = k$ (k 는 상수)라고 하면 $f^{-1}(k) = 2$ 이므로

$$\frac{k}{1-k} = 2, k = 2 - 2k \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

$$\therefore f(2) = \frac{2}{3}$$

9 $g(x) = x + 3$ 이므로

$$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(6)$$

이때 $f^{-1}(6) = k$ (k 는 상수)라고 하면 $f(k) = 6$

(i) $k \geq 0$ 이면

$$f(k) = k^2 + k = 6$$

$$k^2 + k - 6 = 0, (k+3)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k \geq 0$ 이므로 $k = 2$

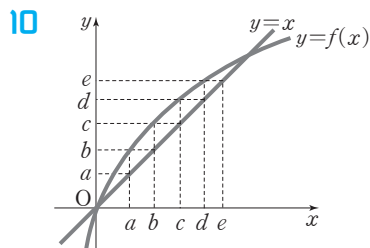
(ii) $k < 0$ 이면

$$f(k) = 2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

그런데 이 값은 $k < 0$ 을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $k = 2$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(3) = 2$$



$(f^{-1} \circ f^{-1})(c) = f^{-1}(f^{-1}(c))$ 이므로

$f^{-1}(c) = m$ 이라고 하면

$$f(m) = c \text{이므로}$$

$$m = b$$

$f^{-1}(b) = n$ 이라고 하면

$$f(n) = b \text{이므로}$$

$$n = a$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c) = f^{-1}(f^{-1}(c)) = f^{-1}(b) = a$$

11 (1) 집합 A 는 일대일함수의 집합이므로

$$n(A) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \dots\dots (가)$$

집합 B 의 원소의 개수는 집합 $\{2, 3\}$ 에서 집합 $\{4, 5, 6, 7\}$ 로의 함수의 개수와 같으므로

$$n(B) = 4 \times 4 = 16 \quad \dots\dots (나)$$

(2) 집합 $A \cap B$ 는 $f(1) = 4$ 를 만족하는 일대일함수의 집합이므로 집합 $A \cap B$ 의 원소의 개수는 집합 $\{2, 3\}$ 에서 집합 $\{5, 6, 7\}$ 로의 일대일함수의 개수와 같다.

$$\therefore n(A \cap B) = 3 \times 2 = 6 \quad \dots\dots (다)$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 24 + 16 - 6$$

$$= 34 \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $n(A)$ 를 구한다.	3점
(나) $n(B)$ 를 구한다.	3점
(다) $n(A \cap B)$ 를 구한다.	2점
(라) $n(A \cup B)$ 를 구한다.	2점

12 $(f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1})(-1)$

$$= (f^{-1} \circ f \circ g^{-1})(-1)$$

$$= g^{-1}(-1)$$

$g^{-1}(-1) = a$ (a 는 상수)라고 하면

$$g(a) = -1 \text{ 이므로}$$

$$3a + 2 = -1$$

$$\therefore a = -1$$

즉, $g^{-1}(-1) = -1$ 이므로

$$(f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1})(-1) = -1$$

..... (가)

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = (f^{-1} \circ g)(-1)$$

$$= f^{-1}(g(-1))$$

$$= f^{-1}(-1)$$

$f^{-1}(-1) = b$ (b 는 상수)라고 하면

$$f(b) = -1 \text{ 이므로}$$

$$-2b + 3 = -1$$

$$\therefore b = 2$$

즉, $f^{-1}(-1) = 2$ 이므로

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = 2$$

..... (나)

$$\therefore (f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1})(-1) + (g^{-1} \circ f)^{-1}(-1)$$

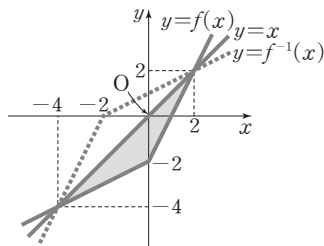
$$= -1 + 2$$

$$= 1$$

..... (다)

채점 기준	배점
(가) $(f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1})(-1)$ 의 값을 구한다.	4점
(나) $(g^{-1} \circ f)^{-1}(-1)$ 의 값을 구한다.	4점
(다) $(f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1})(-1) + (g^{-1} \circ f)^{-1}(-1)$ 의 값을 구한다.	2점

13



..... (가)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. (나)

위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 와 두 점 $(-4, -4)$, $(2, 2)$ 에서 만나므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) = 12 \quad \text{..... (다)}$$

채점 기준	배점
(가) $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.	3점
(나) $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.	3점
(다) $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.	4점

11~12 내공 점검

p. 82~83

1 ③

2 ②

3 ⑤

4 ④

5 ②

6 ②

7 ①

8 ③

9 ①

10 ⑤

11 -1 또는 2

12 4

13 -10

$$\begin{aligned} 1 \quad \frac{x+2}{x-3} + \frac{x-5}{x^2-x-6} &= \frac{x+2}{x-3} + \frac{x-5}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{(x+2)^2 + x-5}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{x^2+5x-1}{(x-3)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{x^2+5x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2+ax+b}{(x-3)(x+2)} \text{ 이므로}$$

$$a=5, b=-1$$

$$\therefore a+b=4$$

$$\begin{aligned} 2 \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{1+x}{x}} \\ &= 1 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &= \frac{a+b+c}{abc} = 0 \text{ 이므로} \\ a+b+c &= 0 \quad \text{..... ㉠} \\ \frac{a^2+1}{bc} + \frac{b^2+1}{ca} + \frac{c^2+1}{ab} &= \frac{(a^2+1)a + (b^2+1)b + (c^2+1)c}{abc} \\ &= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc} \\ &= \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc} \\ &= \frac{3abc}{abc} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad 2x &= 3y, 5y = 4z \text{ 에서} \\ x &= \frac{3}{2}y, z = \frac{5}{4}y \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$x:y:z = \frac{3}{2}y:y:\frac{5}{4}y = 6:4:5$$

$x=6k, y=4k, z=5k (k>0)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \frac{3x-2y+4z}{x+y+z} &= \frac{18k-8k+20k}{6k+4k+5k} \\ &= \frac{30k}{15k} = 2 \end{aligned}$$

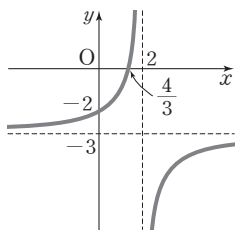
$$5 \quad y = \frac{-3x+4}{x-2} = \frac{-3(x-2)-2}{x-2} = -\frac{2}{x-2} - 3$$

이므로 $y = \frac{-3x+4}{x-2}$ 의 그래프는

$y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3

만큼 평행이동한 것이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로 제2사
분면을 지나지 않는다.



$$6 \quad x^2 - 5x + 4 \geq 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x | x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{x-3+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1$$

이므로 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 4$ 에서

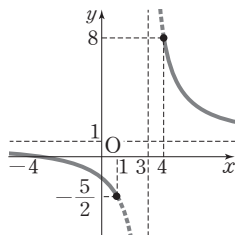
$y = \frac{x+4}{x-3}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

$$x=4 \text{일 때, } M=8$$

$$x=1 \text{일 때, } m = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore M+m = \frac{11}{2}$$



$$7 \quad \neg. y = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

$$\neg. y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 2$$

$$\neg. y = \frac{2x-1+1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + 1$$

따라서 보기의 유리함수 중 그 그래프를 평행이동하여 유
리함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 $\neg$ 이다.

$$8 \quad y = \frac{ax-1}{x+2} = \frac{a(x+2)-2a-1}{x+2} = \frac{-2a-1}{x+2} + a$$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 점 $(-2, a)$ 에 대하여
대칭이다.

점 $(-2, a)$ 는 두 직선 $y=x+b$, $y=-x+2$ 의 교점이므로

$$a = -2+b, a = -(-2)+2$$

$$\therefore a=4, b=6$$

$$\therefore a+b=10$$

$$9 \quad f^1(x) = f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

$\vdots$

$$\therefore f^{100}(x) = \frac{x}{1-100x}$$

$$\text{따라서 } \frac{x}{1-100x} = \frac{ax+b}{cx+1} \text{이므로}$$

$$a=1, b=0, c=-100$$

$$\therefore ab+c = -100$$

10 주어진 함수의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$\frac{a+b}{3} = 1$$

$$\therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{ax+b}{x+2} \text{를 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$y(x+2) = ax+b$$

$$(y-a)x = -2y+b$$

$$\therefore x = \frac{-2y+b}{y-a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{-2x+b}{x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-2x+b}{x-a}$$

이때 $f^{-1}(x) = f(x)$ 이므로

$$\frac{-2x+b}{x-a} = \frac{ax+b}{x+2}$$

$$\therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b=5$$

$$\therefore b-a=7$$

$$11 \quad \frac{a+2b}{3c} = \frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서 $a+2b=3ck$, $2b+3c=ak$, $3c+a=2bk$

위 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+2b+3c) = (a+2b+3c)k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $a+2b+3c \neq 0$ 일 때

$$k=2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(ii) $a+2b+3c=0$ 일 때

$$a+2b=-3c, 2b+3c=-a, 3c+a=-2b \text{이므로 } \textcircled{1}$$

에 대입하면

$$k=-1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 실수 k 의 값은 -1 또는 2 이다.

채점 기준	배점
(가) 주어진 식을 정리하여 k 에 대한 등식을 만든다.	2점
(나) $a+2b+3c \neq 0$ 일 때, k 의 값을 구한다.	4점
(다) $a+2b+3c=0$ 일 때, k 의 값을 구한다.	4점

$$12 \quad y = \frac{x+a}{x-1} = \frac{(x-1)+a+1}{x-1} \\ = \frac{a+1}{x-1} + 1 \quad \dots\dots (가)$$

$$y = \frac{1-x}{x+1} = \frac{-(x+1)+2}{x+1} \\ = \frac{2}{x+1} - 1 \quad \dots\dots (나)$$

$y = \frac{x+a}{x-1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{a+1}{x-m-1} + 1 + n$$

이 그래프가 $y = \frac{2}{x+1} - 1$ 의 그래프와 일치해야 하므로

$$a+1=2, -m-1=1, 1+n=-1$$

$$\therefore a=1, m=-2, n=-2 \quad \dots\dots (다)$$

$$\therefore amn=4 \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $y = \frac{x+a}{x-1}$ 를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 변형한다.	2점
(나) $y = \frac{1-x}{x+1}$ 를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 변형한다.	2점
(다) a, m, n 의 값을 구한다.	4점
(라) amn 의 값을 구한다.	2점

$$13 \quad y = \frac{5-3x}{x-2} = \frac{-3(x-2)-1}{x-2} \\ = -\frac{1}{x-2} - 3$$

이므로 점근선의 방정식은

$$x=2, y=-3 \quad \dots\dots (가)$$

$$y = \frac{ax-2}{2x+b}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}(2x+b) - \frac{ab}{2} - 2}{2x+b}$$

$$= -\frac{\frac{ab}{2} + 2}{2x+b} + \frac{a}{2}$$

이므로 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{2}, y = \frac{a}{2} \quad \dots\dots (나)$$

두 유리함수의 그래프의 점근선이 서로 일치하므로

$$-\frac{b}{2} = 2, \frac{a}{2} = -3$$

$$\therefore a = -6, b = -4 \quad \dots\dots (다)$$

$$\therefore a+b = -10 \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $y = \frac{5-3x}{x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.	3점
(나) $y = \frac{ax-2}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.	4점
(다) a, b 의 값을 구한다.	2점
(라) $a+b$ 의 값을 구한다.	1점

13~14 내공 점검

p. 84~85

1 ②	2 ④	3 ③	4 ②	5 ①
6 ⑤	7 ③	8 ③	9 ⑤	10 ④
11 $\sqrt{5}-2$	12 21	13 6		

$$1 \quad f(n) = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \\ = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(60)} \\ = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2} \\ = \frac{-\sqrt{1} + \sqrt{121}}{2} = \frac{-1+11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$2 \quad (i) \quad 8+2x-x^2 \geq 0 \text{에서} \quad x^2-2x-8 \leq 0$$

$$(x+2)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 4$$

$$(ii) \quad x^2-3x+2 \neq 0 \text{에서} \quad (x-1)(x-2) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 1, x \neq 2$$

(i), (ii)에 의하여 정수 x 는 $-2, -1, 0, 3, 4$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 3 + 4 = 4$$

$$3 \quad \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1} + \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1} = \frac{(\sqrt{x+2}-1)^2 + (\sqrt{x+2}+1)^2}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)} \\ = \frac{2x+6}{x+1} = \frac{2\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}+1} \\ = \frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \\ = 2\sqrt{3}$$

$$4 \quad y = \frac{ax-3}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab-3}{x+b} = \frac{-ab-3}{x+b} + a$$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 점 $(-b, a)$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore a = -2, b = 6$$

무리함수 $y = \sqrt{ax+b} = \sqrt{-2x+6}$ 의 정의역은

$$\{x \mid x \leq 3\}$$

따라서 이 정의역에 속하는 자연수는 1, 2, 3의 3개이다.

$$5 \quad y = \sqrt{2x-3}-1 \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 } -1 \text{만큼, } y \text{축의 방향으로 } 2 \text{만큼 평행이동하면}$$

$$y = \sqrt{2(x+1)} - 3 - 1 + 2 = \sqrt{2x-1} + 1$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

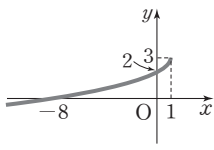
$$y = \sqrt{2 \times (-x)} - 1 + 1 \quad \therefore y = \sqrt{-2x-1} + 1$$

이 그래프가 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프와 일치해야 하므로

$$a = -2, b = -1, c = 1$$

$$\therefore a+b+c = -2$$

6 $y = -\sqrt{-x+1}+3 = -\sqrt{-(x-1)}+3$
 에서 $y = -\sqrt{-x+1}+3$ 의 그래프
 는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의
 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3
 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽
 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

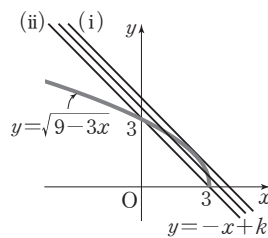


7 주어진 무리함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax} (a > 0)$ 의 그래프를 x
 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
 것이므로 무리함수의 식은
 $y = \sqrt{a(x+2)}+1 (a > 0)$ ㉠
 ㉠의 그래프가 점 (0, 3)을 지나므로
 $3 = \sqrt{2a}+1, \sqrt{2a}=2 \quad \therefore a=2$
 $a=2$ 를 ㉠에 대입하여 정리하면
 $y = \sqrt{2(x+2)}+1 = \sqrt{2x+4}+1$
 이 식을 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 비교하면
 $a=2, b=4, c=1$
 $\therefore abc=8$

8 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3)$
 $= (g^{-1} \circ f)(3)$
 $= g^{-1}(f(3))$
 $= g^{-1}(3)$
 $g^{-1}(3) = k (k \text{는 상수})$ 라고 하면 $g(k) = 3$ 이므로
 $\sqrt{3k-6} = 3, 3k-6=9$
 $\therefore k=5$
 $\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) = 5$

9 두 함수는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수의 그래프
 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
 이때 무리함수 $y = 2\sqrt{x+1}-1$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값
 도 증가하므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = 2\sqrt{x+1}-1$ 의
 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
 $2\sqrt{x+1}-1=x$ 에서
 $2\sqrt{x+1}=x+1$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2-2x-3=0$
 $(x+1)(x-3)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
 따라서 주어진 두 함수의 그래프는 두 점 $(-1, -1),$
 $(3, 3)$ 에서 만나므로 두 교점 사이의 거리는
 $\sqrt{(3+1)^2+(3+1)^2} = 4\sqrt{2}$

10 $y = \sqrt{9-3x} = \sqrt{-3(x-3)}$ 이므로 이 함수의 그래프는
 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것
 이고, $y = -x+k$ 는 기울기가 -1이고 y 절편이 k 인 직선
 이다.



(i) $y = \sqrt{9-3x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+k$ 가 접할 때
 $\sqrt{9-3x} = -x+k$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + (3-2k)x + k^2 - 9 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $D = (3-2k)^2 - 4(k^2-9) = 0 \quad \therefore k = \frac{15}{4}$

(ii) 직선 $y = -x+k$ 가 점 (3, 0)을 지날 때
 $0 = -3+k \quad \therefore k=3$
 따라서 함수 $y = \sqrt{9-3x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+k$ 가 서
 로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위는
 $3 \leq k < \frac{15}{4}$

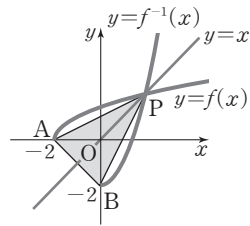
11 $x+y=2\sqrt{5}, xy=4$ 이므로
 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = (2\sqrt{5})^2 - 4 \times 4 = 4$
 $\therefore x-y=2 (\because x>y>0)$ (가)
 $\therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
 $= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$ (나)
 $= \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{4}}{2} = \sqrt{5}-2$ (다)

채점 기준	배점
(가) $x-y$ 의 값을 구한다.	4점
(나) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 의 분모를 유리화한다.	4점
(다) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 의 값을 구한다.	2점

12 $y = -\sqrt{6-x}-5 = -\sqrt{-(x-6)}-5$
 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동
 한 것이다.
 $a \leq x \leq 2$ 에서 주어진 함수는 $x=a$ 일 때 최솟값 -8을 가
 지므로
 $-\sqrt{6-a}-5 = -8, \sqrt{6-a}=3 \quad \therefore a=-3$ (가)
 $x=2$ 일 때 최댓값 b 를 가지므로
 $b = -\sqrt{6-2}-5 = -7$ (나)
 $\therefore ab=21$ (다)

채점 기준	배점
(가) a 의 값을 구한다.	4점
(나) b 의 값을 구한다.	4점
(다) ab 의 값을 구한다.	2점

13 $f(x)=\sqrt{x+2}$ 에 대하여
 $y=f(x)$ 의 그래프와
 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선
 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오
 른쪽 그림과 같다.



이때 두 점 A, B의 좌표는
 $A(-2, 0), B(0, -2)$ (가)

$y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래
 프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$\sqrt{x+2}=x$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=2$

따라서 점 P의 좌표는 $P(2, 2)$ (나)

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABP &= \triangle AOB + \triangle AOP + \triangle BOP \\ &= \triangle AOB + 2\triangle AOP \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \\ &= 6 \end{aligned} \quad \text{..... (다)}$$

채점 기준	배점
(가) 두 점 A, B의 좌표를 구한다.	3점
(나) 점 P의 좌표를 구한다.	4점
(다) $\triangle ABP$ 의 넓이를 구한다.	3점

15~17 내공 점검

p. 86~87

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 ②	5 ③
6 ①	7 ②	8 ③	9 ④	10 ①
11 17	12 33	13 5명		

1 1부터 50까지의 자연수 중에서 2의 배수는 25개, 5의 배수
 는 10개이다.
 이때 2의 배수이면서 5의 배수, 즉 10의 배수는 5개이다.
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 $25+10-5=30$

2 $2a_1=a_2+a_3$ 일 때, a_1 의 값에 따른 a_2, a_3 의 값을 순서쌍
 (a_2, a_3) 으로 나타내면
 (i) $a_1=1$, 즉 $a_2+a_3=2$ 인 경우
 $(1, 1)$ 이므로 그 경우의 수는 1
 (ii) $a_1=2$, 즉 $a_2+a_3=4$ 인 경우
 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 이므로 그 경우의 수는 3
 (iii) $a_1=3$, 즉 $a_2+a_3=6$ 인 경우
 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 이므로 그 경우
 의 수는 5

(iv) $a_1=4$, 즉 $a_2+a_3=8$ 인 경우
 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 이므로 그 경우
 의 수는 5
 (v) $a_1=5$, 즉 $a_2+a_3=10$ 인 경우
 $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$ 이므로 그 경우의 수는 3
 (vi) $a_1=6$, 즉 $a_2+a_3=12$ 인 경우
 $(6, 6)$ 이므로 그 경우의 수는 1
 (i)~(vi)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $1+3+5+5+3+1=18$

3 (i) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는
 $2 \times 2 \times 1 = 4$
 (ii) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ 로 가는 방법의 수는
 $3 \times 2 \times 3 = 18$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $4+18=22$

4 D 칸에 올 수 있는 수는 2, 4, 6이므로 3개이다.
 그 각각에 대하여 D 칸에 적은 수를 제외한 나머지 5개의
 수 중에서 3개를 택하여 3개의 칸 A, B, C에 적는 방법의
 수는 ${}_5P_3=60$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $3 \times 60 = 180$

5 부모를 한 사람으로 생각하면 4명이 일렬로 버스에 타는 경
 우의 수는 $4!=24$
 그 각각에 대하여 부모가 서로 순서를 바꾸어 타는 경우의
 수는 $2!=2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 2 = 48$

6 조건 (가), (나)를 만족하는 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값은
 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=6$
 또는 $f(1)=3, f(2)=2, f(3)=6$
 이므로 그 개수는 2
 그 각각에 대하여 일대일대응인 함수 f 의 개수는
 $3!=6$
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $2 \times 6 = 12$

7 서로 평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 하
 나의 직선을 만들 수 있으므로
 ${}_6C_1 \times {}_9C_1 = 6 \times 9 = 54$
 주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는
 $54+2=56$

8 (i) ${}_{10}C_{2r} = {}_{10}C_{r+4}$ 에서
 $2r=r+4 \quad \therefore r=4$

$$(ii) {}_{10}C_{r+4} = {}_{10}C_{10-(r+4)} = {}_{10}C_{6-r} \text{이므로}$$

$${}_{10}C_{2r} = {}_{10}C_{6-r} \text{에서}$$

$$2r = 6 - r \quad \therefore r = 2$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 정수 r 의 값의 합은

$$4 + 2 = 6$$

9 생활 공예반 6개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

손뜨개반 4개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$15 \times 6 = 90$$

10 구하는 자연수의 개수는 8개의 1을 일렬로 배열한 후, 1 사이사이와 맨 끝의 8개의 자리에 4개의 0을 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8C_4 = 70$$

11 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수를 a , 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수를 b 라고 하면 ab 가 4의 배수인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) a 가 짝수인 경우

a 가 2 또는 6이면 그 각각에 대하여 b 가 될 수 있는 수는 2, 4, 6으로 3개이다.

또 a 가 4이면 b 가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 7개이다.

즉, 두 수 중 한 수가 짝수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수는

$$2 \times 3 + 1 \times 7 = 13 \quad \dots\dots (가)$$

(ii) a 가 홀수인 경우

a 가 1, 3, 5, 7이면 그 각각에 대하여 b 가 될 수 있는 수는 4로 1개이다.

즉, 두 수 중 한 수가 홀수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수는

$$4 \times 1 = 4 \quad \dots\dots (나)$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$13 + 4 = 17 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 두 수 중 한 수가 짝수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구한다.	6점
(나) 두 수 중 한 수가 홀수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구한다.	3점
(다) 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구한다.	1점

12 주어진 부등식을 정리하면

$$n(n-1)(n-2) \leq 6n(n-1) \quad \dots\dots \textcircled{가} \quad \dots\dots (가)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 부등식 $\textcircled{가}$ 의 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$n-2 \leq 6, \text{ 즉 } n \leq 8$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로

$$3 \leq n \leq 8 \quad \dots\dots (나)$$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 자연수 n 은 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 주어진 부등식을 n 에 관한 부등식으로 나타낸다.	4점
(나) 자연수 n 의 값의 범위를 구한다.	4점
(다) 모든 자연수 n 의 값의 합을 구한다.	2점

13 여자 회원이 적어도 1명은 포함되도록 뽑는 방법의 수는 전체 경우의 수에서 남자 회원 중에서만 운영진 3명을 뽑는 방법의 수를 뺀 값과 같다.

전체 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220 \quad \dots\dots (가)$$

남자 회원의 수를 n 이라 하면 남자 회원 중에서만 운영진 3명 뽑는 방법의 수는

$$\begin{aligned} {}_nC_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{aligned} \quad \dots\dots (나)$$

여자 회원이 적어도 1명은 포함되도록 운영진 3명을 뽑는 방법의 수가 185이므로

$$220 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 185$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 35$$

$$n(n-1)(n-2) = 210 = 7 \times 6 \times 5$$

n 은 3 이상의 자연수이므로

$$n = 7 \quad \dots\dots (다)$$

따라서 남자 회원이 7명이므로 여자 회원은 5명이다.

$$\dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) 전체 경우의 수를 구한다.	3점
(나) 남자 회원만 3명 뽑는 방법의 수를 구한다.	3점
(다) 남자 회원 수를 구한다.	3점
(라) 여자 회원 수를 구한다.	1점