

개념과 유형이 하나로

개념+유형



수학I

정답과 해설

I-1. 지수와 로그

01 지수

1 개념 CHECK

p.9

1. 답 (1) a^{70} (2) a^{10}

2. 답 (1) 4 (2) -5 (3) -3 (4) 2

1 유제 & 문제

p.10~11

유제 01 답 ⑤

- ① -4의 제곱근을 x 라 하면 $x^2 = -4$ 이므로 $x = \pm 2i$
- ② -64의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -64$ 이므로 $x^3 + 64 = 0$, $(x+4)(x^2-4x+16) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$
- ③ $\sqrt{256} = 16$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$ 이므로 $x^4 - 16 = 0$, $(x^2-4)(x^2+4) = 0$
 $\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$
 따라서 $\sqrt{256}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이다.
- ④ 49의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 49$ 이므로 $x^4 - 49 = 0$, $(x^2-7)(x^2+7) = 0$
 $\therefore x = \pm \sqrt{7}$ 또는 $x = \pm \sqrt{7}i$
 따라서 49의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$ 이다.
- ⑤ n 이 짝수일 때, $x^n = 6$ 을 만족하는 실수 x 는 $x = \pm \sqrt[n]{6} \Rightarrow 2$ 개
 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

문제 01-1 답 $5\sqrt{3}$

$\sqrt{81} = 9$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 9$ 이므로 $x^4 - 9 = 0$, $(x^2-3)(x^2+3) = 0$
 $\therefore x = \pm \sqrt{3}$ 또는 $x = \pm \sqrt{3}i$
 이때 음의 실수인 것은 $-\sqrt{3}$ 이므로 $a = -\sqrt{3}$
 -125 의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3 = -125$ 이므로 $y^3 + 125 = 0$, $(y+5)(y^2-5y+25) = 0$
 $\therefore y = -5$ 또는 $y = \frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$
 이때 실수인 것은 -5이므로 $b = -5$
 $\therefore ab = -\sqrt{3} \times (-5) = 5\sqrt{3}$

유제 02 답 (1) 3 (2) $\sqrt[4]{x}$ (3) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ (4) $2\sqrt[4]{x}$

$$(1) \sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[12]{81} \times \sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[6]{3^4} \\ = \sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12]{3^4 \times 3^8} = \sqrt[12]{3^{12}} = 3$$

$$(2) \sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x^3} \div \sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^4} \times \sqrt[12]{x^9} \div \sqrt[12]{x^{10}} \\ = \sqrt[12]{\frac{x^4 \times x^9}{x^{10}}} = \sqrt[12]{x^3} = \sqrt[4]{x}$$

$$(3) \sqrt{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{16}}} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{16}}{16}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{16}} + \frac{\sqrt[12]{16}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{2^4}} + \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[4]{2^4}} \\ = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{2 \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$(4) \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}} \times \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}} \\ = \frac{\sqrt[12]{x} \times \sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x} \times \sqrt[6]{x}} = \frac{\sqrt[24]{x^2} \times \sqrt[24]{x^6}}{\sqrt[24]{x^3} \times \sqrt[24]{x^4}} \\ = \sqrt[24]{\frac{x^8}{x^7}} = \sqrt[24]{x}$$

문제 02-1 답 4

$$(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1) + (\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ = (\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ = \{(\sqrt[3]{2})^3+1\} + (3-2) = 2+1+1=4$$

2 개념 CHECK

p.13

1. 답 (1) 2 (2) 82

2. 답 (1) a^2 (2) $\sqrt[4]{a}$

3. 답 (1) a^2 (2) 8

2 유제 & 문제

p.14~20

유제 03 답 (1) 2 (2) $\sqrt{5}$ (3) $\frac{5}{32}$ (4) 3

$$(1) \sqrt[4]{\frac{8^{-6}+4^{-4}}{8^{-4}+4^{-11}}} = \left\{ \frac{(2^3)^{-6} + (2^2)^{-4}}{(2^3)^{-4} + (2^2)^{-11}} \right\}^{\frac{1}{4}} \\ = \left(\frac{2^{-18} + 2^{-8}}{2^{-12} + 2^{-22}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left\{ \frac{2^{-8}(2^{-10}+1)}{2^{-12}(1+2^{-10})} \right\}^{\frac{1}{4}} \\ = \{2^{-8-(-12)}\}^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 10^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{2^{-2}} \times 5^{-\frac{1}{6}} &= (2 \times 5)^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\
 &= 2^0 \times 5^{\frac{3}{6}} = 1 \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^4 \right\}^{0.75} \times \left\{ \left(\frac{16}{25} \right)^{\frac{5}{4}} \right\}^{-\frac{2}{5}} \\
 = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right\}^{0.75} \times \left(\frac{4}{5} \right)^{2 \times \frac{5}{4} \times \left(-\frac{2}{5} \right)} \\
 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \left(\frac{4}{5} \right)^{-1} = \frac{1}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sqrt[4]{3\sqrt{81}} \times \sqrt{3\sqrt{81}} &= \{ (3^4)^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{4}} \times \{ (3^4)^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} \\
 &= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3
 \end{aligned}$$

문제 03-1 답 (1) $\frac{13}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{a} \sqrt[3]{a^2 \times \sqrt[4]{a^6}} &= \{ a \times (a^2 \times a^{\frac{6}{4}})^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} = \{ a \times (a^{2+\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} \\
 &= (a \times a^{\frac{7}{2} \times \frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{1+\frac{7}{6}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{6} \times \frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{13}{12}}
 \end{aligned}$$

이때 $\sqrt[4]{a^k} = a^{\frac{k}{4}}$ 이므로

$$\frac{13}{12} = \frac{k}{4} \quad \therefore k = \frac{13}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sqrt[6]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a^4}{\sqrt[4]{a}}} &= \left(\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{8}}} \times \frac{a^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{1}{12}}} \\
 &= a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{5}{12}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}}
 \end{aligned}$$

즉, $a^k = a^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$$k = \frac{1}{6}$$

유제 04 답 (1) -80 (2) -3

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2) \\
 = \{1-(3^{\frac{1}{4}})^2\}(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2) \\
 = (1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2) \\
 = \{1-(3^{\frac{1}{2}})^2\}(1+3)(1+3^2) \\
 = (1-3)(1+3)(1+3^2) \\
 = (1-3^2)(1+3^2) \\
 = 1-3^4 = -80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}})(4^{\frac{1}{3}}+10^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}}) \\
 = (2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}})\{ (2^{\frac{1}{3}})^2+2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + (5^{\frac{1}{3}})^2 \} \\
 = (2^{\frac{1}{3}})^3 - (5^{\frac{1}{3}})^3 \\
 = 2-5 = -3
 \end{aligned}$$

문제 04-1 답 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 (a-a^{-1}) \div (a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) \\
 = \{ (a^{\frac{1}{2}})^2 - (a^{-\frac{1}{2}})^2 \} \div (a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) \\
 = (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) \div (a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) \\
 = a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

문제 04-2 답 (1) $2a^2+6$ (2) $\frac{8}{1-a^2}$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a^{\frac{2}{3}} = X, \quad a^{-\frac{1}{3}} = Y \text{라 하면} \\
 (a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 + (a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3 \\
 = (X+Y)^3 + (X-Y)^3 \\
 = (X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3) \\
 \quad + (X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3) \\
 = 2X^3 + 6XY^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(a^{\frac{2}{3}})^3 + 6a^{\frac{2}{3}}(a^{-\frac{1}{3}})^2 \\
 &= 2a^2 + 6a^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 2a^2 + 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 = \frac{1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}}}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 = \frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 = \frac{2(1+a^{\frac{1}{2}})+2(1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})} + \frac{4}{1+a} \\
 = \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1+a} = \frac{4(1+a)+4(1-a)}{(1-a)(1+a)} \\
 = \frac{8}{1-a^2}
 \end{aligned}$$

유제 05 답 (1) 6 (2) 34 (3) 14

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면} \\
 (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2, \quad (x^{\frac{1}{2}})^2 - 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + (x^{-\frac{1}{2}})^2 = 4 \\
 x - 2 \times 1 + x^{-1} = 4 \quad \therefore x + x^{-1} = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (1) \text{에서 } x + x^{-1} = 6 \text{의 양변을 제곱하면} \\
 (x + x^{-1})^2 = 6^2, \quad x^2 + 2x \times x^{-1} + x^{-2} = 36 \\
 x^2 + 2 \times 1 + x^{-2} = 36 \quad \therefore x^2 + x^{-2} = 34
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{의 양변을 세제곱하면} \\
 (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^3 = 2^3 \\
 (x^{\frac{1}{2}})^3 - 3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) - (x^{-\frac{1}{2}})^3 = 8 \\
 x^{\frac{3}{2}} - 3 \times 1 \times 2 - x^{-\frac{3}{2}} = 8 \\
 \therefore x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = 14
 \end{aligned}$$

문제 05-1 답 110

$$\begin{aligned}
 2^x + 2^{-x} &= 5 \text{의 양변을 세제곱하면} \\
 (2^x + 2^{-x})^3 &= 5^3 \\
 (2^x)^3 + 3 \times 2^x 2^{-x} (2^x + 2^{-x}) + (2^{-x})^3 &= 125 \\
 8^x + 3 \times 1 \times 5 + 8^{-x} &= 125 \\
 \therefore 8^x + 8^{-x} &= 110
 \end{aligned}$$

문제 05-2 답 5

$$\begin{aligned}
 (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 &= x + 2 + x^{-1} = 23 + 2 = 25 \text{에서} \\
 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} &= \pm 5 \\
 \text{그런데 } x > 0 \text{이면 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로} \\
 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} &= 5
 \end{aligned}$$

유제 06 답 (1) 3 (2) $\frac{7}{9}$

(1) 주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
 \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} &= \frac{(a^x + a^{-x})a^x}{(a^x - a^{-x})a^x} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} \\
 &= \frac{2+1}{2-1} = 3
 \end{aligned}$$

(2) 주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
 \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{3x} + a^{-3x}} &= \frac{(a^{3x} - a^{-3x})a^x}{(a^{3x} + a^{-3x})a^x} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{4x} + a^{-2x}} \\
 &= \frac{(a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1}}{(a^{2x})^2 + (a^{2x})^{-1}} \\
 &= \frac{2^2 - 2^{-1}}{2^2 + 2^{-1}} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

문제 06-1 답 $\frac{14}{3}$

$$\begin{aligned}
 3^{\frac{1}{x}} &= 25 \text{의 양변을 } x \text{제곱하면 } 3 = 25^x \quad \therefore 5^{2x} = 3 \\
 \text{주어진 식의 분모, 분자에 } 5^x \text{을 곱하면} \\
 \frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x - 5^{-x}} &= \frac{(5^{3x} + 5^{-3x})5^x}{(5^x - 5^{-x})5^x} = \frac{5^{4x} + 5^{-2x}}{5^{2x} - 1} \\
 &= \frac{(5^{2x})^2 + (5^{2x})^{-1}}{5^{2x} - 1} = \frac{9 + \frac{1}{3}}{3 - 1} = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

문제 06-2 답 3

$$\begin{aligned}
 \frac{a^m + a^{-m}}{a^m - a^{-m}} &= 3 \text{에서 좌변의 분모, 분자에 } a^m \text{을 곱하면} \\
 \frac{(a^m + a^{-m})a^m}{(a^m - a^{-m})a^m} &= 3, \frac{a^{2m} + 1}{a^{2m} - 1} = 3 \\
 a^{2m} + 1 &= 3(a^{2m} - 1), 2a^{2m} = 4 \quad \therefore a^{2m} = 2 \\
 \therefore 2(a^m + a^{-m})(a^m - a^{-m}) &= 2(a^{2m} - a^{-2m}) \\
 &= 2\{a^{2m} - (a^{2m})^{-1}\} \\
 &= 2\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3
 \end{aligned}$$

유제 07 답 (1) -1 (2) 0

(1) $73^x = 9$ 에서

$$73 = 9^{\frac{1}{x}}, 73 = (3^2)^{\frac{1}{x}} \quad \therefore 3^{\frac{2}{x}} = 73 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$219^y = 27$ 에서

$$219 = 27^{\frac{1}{y}}, 219 = (3^3)^{\frac{1}{y}} \quad \therefore 3^{\frac{3}{y}} = 219 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$ 을 하면

$$3^{\frac{2}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}} = 73 \div 219 \quad \therefore 3^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = 3^{-1}$$

$$\therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1$$

(2) $2^x = 5^y = \left(\frac{1}{10}\right)^z = k (k > 0)$ 라 하면 $xyz \neq 0$ 이므로

$$k \neq 1$$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$5^y = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^z = k \text{에서 } \frac{1}{10} = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \times \textcircled{C}$ 을 하면

$$2 \times 5 \times \frac{1}{10} = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}} \quad \therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 1$$

$$\text{그런데 } k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

문제 07-1 답 32

$$2^a = 3^3 \text{에서 } 3 = 2^{\frac{a}{3}}$$

$$3^b = 5^4 \text{에서 } 5 = 3^{\frac{b}{4}}$$

$$\therefore 5^c = (3^{\frac{b}{4}})^c = 3^{\frac{bc}{4}} = (2^{\frac{a}{3}})^{\frac{bc}{4}} = 2^{\frac{abc}{12}} = 2^5 = 32$$

유제 08 답 $\sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$

$\sqrt[12]{6} = 6^{\frac{1}{12}}, \sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{8}}, \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$ 에서 지수의 분모의 최소공배수가 24이므로 지수를 $\frac{1}{24}$ 로 같게 하면

$$\sqrt[12]{6} = 6^{\frac{1}{12}} = 6^{\frac{2}{24}} = (6^2)^{\frac{1}{24}} = 36^{\frac{1}{24}}$$

$$\sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{3}{24}} = (3^3)^{\frac{1}{24}} = 27^{\frac{1}{24}}$$

$$\sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{24}} = (2^4)^{\frac{1}{24}} = 16^{\frac{1}{24}}$$

$$\text{이때 } 16 < 27 < 36 \text{이므로 } 16^{\frac{1}{24}} < 27^{\frac{1}{24}} < 36^{\frac{1}{24}}$$

$$\therefore \sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$$

다른 풀이

$\sqrt[12]{6}, \sqrt[8]{3}, \sqrt[6]{2}$ 에서 12, 8, 6의 최소공배수가 24이므로

$$\sqrt[12]{6} = \sqrt[24]{6^2} = \sqrt[24]{36}$$

$$\sqrt[8]{3} = \sqrt[24]{3^3} = \sqrt[24]{27}$$

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[24]{2^4} = \sqrt[24]{16}$$

$$\text{이때 } 16 < 27 < 36 \text{이므로 } \sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$$

문제 08-1 [답 6]

$$\sqrt[3]{\sqrt{6}} = (6^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{6}}, \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\sqrt[3]{12}} = (12^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{1}{12}}$$

에서 지수를 $\frac{1}{12}$ 로 같게 하면

$$\sqrt[3]{\sqrt{6}} = 6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{2}{12}} = (6^2)^{\frac{1}{12}} = 36^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = (2^4)^{\frac{1}{12}} = 16^{\frac{1}{12}}$$

이때 $12 < 16 < 36$ 이므로 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{\sqrt{6}}$

따라서 $a = \sqrt[3]{\sqrt{6}} = 6^{\frac{1}{6}}$ 이므로 $a^6 = (6^{\frac{1}{6}})^6 = 6$

문제 08-2 [답 $A < B < C$]

$$A - B = (4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3}) - (3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} - 3^{\frac{1}{6}}$$

$$= (2^2)^{\frac{1}{6}} - (3)^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{6}} - 27^{\frac{1}{6}} < 0$$

$$\therefore A < B \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$B - C = (3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}) - (2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} < 0$$

$$\therefore B < C \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 의해 $A < B < C$ 이다.

문제 09-1 [답 9배]

초기 혈중 농도 B_0 과 t 시간 후의 혈중 농도 B 사이의 관계식은

$$B = B_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$$

이때 초기 혈중 농도가 $3a$ 이면 8시간 동안 효력이 있고, 8시간 후의 혈중 농도는 a 이므로

$$a = 3a \left(\frac{1}{2}\right)^{8k} \quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{8k} = \frac{1}{3}$$

이 약이 16시간 동안 효력이 있게 하기 위한 초기 혈중 농도를 a 의 x 배라 하면

$$a = a \times x \left(\frac{1}{2}\right)^{16k} = ax \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{8k} \right\}^2 = ax \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{ax}{9}$$

$$\therefore x = 9$$

따라서 약이 16시간 동안 효력이 있게 하려면 초기 혈중 농도는 a 의 9배가 되어야 한다.

문제 09-2 [답 4배]

pH=6.7인 용액의 수소 이온 농도를 x 라 하면

$$x = 10^{-6.7}$$

pH=7.3인 용액의 수소 이온 농도를 y 라 하면

$$y = 10^{-7.3}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{10^{-6.7}}{10^{-7.3}} = 10^{0.6} = (10^{0.3})^2 = 2^2 = 4$$

따라서 pH=6.7인 용액의 수소 이온 농도는 pH=7.3인 용액의 수소 이온 농도의 4배이다.

기본 연습문제

p.21~22

- | | | | | |
|-----|-------|---------------|-----|-----------------|
| 1 ③ | 2 12 | 3 ② | 4 ③ | 5 $\frac{3}{2}$ |
| 6 ④ | 7 256 | 8 $2\sqrt{5}$ | 9 ⑤ | 10 ③ |

1 ① $\sqrt{625}=25$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=25$ 이므로

$$x^4 - 25 = 0, (x^2 - 5)(x^2 + 5) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{5}i$$

② -27 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -27$ 이므로

$$x^3 + 27 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

③ 36 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 36$ 이므로

$$x^4 - 36 = 0, (x^2 - 6)(x^2 + 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{6} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{6}i$$

따라서 36 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{6}$ 이다.

④ 16 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$ 이므로

$$x^4 - 16 = 0, (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

따라서 16 의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 2 의 2개이다.

⑤ 제곱근 25 는 $\sqrt{25}=5$ 이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{a^2}} = \sqrt[12]{\frac{a}{a^2}} = \sqrt[12]{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \sqrt[12]{\frac{1}{a}} \text{ 이므로 } n = 12$$

3 직사각형의 대각선의 길이를 l 이라 하면

$$l^2 = (\sqrt[4]{24})^2 + (\sqrt[4]{25})^2 = \sqrt[4]{24^2} + \sqrt[4]{25^2}$$

$$= \sqrt{24} + \sqrt{25} = 5 + 2\sqrt{6}$$

4 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 은 $a > 0$ 일 때 성립하므로

$$\sqrt{\sqrt{(-3)^4} \times (-3)^8} = \sqrt{\sqrt{(-3)^{12}} \times (-3)^8} = \sqrt[4]{(-3)^{12}} = \sqrt[4]{(-3)^{12}}$$

$$= \sqrt[4]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{4}} = 3^3 = 27$$

따라서 계산 과정 중에서 처음으로 등호가 잘못 사용된 부분은 ③이다.

$$5 \quad \sqrt[5]{a^3 \times \sqrt{a^k}} = (a^3 \times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}(3 + \frac{k}{2})}$$

$$\text{즉, } a^{\frac{1}{5}(3 + \frac{k}{2})} = a^{\frac{3}{4}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{5} \left(3 + \frac{k}{2} \right) = \frac{3}{4}, \quad 3 + \frac{k}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

$$6 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-n} = (2^{-1})^{2m-n} = (2^{-1})^{2m} \times (2^{-1})^{-n} = (2^m)^{-2} \times 2^n \\ = a^{-2} \times b = \frac{b}{a^2}$$

$$7 \quad 2^{3+\sqrt{3}}=a, \quad 2^{3-\sqrt{3}}=b \text{라 하면} \\ (2^{3+\sqrt{3}}+2^{3-\sqrt{3}})^2 - (2^{3+\sqrt{3}}-2^{3-\sqrt{3}})^2 \\ = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \\ = 2^2 \times 2^{3+\sqrt{3}} \times 2^{3-\sqrt{3}} = 2^{2+(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})} = 2^8 = 256$$

$$8 \quad x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \\ = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) \\ = (\sqrt{5})^3 - 3 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$9 \quad \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{2}{3} \text{에서 좌변의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면} \\ \frac{(a^x - a^{-x})a^x}{(a^x + a^{-x})a^x} = \frac{2}{3}, \quad \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{2}{3} \\ 3(a^{2x} - 1) = 2(a^{2x} + 1) \quad \therefore a^{2x} = 5 \\ \therefore a^{4x} = (a^{2x})^2 = 5^2 = 25$$

$$10 \quad A = \sqrt{2\sqrt[3]{3}} = (2 \times 3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{6}} = 24^{\frac{1}{6}} \\ B = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = (2 \times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{6}} = 12^{\frac{1}{6}} \\ C = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} = (3 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} \\ = (3^2 \times 2)^{\frac{1}{6}} = 18^{\frac{1}{6}} \\ \therefore B < C < A$$

실전 연습문제

p.23

1 $\neg, \sqsubset$ 2 a 3 3 4 25 5 ⑤

- 1 $\neg, \sqrt[5]{-3}$ 은 실수이므로 $(5, -3) \in S$
 $\sqsubset, b \neq 0$ 일 때, $\sqrt[4]{b}$ 와 $\sqrt[4]{-b}$ 가 모두 실수하려면 a 는 홀수 이어야 하므로
 $a=3$ 또는 $a=5$
 $\sqsubset, \sqrt[4]{b}$ 에서 a 가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각하면
 (i) a 가 짝수일 때, 즉 $a=4$ 일 때
 $b \geq 0$ 이어야 $\sqrt[4]{b}$ 가 실수이므로 S 의 원소는
 $(4, 0), (4, 1), (4, 3) \Rightarrow 3$ 개

- (ii) a 가 홀수일 때, 즉 $a=3$ 또는 $a=5$ 일 때
 모든 b 에 대하여 $\sqrt[4]{b}$ 가 실수이므로 S 의 원소는
 $(3, -3), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 3),$
 $(5, -3), (5, -1), (5, 0), (5, 1), (5, 3)$

$\Rightarrow 10$ 개

- (i), (ii)에 의해 $n(S)=13$

따라서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

$$2 \quad a^{\frac{1}{3}} = m (m > 0) \text{이라 하면 } a^{-\frac{1}{3}} = m^{-1}$$

$$x = \frac{m - m^{-1}}{2} \text{이므로 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 = \frac{m^2 - 2 + m^{-2}}{4} \text{이므로}$$

$$x^2 + 1 = \frac{m^2 - 2 + m^{-2}}{4} + 1 = \frac{m^2 + 2 + m^{-2}}{4}$$

$$= \left(\frac{m + m^{-1}}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{m + m^{-1}}{2}$$

$$\therefore (x + \sqrt{x^2 + 1})^3 = \left(\frac{m - m^{-1}}{2} + \frac{m + m^{-1}}{2}\right)^3$$

$$= m^3 = (a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

$$3 \quad a^{3x} - a^{-3x} = 14 \text{에서 } (a^x - a^{-x})^3 + 3(a^x - a^{-x}) = 14$$

이때 $a^x - a^{-x} = t$ (t는 실수)라 하면

$$t^3 + 3t = 14, \quad (t-2)(t^2 + 2t + 7) = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because t \text{는 실수})$$

즉, $a^x - a^{-x} = 2$ 이므로

$$\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{(a^x - a^{-x})^2 + 2}{a^x - a^{-x}} = \frac{2^2 + 2}{2} = 3$$

$$4 \quad a^x = b^y = 5^z = k (k > 0) \text{라 하면 } xyz \neq 0 \text{이므로 } k \neq 1$$

$$a^x = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{x}}$$

$$b^y = k \text{에서 } b = k^{\frac{1}{y}}$$

$$5^z = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \text{이므로}$$

$$ab = k^{\frac{1}{x}} k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}} = (k^{\frac{1}{z}})^2 = 5^2 = 25$$

$$5 \quad A \text{는 하루에 } a \text{배만큼 늘어나고, 2일 만에 2배가 되므로}$$

$$a \times a = 2, \quad a^2 = 2 \quad \therefore a = 2^{\frac{1}{2}} (\because a > 0)$$

B 는 하루에 b 배만큼 늘어나고, 3일 만에 3배가 되므로

$$b \times b \times b = 3, \quad b^3 = 3 \quad \therefore b = 3^{\frac{1}{3}} (\because b > 0)$$

C 는 하루에 c 배만큼 늘어나고, 4일 만에 4배가 되므로

$$c \times c \times c \times c = 4, \quad c^4 = 4 \quad \therefore c = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} (\because c > 0)$$

$$\text{이때 } a = c = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}, \quad b = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}} \text{이므로}$$

$$a = c < b$$

02 로그

1 개념 CHECK

p.25

1. 답 (1) $5=\log_3 243$ (2) $0=\log_5 1$

(3) $-\frac{2}{3}=\log_8 \frac{1}{4}$ (4) $3=\log_{\frac{1}{5}} 0.008$

2. 답 (1) $-3 < x < -2$ 또는 $x > -2$ (2) $x > 2$

3. 답 (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) $-\frac{5}{3}$

1 유제 & 문제

p.26~29

유제 01 답 (1) 4 (2) 3 (3) $\frac{1}{27}$ (4) 8

(1) $\log_{2\sqrt{3}} 144 = a$ 에서

$(2\sqrt{3})^a = 144, (\sqrt{12})^a = 12^2$

$\therefore 12^{\frac{a}{2}} = 12^2$

$\frac{a}{2} = 2$ 이므로 $a = 4$

(2) $\log_9 a = 0.5$ 에서

$a = 9^{0.5} = (3^2)^{0.5} = 3^1 = 3$

(3) $\log_a 81 = -\frac{4}{3}$ 에서

$a^{-\frac{4}{3}} = 81 = 3^4$

$\therefore a = (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{64} a) = 1$ 에서

$\log_{64} a = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$\therefore a = 64^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$

문제 01-1 답 32

$\log_2 (\log_a 2) = -3$ 에서 $\log_a 2 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\therefore a^{\frac{1}{8}} = 2 \quad \therefore a = 2^8$

$\log_2 \{\log_3 (\log_2 b)\} = 0$ 에서 $\log_3 (\log_2 b) = 2^0 = 1$

$\therefore \log_2 b = 3^1 = 3 \quad \therefore b = 2^3$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{2^8}{2^3} = 2^5 = 32$

문제 01-2 답 81

두 직선이 만나지 않으려면 평행해야 하므로

$\frac{1}{2} = \frac{2}{\log_3 a} \neq \frac{3}{5}$

$\log_3 a = 4 \quad \therefore a = 3^4 = 81$

유제 02 답 $-1 < x < 0$ 또는 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$

(i) $(\text{밑}) > 0, (\text{밑}) \neq 1$ 이어야 하므로

$|x-1| > 0$ 에서 $x \neq 1$ ㉠

$|x-1| \neq 1$ 에서 $x-1 \neq -1, x-1 \neq 1$

$\therefore x \neq 0, x \neq 2$ ㉡

(ii) $(\text{진수}) > 0$ 이어야 하므로

$-x^2 + x + 2 > 0, x^2 - x - 2 < 0$

$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2$ ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$-1 < x < 0$ 또는 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$

문제 02-1 답 4

(i) $(\text{밑}) > 0, (\text{밑}) \neq 1$ 이어야 하므로

$a > 0, a \neq 1$ ㉠

(ii) $(\text{진수}) > 0$ 이어야 하므로

$a^2 - a - 6 > 0, (a+2)(a-3) > 0$

$\therefore a < -2$ 또는 $a > 3$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$a > 3$

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.

문제 02-2 답 $0 < p < 1$

(i) $(\text{밑}) > 0, (\text{밑}) \neq 1$ 이어야 하므로

$1-p > 0, 1-p \neq 1$

$\therefore p < 1, p \neq 0$ ㉠

(ii) $(\text{진수}) > 0$ 이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$x^2 - 2px + 3p > 0$

이차방정식 $x^2 - 2px + 3p = 0$ 의 판별식 D 에서

$\frac{D}{4} = p^2 - 3p < 0, p(p-3) < 0$

$\therefore 0 < p < 3$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 p 의 값의 범위는

$0 < p < 1$

유제 03 답 (1) 0 (2) -7

(1) $\log_3 \sqrt{16} - \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \log_3 \sqrt[3]{80}$

$= \log_3 4 - \log_3 (5^{-1})^{\frac{1}{2}} - \log_3 (80^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$= \log_3 4 + \log_3 \sqrt{5} - \log_3 \sqrt{80}$

$= \log_3 \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \log_3 1 = 0$

(2) $3 \log_5 3 - 2 \log_5 75 - \log_5 375$

$= \log_5 3^3 - \log_5 75^2 - \log_5 375$

$= \log_5 \frac{3^3}{75^2 \times 375} = \log_5 \frac{3^3}{(3 \times 5^2)^2 \times 3 \times 5^3}$

$= \log_5 \frac{1}{5^7} = \log_5 5^{-7} = -7 \log_5 5 = -7$

문제 03-1 답 -2

$$\begin{aligned}
 & \log_{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
 & \quad + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{100}\right) \\
 &= \log_{10} \frac{1}{2} + \log_{10} \frac{2}{3} + \log_{10} \frac{3}{4} + \log_{10} \frac{4}{5} + \cdots + \log_{10} \frac{99}{100} \\
 &= \log_{10} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{99}{100}\right) \\
 &= \log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} \\
 &= -2 \log_{10} 10 = -2
 \end{aligned}$$

문제 03-2 답 9

$$\begin{aligned}
 & \log_3 x + \log_3 2y + \log_3 3z = 1 \text{에서} \\
 & \log_3 (x \times 2y \times 3z) = 1 \\
 & \therefore \log_3 6xyz = 1 \\
 & \text{로그의 정의에 의해} \\
 & 6xyz = 3 \quad \therefore xyz = \frac{1}{2} \\
 & \therefore \{(81^x)^y\}^z = (3^4)^{xyz} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9
 \end{aligned}$$

유제 04 답 (1) $a-b-1$ (2) $\frac{a+2b}{5}$

$$\begin{aligned}
 (1) \log_3 \frac{2}{15} &= \log_3 2 - \log_3 15 \\
 &= \log_3 2 - \log_3 (3 \times 5) \\
 &= \log_3 2 - (\log_3 3 + \log_3 5) \\
 &= \log_3 2 - 1 - \log_3 5 \\
 &= a - b - 1 \\
 (2) \log_3 \sqrt[5]{50} &= \log_3 50^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log_3 (2 \times 5^2) \\
 &= \frac{1}{5} (\log_3 2 + 2 \log_3 5) \\
 &= \frac{a+2b}{5}
 \end{aligned}$$

문제 04-1 답 $\frac{5a-b}{3}$

$$\begin{aligned}
 & \log_{10} 15 = \log_{10} (5 \times 3) = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 \\
 & \therefore a = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 \quad \cdots \cdots \text{㉠} \\
 & \log_{10} \frac{25}{3} = \log_{10} 5^2 - \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 \\
 & \therefore b = 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 \quad \cdots \cdots \text{㉡} \\
 & \text{㉠} + \text{㉡} \text{을 하면 } a + b = 3 \log_{10} 5 \\
 & \therefore \log_{10} 5 = \frac{a+b}{3} \quad \cdots \cdots \text{㉢} \\
 & \text{㉢} \text{을 ㉠에 대입하면 } a = \frac{a+b}{3} + \log_{10} 3 \\
 & \therefore \log_{10} 3 = \frac{2a-b}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_{10} 45 &= \log_{10} (5 \times 3^2) \\
 &= \log_{10} 5 + 2 \log_{10} 3 \\
 &= \frac{a+b}{3} + 2 \times \frac{2a-b}{3} \\
 &= \frac{5a-b}{3}
 \end{aligned}$$

문제 04-2 답 $\frac{2a+3b}{6}$

$$\begin{aligned}
 5^a &= 8 \text{에서 } a = \log_5 8 = \log_5 2^3 = 3 \log_5 2 \\
 \therefore \log_5 2 &= \frac{a}{3} \\
 5^b &= 9 \text{에서 } b = \log_5 9 = \log_5 3^2 = 2 \log_5 3 \\
 \therefore \log_5 3 &= \frac{b}{2} \\
 \therefore \log_5 6 &= \log_5 (2 \times 3) = \log_5 2 + \log_5 3 \\
 &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{2a+3b}{6}
 \end{aligned}$$

2 개념 CHECK

p.30

1. 답 (1) 2 (2) 2 (3) 12 (4) 0

$$\begin{aligned}
 (1) \frac{\log_7 121}{\log_7 11} &= \log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2 \log_{11} 11 = 2 \\
 (2) \log_3 4 \times \log_2 3 &= \log_3 2^2 \times \frac{1}{\log_3 2} \\
 &= 2 \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 2 \\
 (3) 3^{\log_3 10} + 7^{\log_3 2} &= 10^{\log_3 3} + 2^{\log_3 7} = 10 + 2 = 12 \\
 (4) \log_3 5 + \log_3 2 - \frac{2}{\log_{10} 9} \\
 &= \log_3 5 + \log_3 2 - 2 \log_9 10 \\
 &= \log_3 (5 \times 2) - 2 \times \frac{1}{2} \log_3 10 \\
 &= \log_3 10 - \log_3 10 = 0
 \end{aligned}$$

2 유제 & 문제

p.31~34

유제 05 답 (1) -2 (2) $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
 (1) \log_3 6 \times \log_3 9 \times \log_{\frac{1}{3}} 2 \times \log_6 27 \\
 &= \log_3 6 \times \frac{\log_3 9}{\log_3 8} \times \frac{\log_3 2}{\log_3 \frac{1}{3}} \times \frac{\log_3 27}{\log_3 6} \\
 &= \log_3 6 \times \frac{2 \log_3 3}{3 \log_3 2} \times \frac{\log_3 2}{-\log_3 3} \times \frac{3 \log_3 3}{\log_3 6} \\
 &= \frac{2}{3} \times (-1) \times 3 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \log_6 \sqrt{27} + \frac{1}{\log_{\sqrt{8}} 6} &= \log_6 \sqrt{27} + \log_6 \sqrt{8} \\
 &= \log_6 (\sqrt{27} \times \sqrt{8}) \\
 &= \log_6 (\sqrt{3^3 \times 2^3}) \\
 &= \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

문제 05-1 답 4

$$\begin{aligned}
 \frac{\log_{10} 4}{a} &= \log_{10} 6 \text{에서 } a = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 6} = \log_6 4 \\
 \frac{\log_{10} 12}{b} &= \log_{10} 6 \text{에서 } b = \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 6} = \log_6 12 \\
 \frac{\log_{10} 27}{c} &= \log_{10} 6 \text{에서 } c = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 6} = \log_6 27 \\
 \therefore a + b + c &= \log_6 4 + \log_6 12 + \log_6 27 \\
 &= \log_6 (4 \times 12 \times 27) \\
 &= \log_6 6^4 = 4
 \end{aligned}$$

문제 05-2 답 1

$$\begin{aligned}
 &\log_{10} (\log_2 3) + \log_{10} (\log_3 4) + \log_{10} (\log_4 5) \\
 &\quad + \dots + \log_{10} (\log_{1023} 1024) \\
 &= \log_{10} (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \dots \times \log_{1023} 1024) \\
 &= \log_{10} \left(\log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \dots \times \frac{\log_2 1024}{\log_2 1023} \right) \\
 &= \log_{10} (\log_2 1024) = \log_{10} (\log_2 2^{10}) \\
 &= \log_{10} 10 = 1
 \end{aligned}$$

유제 06 답 (1) $\frac{125}{16}$ (2) 9

$$\begin{aligned}
 (1) \log_2 3 + \log_4 \sqrt{3} &= \log_2 3 + \log_{2^2} 3^{\frac{1}{2}} \\
 &= \log_2 3 + \frac{1}{4} \log_2 3 \\
 &= \frac{5}{4} \log_2 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\
 \log_3 5 + \log_{\sqrt{3}} 25 &= \log_3 5 + \log_{3^{\frac{1}{2}}} 5^2 \\
 &= \log_3 5 + 4 \log_3 5 \\
 &= 5 \log_3 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \\
 \log_5 2 + \log_{25} \sqrt{2} &= \log_5 2 + \log_{5^2} 2^{\frac{1}{2}} \\
 &= \log_5 2 + \frac{1}{4} \log_5 2 \\
 &= \frac{5}{4} \log_5 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{을 주어진 식에 대입하면} \\
 &(\log_2 3 + \log_4 \sqrt{3})(\log_3 5 + \log_{\sqrt{3}} 25)(\log_5 2 + \log_{25} \sqrt{2}) \\
 &= \frac{5}{4} \log_2 3 \times 5 \log_3 5 \times \frac{5}{4} \log_5 2 \\
 &= \frac{125}{16} \times \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 2 \\
 &= \frac{125}{16} \times \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{1}{\log_2 5} \\
 &= \frac{125}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) 5^{\log_5 4 \times \log_5 3} &= (5^{\log_5 4})^{\log_5 3} = (4^{\log_5 5})^{\log_5 3} \\
 &= 4^{\log_5 3} = 3^{\log_5 4} \\
 &= 3^{2 \log_5 2} = 3^2 = 9
 \end{aligned}$$

문제 06-1 답 $\sqrt{30}$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{3}{\log_3 25} + \log_{25} 10 - \frac{\log_{\sqrt{2}} 3}{\log_{\sqrt{2}} 5} \\
 &= \frac{3}{\log_3 5^2} + \log_{5^2} 10 - \log_5 3 \\
 &= \frac{3}{2} \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 10 - \log_5 3 \\
 &= \frac{1}{2} \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 10 = \frac{1}{2} (\log_5 3 + \log_5 10) \\
 &= \frac{1}{2} \log_5 30 = \log_5 \sqrt{30} \\
 \therefore 5^a &= 5^{\log_5 \sqrt{30}} = \sqrt{30}^{\log_5 5} = \sqrt{30}
 \end{aligned}$$

문제 06-2 답 $C < A < B$

$$\begin{aligned}
 A &= \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[6]{3} = \log_{2^{-1}} 3^{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6} \log_2 3 \\
 B &= \log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{3} = \log_{2^{-2}} 3^{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{8} \log_2 3 \\
 C &= \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{3} = \log_{2^{-1}} 3^{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5} \log_2 3 \\
 &\text{이때 } \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \text{에서 } 1 < \log_2 3 < 2 \text{이고} \\
 &-\frac{1}{5} < -\frac{1}{6} < -\frac{1}{8} \text{이므로} \\
 &-\frac{1}{5} \log_2 3 < -\frac{1}{6} \log_2 3 < -\frac{1}{8} \log_2 3 \\
 \therefore C &< A < B
 \end{aligned}$$

유제 07 답 $\log_2 5$

$$\begin{aligned}
 2^x &= 10 \text{에서 } x = \log_2 10 = \frac{1}{\log_{10} 2} \\
 5^y &= 10 \text{에서 } y = \log_5 10 = \frac{1}{\log_{10} 5} \\
 \therefore \frac{x}{y} &= \frac{\frac{1}{\log_{10} 2}}{\frac{1}{\log_{10} 5}} = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \log_2 5
 \end{aligned}$$

문제 07-1 답 -1

$$\begin{aligned}
 8^x &= 27 \text{에서 } x = \log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \log_2 3 \\
 \therefore \frac{3}{x} &= \frac{3}{\log_2 3} = 3 \log_3 2 = \log_3 8 \\
 24^y &= 81 \text{에서 } y = \log_{24} 81 = \log_{24} 3^4 = 4 \log_{24} 3 \\
 \therefore \frac{4}{y} &= \frac{4}{4 \log_{24} 3} = \log_3 24 \\
 \therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} &= \log_3 8 - \log_3 24 \\
 &= \log_3 \frac{8}{24} = \log_3 \frac{1}{3} \\
 &= \log_3 3^{-1} = -1
 \end{aligned}$$

문제 07-2 답 0

$$\begin{aligned}
 3^x &= 2^y = 6^z = k \quad (k > 0, k \neq 1) \text{라 하면} \\
 3^x &= k \text{에서 } x = \log_3 k \quad \therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_3 k} = \log_k 3 \\
 2^y &= k \text{에서 } y = \log_2 k \quad \therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_2 k} = \log_k 2 \\
 6^z &= k \text{에서 } z = \log_6 k \quad \therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{\log_6 k} = \log_k 6 \\
 \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \log_k 3 + \log_k 2 - \log_k 6 \\
 &= \log_k \frac{3 \times 2}{6} = \log_k 1 = 0
 \end{aligned}$$

유제 08 답 21

이차방정식 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 의 두 근이 $\log_{10} \alpha, \log_{10} \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned}
 \log_{10} \alpha + \log_{10} \beta &= -5, \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta = 3 \\
 \therefore \log_a \alpha \beta^3 + \log_\beta \alpha^3 \beta &= \log_a \alpha + 3 \log_a \beta + 3 \log_\beta \alpha + \log_\beta \beta \\
 &= 3(\log_a \beta + \log_\beta \alpha) + 2 \\
 &= 3 \left(\frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha} + \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta} \right) + 2 \\
 &= 3 \times \frac{(\log_{10} \alpha)^2 + (\log_{10} \beta)^2}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} + 2 \\
 &= 3 \times \frac{(\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta)^2 - 2 \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} + 2 \\
 &= 3 \times \frac{(-5)^2 - 2 \times 3}{3} + 2 = 21
 \end{aligned}$$

문제 08-1 답 $-\log_6 3$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 1, $\log_2 3$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned}
 -a &= 1 + \log_2 3, \quad b = \log_2 3 \\
 \therefore a &= -1 - \log_2 3 \\
 \therefore \frac{b}{a} &= \frac{\log_2 3}{-1 - \log_2 3} = -\frac{\log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3} \\
 &= -\frac{\log_2 3}{\log_2 6} = -\log_6 3
 \end{aligned}$$

문제 08-2 답 2

이차방정식 $x^2 - 8x + 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= 8, \quad \alpha\beta = 4 \\
 \therefore \log_{\alpha\beta}(\alpha + \beta) - \log_{\frac{1}{\alpha\beta}}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) &= \log_{\alpha\beta}(\alpha + \beta) + \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\
 &= \log_4 8 + \log_4 \frac{8}{4} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2
 \end{aligned}$$

3 개념 CHECK

p.36

1. 답 (1) 5 (2) -2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{1}{2}$

2. 답 (1) 0.4683 (2) 0.7839 (3) 8.15 (4) 4.95

3. 답 (1) 0 (2) 3 (3) -1 (4) -3

3 유제 & 문제

p.37~42

유제 09 답 (1) 2.8854 (2) -0.1146 (3) 0.4427

$$\begin{aligned}
 (1) \log 768 &= \log(10^2 \times 7.68) = \log 10^2 + \log 7.68 \\
 &= 2 \log 10 + \log 7.68 \\
 &= 2 + 0.8854 = 2.8854 \\
 (2) \log 0.768 &= \log(10^{-1} \times 7.68) = \log 10^{-1} + \log 7.68 \\
 &= -\log 10 + \log 7.68 \\
 &= -1 + 0.8854 = -0.1146 \\
 (3) \log \sqrt{7.68} &= \log 7.68^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 7.68 \\
 &= \frac{1}{2} \times 0.8854 = 0.4427
 \end{aligned}$$

문제 09-1 답 -0.1463

상용로그표에서 $\log 3.64 = 0.5611$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \log \sqrt[3]{0.364} &= \log 0.364^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 0.364 \\
 &= \frac{1}{3} \log(10^{-1} \times 3.64) \\
 &= \frac{1}{3} (\log 10^{-1} + \log 3.64) \\
 &= \frac{1}{3} (-1 + 0.5611) = -0.1463
 \end{aligned}$$

유제 10 답 (1) 56700 (2) 0.0000567

$\log N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 꼴로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 (1) \log N &= 4 + 0.7536 \\
 &= \log 10^4 + \log 5.67 \\
 &= \log(10^4 \times 5.67) \\
 &= \log 56700 \\
 \therefore N &= 56700 \\
 (2) \log N &= -4 + (-0.2464) \\
 &= (-4 - 1) + (1 - 0.2464) \\
 &= -5 + 0.7536 \\
 &= \log 10^{-5} + \log 5.67 \\
 &= \log(10^{-5} \times 5.67) \\
 &= \log 0.0000567 \\
 \therefore N &= 0.0000567
 \end{aligned}$$

다른 풀이

- (1) $\log N = 4 + 0.7536$ 에서 $\log N$ 과 $\log 5.67$ 의 소수 부분이 같으므로 N 은 5.67과 숫자의 배열이 같다.
이때 $\log N$ 의 정수 부분이 4이므로 N 은 5자리의 수이다.
 $\therefore N = 56700$
- (2) $\log N = -5 + 0.7536$ 에서 $\log N$ 과 $\log 5.67$ 의 소수 부분이 같으므로 N 은 5.67과 숫자의 배열이 같다.
이때 $\log N$ 의 정수 부분이 -5이므로 소수점 아래 다섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
 $\therefore N = 0.0000567$

문제 10-1 답 0.00612

$$\begin{aligned}\log 612 &= \log(10^2 \times 6.12) = 2 + \log 6.12 = 2.7868 \text{에서} \\ \log 6.12 &= 0.7868 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \log N &= n + \alpha \quad (n \text{은 정수, } 0 \leq \alpha < 1) \text{ 꼴로 나타내면} \\ \log N &= -2 + (-0.2132) \\ &= (-2-1) + (1-0.2132) \\ &= -3 + 0.7868 \\ &= \log 10^{-3} + \log 6.12 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \log(10^{-3} \times 6.12) = \log 0.00612 \\ \therefore N &= 0.00612\end{aligned}$$

유제 11 답 (1) 22자리 (2) 소수점 아래 24째 자리

- (1) 12^{20} 에 상용로그를 취하면
$$\begin{aligned}\log 12^{20} &= 20 \log 12 = 20 \log(2^2 \times 3) \\ &= 20(2 \log 2 + \log 3) \\ &= 20(2 \times 0.3010 + 0.4771) \\ &= 21.582 = 21 + 0.582\end{aligned}$$

따라서 $\log 12^{20}$ 의 정수 부분이 21이므로 12^{20} 은 22자리의 자연수이다.
- (2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ 에 상용로그를 취하면
$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{6}\right)^{30} &= \log 6^{-30} = -30 \log 6 \\ &= -30 \log(2 \times 3) = -30(\log 2 + \log 3) \\ &= -30(0.3010 + 0.4771) = -23.343 \\ &= (-23-1) + (1-0.343) \\ &= -24 + 0.657\end{aligned}$$

따라서 $\log\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ 의 정수 부분이 -24이므로 $\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ 은 소수점 아래 24째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

문제 11-1 답 22자리

7^{100} 이 85자리의 자연수이므로 $\log 7^{100}$ 의 정수 부분이 84이다. 즉, $84 \leq \log 7^{100} < 85$ 이므로
 $84 \leq 100 \log 7 < 85$

$$\begin{aligned}\therefore 0.84 &\leq \log 7 < 0.85 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \text{이때 } \log 7^{25} &= 25 \log 7 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서} \\ 25 \times 0.84 &\leq 25 \log 7 < 25 \times 0.85 \\ \therefore 21 &\leq \log 7^{25} < 21.25 \\ \text{따라서 } \log 7^{25} \text{의 정수 부분이 21이므로 } 7^{25} &\text{은 22자리의 자연수이다.}\end{aligned}$$

문제 11-2 답 소수점 아래 10째 자리

a^{10} 이 95자리의 자연수이므로 $\log a^{10}$ 의 정수 부분이 94이다. 즉, $94 \leq \log a^{10} < 95$ 이므로
 $94 \leq 10 \log a < 95$
 $\therefore 9.4 \leq \log a < 9.5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
이때 $\log \frac{1}{a} = -\log a$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $-9.5 < -\log a \leq -9.4$
 $-9.5 < \log \frac{1}{a} \leq -9.4$
 $(-9-1) + (1-0.5) < \log \frac{1}{a} \leq (-9-1) + (1-0.4)$
 $\therefore -10 + 0.5 < \log \frac{1}{a} \leq -10 + 0.6$
따라서 $\log \frac{1}{a}$ 의 정수 부분이 -10이므로 $\frac{1}{a}$ 은 소수점 아래 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

유제 12 답 (1) $100\sqrt{10}$ (2) $\sqrt[3]{10^{16}}$

- (1) $\log N$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{N}$ 의 소수 부분이 같으므로
$$\begin{aligned}\log N - \log \frac{1}{N} &= \log N - (-\log N) \\ &= 2 \log N \Rightarrow (\text{정수}) \\ 100 < N < 1000 \text{이므로 } \log 100 &< \log N < \log 1000 \\ 2 < \log N < 3 \quad \therefore 4 < 2 \log N < 6 \\ \text{이때 } 2 \log N \text{이 정수이므로} \\ 2 \log N &= 5 \quad \therefore \log N = \frac{5}{2} \\ \therefore N &= 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}\end{aligned}$$
- (2) $\log N$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{N}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로
$$\begin{aligned}\log N + \log \sqrt{N} &= \log N + \frac{1}{2} \log N \\ &= \frac{3}{2} \log N \Rightarrow (\text{정수}) \\ \log N \text{의 정수 부분이 5이므로} \\ 5 \leq \log N < 6 \quad \therefore \frac{15}{2} \leq \frac{3}{2} \log N < 9 \\ \text{이때 } \frac{3}{2} \log N \text{이 정수이므로} \\ \frac{3}{2} \log N &= 8 \quad \therefore \log N = \frac{16}{3} \\ \therefore N &= 10^{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{10^{16}}\end{aligned}$$

문제 12-1 답 2500

$\log N$ 의 정수 부분이 3이므로
 $3 \leq \log N < 4$, $\log 1000 \leq \log N < \log 10000$
 $\therefore 1000 \leq N < 10000$ ㉠
 $\log \frac{N}{4}$ 의 소수 부분이 $\log N$ 의 소수 부분의 2배이므로
 $2 \log N$ 의 소수 부분과 $\log \frac{N}{4}$ 의 소수 부분이 같다.
 $\therefore 2 \log N - \log \frac{N}{4} = \log N^2 - \log \frac{N}{4} = \log \left(N^2 \times \frac{4}{N} \right)$
 $= \log 4N \Rightarrow$ (정수)
 $\log 4N$ 이 정수이려면 $4N$ 이 10의 거듭제곱 꼴이어야 하고, ㉠에서 $4000 \leq 4N < 40000$ 이므로
 $4N = 10000 \quad \therefore N = 2500$

문제 13-1 답 6

규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생하므로
 $\log 64 = a - 0.9 \times 4$
 $\therefore a = \log 64 + 3.6 = 6 \log 2 + 3.6$
 $= 6 \times 0.3 + 3.6 = 5.4$ ㉠
또 규모 x 이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생하므로
 $\log 1 = a - 0.9x$, $0 = 5.4 - 0.9x$ ($\because$ ㉠)
 $\therefore x = 6$

문제 13-2 답 -1.45등급

북극성의 밝기를 I_1 , 시리우스의 밝기를 I_2 라 하면 시리우스의 밝기는 북극성의 밝기의 24배이므로
 $I_2 = 24I_1$ ㉠
한편 밝기가 I_1 인 북극성은 2등급이므로
 $2 = -\frac{5}{2} \log I_1 + C \quad \therefore C = \frac{5}{2} \log I_1 + 2$ ㉡
이때 밝기가 I_2 인 시리우스의 등급을 m_2 라 하면
 $m_2 = -\frac{5}{2} \log I_2 + C$
 $= -\frac{5}{2} \log 24I_1 + \frac{5}{2} \log I_1 + 2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
 $= -\frac{5}{2} \log (2^3 \times 3 \times I_1) + \frac{5}{2} \log I_1 + 2$
 $= -\frac{5}{2} (3 \log 2 + \log 3 + \log I_1) + \frac{5}{2} \log I_1 + 2$
 $= -\frac{5}{2} (3 \log 2 + \log 3) + 2$
 $= -\frac{5}{2} (3 \times 0.30 + 0.48) + 2 = -1.45$
따라서 시리우스는 -1.45등급이다.

유제 14 답 3.51%

보호막의 수가 늘어날 때마다 방사선 입자의 양이 20%씩 줄어드므로 처음 방사선 입자의 양을 a 라 하면 15장째 보호막을 통과한 입자의 양은

$a \left(1 - \frac{20}{100} \right)^{15} \quad \therefore a \times 0.8^{15}$ ㉠
 $x = 0.8^{15}$ 이라 하고 양변에 상용로그를 취하면
 $\log x = 15 \log 0.8 = 15 \log \frac{8}{10}$
 $= 15(3 \log 2 - 1) = 15(3 \times 0.301 - 1)$
 $= -1.455 = (-1 - 1) + (1 - 0.455)$
 $= -2 + 0.545 = -2 + \log 3.51$
 $= \log 10^{-2} + \log 3.51$
 $= \log (10^{-2} \times 3.51) = \log 0.0351$
 $\therefore x = 0.8^{15} = 0.0351$
이를 ㉠에 대입하면 $a \times 0.0351$ 이므로 15장째 보호막을 통과한 방사선 입자의 양은 처음의 양의 3.51%이다.

문제 14-1 답 15%

올해의 매출을 a , 매출의 증가율을 $r\%$ 라 하면 10년 후의 매출은 $4a$ 이므로
 $a \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = 4a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = 4$
양변에 상용로그를 취하면
 $\log \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = \log 4$
 $10 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = 2 \log 2$
 $\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \frac{\log 2}{5} = 0.06$
 $\log 1.15 = 0.06$ 이므로
 $1 + \frac{r}{100} = 1.15 \quad \therefore r = 15$
따라서 매년 15%씩 매출을 증가시켜야 한다.

기본 연습문제

p.43~45

- | | | | |
|--------------|--------------------|--------------------|--------------|
| 1 $\sqrt{3}$ | 2 3 | 3 $\neg, \cup$ | 4 $-4a+4b+1$ |
| 5 -3 | 6 ② | 7 $\frac{3x}{x+y}$ | 8 2 |
| 9 ④ | 10 53600 | 11 ③ | 12 -2 |
| 13 ④ | 14 $10\sqrt{10}$ 배 | | |

1 $x = \log_2 27$ 에서 $2^x = 27$
 $\therefore 2^{\frac{x}{6}} = (2^x)^{\frac{1}{6}} = 27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2 (i) $(\text{밀}) > 0$, $(\text{밀}) \neq 1$ 이어야 하므로
 $(a-1)^2 > 0$ 에서 $a \neq 1$ ㉠
 $(a-1)^2 \neq 1$ 에서 $a-1 \neq -1$, $a-1 \neq 1$
 $\therefore a \neq 0$, $a \neq 2$ ㉡

(ii) (진수) > 0이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2 + ax + 1 > 0$$

이때 ㉠에서 $a \neq 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하려면 $a > 0$ 이고, 이차방정식

$$ax^2 + ax + 1 = 0 \text{의 판별식 } D \text{에서}$$

$$D = a^2 - 4a < 0, a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 4$$

따라서 정수 a 의 값은 3이다.

$$\begin{aligned} 3 \quad \neg. \log_3(3 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{12}) &= \log_3 3^{1+2+3+\dots+12} \\ &= 1+2+3+\dots+12 \\ &= 13 \times 6 = 78 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \dots + \log_2 10 \\ &= \log_2 (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10) \\ &\neq \log_2 55 \quad \blacktriangleleft 55 = 1+2+3+\dots+10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{1}{2} \log_2 4 + \frac{2}{3} \log_2 8 + \frac{3}{4} \log_2 16 + \dots + \frac{9}{10} \log_2 1024 \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2^2 + \frac{2}{3} \log_2 2^3 + \frac{3}{4} \log_2 2^4 + \dots + \frac{9}{10} \log_2 2^{10} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{3}{4} \times 4 + \dots + \frac{9}{10} \times 10 \\ &= 1+2+3+\dots+9 = 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \log_2 2^2 \times \log_3 3^2 \times \log_4 4^2 \times \dots \times \log_{10} 10^2 \\ &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{9\text{개}} = 2^9 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

$$\begin{aligned} 4 \quad \log_5 \left(1 + \frac{1}{3}\right) &= \log_5 \frac{4}{3} = \log_5 4 - \log_5 3 \\ &= 2\log_5 2 - \log_5 3 \end{aligned}$$

$$\therefore 2\log_5 2 - \log_5 3 = a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} \log_5 \left(1 - \frac{1}{9}\right) &= \log_5 \frac{8}{9} = \log_5 8 - \log_5 9 \\ &= 3\log_5 2 - 2\log_5 3 \end{aligned}$$

$$\therefore 3\log_5 2 - 2\log_5 3 = b \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \times 2 - \text{㉡} \text{을 하면 } \log_5 2 = 2a - b$$

$$\text{㉠} \times 3 - \text{㉡} \times 2 \text{를 하면 } \log_5 3 = 3a - 2b$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_5 \left(1 - \frac{1}{81}\right) &= \log_5 \frac{80}{81} = \log_5 80 - \log_5 81 \\ &= \log_5 (2^4 \times 5) - \log_5 3^4 \\ &= 4\log_5 2 + 1 - 4\log_5 3 \\ &= 4(2a - b) + 1 - 4(3a - 2b) \\ &= -4a + 4b + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad 3^a &= x, 3^b = y, 3^c = z \text{를 번끼리 모두 곱하면} \\ 3^{a+b+c} &= xyz \quad \therefore xyz = 1 (\because a+b+c=0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_x yz + \log_y zx + \log_z xy \\ &= \log_x \frac{1}{x} + \log_y \frac{1}{y} + \log_z \frac{1}{z} \\ &= -1 - 1 - 1 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad ① \log_5 \frac{5}{3} - \log_5 \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \log_5 64 \\ &= \log_5 \frac{5}{3} + \log_5 \frac{15}{8} + \log_5 64^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_5 \left(\frac{5}{3} \times \frac{15}{8} \times 8\right) = \log_5 5^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② (\log_3 2 + \log_3 4)(\log_2 3 + \log_2 9) \\ &= (\log_3 2 + \log_3 2^2)(\log_2 3 + \log_2 3^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \log_3 2 + 2\log_3 2\right)(\log_2 3 + \log_2 3) \\ &= \frac{5}{2} \log_3 2 \times 2\log_2 3 = 5 \times \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ③ \log_3 4 \times \log_4 7 \times \log_7 9 &= \log_3 4 \times \frac{\log_3 7}{\log_3 4} \times \frac{\log_3 9}{\log_3 7} \\ &= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ④ 2\log_5 2 + \log_{\frac{1}{5}} 4 &= 2\log_5 2 + \log_{5^{-1}} 2^2 \\ &= 2\log_5 2 - 2\log_5 2 = 0 \\ \therefore \log_5 5 + 5^{2\log_5 2 + \log_{\frac{1}{5}} 4} &= 1 + 5^0 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ⑤ \log_3 5 &= X, \log_3 3 = Y \text{라 하면} \\ \frac{(\log_3 5 + \log_3 3)^2 - (\log_3 5 - \log_3 3)^2}{2} \\ &= \frac{(X+Y)^2 - (X-Y)^2}{2} = 2XY \\ &= 2\log_3 5 \times \log_3 3 = 2\log_3 5 \times \frac{1}{\log_3 3} = 2 \end{aligned}$$

따라서 그 값이 다른 하나는 ②이다.

$$7 \quad a^x = 5 \text{에서 } x = \log_a 5 \quad \therefore \log_5 a = \frac{1}{x}$$

$$b^y = 5 \text{에서 } y = \log_b 5 \quad \therefore \log_5 b = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{ab} b^3 &= \frac{\log_5 b^3}{\log_5 ab} = \frac{3\log_5 b}{\log_5 a + \log_5 b} \\ &= \frac{\frac{3}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{3x}{x+y} \end{aligned}$$

8 이차방정식 $x^2 - 5x + 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 5$$

곱셈 공식의 변형에 의해

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \times 5 = 5$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{5} (\because \alpha > \beta)$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\alpha-\beta} \alpha + \log_{\alpha-\beta} \beta &= \log_{\alpha-\beta} \alpha\beta = \log_{\sqrt{5}} 5 \\ &= 2\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \end{aligned}$$

- 9 ① $\log 67.8 = \log(10 \times 6.78) = \log 10 + \log 6.78$
 $= 1 + 0.8312 = 1.8312$
 ② $\log 6780 = \log(10^3 \times 6.78) = 3\log 10 + \log 6.78$
 $= 3 + 0.8312 = 3.8312$
 ③ $\log 678000 = \log(10^5 \times 6.78) = 5\log 10 + \log 6.78$
 $= 5 + 0.8312 = 5.8312$
 ④ $\log 0.678 = \log(10^{-1} \times 6.78) = -\log 10 + \log 6.78$
 $= -1 + 0.8312 = -0.1688$
 ⑤ $\log 0.0678 = \log(10^{-2} \times 6.78)$
 $= -2\log 10 + \log 6.78$
 $= -2 + 0.8312 = -1.1688$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

- 10 $\log 53.6 = \log(10 \times 5.36) = 1 + \log 5.36 = 1.7292$ 에서
 $\log 5.36 = 0.7292$ ㉠
 $\log N = 4.7292$ 이므로
 $\log N = 4 + 0.7292$
 $= \log 10^4 + \log 5.36$ ($\because$ ㉠)
 $= \log(10^4 \times 5.36) = \log 53600$
 $\therefore N = 53600$

- 11 $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$ 이므로
 (i) $x = 1, 2, 3, \dots, 9$ 일 때, $[\log x] = 0$
 $\therefore [\log 1] + \dots + [\log 9] = 9 \times 0 = 0$
 (ii) $x = 10, 11, 12, \dots, 99$ 일 때, $[\log x] = 1$
 $\therefore [\log 10] + \dots + [\log 99] = 1 \times 90 = 90$
 (iii) $x = 100, 101, 102, \dots, 999$ 일 때, $[\log x] = 2$
 $\therefore [\log 100] + \dots + [\log 999] = 2 \times 900 = 1800$
 (i), (ii), (iii)에 의해
 $[\log 1] + [\log 2] + [\log 3] + \dots + [\log 999]$
 $= 0 + 90 + 1800 = 1890$

- 12 $\log A$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 α 라 하면 n, α 가 이차방정식 $3x^2 + 5x + k = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해
 $n + \alpha = -\frac{5}{3}$ ㉠
 $n\alpha = \frac{k}{3}$ ㉡
 이때 n 은 정수이고, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 ㉠에서
 $n + \alpha = -1 - \frac{2}{3} = (-1 - 1) + \left(1 - \frac{2}{3}\right)$
 $= -2 + \frac{1}{3}$
 $\therefore n = -2, \alpha = \frac{1}{3}$
 따라서 ㉡에서 $-2 \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3} \therefore k = -2$

- 13 $(\log_a \sqrt{a})^{20} = (\log_a a^{\frac{1}{2}})^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
 $\therefore \log\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \log 2^{-20} = -20\log 2$
 $= -20 \times 0.3010 = -6.02$
 $= -6 + (-0.02)$
 $= (-6 - 1) + (1 - 0.02)$
 $= -7 + 0.98$

따라서 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ 의 정수 부분이 -7 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

- 14 pH 4.7의 수소 이온 농도를 A , pH 6.2의 수소 이온 농도를 B 라 하면 주어진 식에 의해

$$4.7 = \log \frac{1}{A} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$6.2 = \log \frac{1}{B} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠-㉡을 하면

$$6.2 - 4.7 = \log \frac{1}{B} - \log \frac{1}{A}$$

$$1.5 = \log \frac{A}{B}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = 10^{1.5} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$$

따라서 pH 4.7의 수소 이온 농도는 pH 6.2의 수소 이온 농도의 $10\sqrt{10}$ 배이다.

실전 연습문제

p.46

1 $\frac{5}{9}$

2 14

3 $100\sqrt{10}$

4 1750m

- 1 $\log_3 9 < \log_3 12 < \log_3 27$ 이므로

$$2 < \log_3 12 < 3$$

$\log_3 12$ 의 정수 부분이 2이므로

$$x = 2$$

이때 $x + y = \log_3 12$ 이므로

$$y = \log_3 12 - x = \log_3 12 - 2$$

$$= \log_3 12 - \log_3 9 = \log_3 \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{3^y + 3^{-y}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{3^{\log_3 \frac{4}{3}} + 3^{-\log_3 \frac{4}{3}}}{2^2 - 2^{-2}} = \frac{3^{\log_3 \frac{4}{3}} + 3^{\log_3 \frac{3}{4}}}{2^2 - 2^{-2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

2 5^{15} 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 5^{15} &= 15 \log \frac{10}{2} = 15(\log 10 - \log 2) \\ &= 15(1 - 0.3010) = 10.485 \\ &= 10 + 0.485 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\log 5^{15}$ 의 정수 부분이 10이므로 5^{15} 은 11자리의 수이다.

$$\therefore m=11$$

한편 숫자의 배열은 상용로그의 소수 부분과 관련 있고,

①에서 $\log 5^{15}$ 의 소수 부분은 0.485이다.

이때 $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로

$$\log 3 < 0.485 < \log 4$$

$$10 + \log 3 < 10.485 < 10 + \log 4$$

$$\log(3 \times 10^{10}) < \log 5^{15} < \log(4 \times 10^{10})$$

$$\therefore 3 \times 10^{10} < 5^{15} < 4 \times 10^{10}$$

따라서 5^{15} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

$$\therefore n=3$$

$$\therefore m+n=11+3=14$$

3 $\log N > 0$ 이고, $[\log N]$ 은 $\log N$ 보다 크지 않은 최대의 정수이므로 $[\log N]$ 과 $\log N$ 은 정수 부분이 같다.

$$\therefore \log N - [\log N] \Rightarrow \log N \text{의 소수 부분}$$

마찬가지로 $[\log N^3]$ 은 $\log N^3$ 의 정수 부분이므로

$$\log N^3 - [\log N^3] \Rightarrow \log N^3 \text{의 소수 부분}$$

따라서 $\log N - [\log N] = \log N^3 - [\log N^3]$ 이면

$\log N$ 의 소수 부분과 $\log N^3$ 의 소수 부분이 같다.

$$\begin{aligned}\therefore \log N^3 - \log N &= 3 \log N - \log N \\ &= 2 \log N \Rightarrow (\text{정수})\end{aligned}$$

$$100 < N < 1000 \text{이므로}$$

$$\log 100 < \log N < \log 1000$$

$$2 < \log N < 3 \quad \therefore 4 < 2 \log N < 6$$

이때 $2 \log N$ 은 정수이므로

$$2 \log N = 5 \quad \therefore \log N = \frac{5}{2}$$

$$\therefore N = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}$$

4 전파 기지국으로부터 $k \times 100$ (m) 떨어진 지점에서 통화하는 데 필요한 에너지의 양은

$$A \left(1 + \frac{10}{100}\right)^k = 1.1^k A$$

이 에너지의 양이 $5A$ 가 된다고 하면

$$1.1^k A = 5A \quad \therefore 1.1^k = 5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 1.1^k = \log 5, \quad k \log 1.1 = 1 - \log 2$$

$$0.04k = 1 - 0.30 \quad \therefore k = 17.5$$

따라서 구하는 지점은 기지국으로부터

$$17.5 \times 100 = 1750 \text{ (m)} \text{ 떨어진 지점이다.}$$

I-2. 지수함수와 로그함수

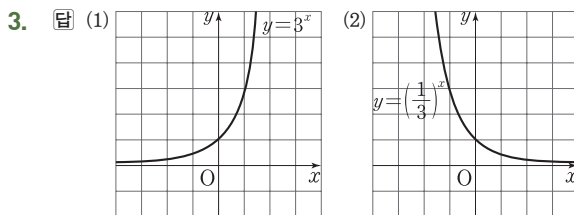
01 지수함수와 로그함수

1 개념 CHECK

p.49

1. 답 ㄱ, ㄷ

2. 답 (1) 3 (2) 27 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\sqrt{3}$



1 유제 & 문제

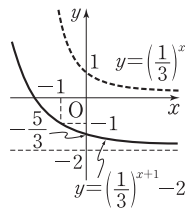
p.50~53

유제 01 답 풀이 참조

(1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 2$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방

향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

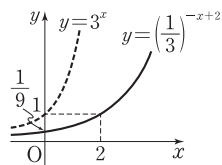


$\therefore$ 치역: $\{y | y > -2\}$, 점근선의 방정식: $y = -2$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(x-2)} = 3^{x-2}$

따라서 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}$ 의 그래

프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 치역: $\{y | y > 0\}$, 점근선의 방정식: $y = 0$

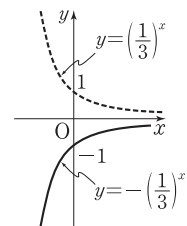
(3) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대

하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 치역: $\{y | y < 0\}$,

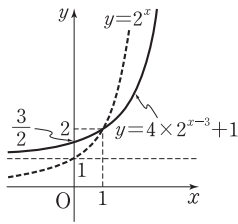
점근선의 방정식: $y = 0$



문제 01-1 답 풀이 참조

(1) $y = 4 \times 2^{x-3} + 1 = 2^{x-1} + 1$

따라서 $y = 4 \times 2^{x-3} + 1$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y = 3^{|x-1|}$ 에서

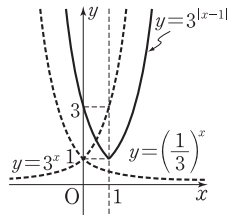
(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 3^{x-1}$

$y = 3^{x-1}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = 3^{-(x-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

(i), (ii)에 의해 $y = 3^{|x-1|}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



유제 02 답 $a = -27$, $b = -2$

$y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y - 2 = 3^{x+3} \quad \therefore y = 3^{x+3} + 2$$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y = 3^{-x+3} + 2$$

$$\therefore y = -3^3 \times 3^{-x} - 2 = -27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$$

$$\therefore a = -27, b = -2$$

문제 02-1 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y = 8 \times 2^x = 2^{x+3}$

따라서 $y = 8 \times 2^x$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y = 2^{2x} = 4^x$

따라서 $y = 2^{2x}$ 은 $y = 2^x$ 과 밑이 다르므로 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동, 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄷ. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{-(x-1)}$

따라서 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y = 2(2^x - 1) = 2^{x+1} - 2$

따라서 $y = 2(2^x - 1)$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

문제 02-2 답 4

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a+2} + b$

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y = 2$ 이므로 $b = 2$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a+2} + 2$ 의 그래프가 점 $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} + 2, 2^{a-1} = 2 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$$

유제 03 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{27}$

(2) 최댓값: $\frac{81}{25}$, 최솟값: 1

(3) 최댓값: 27, 최솟값: 없다.

(4) 최댓값: 625, 최솟값: 1

(1) 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 은 오른쪽 그림

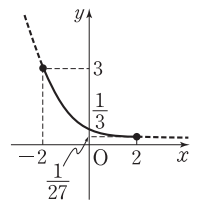
과 같이 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $-2 \leq x \leq 2$ 에서

$x = -2$ 일 때, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

$x = 2$ 일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$



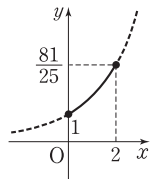
(2) $y = 3^{2x} 5^{-x} = 9^x \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

함수 $y = 3^{2x} 5^{-x}$ 은 오른쪽 그림과 같이 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$x = 2$ 일 때, 최댓값은 $\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$

$x = 0$ 일 때, 최솟값은 $\left(\frac{9}{5}\right)^0 = 1$



(3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-6x+6}$ 에서 $x^2 - 6x + 6 = t$ 라 하면

$$t = (x-3)^2 - 3 \text{ 이므로 } t \geq -3$$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ 은 오른쪽
그림과 같이 t 의 값이 증가하
면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $t \geq -3$ 에서

$t = -3$ 일 때, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$$

최솟값은 없다.

(4) $y = 5^{-x^2-4x}$ 에서 $-x^2-4x=t$ 라 하면

$t = -(x+2)^2+4$ 이므로 $-3 \leq x \leq 0$ 에서

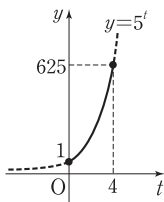
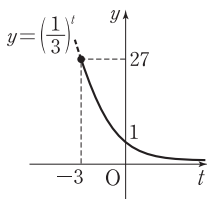
$0 \leq t \leq 4$

이때 함수 $y = 5^t$ 은 오른쪽 그림과
같이 t 의 값이 증가하면 y 의 값도
증가한다.

따라서 $0 \leq t \leq 4$ 에서

$t = 4$ 일 때, 최댓값은 $5^4 = 625$

$t = 0$ 일 때, 최솟값은 $5^0 = 1$



문제 03-1 답 $\frac{3}{2}$

함수 $y = 2^{x+1} + k$ 는 밑 2가 $2 > 1$ 이므로 x 의 값이 증가하
면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $x = 1$ 일 때 최댓값이 5이므로

$$2^2 + k = 5 \quad \therefore k = 1$$

함수 $y = 2^{x+1} + 1$ 은 $x = -2$ 일 때, 최솟값을 가지므로

$$(\text{최솟값}) = 2^{-1} + 1 = \frac{3}{2}$$

유제 04 답 최댓값: 3, 최솟값: -1

$$y = 2^{x+2} - 4x - 1 = 2^2 \times 2^x - (2^2)^x - 1$$

$$= -(2^x)^2 + 4 \times 2^x - 1$$

$2^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$y = -t^2 + 4t - 1 = -(t-2)^2 + 3$$

한편 $t = 2^x$ 은 밑 2가 $2 > 1$ 이므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$2^0 \leq t \leq 2^2 \quad \therefore 1 \leq t \leq 4$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = -(t-2)^2 + 3$ 은

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 3

$t = 4$ 일 때, 최솟값은 -1

문제 04-1 답 최댓값: -4, 최솟값: $-\frac{25}{4}$

$$y = \left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 4$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$y = t^2 - 3t - 4 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

한편 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 밑 $\frac{1}{3}$ 이 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$-1 \leq x \leq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 \leq t \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \therefore 1 \leq t \leq 3$$

따라서 $1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ 는

$t = 3$ 일 때, 최댓값은 -4

$t = \frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{25}{4}$

문제 04-2 답 13, 8

$$y = 4^{-x} - 3 \times 2^{1-x} + a$$

$$= (2^2)^{-x} - 3 \times 2^1 \times 2^{-x} + a$$

$$= (2^{-x})^2 - 6 \times 2^{-x} + a$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + a$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$y = t^2 - 6t + a = (t-3)^2 + a - 9$$

한편 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \therefore 1 \leq t \leq 4$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = (t-3)^2 + a - 9$ 는

$t = 3$ 일 때 최솟값이 4이므로 $a - 9 = 4 \quad \therefore a = 13$

함수 $y = (t-3)^2 + 4$ 는 $t = 1$ 일 때 최댓값을 가지므로

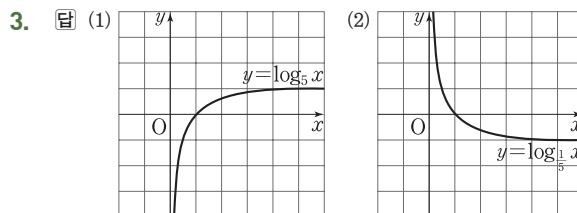
$$(\text{최댓값}) = (1-3)^2 + 4 = 8$$

2 개념 CHECK

p.55

1. 답 ㄱ, ㄷ

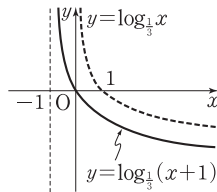
2. 답 (1) -1 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 3



4. 답 (1) $y = \log_3 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

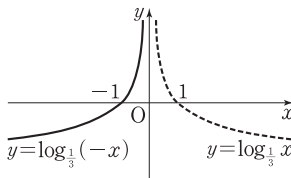
유제 05 답 풀이 참조

- (1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ 의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



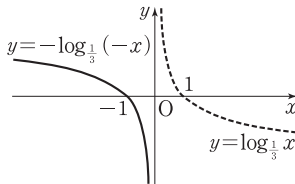
$\therefore$ 정의역: $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식: $x=-1$

- (2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x<0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

- (3) $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

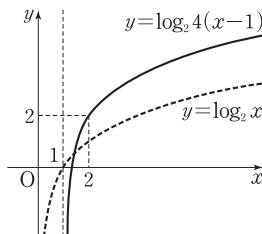


$\therefore$ 정의역: $\{x|x<0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

문제 05-1 답 풀이 참조

- (1) $y=\log_2 4(x-1)=\log_2 4+\log_2(x-1)$
 $=\log_2(x-1)+2$

따라서 $y=\log_2 4(x-1)$ 의 그래프는 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



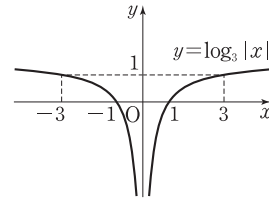
- (2) $y=\log_3|x|$ 에서

(i) $x>0$ 일 때, $y=\log_3 x$

(ii) $x<0$ 일 때, $y=\log_3(-x)$

$y=\log_3(-x)$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(i), (ii)에서 $y=\log_3|x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



유제 06 답 -4

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y=\log_2 x+2$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y=\log_2(-x)+2=\log_2(-x)+\log_2 2^2$$

$$=\log_2(-4x)$$

$$\therefore a=-4$$

문제 06-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $y=\log_4 \frac{1}{x}=-\log_4 x$ 의 그래프는 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=-\log_4 x+4$ 의 그래프는 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=\log_4(-4x)=\log_4(-x)+1$ 의 그래프는 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=2\log_4 x+1=\log_2 x+1$ 의 그래프는 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 평행이동, 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

따라서 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

문제 06-2 답 -2

$y=\log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y=\log_3(x-a)+b$$

점근선의 방정식이 $x=-3$ 이므로

$$a=-3$$

$y=\log_3(x+3)+b$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=\log_3 3+b \quad \therefore b=1$$

$$\therefore a+b=-3+1=-2$$

유제 07 답 (1) $y = \log_2(x-1) + 1$ (단, $x > 1$)

$$(2) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$$

- (1) 함수 $y = 2^{x-1} + 1$ 의 정의역은 $\{x | x \text{는 실수}\}$ 이고,
치역은 $\{y | y > 1\}$ 이다.

$$y = 2^{x-1} + 1 \text{에서 } y - 1 = 2^{x-1}$$

로그의 정의에 의해 $x - 1 = \log_2(y - 1)$

$$\therefore x = \log_2(y - 1) + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = \log_2(x - 1) + 1 \text{ (단, } x > 1)$$

- (2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + 1$ 의 정의역은 $\{x | x > 2\}$ 이고,
치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$ 이다.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + 1 \text{에서 } y - 1 = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$$

로그의 정의에 의해

$$x - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} \therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$$

문제 07-1 답 (1) $y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (2) $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$

- (1) 함수 $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ 의 치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

$$y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \text{에서 } 2y = 2^x - 2^{-x}$$

양변에 2^x 을 곱하면

$$2y \times 2^x = (2^x)^2 - 1 \therefore (2^x)^2 - 2y \times 2^x - 1 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$\therefore t = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad (\because t > 0)$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

로그의 정의에 의해

$$x = \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

- (2) 함수 $y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 의 치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

$y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 은 로그의 정의에 의해

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^y \therefore \sqrt{x^2 + 1} = 3^y - x$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 1 = 3^{2y} - 2 \times 3^y x + x^2$$

$$2 \times 3^y x = 3^{2y} - 1$$

$$\therefore x = \frac{3^{2y} - 1}{2 \times 3^y} = \frac{3^y - 3^{-y}}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$$

문제 07-2 답 1

함수 $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-1}$ ($x > 1$)의 역함수가 $g(x)$ 이고,

$$g(\alpha) = 3, g(\beta) = 5 \text{이므로}$$

$$f(3) = \alpha, f(5) = \beta$$

$$\alpha = f(3) = \log_3 \frac{3+1}{3-1} = \log_3 2$$

$$\beta = f(5) = \log_3 \frac{5+1}{5-1} = \log_3 \frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 3 = 1$$

유제 08 답 (16, 4)

$y = 2^x$ 의 그래프는 점 (0, 1)을 지나므로

$$A(0, 1)$$

점 A와 점 B의 y 좌표는 1로 같으므로 점 B를 (b , 1)이라 하면

$$\log_2 b = 1 \therefore b = 2$$

$$\therefore B(2, 1)$$

한편 두 함수 $y = \log_2 x$ 와 $y = 2^x$ 은 서로 역함수 관계에 있으므로 두 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 점 B와 점 C는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$C(1, 2)$$

점 C와 점 D의 y 좌표는 2로 같으므로 점 D를 (d , 2)라 하면

$$\log_2 d = 2 \therefore d = 2^2 = 4$$

$$\therefore D(4, 2)$$

점 D와 점 E는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$E(2, 4)$$

점 E와 점 F의 y 좌표는 4로 같으므로 점 F를 (f , 4)라 하면

$$\log_2 f = 4 \therefore f = 2^4 = 16$$

$$\therefore F(16, 4)$$

문제 08-1 답 $\frac{1}{9}$

두 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 와 $y = f(x)$ 가 서로 역함수이므로 두

함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

점 Q(-1, b)가 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

점 (b , -1)은 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프 위의 점이다.

$$-1 = \log_{\frac{1}{3}} b \text{에서 } b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

따라서 점 P(a , 3)이 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$3 = \log_{\frac{1}{3}} a \therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{27} \times 3 = \frac{1}{9}$$

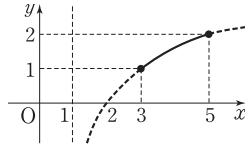
유제 09 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1

(2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

(3) 최댓값: -2, 최솟값: 없다.

(4) 최댓값: 2, 최솟값: 0

- (1) 함수 $y = \log_2(x-1)$ 은
오른쪽 그림과 같이 x 의
값이 증가하면 y 의 값도
증가한다.



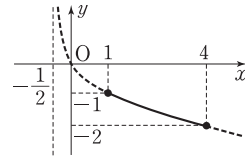
따라서 $3 \leq x \leq 5$ 에서

$x=5$ 일 때, 최댓값은 $\log_2 4 = 2$

$x=3$ 일 때, 최솟값은 $\log_2 2 = 1$

- (2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$ 은

오른쪽 그림과 같이 x 의
값이 증가하면 y 의 값은
감소한다.



따라서 $1 \leq x \leq 4$ 에서

$x=1$ 일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

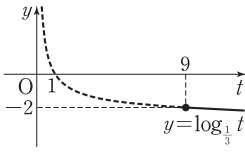
$x=4$ 일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

- (3) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13)$ 에서 $x^2 - 4x + 13 = t$ 라 하면

$$t = (x-2)^2 + 9 \quad \therefore t \geq 9$$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ 는

오른쪽 그림과 같이 t 의
값이 증가하면 y 의 값은
감소한다.



따라서 $t \geq 9$ 에서

$t=9$ 일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

최솟값은 없다.

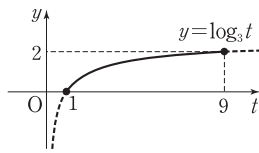
- (4) $y = \log_3(-x^2 + 2x + 9)$ 에서 $-x^2 + 2x + 9 = t$ 라 하면

$$t = -(x-1)^2 + 10 \text{ 이므로 } 2 \leq x \leq 4 \text{ 에서}$$

$$1 \leq t \leq 9$$

이때 함수 $y = \log_3 t$ 는

오른쪽 그림과 같이 t 의
값이 증가하면 y 의 값도
증가한다.



따라서 $1 \leq t \leq 9$ 에서

$t=9$ 일 때, 최댓값은 $\log_3 9 = 2$

$t=1$ 일 때, 최솟값은 $\log_3 1 = 0$

문제 09-1 답 $\frac{1}{2}$

$y = \log_a(x^2 - 2x + 3)$ 에서 $x^2 - 2x + 3 = t$ 라 하면

$$t = (x-1)^2 + 2 \quad \therefore t \geq 2$$

한편 $y = \log_a t$ 의 밑이 a 이므로

(i) $a > 1$ 일 때

함수 $y = \log_a t$ 는 t 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하
므로 $t=2$ 일 때 최솟값을 가지고, 최댓값은 없다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

함수 $y = \log_a t$ 는 t 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하
므로 $t=2$ 일 때 최댓값을 가지고, 최솟값은 없다.

그런데 주어진 함수의 최솟값은 없고, 최댓값이 -1 이므
로 (ii)에 의해

$$\log_a 2 = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

유제 10 답 최댓값: 0, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

$$y = 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2$$

$$= 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 라 하면

$$y = 2t^2 + 2t = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

한편 $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$1 \leq x \leq 2$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 \leq t \leq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 0$$

따라서 $-1 \leq t \leq 0$ 에서 함수 $y = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ 은

$t = -1$ 또는 $t = 0$ 일 때, 최댓값은 0

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$

문제 10-1 답 $\frac{25}{4}$

$$y = \log_2 2x \times \log_2 \frac{16}{x}$$

$$= (\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 16 - \log_2 x)$$

$$= (1 + \log_2 x)(4 - \log_2 x)$$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$y = (1+t)(4-t) = -t^2 + 3t + 4$$

$$= -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

한편 $t = \log_2 x$ 는 밑 $2 > 1$ 이므로 $2 \leq x \leq 16$ 에서

$$\log_2 2 \leq t \leq \log_2 16 \quad \therefore 1 \leq t \leq 4$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 는

$t = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $M = \frac{25}{4}$

$t = 4$ 일 때, 최솟값은 $m = 0$

$$\therefore M + m = \frac{25}{4}$$

문제 10-2 [답] $a=3, b=2$

$$y = (\log_3 x)^2 + a \log_{27} x^2 + b = (\log_3 x)^2 + \frac{2}{3} a \log_3 x + b$$

$\log_3 x = t$ 라 하면

$$y = t^2 + \frac{2}{3} at + b$$

$$= \left(t + \frac{1}{3}a\right)^2 - \frac{1}{9}a^2 + b$$

$t = -\frac{1}{3}a$ 에서 최솟값이 $-\frac{1}{9}a^2 + b$ 이고, 주어진 조건에서

$x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = -1$ 에서 최솟값이 1이므로

$$-\frac{1}{3}a = -1, -\frac{1}{9}a^2 + b = 1$$

$$\therefore a = 3, b = 2$$

기본 연습문제

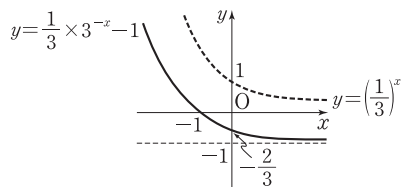
p. 62~63

1 ④ 2 7 3 55 4 12 5 ㄷ

6 ㄱ, ㄷ, ㄹ 7 10 8 $-\log_2 5$

9 5 10 11

1 $y = \frac{1}{3} \times 3^{-x} - 1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1 \dots\dots ㉠$



① 치역은 $\{y | y > -1\}$ 이다.

② ㉠에 $x = -1$ 을 대입하면

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1+1} - 1 = 0$$

따라서 함수 $y = \frac{1}{3} \times 3^{-x} - 1$ 의 그래프는 점 $(-1, 0)$

을 지나고, 점근선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

③ x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

④ 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

⑤ $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = 3^{-x}$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = 3^{-(x+1)} - 1 = 3^{-x-1} - 1$$

$$\therefore y = \frac{1}{3} \times 3^{-x} - 1$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

2 $y = 9 \times 3^x - 2 = 3^{x+2} - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y = 3^x - 2$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = 3^{-x} - 2$$

이 그래프가 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = 3^2 - 2 = 7$$

3 $y = \frac{1-2^{x+1}+4^{x+1}}{4^x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$y = t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$$

한편 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$-3 \leq x \leq 1$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 8$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 8$ 에서 함수 $y = (t-1)^2 + 3$ 은

$t = 8$ 일 때, 최댓값은 52

$t = 1$ 일 때, 최솟값은 3

따라서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값의 합은

$$52 + 3 = 55$$

4 $y = 2^{x+2} + 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \times 2^x + \frac{9}{2^x}$

$4 \times 2^x > 0$, $\frac{9}{2^x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$y = 4 \times 2^x + \frac{9}{2^x} \geq 2\sqrt{(4 \times 2^x) \times \frac{9}{2^x}} = 12$$

(단, 등호는 $4 \times 2^x = \frac{9}{2^x}$ 일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 12이다.

5 ㄱ. $f(m+n) = \log_a(m+n)$

$$f(m) + f(n) = \log_a m + \log_a n = \log_a mn$$

$$\therefore f(m+n) \neq f(m) + f(n)$$

ㄴ. $f(mn) = \log_a mn = \log_a m + \log_a n = f(m) + f(n)$

$$\therefore f(mn) \neq f(m)f(n)$$

ㄷ. $f\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n = f(m) - f(n)$

ㄹ. $f\left(\frac{1}{m}\right) = \log_a \frac{1}{m} = -\log_a m = -f(m)$

$$\therefore f\left(\frac{1}{m}\right) \neq \frac{1}{f(m)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

- 6 ㄱ. $y=3^{x-2}$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $x=3^{y-2}$

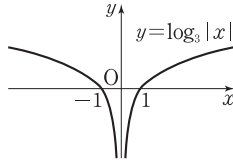
로그의 정의에 의해

$$y-2=\log_3 x \quad \therefore y=\log_3 x+2$$

따라서 $y=3^{x-2}$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$$\text{ㄴ. } y=\log_3 x^2=\frac{1}{2}\log_3 x^2=\log_3 \sqrt{x^2}=\log_3 |x|$$

따라서 $y=\log_3 x^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.



- ㄷ. $y=\frac{1}{3^x}+1$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$x=\frac{1}{3^y}+1 \quad \therefore x-1=3^{-y}$$

로그의 정의에 의해

$$-y=\log_3(x-1) \quad \therefore y=-\log_3(x-1)$$

따라서 $y=\frac{1}{3^x}+1$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하고 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$$\text{ㄹ. } y=2\log_3 x-1=\log_3 x-1$$

따라서 $y=2\log_3 x-1$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

- 7 $y=10^{ax}$ 에서 로그의 정의에 의해

$$ax=\log y \quad \therefore x=\frac{1}{a}\log y$$

x 와 y 를 바꾸어 역함수를 구하면

$$y=\frac{1}{a}\log x$$

위의 식이 $y=\frac{a}{100}\log x$ 와 일치하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{100}, a^2=100 \quad \therefore a=10 (\because a>0)$$

- 8 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a)=6$ 에서

$$(f \circ f \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)=(f \circ f)(6)$$

$$\therefore a=(f \circ f)(6)=f(f(6))$$

$$=f(\log_2 2)=f(1)=-\log_2 5$$

- 9 함수 $y=\log_3(x-a)+2$ 는 밑 3이 $3>1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $3 \leq x \leq 21$ 에서

$x=3$ 일 때 최솟값이 $\log_3(3-a)+2$ 이므로

$$\log_3(3-a)+2=4, 3-a=3^2 \quad \therefore a=-6$$

함수 $y=\log_3(x+6)+2$ 는 $x=21$ 일 때 최댓값을 가지므로 최댓값은 $\log_3 27+2=5$

- 10 $3^{\log x}=x^{\log 3}$ 이므로

$$y=3^{\log x} \times x^{\log 3}-3(x^{\log 3}+3^{\log x})+10$$

$$=3^{\log x} \times 3^{\log x}-3(3^{\log x}+3^{\log x})+10$$

$$=(3^{\log x})^2-6 \times 3^{\log x}+10$$

$$3^{\log x}=t \text{라 하면 } x>1 \text{에서 } t>1$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+10=(t-3)^2+1$$

$t=3$ 일 때, 최솟값이 1이므로 $t=3^{\log x}=3$ 에서

$$\log x=1 \quad \therefore x=10$$

따라서 $a=10, b=1$ 이므로 $a+b=11$

실전 연습문제

p.64

1 6

2 2

3 ㄴ, ㄷ

4 ④

- 1 $f(x)=a^{x-m}+n$ 의 그래프는 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프이고, $g(x)=a^{m-x}+n=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}+n$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프이다.

이때 $y=a^x$ 과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프는 y 축, 즉 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore m=2$$

또한 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=1$ 이므로 $n=1$

$$f(x)=a^{x-2}+1, g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-2}+1 \text{에서}$$

$$A(3, a+1), B\left(3, \frac{1}{a}+1\right)$$

$$\overline{AB}=\frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$a+1-\left(\frac{1}{a}+1\right)=\frac{8}{3}, a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0, (3a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 1)$$

$$\therefore a + m + n = 3 + 2 + 1 = 6$$

- 2 함수 $y = a^{4^x - 2^{x+1} + 2}$ 에서 $4^x - 2^{x+1} + 2 = s$ 라 하면

$$s = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 2$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{라 하면}$$

$$s = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

이때 $t = 2^x$ 은 밑 2가 $2 > 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$2^{-1} \leq t \leq 2^1 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

$$s = (t-1)^2 + 1 \text{은 } \frac{1}{2} \leq t \leq 2 \text{에서}$$

$$1 \leq s \leq 2$$

이때 $1 \leq s \leq 2$ 에서 주어진 함수 $y = a^s$ 을 $a > 1, 0 < a < 1$ 인 경우로 나누어 생각하면

- (i) $a > 1$ 인 경우

함수 $y = a^s$ 은 s 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

즉, $s = 2$ 일 때 최댓값이 a^2 이므로

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

- (ii) $0 < a < 1$ 인 경우

함수 $y = a^s$ 은 s 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

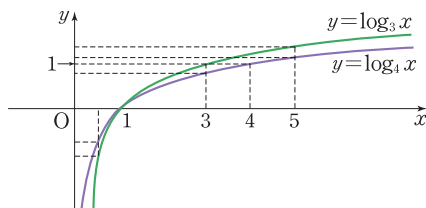
즉, $s = 1$ 일 때 최댓값이 a 이므로

$$a = 4$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 $a = 4$ 는 모순이다.

- (i), (ii)에 의해 $a = 2$

- 3 두 함수 $y = \log_3 x$ 와 $y = \log_4 x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- ㄱ. 지수함수 $y = (\log_4 3)^x$ 에서 밑 $\log_4 3$ 이 $0 < \log_4 3 < 1$ 이므로 $a < b$ 이면

$$(\log_4 3)^a > (\log_4 3)^b$$

- ㄴ. 위의 그림에서 $0 < x < 1$ 일 때 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프가 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프보다 위에 있으므로

$$\log_3 x < \log_4 x$$

- ㄷ. 주어진 로그의 밑을 변환하면

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 = -\log_3 5, \log_{\frac{1}{4}} 5 = -\log_4 5$$

위의 그림에서 $\log_4 5 < \log_3 5$ 이므로

$$-\log_3 5 < -\log_4 5 \quad \therefore \log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} 5$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 4 점 $C(k, 0)$ 이라 하면 $\overline{CD} = 4$ 이므로 $D(k, 4)$

점 D 가 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$4 = \log_2 k \quad \therefore k = 2^4 = 16$$

$$\therefore C(16, 0)$$

한편 $\overline{BC} = 4$ 이므로 $B(12, 0)$

이때 점 $E(12, t)$ 라 하면 점 E 는 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이고 $\overline{BE} = t$ 이므로

$$t = \log_2 12 = \log_2 (4 \times 3) = 2 + \log_2 3$$

따라서 정사각형 $FGBE$ 의 한 변의 길이는 $2 + \log_2 3$ 이다.

02 지수함수와 로그함수의 활용

1 개념 CHECK

p.65

1. 답 (1) $x = -4$ (2) $x = -3$ (3) $x = -3$

2. 답 (1) $x < -1$ (2) $x > \frac{7}{2}$ (3) $x \geq 3$

1 유제 & 문제

p.66~71

- 유제 01 답 (1) $x = -\frac{4}{9}$ (2) $x = -3$ 또는 $x = 1$

$$(3) x = -2 \quad (4) x = 0$$

- (1) $8^{x+1} = \sqrt[3]{32}$ 에서 양변의 밑을 2로 같게 변형하면

$$2^{3(x+1)} = 2^{\frac{5}{3}}$$

이 방정식이 성립하려면 지수가 같아야 하므로

$$3(x+1) = \frac{5}{3}, 3x = -\frac{4}{3} \quad \therefore x = -\frac{4}{9}$$

- (2) $4^x - 64 \times \left(\frac{1}{16}\right)^x = 0$ 에서 $4^x = 64 \times \left(\frac{1}{16}\right)^x$ 이므로

양변의 밑을 2로 같게 변형하면

$$2^{2x} = 2^6 \times 2^{-4x} \quad \therefore 2^{2x} = 2^{6-4x}$$

이 방정식이 성립하려면 지수가 같아야 하므로

$$2x^2 = 6 - 4x, 2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

- (3) $4^{-x} - 2^{-x+1} - 8 = 0$ 을 변형하면

$$(2^2)^{-x} - 2 \times 2^{-x} - 8 = 0, (2^{-x})^2 - 2 \times 2^{-x} - 8 = 0$$

$$\therefore \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0, (t+2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4, \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \therefore x = -2$$

(4) $5^x + 5^{-x} = 2$ 를 변형하면

$$5^x + \frac{1}{5^x} = 2$$

$$5^x = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t + \frac{1}{t} = 2, t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

$$t = 5^x \text{이므로}$$

$$5^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

문제 01-1 답 0

$$9^{|x|} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \text{에서 양변의 밑을 3으로 같게 변형하면}$$

$$3^{2|x|} = 3^{-x^2+3}$$

$$\therefore 2|x| = -x^2 + 3$$

(i) $x < 0$ 일 때, $-2x = -x^2 + 3$ 에서

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 (\because x < 0)$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때, $2x = -x^2 + 3$ 에서

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 (\because x \geq 0)$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $-1 + 1 = 0$

문제 01-2 답 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$$\text{두 수 } 3+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$$

$$= 3-2\sqrt{2}$$

..... ㉠

즉, $3+2\sqrt{2}$ 와 $3-2\sqrt{2}$ 는 역수 관계에 있다.

$(3+2\sqrt{2})^x + (3-2\sqrt{2})^x - 6 = 0$ 을 변형하면

$$(3+2\sqrt{2})^x + \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^x - 6 = 0$$

$$\therefore (3+2\sqrt{2})^x + \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x} - 6 = 0$$

$$(3+2\sqrt{2})^x = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t + \frac{1}{t} - 6 = 0, t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$\therefore t = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$t = (3+2\sqrt{2})^x \text{이므로}$$

(i) $(3+2\sqrt{2})^x = 3+2\sqrt{2}$ 에서 $x = 1$

$$(ii) (3+2\sqrt{2})^x = 3-2\sqrt{2} \text{에서}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x = (3+2\sqrt{2})^{-1} (\because \text{㉠}) \quad \therefore x = -1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = -1$ 또는 $x = 1$

유제 02 답 (1) $x = 3$ (2) $x = 1$

(1) $(x-2)^{x-3} = (2x-3)^{x-3}$ 의 지수가 같으므로 밑이 같거나, 지수가 0이어야 한다.

$$(i) \text{ 밑이 같으면 } x-2 = 2x-3 \quad \therefore x = 1$$

그런데 $x > 2$ 이므로 만족하는 x 의 값은 없다.

$$(ii) \text{ 지수가 0이면 } x-3 = 0 \quad \therefore x = 3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 3$

(2) $x^{3x+4} = x^{-x+2}$ 의 밑이 같으므로 밑이 1이거나, 지수가 같아야 한다.

$$(i) \text{ 밑이 1이면 } x = 1$$

$$(ii) \text{ 지수가 같으면 } 3x+4 = -x+2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

그런데 $x > 0$ 이므로 만족하는 x 의 값은 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 1$

문제 02-1 답 6

$$16(x+1)^x = 2^{2x}(x+1)^2 \text{에서 } x+1 \neq 0 \text{이므로}$$

$$(x+1)^{x-2} = 2^{2x-4} \quad \therefore (x+1)^{x-2} = 4^{x-2}$$

지수가 같으므로 밑이 같거나, 지수가 0이어야 한다.

$$(i) \text{ 밑이 같으면 } x+1 = 4 \quad \therefore x = 3$$

$$(ii) \text{ 지수가 0이면 } x-2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $2 \times 3 = 6$

문제 02-2 답 $x = 1$ 또는 $x = 2$

$$x^x x^x = (x^x)^x \text{을 변형하면 } x^{2x} = x^{x^2}$$

밑이 같으므로 밑이 1이거나, 지수가 같아야 한다.

$$(i) \text{ 밑이 1이면 } x = 1$$

$$(ii) \text{ 지수가 같으면 } 2x = x^2, x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 (\because x > 0)$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

유제 03 답 (1) 3 (2) $a > 2$

$$(1) 4^x - 3 \times 2^{x+2} + 8 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 8 = 0$$

..... ㉠

$$2^x = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 12t + 8 = 0$$

..... ㉡

방정식 ㉠의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ㉡의 두 근은

$$2^\alpha, 2^\beta$$

따라서 방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$$2^\alpha \times 2^\beta = 8, 2^{\alpha+\beta} = 2^3$$

$$\therefore \alpha + \beta = 3$$

(2) $4^x - a \times 2^{x+2} + 16 = 0$ 을 변형하면

$$(2^x)^2 - 4a \times 2^x + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$2^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^2 - 4at + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

실수 x 에 대하여 $t = 2^x > 0$ 이므로 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지면 t 에 대한 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 양의 실근을 가진다.

따라서 이차방정식 ㉡이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 조건은

(i) 판별식 $D > 0$ 에서 $\frac{D}{4} = 4a^2 - 16 > 0, a^2 - 4 > 0$

$$(a+2)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

(ii) (두 근의 합) > 0 에서 $4a > 0 \quad \therefore a > 0$

(iii) (두 근의 곱) > 0 에서 $16 > 0$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는 $a > 2$

문제 03-1 답 $8 \leq m < 10$

$4^x - 2(m-4)2^x + 2m = 0$ 을 변형하면

$$(2^x)^2 - 2(m-4)2^x + 2m = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^2 - 2(m-4)t + 2m = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크면 $x > 1$ 이므로 $2^x = t$ 에서 $t > 2$

즉, t 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 2보다 크다.

$f(t) = t^2 - 2(m-4)t + 2m$ 이라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근이 2보다 클 조건은

(i) 방정식 ㉠의 판별식 $D \geq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m = m^2 - 10m + 16 \geq 0$$

$$(m-2)(m-8) \geq 0 \quad \therefore m \leq 2 \text{ 또는 } m \geq 8$$

(ii) $y = f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $t = m-4$ 이므로 $m-4 > 2 \quad \therefore m > 6$

(iii) $f(2) > 0$ 이어야 하므로

$$4 - 4(m-4) + 2m > 0 \quad \therefore m < 10$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 m 의 값의 범위는 $8 \leq m < 10$

유제 04 답 (1) $-2 < x < \frac{3}{2}$ (2) $x \leq \frac{1}{2}$

(3) $x < 1$ 또는 $x > 3$ (4) $-3 \leq x \leq -1$

(1) $9^{x(x-1)} < 27^{2-x}$ 을 변형하면

$$(3^2)^{x(x-1)} < (3^3)^{2-x} \quad \therefore 3^{2x^2-2x} < 3^{6-3x}$$

밑 3이 $3 > 1$ 이므로

$$2x^2 - 2x < 6 - 3x, 2x^2 + x - 6 < 0$$

$$(x+2)(2x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < \frac{3}{2}$$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{81}\right)^x$ 을 변형하면

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^x \quad \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$$

밑 $\frac{1}{3}$ 이 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$2x+1 \geq 4x \quad \therefore x \leq \frac{1}{2}$$

(3) $9^x - 10 \times 3^{x+1} + 81 > 0$ 을 변형하면

$$(3^x)^2 - 30 \times 3^x + 81 > 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^2 - 30t + 81 > 0, (t-3)(t-27) > 0$$

$$\therefore 0 < t < 3 \text{ 또는 } t > 27 \quad (\because t > 0)$$

$t = 3^x$ 이므로

$$0 < 3^x < 3 \text{ 또는 } 3^x > 27$$

$$3^x < 3^1 \text{ 또는 } 3^x > 3^3$$

밑 3이 $3 > 1$ 이므로

$$x < 1 \text{ 또는 } x > 3$$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 16 \leq 0$ 을 변형하면

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 16 \leq 0$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^2 - 10t + 16 \leq 0, (t-2)(t-8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 8$$

$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로

$$2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$$-3 \leq x \leq -1$$

문제 04-1 답 0

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} \leq 32 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$ 을 변형하면

$$2^{-3(2x+1)} \leq 2^5 \leq 2^{-(3x-9)} \quad \therefore 2^{-6x-3} \leq 2^5 \leq 2^{-3x+9}$$

밑 2가 $2 > 1$ 이므로

$$-6x-3 \leq 5 \leq -3x+9$$

(i) $-6x-3 \leq 5$ 에서 $x \geq -\frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

(ii) $5 \leq -3x+9$ 에서 $x \leq \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

㉠, ㉡의 공통부분은 $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{4}{3}$, 최솟값은 $-\frac{4}{3}$ 이므로 그 합은

$$\frac{4}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = 0$$

문제 04-2 답 $-1 < x < 0$

$0.125^x - 0.25^x - 4 \times 0.5^x + 4 < 0$ 을 변형하면

$$(0.5^x)^3 - (0.5^x)^2 - 4 \times 0.5^x + 4 < 0$$

$0.5^x = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 < 0, (t+2)(t-1)(t-2) < 0$$

이때 $t > 0$ 에서 $t+2 > 0$ 이므로

$$(t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

$t = 0.5^x$ 이므로

$$1 < 0.5^x < 2, \left(\frac{1}{2}\right)^0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $-1 < x < 0$

유제 05 답 $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

$x^{3x-2} > x^{x+4}$ 의 밑이 x 이므로 밑의 범위를 나누어 풀면

(i) $0 < x < 1$ 일 때, 지수끼리 비교하면

$$3x-2 < x+4 \quad \therefore x < 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$ 일 때, 주어진 부등식은 $1 > 1$ 이므로 모순이다.

즉, $x = 1$ 은 해가 아니다.

(iii) $x > 1$ 일 때, 지수끼리 비교하면

$$3x-2 > x+4 \quad \therefore x > 3$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

문제 05-1 답 3

$x^x \leq x^{2x+3}$ 의 밑이 x 이므로 밑의 범위를 나누어 풀면

(i) $0 < x < 1$ 일 때, 지수끼리 비교하면

$$x^2 \geq 2x+3, x^2-2x-3 \geq 0, (x+1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x = 1$ 일 때, 주어진 부등식은 $1 \leq 1$ 이므로 $x = 1$ 은 해이다.

(iii) $x > 1$ 일 때, 지수끼리 비교하면

$$x^2 \leq 2x+3, x^2-2x-3 \leq 0, (x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 \leq x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3의 3개이다.

문제 05-2 답 $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$

$(x^2-2x+1)^{x+2} < (x^2-2x+1)^{4x-1}$ 의 밑이 x^2-2x+1

이므로 밑의 범위를 나누어 풀면

(i) $0 < x^2-2x+1 < 1$ 일 때

$$0 < x^2-2x+1 \text{에서 } (x-1)^2 > 0$$

$\therefore x \neq 1$ 인 모든 실수

..... ㉠

$$x^2-2x+1 < 1 \text{에서 } x(x-2) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 2$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$

..... ㉢

주어진 부등식에서 지수끼리 비교하면

$$x+2 > 4x-1 \quad \therefore x < 1$$

그런데 ㉢을 만족해야 하므로 $0 < x < 1$

(ii) $x^2-2x+1 = 1$, 즉 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 일 때

주어진 부등식은 $1 < 1$ 이므로 모순이다.

즉, $x = 0$ 과 $x = 2$ 는 해가 아니다.

(iii) $x^2-2x+1 > 1$ 일 때, $x(x-2) > 0$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 2$$

..... ㉣

주어진 부등식에서 지수끼리 비교하면

$$x+2 < 4x-1 \quad \therefore x > 1$$

그런데 ㉣을 만족해야 하므로 $x > 2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x < 1$ 또는 $x > 2$

유제 06 답 6일

박테리아 A는 처음 1마리가 하루에 4배씩 늘어나므로

$$(n \text{일 후의 박테리아 A의 수}) = 1 \times 4^n$$

박테리아 B는 처음 2마리가 하루에 2배씩 늘어나므로

$$(n \text{일 후의 박테리아 B의 수}) = 2 \times 2^n$$

k 일 후의 두 박테리아 A, B의 수의 차가 2400마리 이상 된다고 하면

$$4^k - 2 \times 2^k \geq 2400 \quad \therefore (2^k)^2 - 2 \times 2^k - 2400 \geq 0$$

$2^k = t$ ($t > 0$)라 하면

$$t^2 - 2t - 2400 \geq 0, (t+48)(t-50) \geq 0$$

$$\therefore t \geq 50 (\because t > 0)$$

$$t = 2^k \text{이므로 } 2^k \geq 50$$

이때 $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ 이므로 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

따라서 두 박테리아 A, B의 수의 차가 처음으로 2400마리 이상 되는 것은 번식을 시작한 지 6일 후이다.

문제 06-1 답 13.5등급

$$\frac{(n \text{등급의 밝기})}{(n+1 \text{등급의 밝기})} = k \text{라 하자.}$$

1등급의 별의 밝기가 6등급의 별의 밝기의 100배이므로

$$\frac{(1 \text{등급의 밝기})}{(6 \text{등급의 밝기})} = k^5 = 100$$

$$\frac{(1 \text{등급의 밝기})}{(2 \text{등급의 밝기})} \times \frac{(2 \text{등급의 밝기})}{(3 \text{등급의 밝기})} \times \cdots \times \frac{(5 \text{등급의 밝기})}{(6 \text{등급의 밝기})}$$

$$\therefore k = 100^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{2}{5}} = 2.5$$

즉, n 등급의 별은 $n+1$ 등급의 별보다 2.5배 더 밝다.

6등급의 별보다 1000배 어두운 별의 등급을 x 라 하면

$$\frac{(\text{6등급의 밝기})}{(\text{x등급의 밝기})} = 2.5^{x-6} = 1000$$

$$(10^{\frac{2}{5}})^{x-6} = 10^3 \text{이므로}$$

$$\frac{2}{5}(x-6) = 3 \quad \therefore x = \frac{27}{2} = 13.5$$

따라서 6등급의 별보다 1000배 어두운 별은 13.5등급이다.

2 개념 CHECK

p.72

1. 답 (1) $x=5$ (2) $x=1$

2. 답 (1) $\frac{3}{2} < x \leq \frac{7}{2}$ (2) $x > 3$

(2) 진수의 조건에 의해 $2x-5 > 0$, $x-3 > 0$ 이므로

$$x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{및 } \frac{1}{3} \text{이 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$2x-5 > x-3 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $x > 3$

2 유제 & 문제

p.73~78

유제 07 답 (1) $x=3$ (2) $x=3$ (3) $x=4$ 또는 $x=8$

(4) $x=2$ 또는 $x=16$

(1) 진수의 조건에 의해 $x-2 > 0$, $x+6 > 0$ 이므로
 $x > 2$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+6) = -2 \text{를 변형하면}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(x+6) = -2$$

로그의 정의에 의해

$$(x-2)(x+6) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \quad x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x+7)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 3$$

진수의 조건이 $x > 2$ 이므로 $x = 3$

(2) 진수의 조건에 의해 $x-1 > 0$, $4-x > 0$ 이므로

$$1 < x < 4$$

$\log_2(x-1) = \log_4(4-x) + 1$ 에서 양변의 로그의 밑을 2로 같게 변형하면

$$\log_2(x-1) = \frac{1}{2}\log_2(4-x) + \log_2 2$$

$$2\log_2(x-1) = \log_2(4-x) + 2\log_2 2$$

$$\log_2(x-1)^2 = \log_2 4(4-x)$$

진수끼리 비교하면

$$(x-1)^2 = 4(4-x), \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x+5)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

진수의 조건이 $1 < x < 4$ 이므로 $x = 3$

(3) 진수의 조건에 의해 $x > 0$, $x^5 > 0$ 이므로 $x > 0$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 6 = 0$$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$t^2 - 5t + 6 = 0, \quad (t-2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x = 2 \text{ 또는 } \log_2 x = 3$$

로그의 정의에 의해

$$x = 2^2 = 4 \text{ 또는 } x = 2^3 = 8$$

진수의 조건이 $x > 0$ 이므로

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

(4) 진수의 조건에 의해 $\frac{4}{x} > 0$, $\frac{x}{8} > 0$ 이므로 $x > 0$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x} \times \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{8} = -2 \text{를 변형하면}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 8) = -2$$

$$(-2 - \log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} x + 3) = -2$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 5\log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 라 하면

$$t^2 + 5t + 4 = 0, \quad (t+1)(t+4) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = -4$$

$$t = \log_{\frac{1}{2}} x \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x = -4$$

로그의 정의에 의해

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \text{ 또는 } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

진수의 조건이 $x > 0$ 이므로

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 16$$

문제 07-1 답 81

밑과 진수의 조건에 의해 $x > 0$, $x \neq 1$

$\log_3 x + \log_x 27 = 4$ 를 변형하면

$$\log_3 x + 3\log_x 3 - 4 = 0 \quad \therefore \log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} - 4 = 0$$

$\log_3 x = t$ 라 하면

$$t + \frac{3}{t} - 4 = 0, \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } \log_3 x = 1 \text{ 또는 } \log_3 x = 3$$

로그의 정의에 의해 $x = 3^1 = 3$ 또는 $x = 3^3 = 27$

밑과 진수의 조건이 $x > 0$, $x \neq 1$ 이므로 주어진 방정식의

근은 $x = 3$ 또는 $x = 27$

두 근이 α, β 이므로

$$\alpha\beta = 3 \times 27 = 81$$

다른 풀이

$\log_3 x = t$ 라 하면 $t^2 - 4t + 3 = 0$ ㉠
주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$
방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의해
 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 4 \quad \therefore \log_3 \alpha \beta = 4$
로그의 정의에 의해 $\alpha \beta = 3^4 = 81$

문제 07-2 답 $x=3$

밑과 진수의 조건에 의해 $x^2 - x - 2 > 0, x^2 - x - 2 \neq 1, 2x - 1 > 0$ 이므로
 $x > 2, x \neq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ㉠
 $\log_{x^2-x-2}(2x-1) = \log_4(2x-1)$ 에서 진수가 같으므로
밑이 같거나 진수가 1이어야 한다.

(i) 밑이 같으면

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 ㉠에서 $x = 3$

(ii) 진수가 1이면

$$2x - 1 = 1 \quad \therefore x = 1$$

그런데 $x = 1$ 은 ㉠을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 3$

유제 08 답 (1) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 1000$

$$(2) x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

$$(3) x = 10 \text{ 또는 } x = 100$$

$$(4) x = 1 \text{ 또는 } x = 100$$

(1) 진수의 조건에 의해 $x > 0$

$x^{\log x} = 1000x^2$ 의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$$\log x^{\log x} = \log 1000x^2$$

$$\log x \times \log x = \log 1000 + \log x^2$$

$$\therefore (\log x)^2 - 2\log x - 3 = 0$$

$\log x = t$ 라 하면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$t = \log x$ 이므로

$$\log x = -1 \text{ 또는 } \log x = 3$$

로그의 정의에 의해

$$x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 10^3 = 1000$$

진수의 조건이 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000$$

(2) 진수의 조건에 의해 $x > 0$

$x^{2\log_3 x} = \frac{9}{x^3}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 정리하면

$$\log_3 x^{2\log_3 x} = \log_3 \frac{9}{x^3}$$

$$2\log_3 x \times \log_3 x = \log_3 9 - \log_3 x^3$$

$$\therefore 2(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x - 2 = 0$$

$\log_3 x = t$ 라 하면

$$2t^2 + 3t - 2 = 0, (t+2)(2t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } \log_3 x = -2 \text{ 또는 } \log_3 x = \frac{1}{2}$$

로그의 정의에 의해

$$x = 3^{-2} = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

진수의 조건이 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

(3) 진수의 조건에 의해 $x > 0$

로그의 성질에 의해 $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ 이므로

$$x^{\log 2} \times 2^{\log x} - 6 \times 2^{\log x} + 8 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$2^{\log x} \times 2^{\log x} - 6 \times 2^{\log x} + 8 = 0$$

$$\therefore (2^{\log x})^2 - 6 \times 2^{\log x} + 8 = 0$$

$$2^{\log x} = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0, (t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = 2^{\log x} \text{이므로 } 2^{\log x} = 2 \text{ 또는 } 2^{\log x} = 4$$

$$\therefore \log x = 1 \text{ 또는 } \log x = 2$$

로그의 정의에 의해

$$x = 10^1 = 10 \text{ 또는 } x = 10^2 = 100$$

진수의 조건이 $x > 0$ 이므로

$$x = 10 \text{ 또는 } x = 100$$

(4) 진수의 조건에 의해 $x > 0$

로그의 성질에 의해 $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 이므로

$$x^{\log 3} \times 3^{\log x} - 5(x^{\log 3} + 3^{\log x}) + 9 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} - 5(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 9 = 0$$

$$\therefore (3^{\log x})^2 - 10 \times 3^{\log x} + 9 = 0$$

$$3^{\log x} = t (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0, (t-1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 9$$

$$t = 3^{\log x} \text{이므로 } 3^{\log x} = 1 \text{ 또는 } 3^{\log x} = 9$$

$$\therefore \log x = 0 \text{ 또는 } \log x = 2$$

로그의 정의에 의해

$$x = 10^0 = 1 \text{ 또는 } x = 10^2 = 100$$

진수의 조건이 $x > 0$ 이므로 $x = 1$ 또는 $x = 100$

문제 08-1 답 $x = \frac{1}{6}$

진수의 조건에 의해 $x > 0$

$2^{\log 2x} = 3^{\log 3x}$ 의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$$\log 2^{\log 2x} = \log 3^{\log 3x}$$

$$\log 2x \times \log 2 = \log 3x \times \log 3$$

$$(\log 2 + \log x) \log 2 = (\log 3 + \log x) \log 3$$

$$(\log 2 - \log 3) \log x = (\log 3)^2 - (\log 2)^2$$

$$\therefore \log x = \frac{(\log 3 + \log 2)(\log 3 - \log 2)}{\log 2 - \log 3}$$

$$= -(\log 3 + \log 2) = -\log 6 = \log \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}$$

유제 09 답 (1) $4 < x < 7$ (2) $x > \frac{29}{2}$

$$(3) 0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 9 \quad (4) \frac{1}{32} < x < \frac{1}{2}$$

(1) 진수의 조건에 의해 $x > 0$, $7-x > 0$, $5x-8 > 0$ 이므로

$$\frac{8}{5} < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log x + \log(7-x) < \log(5x-8)$ 을 변형하면

$$\log x(7-x) < \log(5x-8)$$

밑 10이 $10 > 1$ 이므로

$$x(7-x) < 5x-8, x^2-2x-8 > 0$$

$$(x+2)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$4 < x < 7$$

(2) 진수의 조건에 의해 $x-2 > 0$ 이므로

$$x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_5(x-2) + \log_{25} 4 > 2$ 에서 양변의 로그의 밑을 5로 같게 변형하면

$$\log_5(x-2) + \log_5 2 > \log_5 25$$

$$\therefore \log_5 2(x-2) > \log_5 25$$

밑 5가 $5 > 1$ 이므로

$$2(x-2) > 25, x-2 > \frac{25}{2} \quad \therefore x > \frac{29}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$x > \frac{29}{2}$$

(3) 진수의 조건에 의해 $x > 0$ $\textcircled{1}$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 라 하면

$$t^2 - t - 6 \geq 0, (t+2)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 3$$

$$t = \log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq 3$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$\text{밑 } \frac{1}{3} \text{이 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$x \geq 9 \text{ 또는 } x \leq \frac{1}{27} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 9$$

(4) 진수의 조건에 의해 $4x > 0$, $16x > 0$ 이므로

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_2 4x \times \log_2 16x < 3$ 을 변형하면

$$(2 + \log_2 x)(4 + \log_2 x) < 3$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + 6\log_2 x + 5 < 0$$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$t^2 + 6t + 5 < 0, (t+5)(t+1) < 0$$

$$\therefore -5 < t < -1$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$-5 < \log_2 x < -1$$

$$\therefore \log_2 \frac{1}{32} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\text{밑 } 2 \text{가 } 2 > 1 \text{이므로 } \frac{1}{32} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{32} < x < \frac{1}{2}$$

문제 09-1 답 $1 < x \leq 2$

진수의 조건에 의해 $x > 0$, $\log_2 x > 0$ 이므로

$$x > 0, \log_2 x > \log_2 1 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_3(\log_2 x) \leq 0$ 에서 양변의 로그의 밑을 3으로 같게 변형하면

$$\log_3(\log_2 x) \leq \log_3 1$$

밑 3이 $3 > 1$ 이므로 $\log_2 x \leq 1$

$\log_2 x \leq 1$ 에서 양변의 로그의 밑을 2로 같게 변형하면

$$\log_2 x \leq \log_2 2$$

$$\text{밑 } 2 \text{가 } 2 > 1 \text{이므로 } x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $1 < x \leq 2$

유제 10 답 $\frac{1}{2} < x < 16$

진수의 조건에 의해 $x > 0$ $\textcircled{1}$

$x^{\log_5 x} < 16x^3$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 정리하면

$$\log_2 x^{\log_5 x} < \log_2 16x^3, \log_2 x \times \log_2 x < \log_2 16 + \log_2 x^3$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 < 0$$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$t^2 - 3t - 4 < 0, (t+1)(t-4) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 4$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } -1 < \log_2 x < 4$$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 16$$

$$\text{밑 } 2 \text{가 } 2 > 1 \text{이므로 } \frac{1}{2} < x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < x < 16$$

문제 10-1 답 $1 < x < 10$

진수의 조건에 의해 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

로그의 성질에 의해 $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ 이므로

$$2^{\log x} \times x^{\log 2} - \frac{3}{2}(2^{\log x} + x^{\log 2}) + 2 < 0 \text{을 변형하면}$$

$$2^{\log x} \times 2^{\log x} - \frac{3}{2}(2^{\log x} + 2^{\log x}) + 2 < 0$$

$$(2^{\log x})^2 - 3 \times 2^{\log x} + 2 < 0$$

$$2^{\log x} = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 3t + 2 < 0, \ (t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 2$$

$$t = 2^{\log x} \text{이므로 } 1 < 2^{\log x} < 2$$

$$2^0 < 2^{\log x} < 2^1$$

지수의 밑 2가 $2 > 1$ 이므로 $0 < \log x < 1$

$$\log 1 < \log x < \log 10$$

로그의 밑 10이 $10 > 1$ 이므로

$$1 < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $1 < x < 10$

문제 10-2 답 $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(4x+8) > -2 \\ x^{\log_{\frac{1}{3}} x} > 9x^3 \end{cases} \text{에서 진수의 조건에 의해}$$

$$4x+8 > 0, \ x > 0 \text{이므로 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+8) > -2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+8) > \log_{\frac{1}{3}} 9$$

$$\text{밑 } \frac{1}{3} \text{이 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$4x+8 < 9 \quad \therefore x < \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x} > 9x^3$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그를 취하여 정리하면

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x^3 \quad \blacktriangle \text{ 부등호 방향이 바뀐다}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 3 \log_{\frac{1}{3}} x + 2 < 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = t \text{라 하면}$$

$$t^2 - 3t + 2 < 0, \ (t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

$$t = \log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로 } 1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

$$\text{밑 } \frac{1}{3} \text{이 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} < x < \frac{1}{4}$$

유제 11 답 $\frac{1}{9} < a \leq \frac{1}{3}$

진수의 조건에 의해 $a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

이차방정식 $x^2 - 2x \log_3 a + \log_3 a + 2 = 0$ 의 판별식을 D

라 하면 두 근이 음수일 조건은

(i) $D \geq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (\log_3 a)^2 - (\log_3 a + 2) \geq 0$$

$\log_3 a = t$ 라 하면

$$t^2 - t - 2 \geq 0, \ (t+1)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2$$

$t = \log_3 a$ 이므로

$$\log_3 a \leq -1 \text{ 또는 } \log_3 a \geq 2$$

$$\therefore \log_3 a \leq \log_3 \frac{1}{3} \text{ 또는 } \log_3 a \geq \log_3 9$$

밑 3이 $3 > 1$ 이므로

$$a \leq \frac{1}{3} \text{ 또는 } a \geq 9$$

(ii) (두 근의 합) < 0 에서

$$2 \log_3 a < 0 \quad \therefore \log_3 a < \log_3 1$$

밑 3이 $3 > 1$ 이므로 $a < 1$

(iii) (두 근의 곱) > 0 에서

$$\log_3 a + 2 > 0, \ \log_3 a > -2$$

$$\therefore \log_3 a > \log_3 \frac{1}{9}$$

$$\text{밑 } 3 \text{이 } 3 > 1 \text{이므로 } a > \frac{1}{9}$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} < a \leq \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} < a \leq \frac{1}{3}$$

문제 11-1 답 $0 < k \leq 9$

진수의 조건에 의해 $k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 3x - \log_9 k \geq 0$ 을 변형하면

$$(\log_3 x)^2 + 2(1 + \log_3 x) - \log_9 k \geq 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x + 2 - \log_9 k \geq 0$$

$\log_3 x = t$ 라 하면

$$t^2 + 2t + 2 - \log_9 k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하므로 $t = \log_3 x$ 에서 부등식 ㉠은 모든 실수 t 에 대하여 성립한다. 따라서 이차방정식 $t^2 + 2t + 2 - \log_9 k = 0$ 의 판별식 $D \leq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (2 - \log_9 k) \leq 0$$

$$\log_9 k \leq 1 \quad \therefore \log_9 k \leq \log_9 9$$

밑 9가 $9 > 1$ 이므로 $k \leq 9$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 k 의 값의 범위는

$$0 < k \leq 9$$

문제 12-1 [답 2mL]

처음 방향제를 a mL 분사한 다음 6시간 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양이 16mL이므로

$$6 = 6 \log_2 \frac{a}{16}, \quad 1 = \log_2 a - \log_2 16$$

$$\log_2 a = 5 \quad \therefore a = 32$$

처음 방향제를 32mL 분사한 다음 하루 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양을 x mL라 하면

$$24 = 6 \log_2 \frac{32}{x}, \quad 4 = \log_2 32 - \log_2 x$$

$$\log_2 x = 1 \quad \therefore x = 2$$

따라서 하루 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양은 2mL이다.

문제 12-2 [답 64배]

규모 4.3인 지진의 에너지를 E_1 , 규모 3.1인 지진의 에너지를 E_2 라 하면

$$\log E_1 = 11.8 + 1.5 \times 4.3 \text{이므로}$$

$$E_1 = 10^{11.8 + 1.5 \times 4.3}$$

$$\log E_2 = 11.8 + 1.5 \times 3.1 \text{이므로}$$

$$E_2 = 10^{11.8 + 1.5 \times 3.1}$$

$$\therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{11.8 + 1.5 \times 4.3}}{10^{11.8 + 1.5 \times 3.1}} = (10^{1.2})^{1.5} = 16^{1.5}$$

$$= (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^6 = 64$$

따라서 규모 4.3인 지진의 에너지는 규모 3.1인 지진의 에너지의 64배이다.

기본 연습문제

p.79~81

1 $x = -1$ 2 $x = 2$ 3 -2 4 ③ 5 ①

6 -2 7 1 8 $x = 2$ 9 25 10 ②

11 18 12 2 13 $x > 5$ 14 ③

15 $\frac{1}{3} < a < 27$

1 $27^{x^2+1} - 9^{x+4} = 0$ 에서 $27^{x^2+1} = 9^{x+4}$ 이므로 양변의 밑을 3으로 같게 변형하면

$$3^{3x^2+3} = 3^{2x+8}$$

지수가 같아야 하므로

$$3x^2 + 3 = 2x + 8, \quad 3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$(x+1)(3x-5) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}$$

따라서 가장 작은 근은 $x = -1$ 이다.

2 $9^x - 10 \times 3^x + 9 = 0$ 을 변형하면

$$(3^x)^2 - 10 \times 3^x + 9 = 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0, \ (t-1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 9$$

$$t = 3^x \text{이므로 } 3^x = 1 \text{ 또는 } 3^x = 9$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 양수인 근은 $x = 2$ 이다.

3 $2^{x+1} - 2^{-x} = 1$ 을 변형하면

$$2 \times 2^x - \frac{1}{2^x} = 1$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$2t - \frac{1}{t} = 1, \ 2t^2 - t - 1 = 0, \ (2t+1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \ (\because t > 0)$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

연립방정식의 해가 단 하나 존재하므로 $x = 0$ 을

$$8^{x-1} = (2\sqrt{2})^k \text{에 대입하면}$$

$$8^{-1} = (2\sqrt{2})^k$$

양변의 밑을 2로 같게 변형하면

$$2^{-3} = 2^{\frac{3}{2}k}$$

$$-3 = \frac{3}{2}k \text{이므로 } k = -2$$

4 $(x^2)^x = x^x \times x^6$ 에서 $x^{2x} = x^{x+6}$

밑이 같으므로 밑이 1이거나, 지수가 같아야 한다.

(i) 밑이 1이면 $x = 1$

(ii) 지수가 같으면 $2x = x + 6 \quad \therefore x = 6$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $1 \times 6 = 6$

5 $4^x - a \times 2^x + a^2 - 3a = 0$ 을 변형하면

$$(2^x)^2 - a \times 2^x + a^2 - 3a = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - at + a^2 - 3a = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 주어진 방정식의 두 근이 0과 2 사이에 존재하려면 t 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 $2^0 = 1$ 과 $2^2 = 4$ 사이에 존재해야 한다.

$f(t)=t^2-at+a^2-3a$ 라 할 때, t 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 1과 4 사이에 존재할 조건은

(i) 방정식 ㉠의 판별식 $D \geq 0$ 에서

$$D=a^2-4(a^2-3a) \geq 0$$

$$3a^2-12a \leq 0, 3a(a-4) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 4$$

(ii) $y=f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $t=\frac{a}{2}$ 이므로

$$1 < \frac{a}{2} < 4 \quad \therefore 2 < a < 8$$

(iii) $f(1) > 0$ 에서 $f(1)=a^2-4a+1 > 0$

$$\{a-(2-\sqrt{3})\}\{a-(2+\sqrt{3})\} > 0$$

$$\therefore a < 2-\sqrt{3} \text{ 또는 } a > 2+\sqrt{3}$$

(iv) $f(4) > 0$ 에서

$$f(4)=a^2-7a+16=\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4} > 0$$

$\therefore a$ 는 모든 실수

(i)~(iv)를 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$$2+\sqrt{3} < a \leq 4$$

따라서 정수 a 는 4의 1개이다.

6 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+2x+5} \leq \left(\frac{1}{81}\right)^{x^2+2x-5}$ 의 양변의 밑을 $\frac{1}{9}$ 로 같게 변형하면

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+2x+5} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2+4x-10}$$

밑 $\frac{1}{9}$ 이 $0 < \frac{1}{9} < 1$ 이므로

$$x^2+2x+5 \geq 2x^2+4x-10, x^2+2x-15 \leq 0$$

$$(x+5)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -5 \leq x \leq 3$$

따라서 x 의 최댓값은 3, 최솟값은 -5이므로 그 합은

$$3+(-5)=-2$$

7 A($k, 4^k$), B($k, 2^k$)이므로

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times k$$

$$= \frac{1}{2} (4^k - 2^k) \times k$$

$$\triangle COD = \frac{1}{2} \times \overline{CO} \times k = \frac{1}{2} k$$

$\triangle ACB$ 의 넓이가 $\triangle COD$ 의 넓

이의 2배 이상이 되어야 하므로

$$\frac{1}{2} (4^k - 2^k) \times k \geq 2 \times \frac{1}{2} k \quad \therefore 4^k - 2^k \geq 2 (\because k > 0)$$

$2^k = t (t > 1)$ 라 하면

◀ $k > 0$ 이면 $t = 2^k > 1$

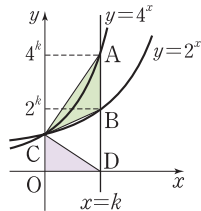
$$t^2 - t - 2 \geq 0, (t+1)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \geq 2 (\because t > 1)$$

$$t = 2^k \text{이므로 } 2^k \geq 2$$

밑 2가 $2 > 1$ 이므로 $k \geq 1$

따라서 k 의 최솟값은 1이다.



8 진수의 조건에 의해 $2x-1 > 0, x^2+5 > 0$ 이므로

$$x > \frac{1}{2}$$

$\log_3(2x-1) = \log_9(x^2+5)$ 에서 양변의 밑을 3으로 같게 변형하면

$$\log_3(2x-1) = \frac{1}{2} \log_3(x^2+5)$$

$$2\log_3(2x-1) = \log_3(x^2+5)$$

$$\log_3(2x-1)^2 = \log_3(x^2+5)$$

진수끼리 비교하면

$$(2x-1)^2 = x^2+5$$

$$3x^2-4x-4=0, (3x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

진수의 조건이 $x > \frac{1}{2}$ 이므로 $x = 2$

9 진수의 조건에 의해 $x > 0, y > 0$

$\log_3 x = X, \log_2 y = Y$ 라 하면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=6 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ XY=8 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

㉠에서 $Y = -X+6$ 을 ㉡에 대입한 후 방정식을 풀면

$$X(-X+6)=8, X^2-6X+8=0$$

$$(X-2)(X-4)=0$$

$$\therefore X=2 \text{ 또는 } X=4$$

$\cdots \cdots \textcircled{3}$

㉢을 ㉠에 각각 대입하여 Y 의 값을 구하면

$$Y=4 \text{ 또는 } Y=2$$

$$X=\log_3 x, Y=\log_2 y \text{이므로}$$

(i) $X=2, Y=4$ 일 때

$$\log_3 x = 2, \log_2 y = 4$$

$$\therefore x = 3^2 = 9, y = 2^4 = 16$$

(ii) $X=4, Y=2$ 일 때

$$\log_3 x = 4, \log_2 y = 2$$

$$\therefore x = 3^4 = 81, y = 2^2 = 4$$

진수의 조건이 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$x=9, y=16 \text{ 또는 } x=81, y=4$$

$$\alpha < \beta \text{이므로 } \alpha=9, \beta=16 \quad \therefore \alpha+\beta=25$$

10 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 2 = 0$ 을 변형하면

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2 = 0$$

$\cdots \cdots \textcircled{1}$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

$\cdots \cdots \textcircled{2}$

이때 방정식 ㉠의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ㉡의 두 근은

$$\log_2 \alpha, \log_2 \beta$$

방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2, \log_2 \alpha \times \log_2 \beta = -2$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \log_a \beta + \log_\beta a \\
 &= \frac{\log_2 \beta}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 \beta} \\
 &= \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 \beta)^2}{\log_2 a \times \log_2 \beta} \\
 &= \frac{(\log_2 a + \log_2 \beta)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 \beta}{\log_2 a \times \log_2 \beta} \\
 &= \frac{2^2 - 2 \times (-2)}{-2} = -4
 \end{aligned}$$

11 진수의 조건에 의해 $x > 0$

$$\log_3 x \times \log_3 \frac{27}{x} = \frac{a}{8} \text{를 변형하면}$$

$$(\log_3 x)(\log_3 27 - \log_3 x) - \frac{a}{8} = 0$$

$$(\log_3 x)(3 - \log_3 x) - \frac{a}{8} = 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x + \frac{a}{8} = 0$$

$\log_3 x = t$ 라 하면

$$t^2 - 3t + \frac{a}{8} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 주어진 방정식이 한 실근만을 가지고, $x > 0$ 일 때 $t = \log_3 x$ 는 모든 실수이므로 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{7}$ 은 중근을 가져야 한다.

따라서 방정식 $\textcircled{7}$ 의 판별식 $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = (-3)^2 - 4 \times \frac{a}{8} = 0$$

$$9 - \frac{a}{2} = 0 \quad \therefore a = 18$$

12 진수의 조건에 의해 $3x+1 > 0$, $2x-1 > 0$ 이므로

$$x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \text{에서 양변의 로그의 밑을 } \frac{1}{3}$$

로 같게 변형하면

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)^2$$

$$\text{밑 } \frac{1}{3} \text{이 } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{이므로}$$

$$3x+1 < (2x-1)^2, 4x^2 - 7x > 0$$

$$x(4x-7) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 동시에 만족하는 } x \text{의 값의 범위는 } x > \frac{7}{4}$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 2이다.

13 밑과 진수의 조건에 의해

$$x-2 > 0, x-2 \neq 1, 2x^2 - 11x + 14 > 0 \text{이므로}$$

$$x > \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 14) > 2 \text{를 변형하면}$$

$$\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 14) > \log_{x-2}(x-2)^2$$

이때 밑 $x-2$ 가 $x-2 > 1$, $0 < x-2 < 1$ 인 경우로 나누어 부등식의 해를 구하면

(i) $x-2 > 1$, 즉 $x > 3$ 일 때

$$2x^2 - 11x + 14 > (x-2)^2, x^2 - 7x + 10 > 0$$

$$(x-2)(x-5) > 0 \quad \therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $x > 3$ 이므로

$$x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$x > 5$$

(ii) $0 < x-2 < 1$, 즉 $2 < x < 3$ 일 때

$$2x^2 - 11x + 14 < (x-2)^2, x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x-2)(x-5) < 0 \quad \therefore 2 < x < 5$$

그런데 $2 < x < 3$ 이므로

$$2 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{10}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값은 없다.

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x > 5$

14 진수의 조건에 의해 $x > 0$ $\textcircled{7}$

로그의 성질에 의해 $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 이므로

$$3^{\log x} \times x^{\log 3} - 2(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 3 < 0 \text{을 변형하면}$$

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} - 2(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 3 < 0$$

$$\therefore (3^{\log x})^2 - 4 \times 3^{\log x} + 3 < 0$$

$$3^{\log x} = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 4t + 3 < 0, (t-1)(t-3) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 3$$

$$t = 3^{\log x} \text{이므로}$$

$$1 < 3^{\log x} < 3, 3^0 < 3^{\log x} < 3^1$$

$$\text{밑 } 3 \text{이 } 3 > 1 \text{이므로}$$

$$0 < \log x < 1$$

$$\log 1 < \log x < \log 10$$

$$\text{밑 } 10 \text{이 } 10 > 1 \text{이므로}$$

$$1 < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{10}$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$1 < x < 10$$

$$\text{따라서 } a = 1, \beta = 10 \text{이므로 } a + \beta = 11$$

15 진수의 조건에 의해 $a > 0$ $\textcircled{7}$

이차방정식 $x^2 - 2(1 + \log_3 a)x + 4(1 + \log_3 a) = 0$ 의 실근이 존재하지 않으므로 판별식 $D < 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (1 + \log_3 a)^2 - 4(1 + \log_3 a) < 0$$

$$\therefore (\log_3 a)^2 - 2 \log_3 a - 3 < 0$$

$$\log_3 a = t \text{라 하면}$$

$$t^2 - 2t - 3 < 0, (t+1)(t-3) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 3$$

$$t = \log_3 a \text{ 이므로 } -1 < \log_3 a < 3$$

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 a < \log_3 27$$

$$\text{밑 } 3 \text{이 } 3 > 1 \text{이므로 } \frac{1}{3} < a < 27 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < a < 27$$

실전 연습문제

p.82

- 1 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 2 ③ 3 17 4 12번

1 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$ 이므로
 $2(4^x + 4^{-x}) - 3(2^x + 2^{-x}) - 1 = 0$ 을 변형하면
 $2\{(2^x + 2^{-x})^2 - 2\} - 3(2^x + 2^{-x}) - 1 = 0$
 $\therefore 2(2^x + 2^{-x})^2 - 3(2^x + 2^{-x}) - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$2^x + 2^{-x} = t$ 라 하면 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
 $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x 2^{-x}} = 2$
 (단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

㉠에서

$$2t^2 - 3t - 5 = 0, (t+1)(2t-5) = 0$$

$$\therefore t = \frac{5}{2} \quad (\because t \geq 2)$$

$$t = 2^x + 2^{-x} \text{이므로 } 2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$2^x = X (X > 0) \text{라 하면}$$

$$X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2}, 2X^2 - 5X + 2 = 0$$

$$(2X-1)(X-2) = 0$$

$$\therefore X = \frac{1}{2} \text{ 또는 } X = 2$$

$$X = 2^x \text{이므로}$$

$$2^x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 2^x = 2$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

2 반감기가 50년이므로 50년 후 처음 양의 $\frac{1}{2}$ 이 된다.

즉, $(50 \times x)$ 년 후 처음 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 되므로 n 년 후 처음 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{50}}$ 이 된다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{50}} = \frac{1}{100}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2}\right)^7 < \frac{1}{100} < \left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{50}} < \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\text{밑 } \frac{1}{2} \text{이 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

$$6 < \frac{n}{50} < 7 \quad \therefore 300 < n < 350$$

3 a, b 는 자연수이므로 $\log_2 a \geq 0, \log_2 b \geq 0$

(i) $b = 1$ 일 때, $\log_2 b = 0$ 이므로

$$|\log_2 a - \log_2 10| + \log_2 b \leq 1 \text{에서}$$

$$|\log_2 a - \log_2 10| \leq 1$$

$$-1 \leq \log_2 a - \log_2 10 \leq 1$$

$$\log_2 10 - 1 \leq \log_2 a \leq 1 + \log_2 10$$

$$\log_2 5 \leq \log_2 a \leq \log_2 20$$

$$\text{밑 } 2 \text{가 } 2 > 1 \text{이므로 } 5 \leq a \leq 20$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 16개이다.

(ii) $b = 2$ 일 때, $\log_2 b = 1$ 이므로

$$|\log_2 a - \log_2 10| + \log_2 b \leq 1 \text{에서}$$

$$|\log_2 a - \log_2 10| = 0$$

$$\log_2 a = \log_2 10 \quad \therefore a = 10$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 1개이다.

(iii) $b \geq 3$ 일 때, $\log_2 b > 1$ 이므로

$$|\log_2 a - \log_2 10| + \log_2 b \leq 1 \text{에서}$$

$$|\log_2 a - \log_2 10| < 0$$

이때 $|\log_2 a - \log_2 10| \geq 0$ 이므로 부등식을 만족하는 자연수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의해 순서쌍 (a, b) 는 17개이다.

4 원래 문서의 크기를 X 라 하면 n 번 축소 복사한 문서의 크기는 $0.82^n X$ 이므로

$$0.82^n X \leq 0.1X \quad \therefore 0.82^n \leq 0.1 \quad (\because X > 0)$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 0.82 \leq \log 0.1$$

$$\therefore n \log 0.82 \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{이때 } \log 8.2 = 0.9138 \text{이고, } 0.82 = 8.2 \times 10^{-1} \text{이므로}$$

$$\log 0.82 = \log(8.2 \times 10^{-1}) = \log 8.2 + \log 10^{-1}$$

$$= 0.9138 - 1 = -0.0862$$

이를 ㉠에 대입하면

$$-0.0862n \leq -1$$

$$\therefore n \geq \frac{1}{0.0862} = \frac{10000}{862} = 11.6\dots$$

따라서 최소한 12번을 축소 복사해야 한다.

01 삼각함수

1 개념 CHECK

p.85

1. 답 ⑤

- ① $-390^\circ = 360^\circ \times (-2) + 330^\circ$
- ② $-30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$
- ④ $690^\circ = 360^\circ \times 1 + 330^\circ$
- ⑤ $930^\circ = 360^\circ \times 2 + 210^\circ$

따라서 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

2. 답 (1) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (단, n 은 정수)

- (2) $360^\circ \times n + 40^\circ$ (단, n 은 정수)
- (3) $360^\circ \times n + 160^\circ$ (단, n 은 정수)
- (4) $360^\circ \times n + 150^\circ$ (단, n 은 정수)

- (1) $430^\circ = 360^\circ \times 1 + 70^\circ$
- (2) $760^\circ = 360^\circ \times 2 + 40^\circ$
- (3) $-200^\circ = 360^\circ \times (-1) + 160^\circ$
- (4) $-570^\circ = 360^\circ \times (-2) + 150^\circ$

3. 답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

- (3) 제4사분면 (4) 제1사분면

- (1) $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$
- (2) $570^\circ = 360^\circ \times 1 + 210^\circ$
- (3) $1380^\circ = 360^\circ \times 3 + 300^\circ$
- (4) $-1000^\circ = 360^\circ \times (-3) + 80^\circ$

1 유제 & 문제

p.86~87

유제 01 답 제2사분면, 제4사분면

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii)에 의해 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

문제 01-1 답 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

3θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에 의해 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

문제 02-1 답 45° , 135°

두 각 θ , 5θ 를 나타내는 두 동경이 일 직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ$$

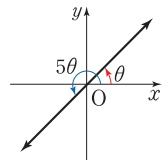
$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ, -45^\circ < 90^\circ \times n < 135^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ①에 대입하면 $\theta=45^\circ$ 또는 $\theta=135^\circ$



..... ①

문제 02-2 답 120° , 150°

두 각 θ , 11θ 를 나타내는 두 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 11\theta = 360^\circ \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$12\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \times n$$

..... ①

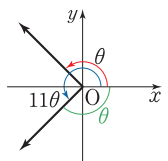
$$90^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$90^\circ < 30^\circ \times n < 180^\circ$$

$$\therefore 3 < n < 6$$

이때 n 은 정수이므로 $n=4$ 또는 $n=5$

이를 ①에 대입하면 $\theta=120^\circ$ 또는 $\theta=150^\circ$



문제 02-3 답 $20^\circ, 60^\circ$

두 각 $\theta, 8\theta$ 를 나타내는 두 동경이 y

축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 8\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$9\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 40^\circ \times n + 20^\circ$$

..... ㉠

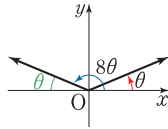
θ 가 제1사분면의 각, 즉 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 40^\circ \times n + 20^\circ < 90^\circ, \quad -20^\circ < 40^\circ \times n < 70^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{7}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=20^\circ$ 또는 $\theta=60^\circ$



2 유제 & 문제

p.89~90

유제 03 답 ④

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}(\text{라디안}), \quad 1(\text{라디안}) = \frac{180^\circ}{\pi} \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \quad -135^\circ = -135 \times 1^\circ = -135 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\textcircled{2} \quad 150^\circ = 150 \times 1^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\textcircled{3} \quad -\frac{7}{6}\pi = -\frac{7}{6}\pi \times 1 = -\frac{7}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -210^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi \times 1 = \frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \times 1 = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

문제 03-1 답 ⑤

$$\textcircled{1} \quad 50^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad 770^\circ = 360^\circ \times 2 + 50^\circ$$

$$\textcircled{3} \quad -310^\circ = 360^\circ \times (-1) + 50^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{5}{18}\pi = \frac{5}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 50^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad -\frac{41}{18}\pi = -\frac{41}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -410^\circ \\ = 360^\circ \times (-2) + 310^\circ$$

따라서 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

문제 03-2 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅅ, ㅇ

$$\text{ㄱ. } -60^\circ = 360^\circ \times (-1) + 300^\circ \quad \Rightarrow \text{제4사분면의 각}$$

$$\text{ㄴ. } 1000^\circ = 360^\circ \times 2 + 280^\circ \quad \Rightarrow \text{제4사분면의 각}$$

$$\text{ㄷ. } \frac{7}{3}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \text{제1사분면의 각}$$

$=60^\circ$

ㄹ. 2π 는 각을 나타내는 동경이 x 축 위에 있으므로 어느 사분면에도 속하지 않는다.

$$\text{ㅁ. } 2n\pi + \frac{15}{4}\pi = 2(n+1)\pi + \frac{7}{4}\pi \quad \Rightarrow \text{제4사분면의 각}$$

$=315^\circ$

$$\text{ㅂ. } 2n\pi - \frac{\pi}{3} = 2(n-1)\pi + \frac{5}{3}\pi \quad \Rightarrow \text{제4사분면의 각}$$

$=300^\circ$

$$\text{ㅅ. } -4230^\circ = 360^\circ \times (-12) + 90^\circ$$

각을 나타내는 동경이 y 축 위에 있으므로 어느 사분면에도 속하지 않는다.

$$\text{ㅇ. } -1(\text{라디안}) = -1 \times \frac{180^\circ}{\pi} \div -\frac{180^\circ}{3.14} \div -57^\circ$$

$$= 360^\circ \times (-1) + 303^\circ \Rightarrow \text{제4사분면의 각}$$

따라서 제4사분면의 각인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅅ, ㅇ이다.

유제 04 답 $\frac{4}{3}\pi, 8\pi \text{ cm}$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 넓이가

$$24\pi \text{ cm}^2 \text{이므로}$$

$$24\pi = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta \quad \therefore \theta = \frac{4}{3}\pi$$

또 부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 6 \times \frac{4}{3}\pi = 8\pi (\text{cm})$$

문제 04-1 답 4

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 반지름의 길이가 3이므로 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2 \times 3 + 3\theta = 6 + 3\theta$$

또 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times \theta = \frac{9}{2}\theta$$

이때 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이가 같으므로

$$6 + 3\theta = \frac{9}{2}\theta, \quad \frac{3}{2}\theta = 6 \quad \therefore \theta = 4$$

문제 04-2 답 3

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 12이므로

$$12 = 2r + l \quad \therefore l = 12 - 2r$$

이때 $r > 0$, $12 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 6$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl$$

$$= \frac{1}{2}r(12 - 2r) = -r^2 + 6r$$

$$= -(r-3)^2 + 9$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0 < r < 6$ 에서 $r=3$ 일 때 최대이다.

1. 답 (1) $\frac{12}{13}$ (2) $-\frac{5}{13}$ (3) $-\frac{12}{5}$

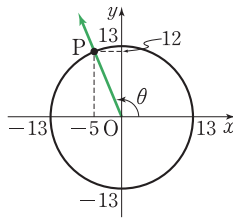
오른쪽 그림에서

$$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \text{ 이므로}$$

삼각함수의 정의에 의해

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = -\frac{5}{13},$$

$$\tan \theta = -\frac{12}{5}$$



2. 답 (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

(2) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

(3) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

(4) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

(1) 240° 는 제3사분면의 각이므로 $\tan \theta$ 만 양수이다.

(2) $400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ$ 는 제1사분면의 각이므로 모두 양수이다.

(3) $\frac{5}{6}\pi$ 는 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta$ 만 양수이다.

(4) $-\frac{17}{4}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{7}{4}\pi$ 는 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta$ 만 양수이다.

3. 답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

3 유제 & 문제

p.93~97

- 유제 05 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1$

(1) 오른쪽 그림에서 $\overline{OP} = 1$ 이고,

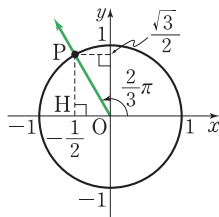
$$\angle POH = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

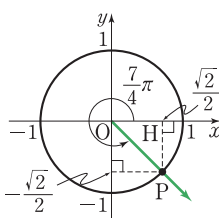


(2) 오른쪽 그림에서 $\overline{OP} = 1$ 이고,

$$\angle POH = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\therefore P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$$

문제 05-1 답 1

오른쪽 그림에서 $\overline{OP} = 1$ 이고,

$$\angle POH = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

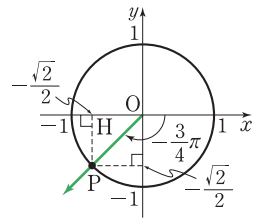
$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

따라서 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta + \tan \theta = 1$$



문제 05-2 답 3

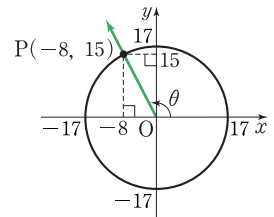
오른쪽 그림에서

$$\overline{OP} = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = 17 \text{ 이므로}$$

따라서

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17},$$

$$\tan \theta = -\frac{15}{8}$$



$$\therefore \frac{17 \sin \theta + 16 \tan \theta}{17 \cos \theta + 3} = \frac{17 \times \frac{15}{17} + 16 \times \left(-\frac{15}{8}\right)}{17 \times \left(-\frac{8}{17}\right) + 3} = 3$$

유제 06 답 제2사분면

(i) $\cos \theta \sin \theta < 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \sin \theta > 0$$

$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에 의해 주어진 조건을 동시에 만족하는 θ 는 제2사분면의 각이다.

문제 06-1 답 제4사분면

음수의 제곱근의 성질에 의해 실수 a, b 에 대하여

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이면}$$

$$a < 0, b < 0 \text{ 또는 } a = 0 \text{ 또는 } b = 0$$

이때 $\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\tan \theta} = -\sqrt{\sin \theta \tan \theta}$ 이고
 $\sin \theta \tan \theta \neq 0$, 즉 $\sin \theta \neq 0$, $\tan \theta \neq 0$ 이므로
 $\sin \theta < 0$, $\tan \theta < 0$
따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

문제 06-2 답 $-\tan \theta$

θ 는 제3사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0$, $\tan \theta > 0 \Rightarrow \sin \theta - \tan \theta < 0$
 $\therefore |\sin \theta| - \sqrt{(\sin \theta - \tan \theta)^2}$
 $= |\sin \theta| - |\sin \theta - \tan \theta|$
 $= -\sin \theta + (\sin \theta - \tan \theta)$
 $= -\tan \theta$

유제 07 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{\cos \theta}$

$$\begin{aligned} (1) & (1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta) \\ &= (1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ &= \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \times \cos^2 \theta \quad \leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ (2) & \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \tan \theta \\ &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

문제 07-1 답 2

$$\begin{aligned} & \cos^2 \theta (1 + \tan \theta)^2 + \cos^2 \theta (1 - \tan \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta \{ (1 + \tan \theta)^2 + (1 - \tan \theta)^2 \} \\ &= \cos^2 \theta (2 + 2 \tan^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\ &= 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2 \end{aligned}$$

문제 07-2 답 ③

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= (1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \boxed{\cos^2 \theta} \\ \text{또 } \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{에서 } \sin \theta = \cos \theta \tan \theta \text{이므로} \\ \tan^2 \theta - \sin^2 \theta &= \tan^2 \theta - \cos^2 \theta \tan^2 \theta \\ &= \tan^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \tan^2 \theta \times \boxed{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

유제 08 답 -15

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1}{9} \text{에서} \\ & 9(1 - \cos \theta) = 1 + \cos \theta, \quad 8 = 10 \cos \theta \\ & \therefore \cos \theta = \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로} \\ & \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \\ & \text{이때 } \theta \text{가 제4사분면의 각이면 } \sin \theta < 0 \text{이므로} \\ & \sin \theta = -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ & \textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에 의해} \\ & \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4} \\ & \therefore 15 \sin \theta + 8 \tan \theta = 15 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ & \quad = -9 - 6 = -15 \end{aligned}$$

문제 08-1 답 $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

$$\begin{aligned} & \text{주어진 등식의 좌변을 간단히 하면} \\ & \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ & \quad = \frac{\sin^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ & \quad = \frac{2(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ & \quad = \frac{2}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{즉, } \frac{2}{\sin \theta} = 5 \text{이므로} \\ & \sin \theta = \frac{2}{5} \\ & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로} \\ & \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \\ & \text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이면 } \cos \theta < 0 \text{이므로} \\ & \cos \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5} \end{aligned}$$

문제 08-2 답 1

$$\begin{aligned} & \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서 } \cos \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{이므로} \\ & \cos \theta = \sin^2 \theta \\ & \therefore \sin^2 \theta + \sin^6 \theta + \sin^8 \theta \\ & \quad = \cos \theta + \cos^3 \theta + \cos^4 \theta \\ & \quad = \cos \theta + \cos^2 \theta (\cos \theta + \cos^2 \theta) \\ & \quad = \cos \theta + \cos^2 \theta \\ & \quad = 1 \end{aligned}$$

유제 09 답 (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{\sqrt{17}}{3}$

(1) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

(2) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ 이므로

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{17}{9} \quad \dots \text{㉠}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 ㉠에서 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

문제 09-1 답 $8\sqrt{3}$

$$\tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad \dots \text{㉡}$$

한편 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ 이므로

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \quad \dots \text{㉢}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\text{따라서 ㉢에서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots \text{㉣}$$

또 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ 이므로

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{㉤}$$

이때 $\sin \theta < \cos \theta$ 이면 $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로 ㉤에서

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \text{㉥}$$

㉣, ㉥을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

문제 09-2 답 $-\frac{5}{6}, \frac{23}{27}$

이차방정식 $3x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3} \quad \dots \text{㉦}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots \text{㉧}$$

㉦의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18} \quad \dots \text{㉨}$$

㉧=㉨이므로

$$\frac{k}{3} = -\frac{5}{18} \quad \therefore k = -\frac{5}{6}$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{5}{18} \right) \right\} = \frac{23}{27}$$

기본 연습문제

p.98~99

- | | | | | |
|-----|-----|-----|---------------|------------------|
| 1 ④ | 2 ② | 3 ③ | 4 5, 10 | 5 $-\frac{6}{5}$ |
| 6 ① | 7 ④ | 8 ③ | 9 $-\sqrt{2}$ | |

- 1 ① $-1970^\circ = 360^\circ \times (-6) + 190^\circ$ $\Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ② $3450^\circ = 360^\circ \times 9 + 210^\circ$ $\Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ③ $-\frac{13}{5}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{7}{5}\pi$ $\Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ④ $\frac{11}{3}\pi = 2\pi + \frac{5}{3}\pi$ $\Rightarrow$ 제4사분면의 각
 ⑤ $\frac{21}{4}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{5}{4}\pi$ $\Rightarrow$ 제3사분면의 각
 따라서 동경이 존재하는 사분면이 다른 하나는 ④이다.

2 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

→ $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{7}{6}\pi$$

→ $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \frac{5}{3}\pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{11}{6}\pi$$

→ $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에 의해 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

3 두 각 θ , 5θ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12}$$

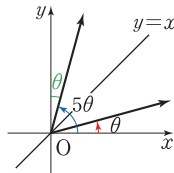
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } 0 < \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{12} < \frac{n}{3}\pi < \frac{5}{12}\pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{12}\pi$$

$$\text{따라서 모든 } \theta \text{의 크기의 합은 } \frac{\pi}{12} + \frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{2}$$



..... ①

4 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 20이므로

$$2r + l = 20 \quad \therefore l = 20 - 2r$$

이때 $r > 0$, $20 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 10$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl$$

$$= \frac{1}{2}r(20 - 2r) = -r^2 + 10r$$

$$= -(r - 5)^2 + 25$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0 < r < 10$ 에서 $r=5$ 일 때 최댓값이 25이다.

이때 호의 길이 l 은

$$l = 20 - 2r = 20 - 2 \times 5 = 10$$

5 원점 O 와 점 $P(-4, -3)$ 에 대하여

$$OP = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

점 $P(-4, -3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표는 $(-3, -4)$ 이므로

$$OQ = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\therefore \cos \beta = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha + \cos \beta &= -\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

6 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

이때 $\cos \theta + \tan \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\tan^2 \theta} + \sqrt{\cos^2 \theta} + |\sin \theta| - \sqrt{(\tan \theta + \cos \theta)^2} \\ = |\tan \theta| + |\cos \theta| + |\sin \theta| - |\tan \theta + \cos \theta| \\ = -\tan \theta - \cos \theta + \sin \theta + \tan \theta + \cos \theta \\ = \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad \neg. \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta - \cos^3 \theta} &= \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right) \\ &\neq \sin^2 \theta \tan^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{1 - \sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{라. } \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 0 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

8 $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = 2 + \sqrt{3}$ 에서

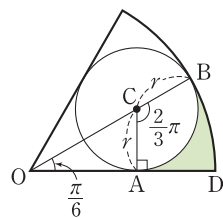
$$\begin{aligned} 1 + \sin \theta &= (2 + \sqrt{3})(1 - \sin \theta) \\ (3 + \sqrt{3}) \sin \theta &= 1 + \sqrt{3} \\ \therefore \sin \theta &= \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{이므로} \\ \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이면 } \cos \theta < 0 \text{이므로} \\ \cos \theta &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \therefore \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

9 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2$ 에서 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} &= 2, \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \text{이므로} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \text{이때 } \theta \text{가 제3사분면의 각이면 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0 \text{이므로} \\ \sin \theta + \cos \theta &< 0 \\ \text{따라서 ㉠에서 } \sin \theta + \cos \theta &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

- 1 아날로그 시계의 1시간 동안 시침이 움직인 각의 크기는
- $$2\pi \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$
- 1시간은 60분이므로 시침은 1분에 $\frac{\pi}{6} \times \frac{1}{60}$ 씩 움직인다.
- 즉, x 분 후에 시침이 움직인 각의 크기는 $\frac{\pi}{360}x$ 이다.
- 또 분침은 한 시간에 한 바퀴를 회전하므로 1분에 $\frac{2\pi}{60}$ 씩 움직인다. 즉, x 분 후에 분침이 움직인 각의 크기는 $\frac{\pi}{30}x$ 이다.
- 두 각을 나타내는 동경이 같을 때, 시침과 분침이 겹쳐지므로
- $$\frac{\pi}{30}x - \frac{\pi}{360}x = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$
- $$\frac{11}{360}x = 2n$$
- $$\therefore x = \frac{720}{11}n = \left(60 + \frac{60}{11}\right)n$$
- 이때 정오에 시침과 분침이 겹쳐지고 난 후 처음으로 다시 시침과 분침이 겹쳐지는 시각은 $n=1$ 일 때이므로
- $$x = 60 + \frac{60}{11} \text{ (분)}$$
- 따라서 구하는 시각은 1시 $\frac{60}{11}$ 분이다.

- 2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 12인 원을 6등분한 부채꼴은 중심각의 크기가
- $$2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$
- $$\angle COA = \frac{\pi}{6}, \angle OCA = \frac{\pi}{3}$$



$$\therefore \angle ACB = \frac{2}{3}\pi$$

내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $\triangle COA$ 에서 $\overline{CA} = r$ 이므로

$$\overline{CO} = 2r, \overline{OA} = \sqrt{3}r$$

이때 $\overline{OB} = 12$ 이므로

$$\overline{CO} + \overline{CB} = 12$$

$$2r + r = 12 \quad \therefore r = 4$$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (\text{부채꼴 BOD의 넓이}) - (\text{부채꼴 BCA의 넓이}) \\ &\quad - (\triangle COA \text{의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 \\ &= 12\pi - \frac{16}{3}\pi - 8\sqrt{3} = \frac{20}{3}\pi - 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

구하는 넓이는 $12S$ 이므로

$$12S = 12 \left(\frac{20}{3}\pi - 8\sqrt{3} \right) = 80\pi - 96\sqrt{3}$$

실전 연습문제

p.100

1 ④ 2 $80\pi - 96\sqrt{3}$ 3 $\frac{1}{2}$

4 $3x^2 + 8x + 3 = 0$

3 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$ 이므로

$\triangle AOC$ 에서

$$\overline{OC}=\overline{OA}\cos\theta=\cos\theta$$

$$\overline{AC}=\overline{OA}\sin\theta=\sin\theta$$

$\triangle DOB$ 에서

$$\overline{BD}=\overline{OB}\tan\theta=\tan\theta$$

$$3\overline{OC}=\overline{AC}\times\overline{BD}\text{이므로}$$

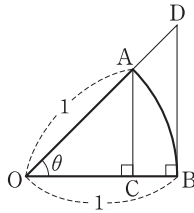
$$3\cos\theta=\sin\theta\tan\theta, 3\cos\theta=\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$3\cos^2\theta=\sin^2\theta, 3\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos\theta>0$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$



4 이차방정식 $2x^2+x+p=0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 이므로
근과 계수의 관계에 의해

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{p}{2} \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8} \quad \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B}=\textcircled{C}\text{이므로 } \frac{p}{2}=-\frac{3}{8} \quad \therefore p=-\frac{3}{4}$$

이때 $\tan\theta, \frac{1}{\tan\theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식에서

두 근의 합은

$$\begin{aligned} \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= -\frac{8}{3} (\because \textcircled{C}) \end{aligned}$$

두 근의 곱은

$$\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}=1$$

따라서 x^2 의 계수가 $-4p$, 즉 3이고 두 근의 합이 $-\frac{8}{3}$.

두 근의 곱이 1인 이차방정식은

$$3\left(x^2+\frac{8}{3}x+1\right)=0$$

$$\therefore 3x^2+8x+3=0$$

02 삼각함수의 그래프

1 개념 CHECK

p.103

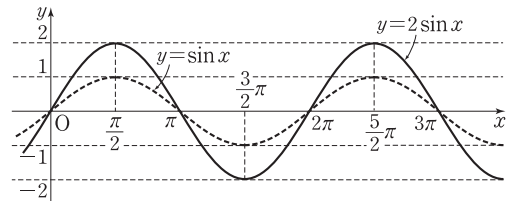
1. ㉠ (1) 주기: 2π , 치역: $\{y|-2\leq y\leq 2\}$

그래프: 풀이 참조

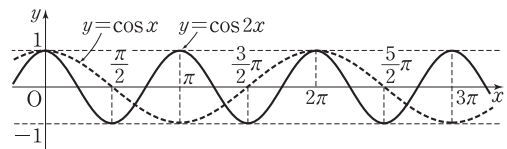
(2) 주기: π , 치역: $\{y|-1\leq y\leq 1\}$

그래프: 풀이 참조

(1) $y=2\sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $y=\cos 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



2. ㉠ (1) 주기: π , 점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

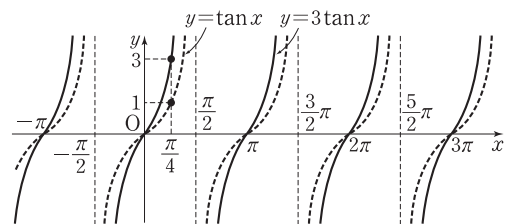
그래프: 풀이 참조

(2) 주기: 2π , 점근선의 방정식: $x=2n\pi+\pi$ (n 은 정수)

그래프: 풀이 참조

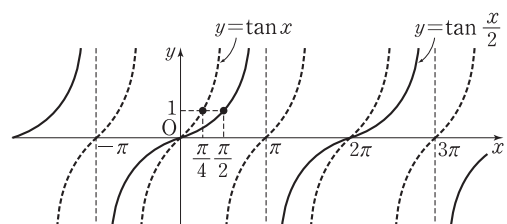
(1) $y=3\tan x$ 에 $x=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면 $y=3$

$y=3\tan x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



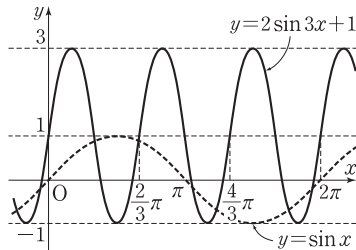
(2) $y=\tan \frac{x}{2}$ 에 $x=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면 $y=1$

$y=\tan \frac{x}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



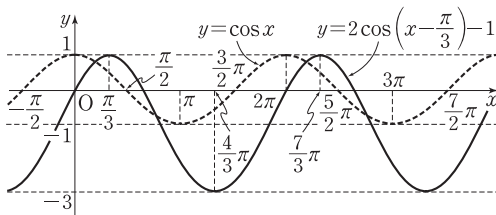
유제 01 답 풀이 참조

- (1) $y=2\sin 3x+1$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배, y 축의 방향으로 2배한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



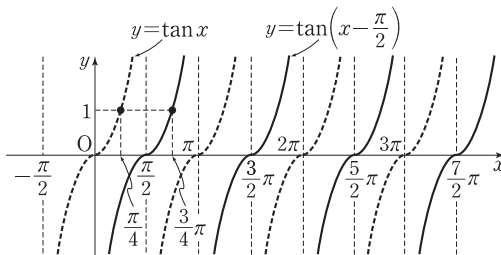
∴ 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

- (2) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



∴ 최댓값: 1, 최솟값: -3, 주기: 2π

- (3) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



∴ 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: π

유제 02 답 $-2-\frac{\pi}{3}$

주어진 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$ 의 그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -4이고 $a>0$ 이므로

$$(\text{최댓값})=a+d=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\text{최솟값})=-a+d=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, d=-1$$

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ 이고

$b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b=1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=3\cos(x+c)-1$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2=3\cos\left(\frac{\pi}{3}+c\right)-1 \quad \therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}+c\right)=1$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq c \leq 0 \text{이므로 } c=-\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore ad+b+c &= 3 \times (-1) + 1 + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -2 - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

문제 02-1 답 13

$f(x)=a\tan bx$ 의 주기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{6} \quad \therefore b=6$$

$f(x)=a\tan 6x$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=7$ 이므로

$$a\tan \frac{\pi}{4} = 7 \quad \therefore a=7$$

$$\therefore a+b=7+6=13$$

문제 02-2 답 -1

$f(x)=a\sin \frac{x}{p}+b$ 의 최댓값은 5이고 $a>0$ 이므로

$$a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $f(x)=a\sin \frac{x}{p}+b$ 의 주기는 4π 이고, $p<0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{-\frac{1}{p}} = 4\pi, \quad -2p\pi = 4\pi$$

$$\therefore p=-2$$

$f(x)=a\sin\left(-\frac{x}{2}\right)+b$ 에서 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$ 이므로

$$a\sin \frac{\pi}{6} + b = \frac{7}{2}$$

$$\frac{a}{2} + b = \frac{7}{2} \quad \therefore a+2b=7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2$$

$$\therefore a-b+p=3-2+(-2)=-1$$

유제 03 답 (1) $-\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}
 (1) \sin \frac{29}{6}\pi &= \sin\left(2\pi \times 2 + \frac{5}{6}\pi\right) = \sin \frac{5}{6}\pi \\
 &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
 \cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right) &= \cos \frac{20}{3}\pi = \cos\left(2\pi \times 3 + \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{11}{3}\pi &= \tan\left(2\pi \times 2 - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin \frac{29}{6}\pi + \cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right) + \tan \frac{11}{3}\pi \\
 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sin(-750^\circ) &= -\sin 750^\circ \\
 &= -\sin(360^\circ \times 2 + 30^\circ) \\
 &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 1395^\circ &= \cos(360^\circ \times 4 - 45^\circ) \\
 &= \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 240^\circ &= \cos(180^\circ + 60^\circ) \\
 &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan 495^\circ &= \tan(360^\circ + 135^\circ) = \tan 135^\circ \\
 &= \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin(-750^\circ) + \cos 1395^\circ + \cos 240^\circ - \tan 495^\circ \\
 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

문제 03-1 답 (1) 0 (2) 1

$$\begin{aligned}
 (1) \tan(270^\circ - \theta) &= \tan(180^\circ + 90^\circ - \theta) \\
 &= \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \\
 \therefore \tan(270^\circ - \theta) \cos(180^\circ - \theta) \\
 &\quad + \cos(-\theta) \tan(90^\circ - \theta)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tan \theta} \times (-\cos \theta) + \cos \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
 &= -\cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
 &= -(-\sin \theta) = \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\cos(\pi + \theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \cos^2(\pi - \theta)} \\
 + \frac{\sin(\pi + \theta) \tan^2(\pi - \theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} \\
 = \frac{-\cos \theta}{-\cos \theta \times (-\cos \theta)^2} + \frac{-\sin \theta \times (-\tan \theta)^2}{\sin \theta} \\
 = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
 = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1
 \end{aligned}$$

문제 03-2 답 $-\frac{4}{5}$

$$\triangle ABC \text{에서 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } 2\alpha + 2\beta = \pi$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin(2\alpha + 3\beta) &= \sin(2\alpha + 2\beta + \beta) \\
 &= \sin(\pi + \beta) = -\sin \beta \\
 &= -\frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

유제 04 답 (1) $\frac{45}{2}$ (2) 1(1) $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ 임을 이용하여 $\sin 89^\circ, \sin 87^\circ, \sin 85^\circ, \dots, \sin 47^\circ$ 를 변형하면

$$\sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\sin 87^\circ = \sin(90^\circ - 3^\circ) = \cos 3^\circ$$

$$\sin 85^\circ = \sin(90^\circ - 5^\circ) = \cos 5^\circ$$

 $\vdots$

$$\sin 47^\circ = \sin(90^\circ - 43^\circ) = \cos 43^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \dots + \sin^2 87^\circ + \sin^2 89^\circ \\
 = \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \dots + \cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ \\
 = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) \\
 + \dots + (\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ) + \sin^2 45^\circ
 \end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= 22 + \frac{1}{2} = \frac{45}{2}$$

(2) $\tan(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan x}$ 임을 이용하여 $\tan 89^\circ, \tan 88^\circ, \tan 87^\circ, \dots, \tan 46^\circ$ 를 변형하면

$$\tan 89^\circ = \tan(90^\circ - 1^\circ) = \frac{1}{\tan 1^\circ}$$

$$\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ}$$

$$\tan 87^\circ = \tan(90^\circ - 3^\circ) = \frac{1}{\tan 3^\circ}$$

 $\vdots$

$$\tan 46^\circ = \tan(90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ \\ = \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \\ = \left(\tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \right) \times \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \right) \\ \quad \times \cdots \times \left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ} \right) \times \tan 45^\circ \\ = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

문제 04-1 [답 1]

$$\begin{aligned} \cos 50^\circ &= \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ, \\ \sin 50^\circ &= \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ \text{이므로} \\ \left(1 - \frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 50^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin 50^\circ}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sin^2 40^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos^2 40^\circ}\right) \\ &= \frac{\sin^2 40^\circ - 1}{\sin^2 40^\circ} \times \frac{\cos^2 40^\circ - 1}{\cos^2 40^\circ} \\ &= -\frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} \times \left(-\frac{\sin^2 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}\right) = 1 \end{aligned}$$

문제 04-2 [답 $\frac{1}{2}$]

$\triangle ABC$ 에서 $A+B+C=\pi$ 이므로 $A+B=\pi-C$

주어진 식의 좌변에서

$$\begin{aligned} 2\cos \frac{A+B-C}{2} &= 2\cos \frac{\pi-2C}{2} \\ &= 2\cos \left(\frac{\pi}{2}-C\right) \\ &= 2\sin C \end{aligned}$$

주어진 식의 우변에서

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5}{2}\pi - A\right) &= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - A\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \\ &= \cos A \\ \cos\left(\frac{3}{2}\pi + A\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + A\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right) \\ &= \sin A \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \cos A \sin\left(\frac{5}{2}\pi - A\right) + \sin A \cos\left(\frac{3}{2}\pi + A\right) \\ = \cos A \cos A + \sin A \sin A \\ = \cos^2 A + \sin^2 A = 1 \end{aligned}$$

따라서 $2\sin C = 1$ 이므로

$$\sin C = \frac{1}{2}$$

유제 05 [답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: -2

(2) 최댓값: $\frac{2}{3}$, 최솟값: -2

(1) $\cos 2x = t$ 라 하면

$$y = 4|t-1| - 2$$

..... ㉠

이때 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

즉, ㉠에서 $t-1 \leq 0$ 이므로

$$y = -4(t-1) - 2 = -4t + 2$$

따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 6, $t = 1$ 일 때 최솟값은 -2이다.

다른 풀이

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq \cos 2x - 1 \leq 0, 0 \leq |\cos 2x - 1| \leq 2$$

$$0 \leq 4|\cos 2x - 1| \leq 8$$

$$\therefore -2 \leq 4|\cos 2x - 1| - 2 \leq 6$$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

(2) $\cos x = t$ 라 하면

$$y = \frac{2t}{t+2} = -\frac{4}{t+2} + 2$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq t \leq 1$$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 $\frac{2}{3}$, $t = -1$ 일 때 최솟값은 -2이다.

다른 풀이

주어진 함수를 변형하면

$$y = \frac{2\cos x}{\cos x + 2} = -\frac{4}{\cos x + 2} + 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$1 \leq \cos x + 2 \leq 3, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos x + 2} \leq 1$$

$$-4 \leq -\frac{4}{\cos x + 2} \leq -\frac{4}{3}$$

$$\therefore -2 \leq -\frac{4}{\cos x + 2} + 2 \leq \frac{2}{3}$$

따라서 최댓값은 $\frac{2}{3}$, 최솟값은 -2이다.

유제 06 [답 최댓값: 5, 최솟값: -3

$$y = 2\sin^2 x - 4\cos x + 1$$

$$= 2(1 - \cos^2 x) - 4\cos x + 1$$

$$= -2\cos^2 x - 4\cos x + 3$$

$\cos x = t$ 라 하면

$$y = -2t^2 - 4t + 3 = -2(t+1)^2 + 5$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 5, $t = 1$ 일 때 최솟값은 -3이다.

문제 06-1 답 1

$$\begin{aligned}
 y &= a \cos^2 x + 2a \sin x + b \\
 &= a(1 - \sin^2 x) + 2a \sin x + b \\
 &= -a \sin^2 x + 2a \sin x + a + b \\
 \sin x &= t \text{라 하면} \\
 y &= -at^2 + 2at + a + b = -a(t-1)^2 + 2a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 \text{이때 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq t \leq 1 \\
 \textcircled{1} \text{에서 } a < 0 \text{이므로 } t = -1 \text{일 때 최댓값은 } -2a + b, \\
 t = 1 \text{일 때 최솟값은 } 2a + b \text{이다.} \\
 \therefore -2a + b = 7, \quad 2a + b = -1 \\
 \text{위의 두 식을 연립하여 풀면} \\
 a = -2, \quad b = 3 \quad \therefore a + b = 1
 \end{aligned}$$

문제 06-2 답 -4

$$\begin{aligned}
 y &= \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cos^2 x + \cos(x + \pi) - 1 \\
 &= \cos^2 x - 2 \cos^2 x - \cos x - 1 \\
 &= -\cos^2 x - \cos x - 1 \\
 \cos x &= t \text{라 하면} \\
 y &= -t^2 - t - 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \\
 \text{이때 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } 0 \leq t \leq 1 \\
 t = 0 \text{일 때 최댓값은 } -1, \quad t = 1 \text{일 때 최솟값은 } -3 \text{이므로} \\
 M = -1, \quad m = -3 \quad \therefore M + m = -4
 \end{aligned}$$

3 개념 CHECK

p.114

1. 답 (가) $\frac{2}{3}\pi$ (나) $\frac{4}{3}\pi$
2. 답 (가) $\frac{\pi}{6}$ (나) $\frac{7}{6}\pi$ (다) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ (라) $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7}{6}\pi$
(마) $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

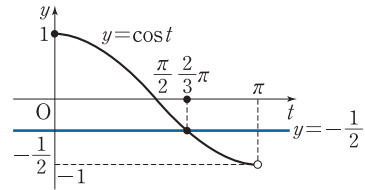
3 유제 & 문제

p.115~119

유제 07 답 (1) $x = \frac{4}{3}\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

$$\begin{aligned}
 (1) \cos \frac{x}{2} &= -\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{x}{2} = t \text{라 하면} \\
 \cos t &= -\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 \text{이때 } 0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } 0 \leq \frac{x}{2} < \pi \\
 \therefore 0 \leq t < \pi
 \end{aligned}$$

$0 \leq t < \pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 ①의 해는 두 그래프의 교점의 t 좌표이므로

$$t = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

그런데 $t = \frac{x}{2}$ 이므로

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore x = \frac{4}{3}\pi$$

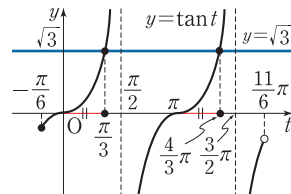
(2) $\sqrt{3} \tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 3$ 에서 $x - \frac{\pi}{6} = t$ 라 하면

$$\sqrt{3} \tan t = 3 \quad \therefore \tan t = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 ①의 해는 두 그래프의 교점의 t 좌표이므로

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

그런데 $t = x - \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

문제 07-1 답 $\frac{\pi}{3}$

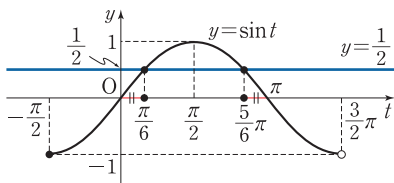
$2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = 1$ 에서 $2x - \frac{\pi}{2} = t$ 라 하면

$$2 \sin t = 1 \quad \therefore \sin t = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $0 \leq x < \pi$ 이므로 $-\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3}{2}\pi$$

$-\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



방정식 ⑦의 해는 두 그래프의 교점의 t 좌표이므로

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

그런데 $t = 2x - \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 두 근의 차는 $\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

문제 07-2 답 $x = -\frac{\pi}{2}$

$\cos \frac{x}{3} = -\sqrt{3} \sin \frac{x}{3}$ 에서 $\frac{x}{3} = t$ 라 하면

$$\cos t = -\sqrt{3} \sin t \quad \dots\dots ⑦$$

이때 $-\pi < x < \pi$ 이므로 $-\frac{\pi}{3} < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{3}$

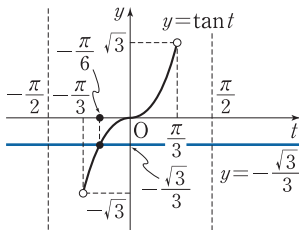
$$\therefore -\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$$

$-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$ 에서 $\cos t \neq 0$ 이므로 ⑦의 양변을 $\cos t$ 로 나누면

$$1 = -\sqrt{3} \times \frac{\sin t}{\cos t} \quad \therefore \tan t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots ⑧$$

$-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 ⑧의 해는 두 그래프의 교점의 t 좌표이므로

$$t = -\frac{\pi}{6}$$

그런데 $t = \frac{x}{3}$ 이므로

$$\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{6} \quad \therefore x = -\frac{\pi}{2}$$

유제 08 답 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

$$2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

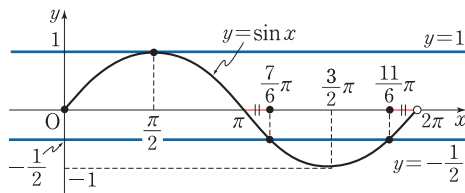
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$ 은 다음 그림과 같다.



(i) 방정식 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와

직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

(ii) 방정식 $\sin x = 1$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = \frac{\pi}{2}$$

(i), (ii)에 의해

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

문제 08-1 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}\cos x$ 의 양변을 제곱하면

$$3\sin^2 x = 2\cos^2 x, \quad 3\sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$(\sin x + 2)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -2 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

그런데 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \sin x < 1$ 이므로

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ⑨$$

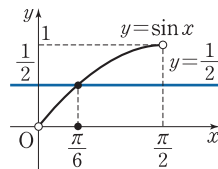
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의

그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 오른쪽

그림과 같다.

방정식 ⑨의 해는 두 그래프의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



문제 08-2 답 $x = \frac{\pi}{3}$

$$\tan x + 3 \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\tan x + \frac{3}{\tan x} = 2\sqrt{3}$$

이때 $0 < x < \pi$ 에서 $\tan x \neq 0$ 이므로 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

$$\tan^2 x + 3 = 2\sqrt{3} \tan x$$

$$\tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

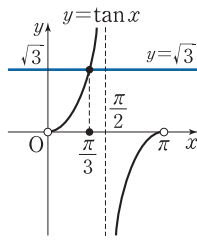
$$(\tan x - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore \tan x = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 ⑦의 해는 두 그래프의 교점의 x 좌표이므로

$$x = \frac{\pi}{3}$$



유제 09 답 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$

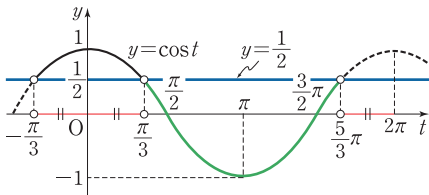
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2} \text{에서 } 2x - \frac{\pi}{3} = t \text{라 하면}$$

$$\cos t < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{이때 } 0 < x < \pi \text{이므로 } -\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} < t < \frac{5}{3}\pi$$

$-\frac{\pi}{3} < t < \frac{5}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 t 좌표는

$$t = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

부등식 ⑦의 해는 함수 $y = \cos t$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$

보다 아래쪽에 있는 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} < t < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{그런데 } t = 2x - \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

문제 09-1 답 $\frac{13}{12}\pi$

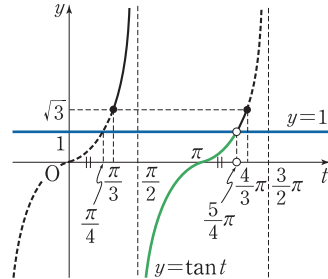
$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1 \text{에서 } x + \frac{\pi}{3} = t \text{라 하면}$$

$$\tan t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{이때 } 0 \leq x \leq \pi \text{이므로 } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{4}{3}\pi$$

$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{4}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 은 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 t 좌표는

$$t = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$

부등식 ⑦의 해는 함수 $y = \tan t$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 보다 아래쪽에 있는 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{2} < t < \frac{5}{4}\pi$$

$$\text{그런데 } t = x + \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{4}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{12}\pi$$

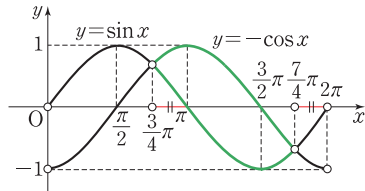
$$\text{따라서 } a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{11}{12}\pi \text{이므로}$$

$$a + b = \frac{13}{12}\pi$$

문제 09-2 답 $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

$$\sin x + \cos x < 0 \text{에서 } \sin x < -\cos x \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 두 함수 $y = \sin x$, $y = -\cos x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 x 좌표는

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

부등식 ①의 해는 함수 $y=\sin x$ 의 그래프가 함수 $y=-\cos x$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

유제 10 답 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\sin^2 x \geq 1 - \cos x$ 에서 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이므로

$$1 - \cos^2 x \geq 1 - \cos x, \cos^2 x - \cos x \leq 0$$

$$\cos x(\cos x - 1) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq \cos x \leq 1$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y=\cos x$ 의

그래프와 두 직선 $y=0, y=1$ 은

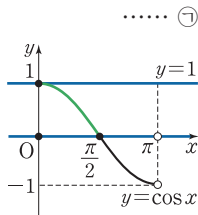
오른쪽 그림과 같다.

그래프의 교점의 x 좌표는

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2}$$

부등식 ①의 해는 함수 $y=\cos x$ 의 그래프가 직선 $y=0$ 과 만나거나 위쪽에 있고, 직선 $y=1$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



문제 10-1 답 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$

$$\tan x(\tan x + 1) > \sqrt{3}\{\tan(\pi - x) - 1\}$$

$$\tan^2 x + \tan x > \sqrt{3}(-\tan x - 1)$$

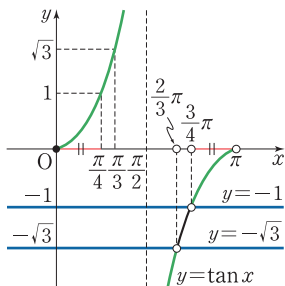
$$\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} > 0$$

$$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x + 1) > 0$$

$$\therefore \tan x < -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x > -1$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y=\tan x$ 의 그래프와 두 직선

$y=-\sqrt{3}, y=-1$ 은 다음 그림과 같다.



그래프의 교점의 x 좌표는

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

부등식 ①의 해는 함수 $y=\tan x$ 의 그래프가 직선

$y=-\sqrt{3}$ 보다 아래쪽에 있거나 직선 $y=-1$ 보다 위쪽에

있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi$$

문제 10-2 답 2π

$$2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0$$

$$x - \frac{\pi}{3} = t \text{라 하면}$$

$$2\cos^2 t - \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \geq 0$$

$$2\cos^2 t + \sin t - 1 \geq 0$$

$$2(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 \geq 0$$

$$2\sin^2 t - \sin t - 1 \leq 0$$

$$(2\sin t + 1)(\sin t - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1$$

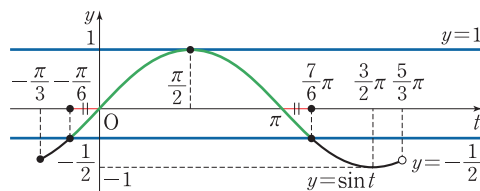
..... ㉠

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi \text{에서 함수 } y=\sin t \text{의 그래프와 두 직선}$$

$$y=-\frac{1}{2}, y=1 \text{은 다음 그림과 같다.}$$



그래프의 교점의 t 좌표는

$$t = -\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

부등식 ①의 해는 함수 $y=\sin t$ 의 그래프가 직선

$y=-\frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있고, 직선 $y=1$ 과 만나거나

아래쪽에 있는 t 의 값의 범위이므로

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{그런데 } t = x - \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{따라서 } a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$3a + b = 3 \times \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$$

유제 11 답 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정

식 $3x^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta + \sin\theta = 0$ 의 판별식 $D < 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 3\sin\theta < 0$$

$$2\cos^2\theta - 3\sin\theta < 0, 2(1 - \sin^2\theta) - 3\sin\theta < 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$$

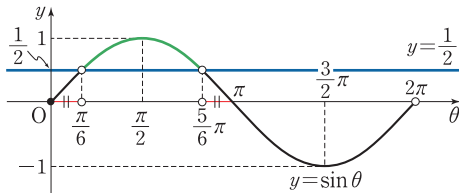
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$$

이때 $\sin\theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin\theta - 1 > 0$$

$$\therefore \sin\theta > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin\theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 θ 좌표는

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

부등식 $\textcircled{7}$ 의 해는 함수 $y = \sin\theta$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$

보다 위쪽에 있는 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

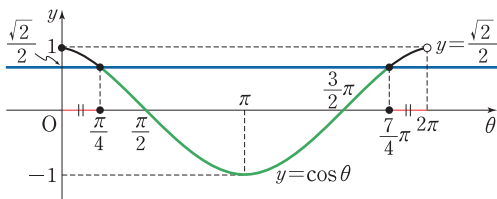
문제 11-1 답 7

이차방정식 $x^2 + 2x + \sqrt{2}\cos\theta = 0$ 이 실근을 가지면 판별식 $D \geq 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = 1 - \sqrt{2}\cos\theta \geq 0$$

$$\therefore \cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos\theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 θ 좌표는

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

부등식 $\textcircled{7}$ 의 해는 함수 $y = \cos\theta$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

와 만나거나 아래쪽에 있는 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{7\pi}{4}$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha} = 7$

문제 11-2 답 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

두 식을 연립하면 $x = x^2 - 2x\cos\theta + 1$

$$x^2 - (2\cos\theta + 1)x + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 그래프가 접하려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$D = (2\cos\theta + 1)^2 - 4 = 0$$

$$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$$

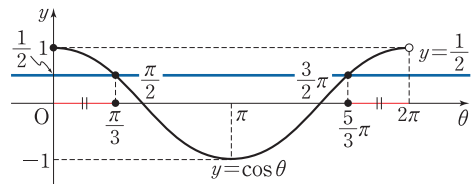
$$(2\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } \cos\theta = \frac{1}{2}$$

이때 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos\theta$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 θ 좌표는

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5\pi}{3}$$

기본 연습문제

p.120~122

1 ⑤ 2 ① 3 $-\frac{2}{3}$ 4 ⑤ 5 24

6 (1) 1 (2) 0 7 ① 8 ③ 9 ④

10 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$ 11 ⑤

12 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

13 $\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{11\pi}{6}$

1 $\sin(-x) = -\sin x$ 이므로

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ 원점에 대하여 대칭

$\cos(-x) = \cos x$ 이므로

$g(-x) = g(x) \Rightarrow y$ 축에 대하여 대칭

$\therefore f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x))$ 이므로

$y = f(f(x))$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

- ㄴ. $f(g(-x))=f(g(x))$ 이므로
 $y=f(g(x))$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
 ㄷ. $g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))$ 이므로
 $y=g(f(x))$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
 ㄹ. $g(g(-x))=g(g(x))$ 이므로
 $y=g(g(x))$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
 따라서 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

- 2 함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이면 자연수 n 에 대하여
 $f(x+p)=\dots=f(x+np)=f(x)$
 를 만족한다.

① 주기를 구하면 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

이때 $4n=2$ 를 만족하는 자연수 n 이 존재하지 않으므로 $f(x+2)=f(x)$ 가 성립하지 않는다.

② 주기를 구하면 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

$\therefore f(x+2)=f(x)$

③ 주기를 구하면 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$

$f(x+1)=f(x)$ 이므로

$f(x+2 \times 1)=f(x+2)=f(x)$

④ 주기를 구하면 $\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$ 이므로

$f\left(x+4 \times \frac{1}{2}\right)=f(x+2)=f(x)$

⑤ 주기를 구하면 $\frac{\pi}{8\pi}=\frac{1}{8}$

$f\left(x+\frac{1}{8}\right)=f(x)$ 이므로

$f\left(x+16 \times \frac{1}{8}\right)=f(x+2)=f(x)$

따라서 $f(x+2)=f(x)$ 가 성립하지 않는 것은 ①이다.

- 3 주어진 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore \alpha+\beta=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

또 $f(x)=\sin \pi x$ 에서 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이므로

$\gamma-\alpha=2 \quad \therefore \gamma=\alpha+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

㉠, ㉡에 의해 $\alpha+\beta+\gamma=1+\alpha+2=3+\alpha$

$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)=f(3+\alpha)=f(2+1+\alpha)$
 $=f(1+\alpha) (\because f(x) \text{의 주기는 } 2)$
 $=-f(\alpha)=-\frac{2}{3}$

- 4 ① 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

② $f(\pi)=2\tan 2\pi+1=1$

③ 탄젠트함수는 최댓값과 최솟값이 없다.

④ $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배, y 축의 방향으로 2배한 후, x 축과 y 축의 방향으로 평행이동한 것이다.

⑤ $f(x)=2\tan(3x-\pi)+1=2\tan 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=2\tan 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

- 5 $y=a\sin(bx-c)$ 의 그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고 $a>0$ 이므로 $a=2$

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right) \quad \therefore \sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right)=0$

$0< c < \pi$ 이므로 $c=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \frac{9abc}{\pi}=\frac{9 \times 2 \times 2 \times \frac{2}{3}\pi}{\pi}=24$

- 6 (1) $\cos \frac{32}{3}\pi=\cos\left(10\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos \frac{2}{3}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos \frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\sin \frac{41}{6}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{5}{6}\pi\right)=\sin \frac{5}{6}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{45}{4}\pi\right)=-\tan \frac{45}{4}\pi$

$=-\tan\left(10\pi+\frac{5}{4}\pi\right)=-\tan \frac{5}{4}\pi$

$=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\tan \frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore \cos \frac{32}{3}\pi+\sin \frac{41}{6}\pi-\tan\left(-\frac{45}{4}\pi\right)$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(-1)=1$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \tan 179^\circ = \tan(180^\circ - 1^\circ) = -\tan 1^\circ \\
 & \tan 178^\circ = \tan(180^\circ - 2^\circ) = -\tan 2^\circ \\
 & \vdots \\
 & \tan 91^\circ = \tan(180^\circ - 89^\circ) = -\tan 89^\circ \\
 \therefore & \tan 1^\circ + \tan 2^\circ + \cdots + \tan 89^\circ + \tan 91^\circ + \tan 92^\circ \\
 & \quad \quad \quad + \cdots + \tan 180^\circ \\
 & = (\tan 1^\circ + \tan 179^\circ) + (\tan 2^\circ + \tan 178^\circ) \\
 & \quad \quad \quad + \cdots + (\tan 89^\circ + \tan 91^\circ) + \tan 180^\circ \\
 & = (\tan 1^\circ - \tan 1^\circ) + (\tan 2^\circ - \tan 2^\circ) \\
 & \quad \quad \quad + \cdots + (\tan 89^\circ - \tan 89^\circ) + \tan 180^\circ \\
 & = 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

7 선분 AB는 반원의 지름이므로

$$\angle ADB = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\triangle ABD$ 에서

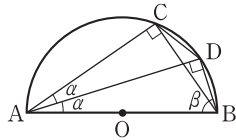
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin(\beta - \alpha) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\
 &= \cos 2\alpha
 \end{aligned}$$

이때 $\triangle ABC$ 에서 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos 2\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$



8 $\sin 2x = t$ 라 하면

$$y = a|t+2| + b$$

..... ㉠

이때 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

즉, $t+2 > 0$ 이므로 ㉠에서

$$y = a(t+2) + b$$

$a > 0$ 이므로 $t=1$ 일 때 최댓값은 $3a+b$, $t=-1$ 일 때 최솟값은 $a+b$ 이다.

$$\therefore 3a+b=4, a+b=2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=1 \quad \therefore a-b=0$$

$$9 \quad y = 3\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^2 x + 6\sin(x+\pi) + 5$$

$$= 3\cos^2 x - 4\cos^2 x - 6\sin x + 5$$

$$= -\cos^2 x - 6\sin x + 5$$

$$= -(1 - \sin^2 x) - 6\sin x + 5$$

$$= \sin^2 x - 6\sin x + 4$$

$\sin x = t$ 라 하면

$$y = t^2 - 6t + 4 = (t-3)^2 - 5$$

이때 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $0 \leq t \leq 1$

따라서 $t=0$ 일 때 최댓값은 4, $t=1$ 일 때 최솟값은 -1 이므로

$$M=4, m=-1 \quad \therefore M-m=5$$

10 $\sin(\pi \cos x) = 1$ 에서 $\pi \cos x = t$ 라 하면

$$\sin t = 1$$

..... ㉡

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-\pi \leq \pi \cos x \leq \pi$$

$$\therefore -\pi \leq t \leq \pi$$

$-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 ㉡을 만족하는 t 의 값은

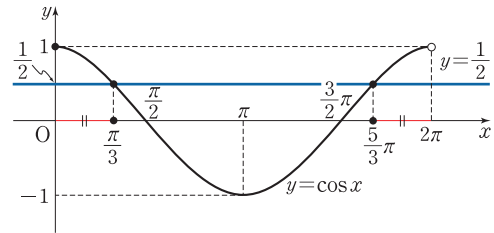
$$t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \pi \cos x \text{이므로 } \frac{\pi}{2} = \pi \cos x$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$$

..... ㉢

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 ㉢의 해는 두 그래프의 교점의 x 좌표이므로

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

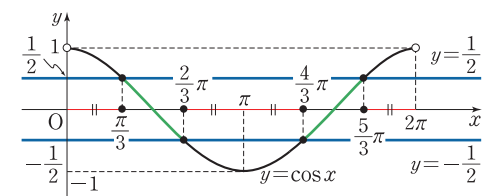
11 $|2\cos x| \leq 1$ 에서 $-1 \leq 2\cos x \leq 1$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$$

..... ㉣

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$,

$y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



그래프의 교점의 x 좌표는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{또는 } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ 또는 } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

따라서 부등식 ①의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{또는} \quad \frac{4}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$

- 12 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식 $x^2 - 2x \cos \theta + \cos \theta = 0$ 의 판별식 $D < 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \cos^2 \theta - \cos \theta < 0$$

$$\cos \theta (\cos \theta - 1) < 0$$

$$\therefore 0 < \cos \theta < 1$$

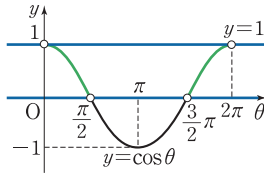
$0 < \theta < 2\pi$ 에서 함수

$y = \cos \theta$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프의 교점의 θ 좌표는

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 부등식 ①의 해는

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$



- 13 $f(x) = 2x^2 + 3x \sin \theta - 2 \cos^2 \theta + 1$ 이라 할 때 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 사이에 1이 있으려면 $f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$f(1) = 2 + 3 \sin \theta - 2 \cos^2 \theta + 1 < 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 3 \sin \theta - 3 > 0$$

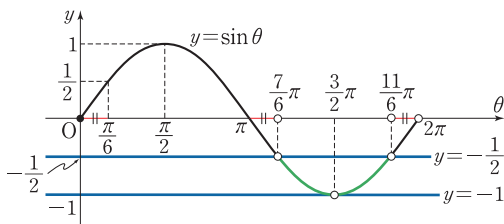
$$2(1 - \sin^2 \theta) - 3 \sin \theta - 3 > 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta + 1 < 0$$

$$(\sin \theta + 1)(2 \sin \theta + 1) < 0$$

$$\therefore -1 < \sin \theta < -\frac{1}{2} \quad \text{..... ①}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프와 직선 $y = -1$, $y = -\frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



그래프의 교점의 θ 좌표는

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \quad \text{또는} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{또는} \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

따라서 부등식 ①의 해는

$$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad \text{또는} \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$$

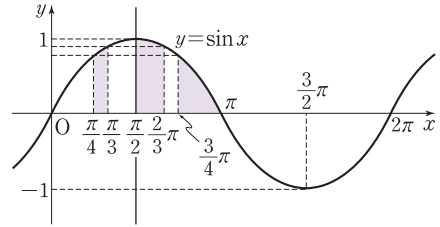
1 $\sin 2 > \sin 1 > \sin 3$

2 $5 + \frac{\pi}{5}$

3 7

4 2

- 1 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $\pi = 3.14 \dots$ 인 실수이므로

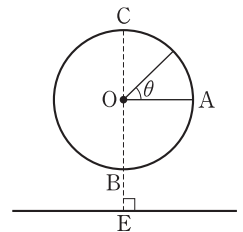
$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{3}{4}\pi < 3 < \pi$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 를

기준으로 대칭을 이루고 있으므로

$$\sin 2 > \sin 1 > \sin 3$$

- 2 오른쪽 그림과 같이 물레방아의 중심을 O, 중심 O와 연결하여 지면과 평행을 이루는 원 위의 한 지점 A가 지면으로부터 최저 높이가 되는 원의 지점을 B, 지면으로부터 최고 높이가 되는 원의 지점을 C, 원의 중심에서 지면에 내린 수선의 발을 E라 하자.



이때 주어진 조건에서 물레방아의 반지름의 길이가 2m, 지면으로부터 최고 높이가 5m이므로

$$\overline{OC} = 2\text{m}, \quad \overline{CE} = 5\text{m}$$

$$\therefore \overline{BE} = 5 - 4 = 1(\text{m})$$

따라서 주어진 함수 $y = a \sin(bx + c) + d$ 에서 최댓값은 5, 최솟값은 1이고, $a > 0$ 이므로

$$a + d = 5, \quad -a + d = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad d = 3$$

또 물레방아가 한 바퀴 도는 데 10분이 걸리므로 주어진 함수의 주기는 10분이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 10 \quad \therefore b = \frac{\pi}{5}$$

$$\therefore y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}x + c\right) + 3$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $y = 5$ 인 최고 높이 지점 C를 지나고, 이때 걸리

는 시간은 $\frac{5}{2}$ 분이므로

$$5 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5} \times \frac{5}{2} + c\right) + 3$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 1, \cos c = 1$$

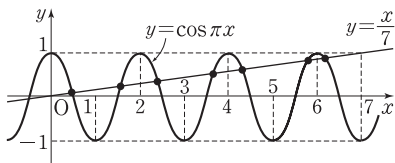
$$\therefore c = 0 \quad (\because 0 \leq c < \pi)$$

$$\therefore a + b + c + d = 2 + \frac{\pi}{5} + 0 + 3 = 5 + \frac{\pi}{5}$$

- 3 방정식 $\cos \pi x = \frac{x}{7}$ 의 근의 개수는 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{7}$ 의 교점의 개수와 같다.

이때 함수 $y = \cos \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로 함수

$y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{7}$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 x 좌표가 양수인 점이 7개이므로 주어진 방정식의 양수인 근은 7개이다.

- 4 $\tan^4 x + 1 \geq a \tan^2 x$ 에서 $\tan^2 x = t$ 라 하면

$$t^2 + 1 \geq at \quad \therefore t^2 - at + 1 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan^2 x \geq 0$ 이므로

$$t \geq 0$$

①에서 $f(t) = t^2 - at + 1$ 이라 하면

$$f(t) = t^2 - at + 1 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}$$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 $t \geq 0$ 에서 부등식 ①이 항상 성립해야 한다.

- (i) $\frac{a}{2} \geq 0$ 일 때

$f(t)$ 는 $t = \frac{a}{2}$ 일 때 최솟값이 $1 - \frac{a^2}{4}$ 이므로

$$1 - \frac{a^2}{4} \geq 0, a^2 - 4 \leq 0$$

$$(a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

- (ii) $\frac{a}{2} < 0$ 일 때

$t^2 + 1 > 1, t \geq 0$ 이므로 $a < 0$ 이면 $t^2 + 1 \geq at$ 는 항상 성립한다.

(i), (ii)에 의해 $a \leq 2$ 이므로 a 의 최댓값은 2이다.

03 사인법칙과 코사인법칙

1 유제 & 문제

p.125~127

유제 01 답 (1) $b = 3\sqrt{6}, R = 3\sqrt{3}$ (2) $B = 30^\circ, C = 30^\circ$

(1) $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의해 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$b \sin 30^\circ = 3\sqrt{3} \sin 45^\circ \quad \therefore b = 3\sqrt{6}$$

또 사인법칙에 의해 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 2R, 2R \sin 30^\circ = 3\sqrt{3} \quad \therefore R = 3\sqrt{3}$$

(2) 사인법칙에 의해 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin B}, \sqrt{3} \sin B = \sin 120^\circ$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$ 또는 $B = 150^\circ$

그런데 $B = 150^\circ$ 이면 $A + B > 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

문제 01-1 답 $2\sqrt{10}$

$\triangle ABD$ 는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overline{BD} = 4$ 이므로

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = 8^2 + 4^2 = 80$$

$$\therefore \overline{AD} = 4\sqrt{5} \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

또 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이면 $\triangle ABC$ 는 $B = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로 $A = C = 45^\circ$

$\triangle ADC$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{4\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} = 2R, 2R \sin 45^\circ = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore R = 2\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10}$$

유제 02 답 (1) $4:10:5$ (2) $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

(1) $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 5$ 이고, 사인법칙에 의해

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \text{이므로}$$

$$a : b : c = 2 : 4 : 5$$

$a = 2k, b = 4k, c = 5k (k > 0)$ 라 하면

$$ab = 8k^2, bc = 20k^2, ca = 10k^2$$

$$\therefore ab : bc : ca = 8k^2 : 20k^2 : 10k^2$$

$$= 4 : 10 : 5$$

(2) $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2, \frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

문제 02-1 답 3

$A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:1:4$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ, B=180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

$$C=180^\circ \times \frac{4}{6} = 120^\circ$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : 1 : \sqrt{3}$$

사인법칙에 의해 $a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$ 이므로

$$a:b:c = 1:1:\sqrt{3}$$

따라서 $a=k, b=k, c=\sqrt{3}k (k>0)$ 라 하면

$$\frac{c^2}{ab} = \frac{(\sqrt{3}k)^2}{k \times k} = 3$$

문제 02-2 답 $a=c$ 인 이등변삼각형

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $(a-c)\sin B = a\sin A - c\sin C$ 에 대입하면

$$(a-c) \times \frac{b}{2R} = a \times \frac{a}{2R} - c \times \frac{c}{2R}$$

$$(a-c)b = a^2 - c^2, (a-c)b - (a+c)(a-c) = 0$$

$$(a-c)\{b - (a+c)\} = 0$$

이때 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$$b - (a+c) \neq 0 \quad \therefore a=c$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

문제 03-1 답 $49\pi \text{ m}^2$

연못의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{7}{\sin 150^\circ} = 2R, 2R \sin 150^\circ = 7$$

$$\therefore R = \frac{7}{2} \times 2 = 7(\text{m})$$

따라서 이 연못의 넓이는

$$\pi \times 7^2 = 49\pi(\text{m}^2)$$

문제 03-2 답 35.6 m

$$\angle ACB = 43^\circ - 14^\circ$$

$$= 29^\circ$$

$\triangle CAB$ 에서 사인법칙

에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 14^\circ} = \frac{100}{\sin 29^\circ}, \overline{BC} \sin 29^\circ = 100 \sin 14^\circ$$

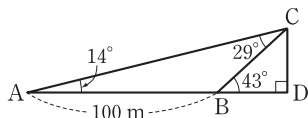
$$\therefore \overline{BC} = 100 \times 0.24 \times \frac{1}{0.48} = 50(\text{m})$$

$\triangle CBD$ 에서 $\overline{CD} = 50 \sin 43^\circ$

$$\therefore \overline{CD} = 50 \times 0.68 = 34(\text{m})$$

이때 서연이의 눈의 높이가 지면으로부터 1.6m이므로 기

구의 높이는 $34 + 1.6 = 35.6(\text{m})$



2 유제 & 문제

p.129~132

유제 04 답 (1) 2 (2) 90°

(1) 코사인법칙에 의해 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 이므로

$$c^2 = (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (1+\sqrt{3}) \times \cos 45^\circ$$

$$= 2 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2(1+\sqrt{3})$$

$$= 4$$

$$\therefore c = 2 (\because c > 0)$$

(2) 사인법칙에 의해

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

코사인법칙에 의해 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ 이므로

$$(2\sqrt{3})^2 = c^2 + 2^2 - 2 \times c \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$12 = c^2 + 4 - 2c$$

$$c^2 - 2c - 8 = 0, (c+2)(c-4) = 0$$

$$\therefore c = 4 (\because c > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{4}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$2\sqrt{3} \sin C = 4 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin C = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = 1$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$C = 90^\circ$$

문제 04-1 답 $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$

$\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}, \sqrt{6} \sin C = \sqrt{3} \sin 45^\circ$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 30^\circ$ 또는 $C = 150^\circ$
 그런데 $C = 150^\circ$ 이면 $B + C > 180^\circ$ 이므로 $C = 30^\circ$
 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의해
 $(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \overline{CD} \times \cos 30^\circ$
 $2 = 6 + \overline{CD}^2 - 3\sqrt{2} \overline{CD}$
 $\overline{CD}^2 - 3\sqrt{2} \overline{CD} + 4 = 0$
 $(\overline{CD} - \sqrt{2})(\overline{CD} - 2\sqrt{2}) = 0$
 $\therefore \overline{CD} = \sqrt{2}$ 또는 $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$

유제 05 답 $A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ$

코사인법칙에 의해 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ 이므로
 $\cos B = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
 이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 60^\circ$
 사인법칙에 의해
 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A}$
 $2\sqrt{3} \sin A = 2\sqrt{2} \sin 60^\circ$
 $\therefore \sin A = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 45^\circ$ 또는 $A = 135^\circ$
 그런데 $A = 135^\circ$ 이면 $A + B > 180^\circ$ 이므로 $A = 45^\circ$
 $\therefore C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

문제 05-1 답 $-\frac{1}{4}$

$a = 2k, b = 3k, c = 4k (k > 0)$ 라 하면 코사인법칙에 의해
 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 이므로
 $\cos C = \frac{(2k)^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2 \times 2k \times 3k} = -\frac{1}{4}$

문제 05-2 답 120°

$\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{3}$ 에서
 $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$
 사인법칙에 의해
 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$
 따라서 삼각형의 가장 긴 변의 대각인 A 의 크기가 가장 크다.
 $a = 7k, b = 5k, c = 3k (k > 0)$ 라 하면 코사인법칙에 의해
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 이므로
 $\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \times 5k \times 3k} = -\frac{1}{2}$
 이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

유제 06 답 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

코사인법칙에 의해
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
 이를 $a \cos B - b \cos A = c$ 에 대입하면
 $a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$
 $(c^2 + a^2 - b^2) - (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$
 $2a^2 - 2b^2 = 2c^2$
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2$
 따라서 삼각형 ABC 는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

문제 06-1 답 $a = c$ 인 이등변삼각형

$\tan A \cos C = \sin C$ 에서
 $\frac{\sin A}{\cos A} \times \cos C = \sin C$
 $\therefore \sin A \cos C = \sin C \cos A \dots\dots \textcircled{1}$
 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의해
 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R},$
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2$
 $a^2 = c^2$
 $\therefore a = c (\because a > 0, c > 0)$
 따라서 삼각형 ABC 는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

다른 풀이

$\tan A \cos C = \sin C \dots\dots \textcircled{1}$
 (i) $C \neq 90^\circ$ 이면 $\cos C \neq 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변을 $\cos C$ 로 나누면
 $\tan A = \frac{\sin C}{\cos C}$
 $\therefore \tan A = \tan C$
 이때 $0^\circ < A < 180^\circ, 0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로
 $A = C$
 (ii) $C = 90^\circ$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서
 $\tan A \times 0 = 1 \Rightarrow$ 모순
 (i), (ii)에서 삼각형 ABC 는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

문제 06-2 답 $a = b$ 인 이등변삼각형 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

$\tan A : \tan B = a^2 : b^2$ 에서 $a^2 \tan B = b^2 \tan A$
 $a^2 \times \frac{\sin B}{\cos B} = b^2 \times \frac{\sin A}{\cos A}$

$$\therefore a^2 \sin B \cos A = b^2 \sin A \cos B \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 ⑦에 대입하면

$$a^2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 + a^2b^2 - b^4$$

$$a^4 - b^4 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 \text{ 또는 } a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

유제 07 답 20√91m

△ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 120^2 + 100^2 - 2 \times 120 \times 100 \times \cos 120^\circ \\ &= 14400 + 10000 + 12000 = 36400 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 20\sqrt{91} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $20\sqrt{91}\text{m}$ 이다.

문제 07-1 답 4√7km

△ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos B = \frac{(6\sqrt{7})^2 + 6^2 - 12^2}{2 \times 6\sqrt{7} \times 6} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

△ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= (6\sqrt{7})^2 + 14^2 - 2 \times 6\sqrt{7} \times 14 \times \cos B \\ &= 252 + 196 - 336 = 112 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AD} = 4\sqrt{7} \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

따라서 두 집 A, D 사이의 거리는 $4\sqrt{7}\text{km}$ 이다.

3 개념 CHECK

p.133

1. 답 (1) 33√3 (2) 3√2

$$(1) \frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times \sin 60^\circ = 33\sqrt{3}$$

$$(2) \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 135^\circ = 3\sqrt{2}$$

3 유제 & 문제

p.134~136

유제 08 답 102

△ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$B = 180^\circ - (43^\circ + 30^\circ) = 107^\circ$$

사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin 43^\circ} = \frac{24}{\sin 107^\circ}, a \sin 107^\circ = 24 \sin 43^\circ$$

$$\therefore a = \frac{24 \sin 43^\circ}{\sin 73^\circ} = \frac{24 \times 0.68}{0.96} = 17$$

따라서 △ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 17 \times 24 \times \sin 30^\circ = 102$$

문제 08-1 답 12/5

△ABC=△ABD+△ADC이므로 $\overline{AD}=x$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 60^\circ$$

$$6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}x, 6\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore \overline{AD} = x = \frac{12}{5}$$

문제 08-2 답 2(√3-1)

코사인법칙에 의해

$$a^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos 60^\circ = 48$$

$$\therefore a = 4\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

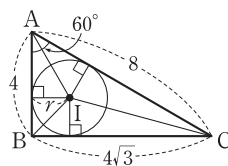
오른쪽 그림과 같이 △ABC의 내접원의 중심을 I, 반지름의 길이를 r라 하면

△ABC

=△IAB+△IBC+△ICA이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r$$

$$8\sqrt{3} = 2(3+\sqrt{3})r \quad \therefore r = 2(\sqrt{3}-1)$$



유제 09 답 84

코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \times 13 \times 14} = \frac{5}{13}$$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

따라서 △ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \sin C = 84$$

문제 09-1 답 40

주어진 삼각형을 $\triangle ABC$ 라 할 때, 세 변의 길이의 비가 $5:7:8$ 이므로 $a=5k$, $b=7k$, $c=8k$ ($k>0$)라 하면 코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{(5k)^2 + (7k)^2 - (8k)^2}{2 \times 5k \times 7k} = \frac{1}{7}$$

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C \text{이므로}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

주어진 삼각형의 넓이가 $40\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 5k \times 7k \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 40\sqrt{3}$$

$$10\sqrt{3}k^2 = 40\sqrt{3}$$

$$k^2 = 4 \quad \therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

따라서 $a=10$, $b=14$, $c=16$ 이므로 이 삼각형의 둘레의 길이는 $10+14+16=40$

문제 09-2 답 $7+6\sqrt{3}$

코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C \text{이므로}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$ 이므로 구하는 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \sin C \\ = 7 + 6\sqrt{3}$$

유제 10 답 (1) 60° 또는 120° (2) 6

(1) 평행사변형의 성질에 의해 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 이므로 평행사변형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \overline{AD} \times \overline{AB} \times \sin A$$

$$\Rightarrow 6 = 2\sqrt{3} \times 2 \times \sin A \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 60^\circ \text{ 또는 } A = 120^\circ$$

(2) 등변사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \frac{3}{4}\pi$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

등변사다리꼴에서 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 이므로

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \overline{AC}^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AC}^2 = 36 \quad \therefore \overline{AC} = 6 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

문제 10-1 답 $18\sqrt{2}$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin \theta = 18\sqrt{2}$$

문제 10-2 답 $30\sqrt{7}$

평행사변형의 성질에 의해

$$\overline{CD} = \overline{AB} = 8$$

$\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{10^2 + 8^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 8} = \frac{1}{8}$$

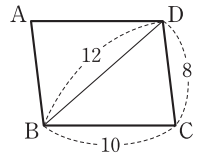
$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C \text{이므로}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 평행사변형 $ABCD$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = 10 \times 8 \times \sin C = 30\sqrt{7}$$



기본 연습문제

p.138~139

1 2 2 $3 - \sqrt{3}$ 3 $\frac{25\sqrt{2}}{3}$ m 4 120°

5 30° 6 $10\sqrt{21}$ m 7 $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ cm

8 ① 9 $14\sqrt{3}$

1 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \\ = \frac{a+b+c}{2R}$$

이때 외접원의 반지름의 길이가 3이고 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이가 12이므로

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{12}{2 \times 3} = 2$$

- 2 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:2:3$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ, B=180^\circ \times \frac{2}{6}=60^\circ$$

$$C=180^\circ \times \frac{3}{6}=90^\circ$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$a=2R \sin A=2R \sin 30^\circ=R$$

$$b=2R \sin B=2R \sin 60^\circ=\sqrt{3}R$$

$$c=2R \sin C=2R \sin 90^\circ=2R$$

이를 $a+b+c=6$ 에 대입하면

$$R+\sqrt{3}R+2R=6, (3+\sqrt{3})R=6$$

$$\therefore R=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$$

- 3 $\triangle ABQ$ 에서 $A+B+Q=180^\circ$ 이므로

$$Q=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

$\triangle ABQ$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{25}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ}, 25 \sin 45^\circ=\overline{AQ} \sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{AQ}=25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{6}}{3}(\text{m})$$

$\triangle PQA$ 에서 $\angle PQA=90^\circ$ 이므로

$$\overline{PQ}=\overline{AQ} \tan 30^\circ=\frac{25\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{25\sqrt{2}}{3}(\text{m})$$

- 4 코사인법칙에 의해

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a^2=b^2+bc+c^2 \text{에서 } b^2+c^2-a^2=-bc$$

이를 ①의 우변에 대입하면

$$\cos A=-\frac{bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=120^\circ$

- 5 $a:b:c=2:(1+\sqrt{3}):\sqrt{2}$ 이므로

$$a=2k, b=(1+\sqrt{3})k, c=\sqrt{2}k \ (k>0) \text{라 하면}$$

삼각형의 가장 짧은 변의 대각인 C 의 크기가 가장 작다.

코사인법칙에 의해

$$\cos C=\frac{(2k)^2+\{(1+\sqrt{3})k\}^2-(\sqrt{2}k)^2}{2 \times 2k \times (1+\sqrt{3})k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=30^\circ$

- 6 $\triangle ABC$ 에서 $\angle BAC=90^\circ$ 이므로

$$\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{\cos 30^\circ}=60 \times \frac{2}{\sqrt{3}}=40\sqrt{3}(\text{m})$$

$\triangle DAB$ 에서 $\angle ADB=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$ 이므로

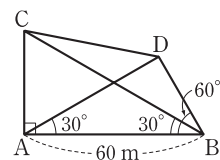
$$\overline{BD}=\overline{AB} \sin 30^\circ=60 \times \frac{1}{2}=30(\text{m})$$

$\overline{CD}$ 를 그으면 $\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= (40\sqrt{3})^2 + 30^2 \\ &\quad - 2 \times 40\sqrt{3} \times 30 \times \cos 30^\circ \\ &= 4800 + 900 - 3600 = 2100 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CD}=10\sqrt{21} \ (\because \overline{CD}>0)$$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $10\sqrt{21}\text{m}$ 이다.



- 7 오른쪽 그림과 같이 삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C 라 하면 코사인법칙에 의해

$$\cos C=\frac{5^2+6^2-9^2}{2 \times 5 \times 6}=-\frac{1}{3}$$

이때 $\sin^2 C=1-\cos^2 C$ 이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C} \ (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

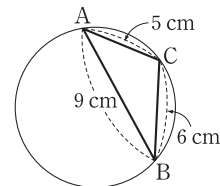
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

그릇의 반지름의 길이를 $R\text{cm}$ 라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{c}{\sin C}=2R \text{이므로}$$

$$R=\frac{9}{2} \times \frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$$

따라서 그릇의 반지름의 길이는 $\frac{27\sqrt{2}}{8}\text{cm}$ 이다.



- 8 점 P 는 $\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1 \quad \therefore \overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 Q 는 $\overline{AC}$ 를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$\overline{AQ}:\overline{CQ}=2:3 \quad \therefore \overline{AQ}=\frac{2}{5}\overline{AC} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\triangle APQ$ 의 넓이를 S' 이라 하면

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AQ} \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overline{AB} \times \frac{2}{5}\overline{AC} \times \sin A \ (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{15} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \right)$$

$$= \frac{4}{15}S \ (\because \textcircled{3})$$

$$\therefore S:S'=S:\frac{4}{15}S=15:4$$

- 9 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 64 - 32 = 48$$

$$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{3} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$ 이므로

$\square ABCD$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \sin 30^\circ$$

$$= 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

실전 연습문제

p.140

1 $4\sqrt{3}$ 2 $3\sqrt{3}$ 3 $\frac{4}{5}$ 4 $2\sqrt{6}$

- 1 $\triangle ABC$ 에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$B+C=180^\circ-A$$

$$\therefore \cos(B+C) = \cos(180^\circ-A) = -\cos A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $4\cos(B+C)\cos A = -1$ 에 대입하면

$$-4\cos^2 A = -1, \cos^2 A = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A \text{이므로}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해 $a=2R\sin A$ 이므로

$$\overline{BC} = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

- 2 주어진 원뿔의 전개도를 그리

면 오른쪽 그림과 같다.

$\widehat{AA'}$ 의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$\widehat{AA'} = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

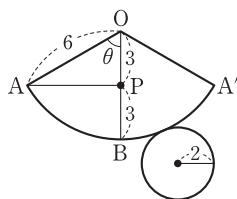
이때 두 점 A, B는 밑면인 원의 지름의 양 끝점이므로

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{AA'} = \frac{1}{2} \times 4\pi = 2\pi$$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\widehat{AB} = 6\theta \text{이므로}$$

$$2\pi = 6\theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$



따라서 $\triangle OAP$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AP}^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 36 + 9 - 18 = 27$$

$$\therefore \overline{AP} = 3\sqrt{3} \quad (\because \overline{AP} > 0)$$

- 3 원주각의 성질에 의해 $\angle APB = 90^\circ$

$\triangle ABP$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2 = (\sqrt{10})^2 - 3^2 = 1$$

$$\therefore \overline{BP} = 1 \quad (\because \overline{BP} > 0)$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$ 를 그으

면 $\triangle AOP$ 는 이등변삼각형이고,

$\angle PAB = \theta$ 이므로 $\angle APO = \theta$

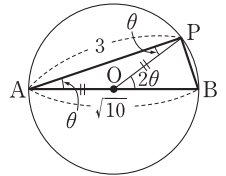
$$\therefore \angle POB = 2\theta$$

$$\text{따라서 } \overline{OB} = \overline{OP} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\overline{BP} = 1 \text{이므로}$$

$\triangle OBP$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos 2\theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{4}{5}$$



- 4 오른쪽 그림과 같이 선분 BD를 그

으면 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \times \cos A$$

$$= 17 - 8\cos A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos C$$

$$= 13 - 12\cos(180^\circ - A)$$

$$= 13 + 12\cos A$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \text{이므로}$$

$$17 - 8\cos A = 13 + 12\cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A \text{이므로}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

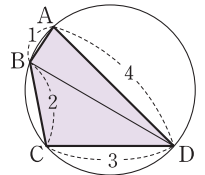
$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$ 이므로

$\square ABCD$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 \times \sin A + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin(180^\circ - A)$$

$$= 2\sin A + 3\sin A = 5\sin A$$

$$= 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6}$$



01 등차수열

1 개념 CHECK

p.142

1. 답 (1) 1부터 차례로 4를 더하여 나열한 것, 17
(2) 1부터 차례로 -2를 곱하여 나열한 것, 16
2. 답 (1) 5, 8, 11, 14 (2) 3, 5, 9, 17

1 유제 & 문제

p.143

- 유제 01 답 (1) $a_n = (-1)^n$ (2) $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$
- (1) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = -1 = (-1)^1, a_2 = 1 = (-1)^2, a_3 = -1 = (-1)^3,$
 $a_4 = 1 = (-1)^4, \dots$
 따라서 일반항 a_n 은
 $a_n = (-1)^n$
- (2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = \frac{3}{1 \times 2} = \frac{1+2}{1 \times (1+1)}, a_2 = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2+2}{2 \times (2+1)},$
 $a_3 = \frac{5}{3 \times 4} = \frac{3+2}{3 \times (3+1)}, a_4 = \frac{6}{4 \times 5} = \frac{4+2}{4 \times (4+1)}, \dots$
 따라서 일반항 a_n 은
 $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$

문제 01-1 답 ㄱ, ㄴ

- ㄱ. $a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, a_3 = 3^2, a_4 = 4^2, \dots$
 $\therefore a_n = n^2$
- ㄴ. $a_1 = 3^1, a_2 = 3^2, a_3 = 3^3, a_4 = 3^4, \dots$
 $\therefore a_n = 3^n$
- ㄷ. $a_1 = (-1)^1 \times \frac{1}{1}, a_2 = (-1)^2 \times \frac{1}{2},$
 $a_3 = (-1)^3 \times \frac{1}{3}, a_4 = (-1)^4 \times \frac{1}{4}, \dots$
 $\therefore a_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$
- ㄹ. $a_1 = \frac{1}{3} \times (10-1), a_2 = \frac{1}{3} \times (10^2-1),$
 $a_3 = \frac{1}{3} \times (10^3-1), a_4 = \frac{1}{3} \times (10^4-1), \dots$
 $\therefore a_n = \frac{1}{3} (10^n - 1)$
- 따라서 수열의 일반항 a_n 이 바르게 된 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2 개념 CHECK

p.145

1. 답 (1) 2 (2) -4
2. 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{6}$
3. 답 (1) $a_n = -2n + 9$ (2) $a_n = 4n - 5$
 (1) $a_n = 7 + (n-1) \times (-2) = -2n + 9$
 (2) 첫째항이 -1, 공차가 4인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n - 5$
4. 답 (1) $x = 1, y = -5$ (2) $x = \frac{7}{3}, y = \frac{17}{3}$
 (1) x 는 4와 -2의 등차중항이므로 $x = \frac{4-2}{2} = 1$
 y 는 -2와 -8의 등차중항이므로 $y = \frac{-2-8}{2} = -5$
 (2) x 는 $\frac{2}{3}$ 와 4의 등차중항이므로 $x = \frac{\frac{2}{3}+4}{2} = \frac{7}{3}$
 y 는 4와 $\frac{22}{3}$ 의 등차중항이므로 $y = \frac{4+\frac{22}{3}}{2} = \frac{17}{3}$

2 유제 & 문제

p.146~150

- 유제 02 답 (1) $a_n = -\frac{2}{3}n + \frac{8}{3}$ (2) $a_n = 6n - 22$
- (1) 공차를 d 라 하면 $a_1 = 2, a_3 = \frac{2}{3}$ 이므로
 $a_3 = 2 + 2d = \frac{2}{3} \therefore d = -\frac{2}{3}$
 따라서 첫째항이 2, 공차가 $-\frac{2}{3}$ 인 등차수열의 일반항
 a_n 은
 $a_n = 2 + (n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}n + \frac{8}{3}$
- (2) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2 = a + d = -10, a_7 = a + 6d = 20$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면 $a = -16, d = 6$
 따라서 첫째항이 -16, 공차가 6인 등차수열의 일반항
 a_n 은
 $a_n = -16 + (n-1) \times 6 = 6n - 22$
- 문제 02-1 답 $a_n = 2n$
 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_4 + a_8 = (a + 3d) + (a + 7d) = 24$
 $\therefore a + 5d = 12 \dots\dots \textcircled{1}$

$$a_{15}+a_{19}=(a+14d)+(a+18d)=68$$

$$\therefore a+16d=34 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=2, d=2$
따라서 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

문제 02-2 답 -470

절댓값이 같고 부호가 반대이므로 $a_3=-a_9$,
즉 $a_3+a_9=0$
이때 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_3+a_9=(a+2d)+(a+8d)=0$
 $\therefore a+5d=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
제7항이 -5이므로 $a_7=-5$
 $\therefore a+6d=-5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
①, ②을 연립하여 풀면 $a=25, d=-5$
따라서 첫째항이 25, 공차가 -5인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=25+(n-1)\times(-5)=-5n+30$
 $\therefore a_{100}=-5\times 100+30=-470$

유제 03 답 제22항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_5=a+4d=-82, a_{10}=a+9d=-57$ 이므로
두 식을 연립하여 풀면 $a=-102, d=5$
주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=-102+(n-1)\times 5=5n-107$
이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면
 $a_n=5n-107>0, 5n>107 \quad \therefore n>21.4$
그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 22이다.
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제22항이다.

문제 03-1 답 제23항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_1+a_2+a_3=-12$ 에서
 $a+(a+d)+(a+2d)=-12, 3a+3d=-12$
 $\therefore a+d=-4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $a_4+a_5+a_6=33$ 에서
 $(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=33, 3a+12d=33$
 $\therefore a+4d=11 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
①, ②을 연립하여 풀면 $a=-9, d=5$
주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=-9+(n-1)\times 5=5n-14$
이때 제 n 항에서 처음으로 100보다 크게 된다고 하면
 $a_n=5n-14>100, 5n>114 \quad \therefore n>22.8$
그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 23이다.
따라서 처음으로 100보다 크게 되는 항은 제23항이다.

문제 03-2 답 15

공차를 d 라 하면 $a_1=41, a_{10}=14$ 이므로
 $a_{10}=41+9d=14 \quad \therefore d=-3$
주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=41+(n-1)\times(-3)=-3n+44$
즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 음수이므로 항의 값이 점점 감소한다. 이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면
 $a_n=-3n+44<0, 3n>44 \quad \therefore n>14.6\dots$
그런데 n 은 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 제14항까지 양수이고 제15항부터 음수이다.
 $\therefore |a_1|>|a_2|>|a_3|>\dots>|a_{14}|, |a_{15}|<|a_{16}|<|a_{17}|<\dots$
이때 $a_{14}=-3\times 14+44=2, a_{15}=-3\times 15+44=-1$ 이므로 $|a_{14}|>|a_{15}|$
따라서 $|a_n|$ 의 값이 최소가 되는 자연수 n 의 값은 15이다.

유제 04 답 $\frac{38}{11}$

공차를 d 라 하면 첫째항이 2, 제12항이 40이므로
 $2+11d=40 \quad \therefore d=\frac{38}{11}$

문제 04-1 답 14

첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이 34이므로
 $4+(m+2-1)\times 2=34$
 $2(m+1)=30, m+1=15 \quad \therefore m=14$

문제 04-2 답 24

공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제 $(m+2)$ 항이 78이므로
 $3+(m+2-1)d=78$
 $\therefore (m+1)d=75$
 m, d 가 자연수이므로 $m+1$ 도 자연수이다.
따라서 $(m+1)d=75$ 인 경우는 다음 표와 같다.

$m+1$	3	5	15	25	75
d	25	15	5	3	1

이때 공차 d 는 1이 아니고 m 이 최대가 되어야 하므로
 $d=3, m+1=25 \quad \therefore m=24$
따라서 m 의 최댓값은 24이다.

유제 05 답 $a=6, b=4$

5는 a 와 b 의 등차중항이므로
 $5=\frac{a+b}{2} \quad \therefore a+b=10 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
또 b 는 $-2b$ 와 $3a$ 의 등차중항이므로
 $5=\frac{-2b+3a}{2} \quad \therefore 3a-2b=10 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
①, ②을 연립하여 풀면 $a=6, b=4$

문제 05-1 답 $\frac{21}{5}$

$a, b, 3$ 은 직각삼각형의 세 변의 길이이고, 가장 긴 변의 길이가 3이므로 피타고라스 정리에 의해

$$a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

b 는 a 와 3의 등차중항이므로

$$b = \frac{a+3}{2} \quad \therefore 2b = a+3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧에서 $a = 2b - 3$ 을 ⑦에 대입하면

$$(2b-3)^2 + b^2 = 9, \quad 5b^2 - 12b = 0$$

$$b(5b-12) = 0 \quad \therefore b = \frac{12}{5} (\because b \neq 0)$$

이를 ⑧에 대입하면 $a = \frac{9}{5}$

$$\therefore a+b = \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{21}{5}$$

문제 05-2 답 4

$-2, c, 4$ 에서 c 는 -2 와 4 의 등차중항이므로

$$c = \frac{-2+4}{2} \quad \therefore c = 1$$

$c, d, 5$ 에서 d 는 c 와 5 의 등차중항이므로

$$d = \frac{c+5}{2} \quad \therefore d = 3 (\because c = 1)$$

a, d, e 에서 d 는 a 와 e 의 등차중항이므로

$$d = \frac{a+e}{2} \quad \therefore a+e = 6 (\because d = 3)$$

$b, 5, f$ 에서 5 는 b 와 f 의 등차중항이므로

$$5 = \frac{b+f}{2} \quad \therefore b+f = 10$$

$$\therefore (b-a) + (f-e) = (b+f) - (a+e) \\ = 10 - 6 = 4$$

유제 06 답 2

등차수열을 이루는 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 세 근의 합은

$$(a-d) + a + (a+d) = 3$$

$$3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1^3 - 3 \times 1^2 + p + q = 0 \quad \therefore p + q = 2$$

문제 06-1 답 -22

곡선 $y = x^3 - 6x^2 - 3x$ 와 직선 $y = k$ 의 세 교점의 x 좌표는 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 3x - k = 0$ 의 세 실근과 같다.

이 삼차방정식의 세 실근이 등차수열을 이루므로 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$(a-d) + a + (a+d) = 6$$

$$3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

따라서 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 3x - k = 0$ 의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^3 - 6 \times 2^2 - 3 \times 2 - k = 0$$

$$\therefore k = -22$$

문제 06-2 답 117°

사각형의 네 내각의 크기가 등차수열을 이루므로 네 내각의 크기를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 라 하자.

이때 네 내각의 크기의 합은 360° 이므로

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 360^\circ$$

$$4a = 360^\circ \quad \therefore a = 90^\circ$$

이때 가장 작은 각의 크기가 63° 이므로

$$90^\circ - 3d = 63^\circ \quad \therefore d = 9^\circ$$

따라서 가장 큰 각의 크기는 $90^\circ + 3 \times 9^\circ = 117^\circ$

3 유제 & 문제

p.152~155

유제 07 답 610

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 8, \quad a_7 = a + 6d = 20 \text{이므로}$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=3$

따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20\{2 \times 2 + (20-1) \times 3\}}{2} = 610$$

문제 07-1 답 360

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a + (5-1)d\}}{2} = 15$$

$$\therefore a + 2d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 80$$

$$\therefore 2a + 9d = 16 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a = -1, d = 2$

따라서 첫째항이 -1 , 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20\{2 \times (-1) + (20-1) \times 2\}}{2} = 360$$

문제 07-2 답 600

첫째항이 a_1 , 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합이 200이므로

$$\frac{100\{2a_1 + (100-1) \times 4\}}{2} = 200$$

$$\therefore a_1 = -196$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $a_1 + a_2 + \dots + a_{101} = S_{101}$

$$\begin{aligned} \therefore a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{101} &= S_{101} - a_1 \\ &= \frac{101\{2 \times (-196) + (101-1) \times 4\}}{2} - (-196) \\ &= 404 + 196 = 600 \end{aligned}$$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 4이므로

$$a_2 = a_1 + 4, a_3 = a_2 + 4, a_4 = a_3 + 4, \dots, a_{101} = a_{100} + 4$$

$$\begin{aligned} \therefore a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{101} &= (a_1 + 4) + (a_2 + 4) + (a_3 + 4) + \dots + (a_{100} + 4) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) + 4 \times 100 \\ &= 200 + 4 \times 100 = 600 \end{aligned}$$

유제 08 답 -338

등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -50, 공차가 4이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -50 + (n-1) \times 4 = 4n - 54$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$$a_n = 4n - 54 > 0, 4n > 54 \quad \therefore n > 13.5$$

첫째항부터 제13항까지가 음수이고, 제14항부터 양수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore S_{13} = \frac{13\{2 \times (-50) + (13-1) \times 4\}}{2} = -338$$

따라서 구하는 최솟값은 -338이다.

다른 풀이

첫째항이 -50, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times (-50) + (n-1) \times 4\}}{2} \\ &= 2n^2 - 52n \\ &= 2(n-13)^2 - 338 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $n=13$ 일 때 -338

문제 08-1 답 5

공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2 \times 6 + (3-1)d\}}{2} = 18 + 3d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \times 6 + (7-1)d\}}{2} = 42 + 21d$$

이때 $S_3 = S_7$ 이므로

$$18 + 3d = 42 + 21d \quad \therefore d = -\frac{4}{3}$$

첫째항이 6, 공차가 $-\frac{4}{3}$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 6 + (n-1) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}n + \frac{22}{3}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n = -\frac{4}{3}n + \frac{22}{3} < 0, \frac{4}{3}n > \frac{22}{3} \quad \therefore n > 5.5$$

따라서 첫째항부터 제5항까지는 양수이고, 제6항부터 음수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 5$$

문제 08-2 답 392

S_n 이 최댓값을 가지므로 주어진 등차수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 음수이고 주어진 조건에서 S_{16} 의 값이 최대이므로 제16항까지는 모두 양수이고, 제17항부터 음수이다.

즉, 첫째항이 47이므로 공차를 d ($d < 0$)라 하면

$$a_n = 47 + (n-1)d$$

이때 $a_{16} > 0, a_{17} < 0$ 이므로

$$a_{16} = 47 + 15d > 0 \quad \therefore d > -3.1\cdots$$

$$a_{17} = 47 + 16d < 0 \quad \therefore d < -2.9375$$

따라서 $-3.1\cdots < d < -2.9375$ 를 만족하는 정수 d 는

$$d = -3$$

$$\therefore S_{16} = \frac{16\{2 \times 47 + (16-1) \times (-3)\}}{2} = 392$$

유제 09 답 3010

100 이상 200 이하의 자연수 중에서 5로 나누면 3이 남는 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$103, 108, 113, \dots, 198$$

이는 첫째항이 103, 공차가 5인 등차수열이므로 이 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 103 + (n-1) \times 5 = 5n + 98$$

이때 $5n + 98 = 198$ 에서 $n = 20$ 이므로 198은 제20항이다.

따라서 구하는 합은 첫째항이 103, 제20항이 198인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\frac{20(103 + 198)}{2} = 3010$$

문제 09-1 답 55350

세 자리의 자연수 중에서 9의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$108, 117, 126, 135, \dots, 999$$

이는 첫째항이 108, 공차가 9인 등차수열이므로 이 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 108 + (n-1) \times 9 = 9n + 99$$

이때 $9n+99=999$ 에서 $n=100$ 이므로 999는 제100항이다.
따라서 구하는 합은 첫째항이 108, 제100항이 999인 등차수열의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\frac{100(108+999)}{2}=55350$$

문제 09-2 **답 1566**

두 자리의 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수,

즉 4의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 16, 20, \dots, 96$$

이는 첫째항이 12, 공차가 4인 등차수열이고 96을 이 수열의 제 n 항이라 하면

$$96=12+(n-1) \times 4 \quad \therefore n=22$$

따라서 첫째항이 12, 제22항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제22항까지의 합은

$$\frac{22(12+96)}{2}=1188 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누어떨어지는 수,

즉 6의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 18, 24, \dots, 96$$

이는 첫째항이 12, 공차가 6인 등차수열이고 96을 이 수열의 제 n 항이라 하면

$$96=12+(n-1) \times 6 \quad \therefore n=15$$

따라서 첫째항이 12, 제15항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15(12+96)}{2}=810 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 4와 6으로 동시에 나누어떨어지는 수는 4와 6의 최소공배수인 12의 배수이므로 두 자리의 자연수 중에서 12의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 24, 36, \dots, 96$$

이는 첫째항이 12, 제8항이 96인 등차수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{8(12+96)}{2}=432 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

그러므로 두 자리의 자연수 중에서 4 또는 6으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$\textcircled{7}+\textcircled{8}-\textcircled{9}=1188+810-432=1566$$

유제 10 **답** (1) $a_n=4n-5$

$$(2) a_1=3, a_n=2n+2 (n \geq 2)$$

(1) $S_n=2n^2-3n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_n = 4n - 5$$

(2) $S_n = n^2 + 3n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - 1 - \{(n-1)^2 + 3(n-1) - 1\} \\ &= 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

이때 $\textcircled{4}$ 은 $\textcircled{3}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_1 = 3, a_n = 2n + 2 (n \geq 2)$$

문제 10-1 **답 -14**

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 $A_n=3n^2+kn, B_n=2n^2+5n$ 이라 하면

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = A_n - A_{n-1}, b_n = B_n - B_{n-1}$ 이므로 a_{10} 과 b_{10} 을 구하면

$$\begin{aligned} a_{10} &= A_{10} - A_9 \\ &= (300 + 10k) - (243 + 9k) = 57 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= B_{10} - B_9 \\ &= (200 + 50) - (162 + 45) = 43 \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $a_{10} = b_{10}$ 이므로

$$57 + k = 43 \quad \therefore k = -14$$

문제 10-2 **답 10**

$$S_n = n^2 - 6n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 6n - \{(n-1)^2 - 6(n-1)\} \\ &= 2n - 7 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 6 \times 1 = -5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n - 7$$

$$\begin{aligned} \therefore a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{2k+2} \\ &= 1 + 5 + 9 + \dots + (4k - 3) \\ &= \frac{k(1 + 4k - 3)}{2} = 2k^2 - k \end{aligned}$$

이때 주어진 조건에서 $2k^2 - k = 190$

$$2k^2 - k - 190 = 0, (k-10)(2k+19) = 0$$

$$\therefore k = 10 (\because k \text{는 자연수})$$

- 1 제61항 2 ④ 3 $\frac{5}{4}$ 4 3, 5, 7 5 252
6 ① 7 2295 8 32 9 ② 10 8

- 1 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_{31}=a+30d=85$, $a_{45}=a+44d=127$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $d=3$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=-5+(n-1) \times 3=3n-8$
 이때 제 n 항을 175라 하면
 $a_n=3n-8=175 \quad \therefore n=61$
 따라서 175는 제61항이다.
- 2 공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제5항이 19이므로
 $3+4d=19 \quad \therefore d=4$
 따라서 구하는 수는
 $x=3+d=7$, $y=3+2d=11$, $z=3+3d=15$
 $\therefore x+y+z=33$
- 다른 풀이
 y 는 3과 19의 등차중항이므로
 $y=\frac{3+19}{2}=11 \quad \therefore y=11$
 또 y 는 x 와 z 의 등차중항이므로
 $y=\frac{x+z}{2} \quad \therefore x+z=2y$
 $\therefore x+y+z=3y=33$
- 3 이차방정식 $x^2-3x-6=0$ 의 두 근이 α , β 이므로 근과 계수의 관계에 의해
 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-6$
 p 는 α , β 의 등차중항이므로
 $p=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$
 q 는 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 의 등차중항이므로
 $q=\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{-12}=-\frac{1}{4}$
 $\therefore p+q=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
- 4 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면
 $(a-d)+a+(a+d)=15 \quad \dots\dots ㉠$
 $(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠에서 $3a=15 \quad \therefore a=5$
 이를 ㉡에 대입하면
 $(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=83$

$$2d^2+75=83, d^2=4 \quad \therefore d=\pm 2$$

따라서 구하는 세 수는 3, 5, 7이다.

- 5 공차를 d 라 하면 $a_1=6$, $a_{10}=-12$ 이므로
 $a_{10}=6+9d=-12 \quad \therefore d=-2$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=6+(n-1) \times (-2)=-2n+8 \quad \dots\dots ㉠$
 이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면
 $a_n=-2n+8<0 \quad \therefore n>4$
 즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제5항부터 음수가 된다.
 $\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\dots+|a_{19}|$
 $=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\dots+a_{19})$
 이때 ㉠에서 $a_5=-2$ 이므로 $a_5+a_6+\dots+a_{19}$ 는 첫째항
 이 -2 , 공차가 -2 인 등차수열의 첫째항부터 제15항까
 지의 합이다.
 $\therefore a_5+a_6+\dots+a_{19}$
 $=\frac{15\{2 \times (-2)+(15-1) \times (-2)\}}{2}$
 $=-240$
 $\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\dots+|a_{19}|$
 $=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\dots+a_{19})$
 $=6+4+2+0-(-240)$
 $=252$
- 6 공차를 d 라 하면
 $a_1+a_3+a_5=27$ 에서
 $a_1+(a_1+2d)+(a_1+4d)=27, 3a_1+6d=27$
 $\therefore a_1+2d=9 \quad \dots\dots ㉠$
 또 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이면 수열 $\{a_{2n}\}$ 도 등차수열이므로
 $a_2+a_4+a_6+\dots+a_{20}=-310$ 에서
 $\frac{10(a_2+a_{20})}{2}=-310$
 $\frac{10\{(a_1+d)+(a_1+19d)\}}{2}=-310$
 $2a_1+20d=-62$
 $\therefore a_1+10d=-31 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=19$, $d=-5$
 $\therefore S_{100}=\frac{100\{2 \times 19+(100-1) \times (-5)\}}{2}$
 $=-22850$
- 7 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=165$
 $\therefore 2a+9d=33 \quad \dots\dots ㉠$
 $S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=630$
 $\therefore 2a+19d=63 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=3$

$$\begin{aligned}\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{40} \\&=S_{40}-S_{10} \\&=\frac{40\{2\times 3+(40-1)\times 3\}}{2}-165=2295\end{aligned}$$

8 $S_n=\frac{n\{2\times 60+(n-1)\times (-4)\}}{2}=-2n^2+62n$

이때 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 처음으로 음수가 된다고 하면

$$S_n=-2n^2+62n<0, \quad n(n-31)>0$$

$$\therefore n<0 \text{ 또는 } n>31$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 32이다.

9 3으로 나누면 2가 남는 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, ...

5로 나누면 3이 남는 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, ...

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 8, 23, 38, ...이므로 첫째항이 8이고 공차가 15인 등차수열이다.

$$\begin{aligned}\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10} \\&=\frac{10\{2\times 8+(10-1)\times 15\}}{2}=755\end{aligned}$$

10 $S_n=n^2+an+b$ 에서

(i) $n\geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\&= n^2 + an + b - \{(n-1)^2 + a(n-1) + b\} \\&= 2n + a - 1\end{aligned}$$

이때 $a_{19}=42$ 이므로

$$a_{19}=2\times 19+a-1=42 \quad \therefore a=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1=S_1=1+a+b=3 \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡에 ㉠을 대입하면 $b=-3$

$$\therefore a-b=5+3=8$$

점 P_n 의 x 좌표를 차례로 나열하면

5, 2, -1, ...

이는 첫째항이 5, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항 x_n 은

$$x_n=5+(n-1)\times (-3)=-3n+8$$

또 점 P_n 의 y 좌표를 차례로 나열하면

0, 2, 4, 6, ...

이는 첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 y_n 은

$$y_n=0+(n-1)\times 2=2n-2$$

$$\text{따라서 } x_{40}=-3\times 40+8=-112, \quad y_{40}=2\times 40-2=78$$

이므로 점 P_{40} 의 좌표는 $(-112, 78)$

2 공차를 d 라 하면 첫째항이 5, 제 $(m+2)$ 항이 20이므로

$$5+(m+2-1)d=20 \quad \therefore d=\frac{15}{m+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 제 $(m+n+3)$ 항이 50이므로

$$5+(m+n+3-1)d=50$$

$$\therefore d=\frac{45}{m+n+2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{15}{m+1}=\frac{45}{m+n+2}$$

$$15(m+n+2)=45(m+1) \quad \therefore n=2m+1$$

3 중심각의 크기가 같은 부채꼴에서 호의 길이는 반지름의 길이에 비례한다.

B열의 좌석 수를 b 석이라 하면

$$10:20=11:b \quad \therefore b=22$$

C열의 좌석 수를 c 석이라 하면

$$10:20=12:c \quad \therefore c=24$$

따라서 A열부터 T열까지의 전체 좌석 수는 첫째항이

20, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\frac{20\{2\times 20+(20-1)\times 2\}}{2}=780(\text{석})$$

4 $S_n=n^2+n$ 에서

$$a_1=S_1=2, \quad a_n=S_n-S_{n-1}=2n \quad (n\geq 2) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{50}\{(S_1+S_3+S_5+\cdots+S_{99}) \\&\quad -(S_2+S_4+S_6+\cdots+S_{98})\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{50}\{S_1+(S_3-S_2)+(S_5-S_4)+\cdots+(S_{99}-S_{98})\}$$

$$=\frac{1}{50}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})$$

$$=\frac{1}{50}(2+6+10+\cdots+198)$$

$$=\frac{1}{50}\times \frac{50(2+198)}{2}=100$$

실전 연습문제

p.158

1 $(-112, 78)$ 2 $n=2m+1$ 3 780석 4 100

1 n 개의 점이 직선 l 위에 일정한 간격으로 놓여 있으므로 점 P_n 의 x 좌표와 y 좌표는 각각 등차수열을 이룬다.

02 등비수열

1 개념 CHECK

p.160

- 답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$
- 답 (1) 0,001 (2) -27, 1
- 답 (1) $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (2) $a_n = 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$
 (2) 첫째항이 9, 공비가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$$
- 답 (1) $x = -3, y = -27$ 또는 $x = 3, y = 27$
 (2) $x = -2, y = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 2, y = \frac{1}{2}$
 (1) x 는 1과 9의 등비중항이므로
 $x^2 = 1 \times 9 \quad \therefore x = \pm 3$
 y 는 9와 81의 등비중항이므로
 $y^2 = 9 \times 81 \quad \therefore y = \pm 27$
 따라서 x, y 의 값은
 $x = -3, y = -27$ 또는 $x = 3, y = 27$
 (2) x 는 4와 1의 등비중항이므로
 $x^2 = 4 \times 1 \quad \therefore x = \pm 2$
 y 는 1과 $\frac{1}{4}$ 의 등비중항이므로
 $y^2 = 1 \times \frac{1}{4} \quad \therefore y = \pm \frac{1}{2}$
 따라서 x, y 의 값은
 $x = -2, y = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 2, y = \frac{1}{2}$

1 유제 & 문제

p.161~166

- 유제 01 답 $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$
 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 = ar = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $a_5 = ar^4 = 162 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면
 $\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{-6}, r^3 = -27$
 이때 r 는 실수이므로 $r = -3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $-3a = -6 \quad \therefore a = 2$
 따라서 첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$

문제 01-1 답 96

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 + a_5 = ar + ar^4 = 54$
 $\therefore ar(1+r^3) = 54 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $a_3 + a_6 = ar^2 + ar^5 = 108$
 $\therefore ar^2(1+r^3) = 108 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면
 $\frac{ar^2(1+r^3)}{ar(1+r^3)} = \frac{108}{54} \quad \therefore r = 2$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $18a = 54 \quad \therefore a = 3$
 따라서 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 \times 2^{n-1} \quad \therefore a_6 = 3 \times 2^5 = 96$

문제 01-2 답 512

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 + a_3 = 6$ 이므로
 $ar + ar^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또 $a_5 : a_7 = 1 : 4$ 에서 $ar^4 : ar^6 = 1 : 4$ 이므로
 $\frac{ar^4}{ar^6} = 4, r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2a + 4a = 6 \quad \therefore a = 1$
 따라서 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 2^{n-1} \quad \therefore a_{10} = 2^9 = 512$

유제 02 답 제11항

첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$
 이때 제 n 항에서 처음으로 2000보다 커진다고 하면
 $a_n = 2^n > 2000$
 이때 $2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$ 이므로 $n \geq 11$
 그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 11이다.
 따라서 처음으로 2000보다 커지는 항은 제11항이다.

문제 02-1 답 6

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 = ar = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $a_4 = ar^3 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면
 $\frac{ar^3}{ar} = \frac{25}{5}, r^2 = 5 \quad \therefore r = \sqrt{5} (\because r > 0)$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\sqrt{5}a = 5 \quad \therefore a = \sqrt{5}$
 따라서 첫째항이 $\sqrt{5}$, 공비가 $\sqrt{5}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = (\sqrt{5})^n \quad \therefore a_n^2 = 5^n$
 $a_n^2 > 8000$, 즉 $5^n > 8000$ 에서
 $5^5 = 3125, 5^6 = 15625$ 이므로 $n \geq 6$
 그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 6이다.

문제 02-2 답 21

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3=36, a_5=324 \text{이므로}$$

$$a_3=ar^2=36 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_5=ar^4=324 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①÷②을 하면

$$\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{324}{36}, r^2=9 \quad \therefore r=3 (\because r>0)$$

이를 ①에 대입하면

$$9a=36 \quad \therefore a=4$$

첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n=4 \times 3^{n-1}$$

$$a_n > 10^{10}, \text{ 즉 } 4 \times 3^{n-1} > 10^{10} \text{에서}$$

$$3^{n-1} > \frac{10^{10}}{4}$$

양변에 상용로그를 취하여 n 의 값의 범위를 구하면

$$\log 3^{n-1} > \log \frac{10^{10}}{4}$$

$$(n-1) \log 3 > \log 10^{10} - \log 2^2$$

$$n-1 > \frac{10-2\log 2}{\log 3}$$

$$n-1 > \frac{10-2 \times 0.3010}{0.4771} = 19.69\dots$$

$$\therefore n > 20.69\dots$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 21이다.

유제 03 답 1152

공비를 r 라 하면 첫째항이 6, 제7항이 192이므로

$$6r^6=192 \quad \therefore r^6=32$$

이때 x_2, x_4 는 각각 제3항, 제5항이므로

$$x_2x_4=6r^2 \times 6r^4=36r^6=36 \times 32=1152$$

문제 03-1 답 3

첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이

768이므로

$$3 \times 4^{m+1}=768, 4^{m+1}=256=4^4$$

따라서 $m+1=4$ 이므로 $m=3$

문제 03-2 답 70

공비를 r 라 하면 첫째항이 2, 제16항이 512이므로

$$2r^{15}=512 \text{에서 } r^{15}=2^8$$

$$\therefore x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_{14} = 2r \times 2r^2 \times 2r^3 \times \dots \times 2r^{14}$$

$$= 2^{14} \times r^{1+2+3+\dots+14}$$

$$= 2^{14} \times r^{\frac{14(1+14)}{2}}$$

$$= 2^{14} \times r^{7 \times 15} = 2^{14} \times (r^{15})^7$$

따라서 $r^{15}=2^8$ 을 대입하면

$$2^{14} \times (2^8)^7 = 2^{14} \times 2^{56} = 2^{70} \quad \therefore k=70$$

유제 04 답 8

$3a$ 는 $a+1$ 과 $8a$ 의 등비중항이므로

$$(3a)^2 = (a+1) \times 8a$$

$$9a^2 = 8a^2 + 8a, a^2 - 8a = 0$$

$$a(a-8)=0, a=0 \text{ 또는 } a=8$$

이때 $a+1, 3a, 8a$ 는 서로 다른 수이므로 $a=8$

문제 04-1 답 $a=1, b=-2$

a 는 4와 b 의 등차중항이므로

$$a = \frac{4+b}{2}, 2a=4+b$$

$$\therefore b=2a-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 b 는 a 와 4의 등비중항이므로

$$b^2=4a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$(2a-4)^2=4a, 4a^2-20a+16=0$$

$$a^2-5a+4=0, (a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=1, b=-2 \text{ 또는 } a=4, b=4$$

이때 a, b 는 서로 다른 수이므로 $a=1, b=-2$

문제 04-2 답 3

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1=a, a_2=a+d, a_5=a+4d \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 $a, a+d, a+4d$ 는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+d)^2=a(a+4d), a^2+2ad+d^2=a^2+4ad$$

$$d^2=2ad \quad \therefore d=2a (\because d \neq 0)$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } a_1=a, a_2=3a, a_5=9a$$

따라서 구하는 공비는 3이다.

유제 05 답 -8

삼차방정식의 세 실근을 $a, ar, ar^2 (a \neq 0)$ 이라 하면 근

과 계수의 관계에 의해

$$a+ar+ar^2=-4$$

$$\Rightarrow a(1+r+r^2)=-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar + a \times ar^2 + ar \times ar^2 = -8$$

$$\Rightarrow a^2r(1+r+r^2)=-8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k$$

$$\Rightarrow (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

①÷②을 하면

$$\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{-8}{-4} \quad \therefore ar=2$$

이를 ③에 대입하면 $k=-8$

문제 05-1 답 8

$$\begin{aligned}
 x^3 - 3x^2 &= 6x - k \text{에서 } x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0 \\
 \text{삼차방정식 } x^3 - 3x^2 - 6x + k &= 0 \text{의 세 실근을 } a, ar, ar^2 \\
 (a \neq 0) \text{이라 하면 근과 계수의 관계에 의해} \\
 a + ar + ar^2 &= 3 \\
 \Rightarrow a(1 + r + r^2) &= 3 \quad \dots\dots \textcircled{A} \\
 a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a &= -6 \\
 \Rightarrow a^2 r(1 + r + r^2) &= -6 \quad \dots\dots \textcircled{B} \\
 a \times ar \times ar^2 &= -k \\
 \Rightarrow (ar)^3 &= -k \quad \dots\dots \textcircled{C} \\
 \textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{을 하면} \\
 \frac{a^2 r(1 + r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} &= \frac{-6}{3} \quad \therefore ar = -2 \\
 \text{이를 } \textcircled{C} \text{에 대입하면 } k &= 8
 \end{aligned}$$

문제 05-2 답 2

네 자연수를 a, ar, ar^2, ar^3 이라 하면 a 는 자연수이고 a 는 수부터 나열했으므로 $r > 1$ 이다.

이때 r 는 자연수가 아니므로

$$r = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 자연수, } p \neq 1) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$r > 1 \text{이므로 } \frac{q}{p} > 1 \quad \therefore q > p \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또 $ar^3 \leq 100$ 이므로

$$ar^3 = a \left(\frac{q}{p} \right)^3 = a \times \frac{q^3}{p^3} \leq 100$$

$a \times \frac{q^3}{p^3}$ 은 자연수이므로

$$a = (p^3 \text{의 배수}), q^3 \leq 100$$

이때 $q^3 \leq 100$ 을 만족하는 q 의 값은

$$q = 2 \text{ 또는 } q = 3 \text{ 또는 } q = 4$$

그런데 $\textcircled{A}$ 에서 $p \neq 1$ 인 자연수이고 $\textcircled{B}$ 에서 $q > p$ 이므로

$$p = 2, q = 3 \text{ 또는 } p = 3, q = 4$$

따라서 $\textcircled{A}$ 을 만족하는 $\frac{q}{p}$ 의 값은 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ 이므로 모든 공비의 곱은

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

유제 06 답 20번째

처음 선분의 길이가 l 이므로

첫 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$\frac{2}{3}l$$

두 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$\frac{2}{3}l \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 l$$

세 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{3} \right)^2 l \times \frac{2}{3} &= \left(\frac{2}{3} \right)^3 l \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

n 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은 $\left(\frac{2}{3} \right)^n l$

따라서 남은 선분의 길이의 합이 $\left(\frac{2}{3} \right)^{20} l$ 이 되는 것은 20 번째 시행 후이다.

문제 06-1 답 $\frac{3^{10}}{2^{19}}$

정삼각형 R_2 의 한 변의 길이 a_2 는

$$a_2 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

정삼각형 R_3 의 한 변의 길이 a_3 은

$$a_3 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

정삼각형 R_4 의 한 변의 길이 a_4 는

$$a_4 = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

$\vdots$

정삼각형 R_n 의 한 변의 길이 a_n 은

$$a_n = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{20} = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{19} = \frac{3^{10}}{2^{19}}$$

2 개념 CHECK

p.168

1. 답 (1) $3^n - 1$ (2) $2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

(1) 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

2. 답 (1) 2000만 원 (2) 2594만 원

(1) $1000(1 + 0.1 \times 10) = 2000(\text{만 원})$

(2) $1000(1 + 0.1)^{10} = 1000 \times 1.1^{10}$
 $= 1000 \times 2.594$
 $= 2594(\text{만 원})$

유제 07 답 $\frac{1}{9}(3^{10}-1)$ 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_4 = ar^3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_6 = ar^5 = 54 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

 $\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^3} = \frac{54}{6}, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $a = \frac{2}{9}$ 따라서 첫째항이 $\frac{2}{9}$, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{\frac{2}{9}(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{1}{9}(3^{10}-1)$$

문제 07-1 답 $\frac{1}{4}(3^{20}-1)$ 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_4 = ar + ar^3 = 15$$

$$\therefore ar(1+r^2) = 15 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_4 + a_6 = ar^3 + ar^5 = 135$$

$$\therefore ar^3(1+r^2) = 135 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

 $\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$\frac{ar^3(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = \frac{135}{15}, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $a = \frac{1}{2}$

$$\therefore S_{20} = \frac{\frac{1}{2}(3^{20}-1)}{3-1} = \frac{1}{4}(3^{20}-1)$$

문제 07-2 답 65

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_5 = \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

 $\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$1+r^5 = 4 \quad \therefore r^5 = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{15} &= \frac{a(1-r^{15})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^5)}{1-r} (1+r^5+r^{10}) \\ &= 5(1+3+3^2) = 65 \end{aligned}$$

유제 08 답 -108

$$S_n = 4 \times 3^{n+3} + k \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4 \times 3^{n+3} + k - (4 \times 3^{n+2} + k) \\ &= 4 \times 3^{n+2}(3-1) \\ &= 8 \times 3^{n+2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 4 \times 3^4 + k = 324 + k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{㉡}$ 과 같아야 하므로

$$\begin{aligned} 8 \times 3^3 &= 324 + k, \quad 216 = 324 + k \\ \therefore k &= -108 \end{aligned}$$

문제 08-1 답 $a_n = 4 \times 3^{n-1}$

$$S_n = 2 \times 3^n - 2 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2 \times 3^n - 2 - (2 \times 3^{n-1} - 2) \\ &= 2 \times 3^{n-1}(3-1) \\ &= 4 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 3 - 2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉡}$ 은 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

문제 08-2 답 풀이 참조, 첫째항: 20, 공비: 5

$$S_n = 5^{n+1} - 5 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 5^{n+1} - 5 - (5^n - 5) \\ &= 4 \times 5^n \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 5^2 - 5 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉡}$ 은 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times 5^n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등비수열을 이루고, 첫째항이 20, 공비가 5이다.

유제 09 답 (1) 698000원 (2) 791000원

(1) 연이율 6%, 1년마다 복리로 매년 초에 5만 원씩
10년 동안 적립할 때, 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= 5(1+0.06) + 5(1+0.06)^2 + \cdots + 5(1+0.06)^{10} \\
 &= \frac{5(1+0.06)\{(1+0.06)^{10}-1\}}{(1+0.06)-1} \\
 &= \frac{5 \times 1.06 \times 0.791}{0.06} \\
 &= 69.87 \cdots (\text{만 원})
 \end{aligned}$$

따라서 10년 말까지 적립금의 원리합계는 698000원이다.

- (2) 연이율 6%, 1년마다 복리로 매년 말에 6만 원씩 10년 동안 적립할 때, 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= 6 + 6(1+0.06) + 6(1+0.06)^2 + \cdots + 6(1+0.06)^9 \\
 &= \frac{6\{(1+0.06)^{10}-1\}}{(1+0.06)-1} \\
 &= \frac{6 \times 0.791}{0.06} \\
 &= 79.1 (\text{만 원})
 \end{aligned}$$

따라서 10년 말까지 적립금의 원리합계는 791000원이다.

문제 09-1 [답 100년 후]

광물의 내년 소비량이 2×10^9 톤으로 추정되고, 소비량은 매년 그 전년도에 비해 5%씩 증가하므로 n 년 후의 소비량을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 2 \times 10^9$$

$$a_2 = 2 \times 10^9 \times 1.05$$

$$a_3 = 2 \times 10^9 \times 1.05 \times 1.05 = 2 \times 10^9 \times 1.05^2$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = 2 \times 10^9 \times 1.05^{n-1}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2×10^9 , 공비가 1.05인 등비수열이다.

올해부터 n 년 후까지의 광물의 소비량은 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{2 \times 10^9(1.05^n - 1)}{1.05 - 1}$$

이때 n 년 후에 광물이 고갈된다고 하면

$$\frac{2 \times 10^9(1.05^n - 1)}{1.05 - 1} \geq 5 \times 10^{12}$$

$$\therefore 1.05^n \geq 126$$

양변에 상용로그를 취하여 n 의 값을 구하면

$$\log 1.05^n \geq \log 126$$

$$n \log 1.05 \geq 2 + \log 1.26$$

$$\therefore n \geq \frac{2 + \log 1.26}{\log 1.05}$$

$$= \frac{2.100}{0.021}$$

$$= 100$$

따라서 올해로부터 100년 후에 광물이 고갈된다.

기본 연습문제

p.172~173

1 $\frac{1}{2}$

2 40

3 2

4 40

5 $\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

6 $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$

7 1248

8 ④

9 4

- 1 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = 24$$

..... ㉠

또 $a_3 : a_4 = 2 : 1$ 에서 $ar^2 : ar^3 = 2 : 1$ 이므로

$$\frac{ar^3}{ar^2} = \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a = 24 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_8 = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2}$$

- 2 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r , s 라 하면

$$a_8 b_8 = a_5 r^3 \times b_5 s^3 = a_5 b_5 (rs)^3$$

$$20 = 10(rs)^3 \quad \therefore (rs)^3 = 2$$

$$\therefore a_{11} b_{11} = a_8 b_8 (rs)^3$$

$$= 20 \times 2 = 40$$

- 3 $f(x)$ 를 $x-1$, x , $x+1$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해

$$f(1) = a+4, f(0) = a, f(-1) = a-2$$

이때 $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\{f(0)\}^2 = f(1) \times f(-1) \text{에서 } a^2 = (a+4)(a-2)$$

$$a^2 = a^2 + 2a - 8 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x + 4$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) + 4 = 2$$

- 4 세 모서리의 길이 l , m , n 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $l = a$, $m = ar$, $n = ar^2$ ($a \neq 0$)이라 하자.

직육면체의 부피가 27이므로

$$a \times ar \times ar^2 = a^3 r^3 = 27 \quad \therefore ar = 3$$

..... ㉠

또 겹넓이가 60이므로

$$2a^2 r + 2a^2 r^2 + 2a^2 r^3 = 2ar(a + ar + ar^2) = 60$$

$$\therefore a + ar + ar^2 = 10 (\because \text{㉠})$$

따라서 모든 모서리의 길이의 합은 $4l + 4m + 4n$ 이므로

$$4(l + m + n) = 4(a + ar + ar^2) = 40$$

- 5 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

첫 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \frac{3}{4}$$

두 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 10번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

- 6 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 = a + ar^2 = 10$$

$$\therefore a(1+r^2) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_3 + a_5 = ar^2 + ar^4 = 90$$

$$\therefore ar^2(1+r^2) = 90 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$\frac{ar^2(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{90}{10}, \quad r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a = 1$

$$\therefore S_{30} = \frac{1 \times (3^{30} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{30} - 1)$$

- 7 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6 = 8 + 40 = 48 \text{이므로}$$

$$S_6 = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 48 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$1+r^3 = 6 \quad \therefore r^3 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{12} &= \frac{a(1-r^{12})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^6)(1+r^6)}{1-r} \\ &= 48(1+5^2) \quad (\because \textcircled{9}, \textcircled{8}) \\ &= 1248 \end{aligned}$$

다른 풀이

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 8$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = ar^3 + ar^4 + ar^5 = r^3(a + ar + ar^2) = 40$$

$$\text{이므로 } r^3 = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12} \\ &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{11} \\ &= (a + ar + ar^2) + r^3(a + ar + ar^2) \\ &\quad + r^6(a + ar + ar^2) + r^9(a + ar + ar^2) \\ &= 8 + 5 \times 8 + 5^2 \times 8 + 5^3 \times 8 \\ &= \frac{8(5^4 - 1)}{5 - 1} = 1248 \end{aligned}$$

- 8 $\neg$. $S_n = 3^{n+1} - 2$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^{n+1} - 2 - (3^n - 2) \\ &= 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 - 2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로
둘째항부터 등비수열을 이룬다.

$$\therefore a_1 = 7, \quad a_n = 2 \times 3^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$\neg$. $a_1 = 7, \quad a_n = 2 \times 3^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$ 이므로

$$a_1 + a_3 = 7 + 2 \times 3^3 = 7 + 54 = 61$$

$\neg$. $a_n = 2 \times 3^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$ 이므로

$$a_{2n} = 2 \times 3^{2n} = 2 \times 9^n \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 공비가 9인 등비수열이다.

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

- 9 $\log_2(S_n + k) = n + 2$ 에서 로그의 정의에 의해

$$S_n + k = 2^{n+2}, \quad S_n = 2^{n+2} - k$$

$$\therefore S_n = 4 \times 2^n - k$$

$$S_n = 4 \times 2^n - k \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4 \times 2^n - k - (4 \times 2^{n-1} - k) \\ &= 4 \times 2^{n-1}(2 - 1) = 4 \times 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 - k = 8 - k \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{7}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{8}$ 과 같아야 하므로

$$4 \times 2^0 = 8 - k, \quad 4 = 8 - k$$

$$\therefore k = 4$$

1 10 2 $x=1, y=-2$ 3 13 4 166000원

- 1 첫째항이 1000, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은
- $$a_n = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
- 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 1000부터 시작하여 항의 값이 감소하므로 1보다 큰 값이 나오는 마지막 항까지의 곱이 최대이다.
- 따라서 제 n 항까지 1보다 큰 수가 나온다고 하면
- $$a_n = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1$$
- $$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{1000}$$
- 이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ 에서 n 은 자연수이므로 n 의 값은 10이다.
- 따라서 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$ 의 값이 최대가 되는 n 의 값은 10이다.

- 2 두 점 A(1, 2), B(x, y)를 잇는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q를 구하면
- $$P\left(\frac{2x+1}{3}, \frac{2y+2}{3}\right), Q(2x-1, 2y-2)$$
- 이때 세 점 A, P, Q의 x 좌표는 각각
- $$1, \frac{2x+1}{3}, 2x-1$$
- 이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로
- $$\frac{2x+1}{3} = \frac{1+2x-1}{2}$$
- $$4x+2=6x \quad \therefore x=1$$
- 또 세 점 P, B, Q의 y 좌표는 각각
- $$\frac{2y+2}{3}, y, 2y-2$$
- 이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로
- $$y^2 = \frac{2y+2}{3} \times (2y-2)$$
- $$3y^2 = 4y^2 - 4, y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$$
- 이때 A, B는 서로 다른 점이므로 $y \neq 2$ 이다.
- $$\therefore y = -2$$

- 3 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
- $$S_{2n} = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r}, S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
- $$S_{2n} = 4S_n \text{이므로 } \frac{S_{2n}}{S_n} = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{2n}}{S_n} &= \frac{\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^n)}{1-r}} \\ &= \frac{1-r^{2n}}{1-r^n} \\ &= \frac{(1-r^n)(1+r^n)}{1-r^n} \\ &= 1+r^n = 4 \\ \therefore r^n &= 3 \end{aligned}$$

..... ㉠

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} \text{이므로} \\ \frac{S_{3n}}{S_n} &= \frac{\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}}{\frac{a(1-r^n)}{1-r}} \\ &= \frac{1-r^{3n}}{1-r^n} \\ &= \frac{(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r^n} \\ &= 1+r^n+r^{2n} \\ &= 1+3+9 (\because \text{㉠}) \\ &= 13 \end{aligned}$$

- 4 연이율 6%, 1년마다의 복리로 매년 초에 a 원씩 5년 동안 적립할 때의 원리합계를 S 라 하면
- $$\begin{aligned} S &= a(1+0.06) + a(1+0.06)^2 + \cdots + a(1+0.06)^5 \\ &= \frac{a(1+0.06)\{(1+0.06)^5 - 1\}}{(1+0.06) - 1} \\ &= \frac{a \times 1.06 \times 0.34}{0.06} (\text{원}) \end{aligned}$$
- 이때 $S = 1000000$ (원)이어야 하므로
- $$\frac{a \times 1.06 \times 0.34}{0.06} = 1000000$$
- $$\therefore a = \frac{1000000 \times 0.06}{1.06 \times 0.34} \doteq 166000 (\text{원})$$

01 수열의 합

1 개념 CHECK

p.177

1. 답 (1) $\sum_{k=1}^{49} k(k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^7 5$
 (3) $\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{2k-1}$ (4) $\sum_{k=1}^{20} 3^k$

2. 답 (1) $2+2^2+2^3+2^4+2^5$
 (2) $-1+2-3+\cdots+(-1)^n \times n$
 (3) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{20 \times 22}$
 (4) $5+7+9+\cdots+15$

3. 답 (1) 10 (2) 4 (3) 28 (4) 25
 (1) $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 7 + 3 = 10$
 (2) $\sum_{k=1}^5 (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k = 7 - 3 = 4$
 (3) $\sum_{k=1}^5 4a_k = 4 \sum_{k=1}^5 a_k = 4 \times 7 = 28$
 (4) $\sum_{k=1}^5 5 = 5 \times 5 = 25$

1 유제 & 문제

p.178~179

유제 01 답 100

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n - na_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k - na_{n+1} \\ & \sum_{k=1}^n a_k - na_{n+1} = 4n^2 - na_{n+1} \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^n a_k = 4n^2 \\ & \therefore \sum_{k=1}^5 a_k = 4 \times 5^2 = 100 \end{aligned}$$

문제 01-1 답 300

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{100} ka_k = 600 \text{에서} \\ & a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100} = 600 \quad \text{..... ㉠} \\ & \sum_{k=1}^{99} ka_{k+1} = 300 \text{에서} \\ & a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 99a_{100} = 300 \quad \text{..... ㉡} \\ & \text{㉠} - \text{㉡을 하면} \\ & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = 300 \end{aligned}$$

문제 01-2 답 60

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{14} f(k+1) - \sum_{k=2}^{15} f(k-1) \\ &= f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(15) \\ & \quad - \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(14)\} \\ &= f(15) - f(1) \\ &= 80 - 20 = 60 \end{aligned}$$

유제 02 답 (1) 40 (2) 38 (3) $\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}}$

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4b_k + 3) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 4 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 2 \times 55 - 4 \times 25 + 3 \times 10 = 40 \\ (2) & \sum_{k=1}^n (k^2 + 2) - \sum_{k=5}^n (k^2 + 2) \\ &= \sum_{k=1}^4 (k^2 + 2) \\ &= (1^2 + 2) + (2^2 + 2) + (3^2 + 2) + (4^2 + 2) = 38 \\ (3) & \sum_{k=1}^{12} \frac{6^{k-1} - 3^k - 2^{k+1}}{6^k} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \left\{ \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2 \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{6} \times 12 - \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \right\} \\ & \quad - 2 \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \right\} \\ &= 2 - \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 \times \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 2 - \left(1 - \frac{1}{2^{12}}\right) - \left(1 - \frac{1}{3^{12}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} \end{aligned}$$

문제 02-1 답 -5

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n a_k = -4n \text{에서 } \sum_{k=1}^5 a_k = -4 \times 5 = -20 \\ & \sum_{k=1}^n b_k = n^2 + 2n \text{에서 } \sum_{k=1}^5 b_k = 5^2 + 2 \times 5 = 35 \\ & \therefore \sum_{k=1}^5 (2a_k + b_k) = 2 \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k \\ &= 2 \times (-20) + 35 = -5 \end{aligned}$$

문제 02-2 답 $3^{11} - 3$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (2 \times 3^k) - \sum_{k=11}^n (2 \times 3^k) = \sum_{k=1}^{10} (2 \times 3^k) = 2 \sum_{k=1}^{10} 3^k \\ &= 2(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10}) \\ &= 2 \times \frac{3(3^{10} - 1)}{3 - 1} \\ &= 3^{11} - 3 \end{aligned}$$

1. 답 (1) 120 (2) 316 (3) 2870 (4) 1296

$$(1) \sum_{k=1}^{15} k = \frac{15 \times 16}{2} = 120$$

$$(2) \sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=1}^5 k^3 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + \left(\frac{5 \times 6}{2}\right)^2 = 316$$

$$(3) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$$

$$(4) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 = \left(\frac{8 \times 9}{2}\right)^2 = 1296$$

2 유제 & 문제

p.181~184

유제 03 답 (1) -264 (2) 1015 (3) 855

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^8 (4k - 2k^2) &= 4 \sum_{k=1}^8 k - 2 \sum_{k=1}^8 k^2 \\ &= 4 \times \frac{8 \times 9}{2} - 2 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \\ &= -264 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} (2k-1)(k+3) &= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 5k - 3) = 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 5 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 5 \times \frac{10 \times 11}{2} - 30 = 1015 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^{15} (k+3)^2 - \sum_{k=1}^{15} k^2 &= \sum_{k=1}^{15} (k^2 + 6k + 9 - k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{15} (6k + 9) = 6 \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 9 \\ &= 6 \times \frac{15 \times 16}{2} + 135 = 855 \end{aligned}$$

문제 03-1 답 (1) 7665 (2) 3097

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=5}^9 k(2k-1)(2k+1) &= \sum_{k=5}^9 (4k^3 - k) \\ &= \sum_{k=1}^9 (4k^3 - k) - \sum_{k=1}^4 (4k^3 - k) \\ &= 4 \sum_{k=1}^9 k^3 - \sum_{k=1}^9 k - 4 \sum_{k=1}^4 k^3 + \sum_{k=1}^4 k \\ &= 4 \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 - \frac{9 \times 10}{2} - 4 \times \left(\frac{4 \times 5}{2}\right)^2 + \frac{4 \times 5}{2} \\ &= 7665 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=2}^{20} \frac{k^3}{k-1} - \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k-1} &= \sum_{k=2}^{20} \frac{k^3 - 1}{k-1} = \sum_{k=2}^{20} \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{20} (k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{20} (k^2 + k + 1) - (1^2 + 1 + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 - 3 \\ &= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + \frac{20 \times 21}{2} + 20 - 3 \\ &= 3097 \end{aligned}$$

문제 03-2 답 (1) 23 (2) $\frac{315}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{20} \frac{2+4+6+\dots+2k}{10k} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2(1+2+3+\dots+k)}{10k} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2 \times \frac{k(k+1)}{2}}{10k} = \sum_{k=1}^{20} \frac{k+1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{20} (k+1) = \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{20 \times 21}{2} + 20 \right) = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} \frac{1+4+9+\dots+k^2}{k} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2k^2 + 3k + 1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + \frac{5}{3} \\ &= \frac{315}{2} \end{aligned}$$

유제 04 답 (1) $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

$$(2) \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+2) = n^2 + 2n$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2(n+1) = n^3 + n^2$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}\end{aligned}$$

문제 04-1 [답] 7820

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1 = 1 \times 1$$

$$a_2 = 2 + 4 = 2(1 + 2)$$

$$a_3 = 3 + 6 + 9 = 3(1 + 2 + 3)$$

$$a_4 = 4 + 8 + 12 + 16 = 4(1 + 2 + 3 + 4)$$

⋮

$$\therefore a_n = n(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} \frac{k^3 + k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{15} k^3 + \sum_{k=1}^{15} k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{15 \times 16}{2} \right)^2 + \frac{15 \times 16 \times 31}{6} \right\} \\ &= 7820\end{aligned}$$

문제 04-2 [답] $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

주어진 식에서

$$a_1 = 1 \times n$$

$$a_2 = 2 \times (n-1)$$

$$a_3 = 3 \times (n-2)$$

⋮

$$a_{n-1} = (n-1) \times 2$$

$$a_n = n \times 1$$

이라 하면

$$a_k = k\{n - (k-1)\} = -k^2 + (n+1)k$$

따라서 주어진 식은

$$1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + \cdots + n \times 1$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\}$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

유제 05 [답] $5n^2 + 60n$

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{10} (k+l) \right\} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^{10} k + l \sum_{k=1}^{10} 1 \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{10 \times 11}{2} + 10l \right) \\ &= \sum_{l=1}^n (10l + 55) \\ &= 10 \sum_{l=1}^n l + \sum_{l=1}^n 55 \\ &= 10 \times \frac{n(n+1)}{2} + 55n \\ &= 5n^2 + 60n\end{aligned}$$

문제 05-1 [답] (1) 605 (2) 2200

$$\begin{aligned}(1) \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^j (2k+3) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(2 \sum_{k=1}^j k + \sum_{k=1}^j 3 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 2 \times \frac{j(j+1)}{2} + 3j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} (j^2 + 4j) = \sum_{j=1}^{10} j^2 + 4 \sum_{j=1}^{10} j \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 4 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 605\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \sum_{k=1}^5 \left(\sum_{j=1}^{10} jk^2 \right) - \sum_{k=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^5 jk \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \left(k^2 \sum_{j=1}^{10} j \right) - \sum_{k=1}^{10} \left(k \sum_{j=1}^5 j \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \left(k^2 \times \frac{10 \times 11}{2} \right) - \sum_{k=1}^{10} \left(k \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= 55 \sum_{k=1}^5 k^2 - 15 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 55 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 15 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 2200\end{aligned}$$

문제 05-2 [답] 4

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 6 \right) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m 6l \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ 6 \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^n (3m^2 + 3m) = 3 \sum_{m=1}^n m^2 + 3 \sum_{m=1}^n m \\ &= 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n\end{aligned}$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n = 120 \text{에서}$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 120 = 0$$

$$(n-4)(n^2 + 7n + 30) = 0$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=4$

유제 06 [답 1400]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k = 4k$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (k-12)a_{2k} &= \sum_{k=1}^{20} (k-12)4k = \sum_{k=1}^{20} (4k^2 - 48k) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{20} k^2 - 48 \sum_{k=1}^{20} k \\ &= 4 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 48 \times \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 1400 \end{aligned}$$

문제 06-1 [답 2728]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+1} + 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{n+1} + 1 - (2^n + 1) \\ &= 2^n(2-1) = 2^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^2 + 1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은 $a_1=5$, $a_n=2^n$ ($n \geq 2$)

따라서 $a_{2k+1} = 2^{2k+1} = 2 \times 4^k$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} &= \sum_{k=1}^5 (2 \times 4^k) \\ &= 2 \times \frac{4(4^5 - 1)}{4 - 1} \\ &= 2728 \end{aligned}$$

문제 06-2 [답 1524]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 11n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 11n - \{(n-1)^2 - 11(n-1)\} \\ &= 2n - 12 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 11 = -10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 12$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k - 12 = 4k - 12$ 이므로

$a_{2k} \geq 0$ 을 만족하는 k 의 값의 범위는

$$4k - 12 \geq 0 \quad \therefore k \geq 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} |a_{2k}| &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=3}^{30} a_{2k} \\ &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=1}^{30} a_{2k} - \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{30} a_{2k} - 2 \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{30} (4k - 12) - 2 \sum_{k=1}^2 (4k - 12) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} 12 - 2 \{ \underset{k=1}{-8} + \underset{k=2}{(-4)} \} \\ &= 4 \times \frac{30 \times 31}{2} - 360 + 24 = 1524 \end{aligned}$$

3 개념 CHECK

p.185

1. [답] (1) $\frac{5}{11}$ (2) $\sqrt{13} - \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{22} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{22} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\ &= (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{13} - \sqrt{12}) \\ &= \sqrt{13} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

3 유제 & 문제

p.186~190

유제 07 [답] $\frac{n}{4(n+1)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 + 4n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 + 4k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

문제 07-1 답 $\frac{36}{55}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)} \quad \blacktriangleleft \text{등차수열의 합} \\ &= \frac{1}{n(3+2n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+2)} \\ \therefore \sum_{k=1}^9 a_k &= \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{36}{55} \end{aligned}$$

문제 07-2 답 $\frac{72}{55}$

$x^2+2x-n^2+1=0$ 의 두 근이 a_n, b_n 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= -2, \quad a_n b_n = -n^2 + 1 \\ \therefore \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} \right) &= \sum_{k=2}^{10} \frac{a_k + b_k}{a_k b_k} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{k^2 - 1} = \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55} \end{aligned}$$

유제 08 답 5

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \\ \therefore \sum_{k=1}^{60} a_k &= \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{60} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{60} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{1} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{119} - \sqrt{121}) \} \\ &= -\frac{1}{2} (1 - 11) = 5 \end{aligned}$$

문제 08-1 답 $2\sqrt{3}$

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{36} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{36} \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3}} \\ &= \sum_{k=1}^{36} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3})} \\ &= \sum_{k=1}^{36} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{36} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3}) \\ &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) + (\sqrt{7} - \sqrt{9}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{73} - \sqrt{75}) \} \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

문제 08-2 답 30

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= -\sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}) \\ &= -\{ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4}) + (\sqrt{4} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{m+1} - \sqrt{m+2}) \} \\ &= \sqrt{m+2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

즉, $\sqrt{m+2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{m+2} = 4\sqrt{2}, \quad m+2 = 32$$

$$\therefore m = 30$$

유제 09 답 $19 \times 2^{20} + 1$

구하는 합을 S 라 하고 $S - 2S$ 를 하면

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + 20 \times 2^{19} \\ -) 2S &= \quad \quad 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + 19 \times 2^{19} + 20 \times 2^{20} \\ \hline -S &= \quad 1 + \quad 2 + \quad 2^2 + \cdots + \quad 2^{19} - 20 \times 2^{20} \\ &= \frac{1 \times (2^{20} - 1)}{2 - 1} - 20 \times 2^{20} \\ &= -19 \times 2^{20} - 1 \\ \therefore S &= 19 \times 2^{20} + 1 \end{aligned}$$

문제 09-1 답 7

S_n 에서 $n=10$ 일 때

$$S_{10} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 10 \times \frac{1}{2^9}$$

등비수열의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $S_{10} - \frac{1}{2}S_{10}$ 을 하면

$$\begin{aligned}
S_{10} &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 10 \times \frac{1}{2^9} \\
-\frac{1}{2} S_{10} &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 9 \times \frac{1}{2^9} + 10 \times \frac{1}{2^{10}} \\
\frac{1}{2} S_{10} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^9} - 10 \times \frac{1}{2^{10}} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} - 10 \times \frac{1}{2^{10}} \\
&= 2 - 3 \times \frac{1}{2^8} \\
\therefore S_{10} &= 4 - \frac{3}{2^7} \\
S_{10} &= 4 - \frac{3}{2^7} = a - \frac{b}{2^7} \text{에서} \\
a &= 4, b = 3 \quad \therefore a + b = 7
\end{aligned}$$

유제 10 [답] (1) 671 (2) 62

- (1) 주어진 수열을 다음과 같이 1이 각각 첫째항과 마지막 항이 되도록 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(1, 2, 1)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(1, 2, 3, 2, 1)}_{\text{제3군}}, \dots$$

$$\underbrace{(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)}_{\text{제4군}}, \dots$$

제 n 군의 항의 개수는 $2n-1$ 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

$12^2 = 144$, $13^2 = 169$ 에서 제1군부터 제12군까지의 항의 개수가 144이므로 제150항은 제13군의 6번째 항이다.

제 n 군의 항의 합은

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\
&= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2
\end{aligned}$$

따라서 첫째항부터 제150항까지의 합은

(제1군부터 제12군까지의 항의 합)
+ (제13군의 첫째항부터 제6항까지의 합)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{12} k^2 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\
&= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + 21 = 671
\end{aligned}$$

- (2) 주어진 수열을 다음과 같이 분모가 같은 것끼리 묶으면

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\text{제1군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{5}{2^2}, \frac{7}{2^2}\right)}_{\text{제2군}}, \dots$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \frac{9}{2^3}, \frac{11}{2^3}, \frac{13}{2^3}, \frac{15}{2^3}\right)}_{\text{제3군}}, \dots$$

제 n 군의 항의 개수는 2^n 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

$2^{5+1} - 2 = 62$ 이므로 제62항은 제5군의 마지막 항이다.

제 n 군의 항의 분자의 합은

$$\sum_{k=1}^{2^n} (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^{2^n} k - \sum_{k=1}^{2^n} 1 = 2 \times \frac{2^n(2^n+1)}{2} - 2^n = 2^{2n}$$

이므로 제 n 군의 항의 합은

$$\frac{2^{2n}}{2^n} = 2^n$$

따라서 첫째항부터 제62항까지의 합은

(제1군부터 제5군까지의 항의 합)

$$= \sum_{k=1}^5 2^k = \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 2^6 - 2 = 62$$

문제 10-1 [답] 54

주어진 수열을 다음과 같이 두 수의 합이 같은 순서쌍끼리 묶으면

$$\{ \underbrace{(1, 1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{\{(1, 2), (2, 1)\}}_{\text{제2군}}, \underbrace{\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}}_{\text{제3군}}, \dots$$

제 n 군의 항의 개수는 n 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{13 \times 14}{2} = 91, \quad \frac{14 \times 15}{2} = 105 \text{이므로 제100항은 제14군의 9번째 항이다.}$$

제 n 군의 순서쌍을 이루는 두 수의 합이 $n+1$ 이므로

제 n 군의 k 번째 항은 $(k, n+1-k)$ 이다.

따라서 제14군의 9번째 항은 $(9, 6)$ 이므로

$$a = 9, b = 6 \quad \therefore ab = 54$$

문제 10-2 [답] 181

주어진 수열을 다음과 같이 1을 기준으로 1이 마지막 항이 되도록 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(2, 1)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(2, 2, 1)}_{\text{제3군}}, \underbrace{(2, 2, 2, 1)}_{\text{제4군}}, \dots$$

제 n 군의 항의 개수는 n 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{19 \times 20}{2} = 190, \quad \frac{20 \times 21}{2} = 210 \text{이므로 제200항은 제20군의 10번째 항이다.}$$

제 n 군의 숫자 2의 개수는 $n-1$ 이므로 첫째항부터 제200항까지에 있는 숫자 2의 개수는

$$\begin{aligned}
 & (\text{제1군부터 제19군까지의 숫자 2의 개수}) \\
 & + (\text{제20군의 첫째항부터 제10항까지 숫자 2의 개수}) \\
 & = \sum_{k=1}^{19} (k-1) + 10 = \sum_{k=1}^{19} k - \sum_{k=1}^{19} 1 + 10 \\
 & = \frac{19 \times 20}{2} - 19 + 10 = 181
 \end{aligned}$$

문제 10-3 [답 1729]

위에서 k 번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2k-1$ 이므로 첫 번째 줄부터 9번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^9 (2k-1) &= 2 \sum_{k=1}^9 k - \sum_{k=1}^9 1 \\
 &= 2 \times \frac{9 \times 10}{2} - 9 = 81
 \end{aligned}$$

즉, 위에서 10번째 줄의 첫번째 수는 82이고 10번째 줄의 항의 개수는 $2 \times 10 - 1 = 19$ 이므로 10번째 줄에 나열된 모든 수의 합은 첫째항이 82, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제19항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{19 \times \{2 \times 82 + (19-1) \times 1\}}{2} = 1729$$

기본 연습문제

p.191~192

- 1 ㄱ, ㄷ 2 110 3 ③ 4 130 5 $2n + \frac{1}{2}$
 6 200 7 ② 8 30 9 18

$$\begin{aligned}
 1. & \quad \text{ㄱ. } \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\
 & \quad \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\
 & \quad \therefore \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \\
 & \quad \text{ㄴ. } \sum_{k=1}^n 3^k = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n \\
 & \quad \sum_{k=2}^{n+1} 3^k = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{n+1} \\
 & \quad \therefore \sum_{k=1}^n 3^k \neq \sum_{k=2}^{n+1} 3^k \\
 & \quad \text{ㄷ. } \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=m}^n a_j \\
 & \quad = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) \\
 & \quad = \sum_{k=1}^n a_k \\
 & \quad \text{ㄹ. } \sum_{k=0}^n (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) \\
 & \quad = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2} \\
 & \quad \sum_{k=0}^{3n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3n} \\
 & \quad \therefore \sum_{k=0}^n (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{3n} a_k
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned}
 2. & \quad \sum_{k=1}^{20} (3a_k + 2) = 70 \text{에서} \\
 & \quad 3 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} 2 = 70, \quad 3 \sum_{k=1}^{20} a_k + 40 = 70 \\
 & \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 10 \\
 & \quad \sum_{k=1}^{20} (a_k - 1)(a_k^2 + a_k + 1) = 130 \text{에서} \\
 & \quad \sum_{k=1}^{20} (a_k^3 - 1) = 130, \quad \sum_{k=1}^{20} a_k^3 - \sum_{k=1}^{20} 1 = 130 \\
 & \quad \sum_{k=1}^{20} a_k^3 - 20 = 130 \\
 & \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k^3 = 150 \\
 & \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k(a_k^2 - 4) \\
 & \quad = \sum_{k=1}^{20} (a_k^3 - 4a_k) \\
 & \quad = \sum_{k=1}^{20} a_k^3 - 4 \sum_{k=1}^{20} a_k \\
 & \quad = 150 - 4 \times 10 \\
 & \quad = 110
 \end{aligned}$$

3 주어진 수열 $\{a_n\}$ 을 홀수 번째 항과 짝수 번째 항으로 나누어 규칙을 찾아보면

(i) n 이 홀수일 때

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 9 = 10 - 1 \\
 a_3 &= 99 = 100 - 1 = 10^2 - 1 \\
 a_5 &= 999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1 \\
 &\vdots \\
 \therefore a_{2k-1} &= 10^k - 1
 \end{aligned}$$

(ii) n 이 짝수일 때

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 11 = 10 + 1 \\
 a_4 &= 101 = 100 + 1 = 10^2 + 1 \\
 a_6 &= 1001 = 1000 + 1 = 10^3 + 1 \\
 &\vdots \\
 \therefore a_{2k} &= 10^k + 1
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의해

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (10^k - 1 + 10^k + 1) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{10} 10^k \\
 &= 2 \times \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} \\
 &= \frac{20}{9} (10^{10} - 1)
 \end{aligned}$$

4 $\sum_{k=1}^{11} (k-a)(2k-a)$

$$= \sum_{k=1}^{11} (2k^2 - 3ak + a^2)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{11} k^2 - 3a \sum_{k=1}^{11} k + a^2 \sum_{k=1}^{11} 1$$

$$= 2 \times \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - 3a \times \frac{11 \times 12}{2} + 11a^2$$

$$= 11a^2 - 198a + 1012$$

$$= 11(a-9)^2 + 121$$

따라서 $a=9$ 일 때 최솟값은 121이므로

$$a=9, m=121$$

$$\therefore a+m=130$$

5 수열 $\{a_k\}$ 를

$$\frac{n+1}{2n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{2n}, \dots$$

이라 하면 일반항은

$$a_k = \frac{n+k}{2n}$$

이때 $\frac{n+k}{2n} = \frac{3n}{2n}$ 에서 $k=2n$ 이므로 주어진 식은 수열 $\{a_k\}$ 의 첫째항부터 제 $2n$ 항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{n+1}{2n} + \frac{n+2}{2n} + \frac{n+3}{2n} + \dots + \frac{3n}{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{n+k}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (n+k)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(n \sum_{k=1}^{2n} 1 + \sum_{k=1}^{2n} k \right)$$

$$= \frac{1}{2n} \left\{ n \times 2n + \frac{2n(2n+1)}{2} \right\}$$

$$= 2n + \frac{1}{2}$$

6 $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n 2^m (2k-1) \right\}$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\{ (2k-1) \sum_{m=1}^n 2^m \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\{ (2k-1) \times \frac{2(2^n-1)}{2-1} \right\}$$

$$= 2(2^n-1) \sum_{k=1}^{10} (2k-1)$$

$$= 2(2^n-1) \left(2 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 \right)$$

$$= 2(2^n-1) \left(2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 \right)$$

$$= 200(2^n-1)$$

$$\therefore a=200$$

7 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$$

$$= 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n + 2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k+2)(2k+4)}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

8 수열 $\{a_n\}$ 을

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \dots$$

이라 하면 일반항은

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

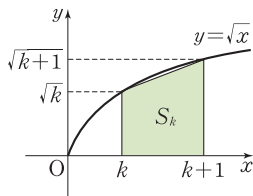
$$= \frac{2n}{n+1}$$

즉, $\frac{2n}{n+1} = \frac{60}{31}$ 이므로

$$62n = 60n + 60, 2n = 60$$

$$\therefore n = 30$$

- 9 다음 그림과 같이 네 점 $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, \sqrt{k})$, $(k+1, \sqrt{k+1})$ 을 꼭짓점으로 하는 사각형은 윗변의 길이가 $\sqrt{k}$, 아랫변의 길이가 $\sqrt{k+1}$, 높이가 1인 사다리꼴이다.



따라서 사각형의 넓이 S_k 는

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \times 1 = \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} \\ \therefore \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= -2 \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -2\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{99} - \sqrt{100})\} \\ &= -2(1 - 10) = 18 \end{aligned}$$

실전 연습문제

p.193

1 58 2 ⑤ 3 20×3^{21} 4 3433

- 1 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$ 에서 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 의 각 항의 값은 0, 1, 3 중의 하나이므로 항의 값이 1인 항의 개수를 a , 항의 값이 3인 항의 개수를 b 라 하면

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 1 \times a + 3 \times b = 10$$

$$\therefore a + 3b = 10 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 1^2 \times a + 3^2 \times b = 22$$

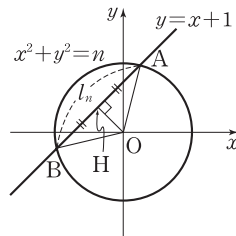
$$\therefore a + 9b = 22 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^3 = 1^3 \times 4 + 3^3 \times 2 = 58$$

- 2 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = n$ 이 직선 $y = x + 1$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 원점에서 직선 $y = x + 1$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.



원점과 직선 $y = x + 1$, 즉 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리 $\overline{OH}$ 는

$$\overline{OH} = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

또 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{n}$ 이므로 $\overline{OA} = \sqrt{n}$

현의 성질에 의해 $\overline{AH} = \frac{1}{2} l_n$

따라서 직각삼각형 AOH에서 $\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2$ 이므로

$$n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} l_n\right)^2$$

$$\therefore l_n^2 = 4n - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{20} l_n^2 &= \sum_{n=1}^{20} (4n - 2) = 4 \sum_{n=1}^{20} n - \sum_{n=1}^{20} 2 \\ &= 4 \times \frac{20 \times 21}{2} - 40 = 800 \end{aligned}$$

- 3 n 번째 시형에서의 사각형의 넓이를 a_n 이라 하면

$$a_1 = 3 \times 3$$

$$a_2 = 5 \times 3^2$$

$$a_3 = 7 \times 3^3$$

$$a_4 = 9 \times 3^4$$

$\vdots$

$$a_{20} = 41 \times 3^{20}$$

각 시형에서 만들어지는 모든 직사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = 3 \times 3 + 5 \times 3^2 + 7 \times 3^3 + \cdots + 41 \times 3^{20}$$

$S - 3S$ 를 하면

$$\begin{aligned} S - 3S &= 3 \times 3 + 5 \times 3^2 + 7 \times 3^3 + \cdots + 41 \times 3^{20} \\ &\quad - 3 \times 3^2 - 5 \times 3^3 - \cdots - 39 \times 3^{20} - 41 \times 3^{21} \\ &= -2S = 3 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \times 3^{20} - 41 \times 3^{21} \\ &= 9 + 2(3^2 + \cdots + 3^{20}) - 41 \times 3^{21} \\ &= 9 + 2 \times \frac{3^2(3^{19} - 1)}{3 - 1} - 41 \times 3^{21} \\ &= -40 \times 3^{21} \\ \therefore S &= 20 \times 3^{21} \end{aligned}$$

4 점 P(0, 1)을 i 번 이동한 점의 좌표 (x_i, y_i) 를 차례로 구해 보면

$$(0, 1) \text{에서 } x < y \text{이므로 } (x_1, y_1) \Rightarrow (1, 0)$$

$$(1, 0) \text{에서 } x \geq y \text{이므로 } (x_2, y_2) \Rightarrow (1, 1)$$

$$(1, 1) \text{에서 } x \geq y \text{이므로 } (x_3, y_3) \Rightarrow (1, 2)$$

$$(1, 2) \text{에서 } x < y \text{이므로 } (x_4, y_4) \Rightarrow (2, 1)$$

$$(2, 1) \text{에서 } x \geq y \text{이므로 } (x_5, y_5) \Rightarrow (2, 2)$$

$$(2, 2) \text{에서 } x \geq y \text{이므로 } (x_6, y_6) \Rightarrow (2, 3)$$

$$(2, 3) \text{에서 } x < y \text{이므로 } (x_7, y_7) \Rightarrow (3, 2)$$

⋮

따라서 점 P를 이동한 점의 좌표를 차례로 나열한 후 x 좌표가 같은 순서쌍끼리 묶으면

$$\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\},$$

제1군

제2군

$$\{(3, 2), (3, 3), (3, 4)\}, \{(4, 3), (4, 4), (4, 5)\}, \dots$$

제3군

제4군

각 군의 항의 개수는 3이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는 $3n$

$100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로 제100항인 (x_{100}, y_{100}) 은 제34군의 첫째항이다.

제 n 군의 첫째항은 $(n, n-1)$ 이므로 점 (x_{100}, y_{100}) 은 $(34, 33)$ 이다.

제 n 군에 속한 순서쌍은

$$(n, n-1), (n, n), (n, n+1)$$

제 n 군의 순서쌍들의 x 좌표와 y 좌표의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = n + (n-1) + n + n + n + (n+1) = 6n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{100} (x_i + y_i) = \sum_{k=1}^{33} 6k + (34 + 33)$$

$$= 6 \times \frac{33 \times 34}{2} + 67$$

$$= 3433$$

02 수학적 귀납법

1 유제 & 문제

p.196~204

유제 01 답 (1) -13 (2) 47

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 -2인 등차수열이므로

$$a_n = 5 + (n-1) \times (-2) = -2n + 7$$

$$\therefore a_{10} = -2 \times 10 + 7 = -13$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$$

$$\therefore a_{10} = 5 \times 10 - 3 = 47$$

문제 01-1 답 7

$2a_{n+1} - a_n - a_{n+2} = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열

$\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = 17 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = a + 5d = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 20, d = -3$$

$$\therefore a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-3n + 23 < 0 \quad \therefore n > \frac{23}{3} = 7.6\dots$$

따라서 첫째항부터 제7항까지 양수이고, 제8항부터 음수
이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 7$$

문제 01-2 답 $\frac{1}{75}$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{이라 하면}$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = -1, b_{n+1} = b_n + 4$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 -1, 공차가 4인 등차수열이므로

$$b_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n - 5$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} \text{이므로 } a_n = \frac{1}{4n-5}$$

$$\therefore a_{20} = \frac{1}{4 \times 20 - 5} = \frac{1}{75}$$

유제 02 답 (1) 2×5^{11} (2) 2^{11}

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 5^{n-1}$$

$$\therefore a_{12} = 2 \times 5^{11}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -1 , 공비가 -2 인 등비수열이므로

$$a_n = -1 \times (-2)^{n-1}$$

$$\therefore a_{12} = 2^{11}$$

문제 02-1 답 3¹⁶-3

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n = 6 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} (6 \times 3^{k-1})$$

$$= 6 \times \frac{3^{15}-1}{3-1}$$

$$= 3^{16}-3$$

문제 02-2 답 5³⁰

이차방정식 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 이 중근을 가지면
 이 이차방정식의 판별식 $D=0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = 0$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$
 즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = a_1^2$$
에서 $ar = a^2$, $a(a-r)=0$

$$\therefore a=r$$
 ($\because a_3=125$ 에서 $a \neq 0$)

$$a_3=125$$
에서 $ar^2=125$, $r^3=125$

$$\therefore r=5$$

$$\therefore a_n = 5 \times 5^{n-1} = 5^n$$

$$\therefore a_{30} = 5^{30}$$

유제 03 답 11

$a_{n+1} = a_n + n^2 - 2n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로
 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 1^2 - 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 - 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 3^2 - 2 \times 3$$

$$\vdots$$

$$+) \quad a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 - 2 \times (n-1)$$

$$a_n = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 - 2\{1+2+3+\dots+(n-1)\}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 2 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 - 9n^2 + 7n + 6}{6}$$

$$\therefore a_5 = \frac{2 \times 5^3 - 9 \times 5^2 + 7 \times 5 + 6}{6} = 11$$

문제 03-1 답 제7항

$a_{n+1} - a_n = 2^n$ 에서 $a_{n+1} = a_n + 2^n$
 위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 2^1$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3$$

$$\vdots$$

$$+) \quad a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 1$$
 이때 수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항이 127이라 하면

$$2^n - 1 = 127, 2^n = 128$$

$$\therefore n = 7$$
 따라서 127은 수열 $\{a_n\}$ 의 제7항이다.

문제 03-2 답 $\sqrt{3}$

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 에서

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1 - n}$$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
 위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$a_3 = a_2 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$a_4 = a_3 + \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$\vdots$$

$$+) \quad a_n = a_{n-1} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$a_n = a_1 + \sqrt{n} - 1$$

$$\therefore a_n = 1 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n}$$

$$\therefore a_{75} - a_{48} = \sqrt{75} - \sqrt{48} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

유제 04 답 $\frac{1}{8}$

$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)-1}{n+2} a_n = \frac{n+1}{n+2} a_n$$
 위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{2}{3}a_1 \\
 a_3 &= \frac{3}{4}a_2 \\
 a_4 &= \frac{4}{5}a_3 \\
 &\vdots \\
 \times \Big) \quad a_n &= \frac{n}{n+1}a_{n-1} \\
 a_n &= a_1 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \right) \\
 \therefore a_n &= a_1 \times \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1} \\
 \therefore a_{15} &= \frac{2}{15+1} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

문제 04-1 답 3²³

$a_{n+1} = (\sqrt{3})^n \times a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= (\sqrt{3})^1 \times a_1 \\
 a_3 &= (\sqrt{3})^2 \times a_2 \\
 a_4 &= (\sqrt{3})^3 \times a_3 \\
 &\vdots \\
 \times \Big) \quad a_n &= (\sqrt{3})^{n-1} \times a_{n-1} \\
 a_n &= a_1 \times \{ \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^3 \times \cdots \times (\sqrt{3})^{n-1} \} \\
 \therefore a_n &= a_1 \times (\sqrt{3})^{1+2+\cdots+(n-1)} \\
 &= \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^{\frac{(n-1)n}{2}} \\
 &= (\sqrt{3})^{\frac{n^2-n+2}{2}} \\
 \therefore a_{10} &= (\sqrt{3})^{46} = 3^{23}
 \end{aligned}$$

문제 04-2 답 제16항

$\sqrt{n+1}a_{n+1} = \sqrt{n}a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}a_1 \\
 a_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_2 \\
 a_4 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}a_3 \\
 &\vdots \\
 \times \Big) \quad a_n &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}a_{n-1} \\
 a_n &= a_1 \times \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \right) \\
 \therefore a_n &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항이 $\frac{1}{4}$ 이라 하면

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{4}, \sqrt{n} = 4 \quad \therefore n = 16$$

따라서 $\frac{1}{4}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 제16항이다.

유제 05 답 3¹⁵-1

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ 를 $a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ 라 하고 상수항을 비교하면

$$2 = -2\alpha \quad \therefore \alpha = -1$$

$$\therefore a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

이때 수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 3$ 이고, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n + 1 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

따라서 $a_n = 3^n - 1$ 이므로

$$a_{15} = 3^{15} - 1$$

문제 05-1 답 $24 + \frac{2^{11}}{3^9}$

$$3a_{n+1} - 2a_n - 3 = 0 \text{에서 } a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1 \text{을}$$

$a_{n+1} - \alpha = \frac{2}{3}(a_n - \alpha)$ 라 하고 상수항을 비교하면

$$1 = \frac{1}{3}\alpha \quad \therefore \alpha = 3$$

$$\therefore a_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(a_n - 3)$$

이때 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = -2$ 이고, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = -2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad \therefore a_n = -2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + 3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ -2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} + 3 \right\} \\
 &= -2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{10} 3 \\
 &= -2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} + 30 \\
 &= -2 \times 3 \left(1 - \frac{2^{10}}{3^{10}} \right) + 30 \\
 &= 24 + \frac{2^{11}}{3^9}
 \end{aligned}$$

유제 06 답 $\frac{136}{81}$

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n \text{에서 } 3a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2-a_1=1$ 이고, 공비가 $-\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1}=a_n+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, $\dots$, $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2=a_1+\left(-\frac{2}{3}\right)^0$$

$$a_3=a_2+\left(-\frac{2}{3}\right)^1$$

$$a_4=a_3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$+) \quad a_n=a_{n-1}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$a_n=a_1+\left\{1-\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\dots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{8-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore a_6=\frac{1}{5}\left\{8-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right\}=\frac{136}{81}$$

문제 06-1 [답 5]

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0\text{에서}$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2-a_1=2a_1$ 이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=2a_1\times 2^{n-1}=a_1\times 2^n$$

$$\therefore a_{n+1}=a_n+a_1\times 2^n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, $\dots$, $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2=a_1+a_1\times 2^1$$

$$a_3=a_2+a_1\times 2^2$$

$$a_4=a_3+a_1\times 2^3$$

$$\vdots$$

$$+) \quad a_n=a_{n-1}+a_1\times 2^{n-1}$$

$$a_n=a_1+a_1\times (2+2^2+\dots+2^{n-1})$$

$$\therefore a_n=a_1+a_1\sum_{k=1}^{n-1}2^k=a_1+a_1\times\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=a_1+a_1(2^n-2)=a_1(2^n-1)$$

이때 $a_8=85$ 이므로

$$a_1(2^8-1)=85, a_1\times 255=85 \quad \therefore a_1=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n=\frac{1}{3}(2^n-1)\text{이므로 } a_4=\frac{1}{3}\times(2^4-1)=5$$

유제 07 [답 $-\frac{1}{11}$]

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-3a_n}\text{의 양변에 역수를 취하면}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1-3a_n}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-3$$

$$\frac{1}{a_n}=b_n\text{이라 하면 } b_{n+1}=b_n-3$$

이때 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1=\frac{1}{a_1}=1$ 이고, 공차가 -3

인 등차수열이므로

$$b_n=1+(n-1)\times(-3)=-3n+4$$

$$b_n=\frac{1}{a_n}\text{이므로 } \frac{1}{a_n}=-3n+4$$

$$\text{따라서 } a_n=-\frac{1}{-3n+4}\text{이므로 } a_5=-\frac{1}{-3\times 5+4}=-\frac{1}{11}$$

문제 07-1 [답 $\frac{3}{80}$]

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+1}\text{의 양변에 역수를 취하면}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+1}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+4$$

$$\frac{1}{a_n}=b_n\text{이라 하면 } b_{n+1}=b_n+4$$

이때 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1=\frac{1}{a_1}=4$ 이고, 공차가 4인

등차수열이므로

$$b_n=4+(n-1)\times 4=4n$$

$$b_n=\frac{1}{a_n}\text{이므로 } \frac{1}{a_n}=4n \quad \therefore a_n=\frac{1}{4n}$$

$$\therefore a_{10}+a_{20}=\frac{1}{40}+\frac{1}{80}=\frac{3}{80}$$

유제 08 [답 $\left(\frac{4}{3}\right)^7$]

$S_n=4a_n-3$ 에서 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1}=4a_{n+1}-3$$

$$S_{n+1}-S_n\text{을 하면 } S_{n+1}-S_n=4(a_{n+1}-a_n)$$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 이므로

$$a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n), 3a_{n+1}=4a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \therefore a_8 = \left(\frac{4}{3}\right)^7$$

문제 08-1 [답 96]

$S_{n+1}=2S_n$ 에서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1=a_1=3$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n = 3 \times 2^{n-1}$$

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} a_7 &= S_7 - S_6 \\ &= 3 \times 2^6 - 3 \times 2^5 = 96 \end{aligned}$$

문제 08-2 [답 58]

$a_n = 3S_{n+1} - S_{n+2} - 2S_n$ 에서

$$a_n = -(S_{n+2} - S_{n+1}) + 2(S_{n+1} - S_n)$$

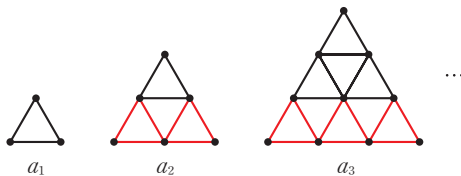
이때 $S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= -a_{n+2} + 2a_{n+1} \\ \therefore 2a_{n+1} &= a_n + a_{n+2} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $a_2 - a_1 = 3$ 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2 \\ \therefore a_{20} &= 3 \times 20 - 2 = 58 \end{aligned}$$

문제 09-1 [답 $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)]



처음 정삼각형의 아래쪽에 작은 정삼각형 여러 개가 추가된다고 생각하면 성냥개비의 총 개수 a_n 은

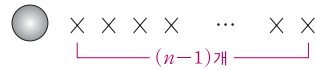
$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 3 \times 2 = 9 \quad \blacktriangleleft a_1 \text{에 작은 정삼각형 2개 추가} \\ a_3 &= a_2 + 3 \times 3 = 18 \quad \blacktriangleleft a_2 \text{에 작은 정삼각형 3개 추가} \\ &\vdots \\ \therefore a_{n+1} &= a_n + 3(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

문제 09-2 [답 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n=3, 4, 5, \dots$), $a_7=34$]

흰 공과 검은 공이 총 n 개 있으므로 주어진 조건을 만족하도록 n 개의 공을 일렬로 나열하는 방법은

- (i) 가장 왼쪽의 공이 검은색인 경우
- (ii) 가장 왼쪽의 두 공이 차례로 흰색, 검은색인 경우의 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 가장 왼쪽의 공이 검은색인 경우



이때 나머지 공 $(n-1)$ 개를 흰 공끼리 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수는

a_{n-1} (가지)

(ii) 가장 왼쪽의 두 공이 차례로 흰색, 검은색인 경우



이때 나머지 공 $(n-2)$ 개를 흰 공끼리 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수는

a_{n-2} (가지)

(i), (ii)에서

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n=3, 4, 5, \dots) \quad \text{..... ㉠}$$

$a_1=2$, $a_2=3$ 이므로 ㉠에서 n 에 3, 4, ..., 7을 차례로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13 \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21 \\ \therefore a_7 &= a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34 \end{aligned}$$

2 유제 & 문제

p.206~207

유제 10 [답 ㉢]

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{..... ㉠}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+4}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

$$\therefore (7b) \div (1b) = \frac{k+1}{2^{k+1}} \div \frac{k+3}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{k+3}$$

유제 11 답 ③

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 (좌변) < (우변)이므로 $n=2$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots\dots ㉡$$

이때

$$\left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} - \left(\frac{7b}{2 - \frac{1}{k+1}} \right)$$

$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{k(k+1)^2} < \boxed{0} (\because k \geq 2)$$

$$\therefore 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$< 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < \boxed{2 - \frac{1}{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

1 50 2 ③ 3 ④ 4 제50항 5 ③

6 $\frac{4}{81}$ 7 ②

8 $a_1=14, a_{n+1}=2a_n-6$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

9 $a_4=11, a_{n+1}=a_n+n+1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

10 ③ 11 ②

1 $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = a + 4d = 11 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_9 = a + 8d = 19 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, d=2$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$$

$a_k > 100$ 에서

$$2k+1 > 100, 2k > 99 \quad \therefore k > 49.5$$

따라서 $a_k > 100$ 을 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 50이다.

2 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 78 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 2184 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면

$$r^3+1=28, r^3=27 \quad \therefore r=3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{a(27-1)}{3-1} = 78 \quad \therefore a=6$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이므로

$$S_9 = \frac{6(3^9-1)}{3-1} = 3(3^9-1) = 3^{10}-3$$

3 $a_{n+1} = a_n + n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 n 번끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3$$

$\vdots$

$$+) \quad a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n = a_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{10^2-10+2}{2} = 46$$

4 $(n+1)^2 a_{n+1} = n(n+2)a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{1 \times 3}{2^2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \times 4}{3^2} a_2$$

$$a_4 = \frac{3 \times 5}{4^2} a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\therefore a_n = 1 \times \frac{1 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{2}} \times \frac{\cancel{2} \times \cancel{4}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \times \dots \times \frac{(\cancel{n-1})(n+1)}{\cancel{n} \times n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항이 $\frac{51}{100}$ 이라 하면

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{51}{100} \quad \therefore n=50$$

따라서 $\frac{51}{100}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 제50항이다.

5 $a_{n+1} = 2a_n - 5$ 를 $a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ 라 하고 상수항을 비교하면

$$-5 = -\alpha \quad \therefore \alpha = 5$$

$$\therefore a_{n+1} - 5 = 2(a_n - 5)$$

이때 수열 $\{a_n - 5\}$ 는 첫째항이 $a_1 - 5 = 2$ 이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n - 5 = 2 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2^n + 5$$

$$a_k < 500 < a_{k+1} \text{에서}$$

$$2^k + 5 < 500 < 2^{k+1} + 5$$

$$\text{이때 } 2^8 = 256, 2^9 = 512 \text{이므로 } 2^8 + 5 < 500 < 2^{8+1} + 5$$

$$\therefore k=8$$

6 $3a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$ 에서

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 1$ 이고, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$a_4 = a_3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$\vdots$

$$+ \left) a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$a_n = a_1 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_6 - a_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \left\{ \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right\}$$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}$$

7 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2-3a_n}$ 의 양변에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2-3a_n}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} - 3$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{이라 하면 } b_{n+1} = 2b_n - 3$$

$b_{n+1} - \alpha = 2(b_n - \alpha)$ 라 하고 상수항을 비교하면

$$-3 = -\alpha \quad \therefore \alpha = 3$$

$$\therefore b_{n+1} - 3 = 2(b_n - 3)$$

이때 수열 $\{b_n - 3\}$ 은 첫째항이 $b_1 - 3 = \frac{1}{a_1} - 3 = -2$ 이고,

공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n - 3 = (-2) \times 2^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 3 - 2^n$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{이므로 } \frac{1}{a_n} = 3 - 2^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3-2^n}$$

$$a_k = -\frac{1}{61} \text{에서 } \frac{1}{3-2^k} = -\frac{1}{61}$$

$$3 - 2^k = -61, 2^k = 64 = 2^6$$

$$\therefore k=6$$

- 8 첫 번째 분열한 후 살아 있는 단세포 생물의 수 a_1 은 10마리에서 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열한 수이므로

$$a_1 = (10 - 3) \times 2 = 14$$

같은 방법으로 $a_2, a_3, \dots$ 을 구하면

$$a_2 = (a_1 - 3) \times 2$$

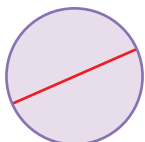
$$a_3 = (a_2 - 3) \times 2$$

$\vdots$

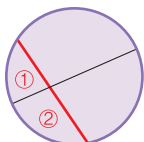
따라서 $(n+1)$ 시간 후 살아 있는 단세포 생물의 수 a_{n+1} 은 n 시간 후의 수 a_n 에서 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열한 수이므로

$$a_{n+1} = (a_n - 3) \times 2 = 2a_n - 6 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

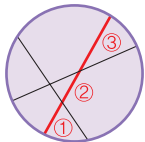
- 9 n 개의 현으로 나누어지는 조각의 최대 개수가 a_n 이므로



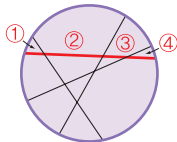
$$a_1 = 2$$



$$a_2 = a_1 + 2 = 4$$



$$a_3 = a_2 + 3 = 7$$



$$a_4 = a_3 + 4 = 11$$

따라서 n 개의 현이 그어져 있는 원에 현 1개를 더 그으면 최대 $(n+1)$ 개의 조각이 더 생기므로

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- 10 $a_n = 5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1$ 이라 하면

- (i) $n=1$ 일 때, $a_1 = 25 + 6 + 1 = 32$ 이므로

a_1 은 8의 배수이다.

- (ii) $n=k$ ($k \geq 1$)일 때

$a_k = 5^{k+1} + 2 \times 3^k + 1$ 이 8의 배수라고 가정하자.

$a_{k+1} = 5^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} + 1$ 이므로 $a_{k+1} - a_k$ 를 하면

$$a_{k+1} - a_k = 5^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} + 1 - (5^{k+1} + 2 \times 3^k + 1)$$

$$= 5 \times 5^{k+1} - 5^{k+1} + 2 \times 3 \times 3^k - 2 \times 3^k$$

$$= \boxed{4} (5^{k+1} + 3^k) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $5^{k+1} + 3^k$ 은 (홀수)+(홀수), 즉 $\boxed{2}$ 짝수이므로

$$5^{k+1} + 3^k = 2m \quad (m \text{은 자연수}) \text{이라 하면 } \textcircled{1} \text{은}$$

$$a_{k+1} - a_k = 4 \times 2m = 8m$$

따라서 $a_{k+1} - a_k$ 는 8의 배수이고, a_k 가 8의 배수이므로 a_{k+1} 도 8의 배수이다.

- (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 a_n 은 8의 배수이다.

$$11 \quad a_n = \frac{2n-1}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(i) \quad n=1 \text{일 때, } a_1 = \frac{2 \times 1 - 1}{1} = 1$$

따라서 주어진 조건의 $a_1=1$ 과 같으므로 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$a_k = \frac{2k-1}{k}$$

이때 주어진 조건에서

$$a_{k+1} = \frac{4-a_k}{3-a_k} = \frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}$$

$$= \frac{\boxed{4k} \frac{2k-1}{k}}{k+1}$$

$$= \frac{2(k+1)-1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

- (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1=1, \quad a_{n+1} = \frac{4-a_n}{3-a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{2n-1}{n}$ 이다.

실전 연습문제

p.211

$$1 \quad \frac{28}{3^8} \quad 2 \quad 13 \quad 3 \quad 65$$

$$1 \quad 3S_{n+2} - 5S_{n+1} = a_n - 2S_n \text{에서}$$

$$3(S_{n+2} - S_{n+1}) - 2(S_{n+1} - S_n) = a_n$$

이때 $S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로

$$3a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_n$$

위의 식을 변형하면

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 4$ 이고, 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - a_n = 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^0$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^1$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

⋮

$$+ \underbrace{a_n = a_{n-1} + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}}$$

$$a_n = a_1 + 4 \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \right\}$$

$$\therefore a_n = a_1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + 4 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 4 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} - a_7 = 4 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^9 - \left\{ 4 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^6 \right\}$$

$$= \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^5} = \frac{28}{3^8}$$

- 2 처음 두 그릇 A, B에 각각 4%, 8%의 소금물이 200g씩 들어 있으므로 각 그릇에 있는 소금의 양은

$$A: 200 \times \frac{4}{100} = 8(g)$$

$$B: 200 \times \frac{8}{100} = 16(g)$$

또 n 회 반복 시행한 후 그릇 A의 소금물의 농도가 $a_n\%$ 이므로 n 회 시행 후 그릇 A에 있는 소금의 양은

$$200 \times \frac{a_n}{100} = 2a_n(g)$$

이때 그릇 A의 소금물 200g 중 100g을 그릇 B로 옮기면 그릇 A에 남아 있는 소금의 양은 절반으로 줄어들므로 $a_n g$

두 그릇 A, B의 소금의 총량은 24g으로 변하지 않으므로 그릇 B의 소금물 300g에 들어 있는 소금의 양은 $(24 - a_n)g$

다시 그릇 B의 소금물 300g 중 100g을 그릇 A로 옮길 때, 그릇 A로 옮겨지는 100g의 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{1}{3}(24 - a_n) = 8 - \frac{1}{3}a_n(g)$$

따라서 그릇 B에서 옮겨온 소금물을 포함한 그릇 A의 소금물 200g에 들어 있는 소금의 양은

$$a_n + \left(8 - \frac{1}{3}a_n\right) = 8 + \frac{2}{3}a_n(g)$$

즉, $(n+1)$ 회 시행 후 그릇 A의 소금물의 농도 a_{n+1} 은

$$a_{n+1} = \frac{8 + \frac{2}{3}a_n}{200} \times 100 = \frac{1}{3}a_n + 4$$

따라서 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$ 이므로

$$p = \frac{1}{3}, q = 4 \quad \therefore 3(p+q) = 13$$

3 $\sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{n+m} > 1$

..... ㉠

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \sum_{m=1}^3 \frac{1}{1+m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\text{㉠} \frac{13}{12}} > 1$$

따라서 $n=1$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{1}{k+m} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

$n=k+1$ 일 때

$$\sum_{m=1}^{2k+3} \frac{1}{k+1+m}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$$

$$= \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{1}{k+m} + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right)$$

$$- \boxed{\text{㉠} \frac{1}{k+1}}$$

이때 $(3k+2)(3k+4) < (3k+3)^2$ 에서

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} = \frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}$$

$$> \frac{6k+6}{(3k+3)^2} = \boxed{\text{㉠} \frac{2}{3k+3}}$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{2k+3} \frac{1}{k+1+m}$$

$$> \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{1}{k+m} + \left(\frac{1}{3k+3} + \boxed{\text{㉠} \frac{2}{3k+3}} \right)$$

$$- \boxed{\text{㉠} \frac{1}{k+1}}$$

$$= \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{1}{k+m} > 1$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $a = \frac{13}{12}, f(k) = \frac{1}{k+1}, g(k) = \frac{2}{3k+3}$ 이므로

$$f(k) - g(k) = \frac{1}{k+1} - \frac{2}{3k+3} = \frac{1}{3k+3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 \frac{a}{f(k) - g(k)} = \sum_{k=1}^5 \frac{13}{12} (3k+3) = \frac{13}{4} \sum_{k=1}^5 (k+1)$$

$$= \frac{13}{4} \left(\frac{5 \times 6}{2} + 5 \right) = 65$$

I-1. 지수와 로그

01 지수

기초 문제 Training

p.4

- 1 (1) a^6 (2) a^3b^2 (3) a^2bc^3 (4) $a^3b^2c^3$
- 2 (1) a^7 (2) a^6b^{15} (3) a^7b^9 (4) a^3 (5) a^9b^2 (6) $\frac{a^3}{b^6}$
- 3 (1) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (2) $-1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
(3) $5, \frac{-5\pm 5\sqrt{3}i}{2}$ (4) $-4, 4, -4i, 4i$
- 4 (1) 16 (2) 2 (3) -3 (4) 2
- 5 (1) 2 (2) 8 (3) 256 (4) 9
- 6 (1) a^3 (2) $a^{\frac{1}{4}}$ (3) a (4) $a^{\frac{5}{6}}$
- 7 (1) 49 (2) 81 (3) 8 (4) 72

핵심 유형 Training

p.5~9

- 1 ④ 2 ④ 3 3 4 ⑤ 5 ① 6 7
- 7 1289 8 ③ 9 ② 10 ① 11 $\frac{9}{10}$ 12 6
- 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16 9 17 2 18 ③
- 19 $5\sqrt{2}$ 20 ④ 21 ③ 22 ④ 23 ① 24 ②
- 25 ① 26 ② 27 64 28 ⑤ 29 ④ 30 ②
- 31 ① 32 ④ 33 ⑤ 34 2.07배

- 1 ① $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ ② $-2, 1\pm\sqrt{3}i$
③ $-2, 2, -2i, 2i$ ⑤ 없다.
- 2 $a=3, b=\sqrt{3}$ 이므로 $a^2b^2=9\times 3=27$
- 3 $N(2, 2)=2, N(-3, 3)=1, N(-4, 4)=0$ 이므로
 $N(2, 2)+N(-3, 3)+N(-4, 4)=3$
- 4 ① $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^6}=3^2=9$
② $\frac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{8}}=\frac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[4]{2^3}}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

- ③ $(\sqrt[3]{4})^4=\sqrt[3]{4^4}=\sqrt[3]{4^3\times 4}=4\sqrt[3]{4}$
④ $\sqrt[3]{729}=\sqrt[3]{3^6}=6\sqrt[3]{3^6}=3$
⑤ $\sqrt[18]{8^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[18]{2^6}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 5 \quad & \sqrt[4]{\frac{a}{a}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{a}} \div \sqrt[4]{\frac{a}{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} \div \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}} \\ & = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}} \\ & = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad & \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3]{a^3 \times \sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[6]{a^3 \times 12\sqrt[4]{a^3}} \\ & = 12\sqrt[6]{a^6} \times 12\sqrt[6]{a^3} = 12\sqrt[6]{a^9} = 4\sqrt[3]{a^3} \\ \therefore m=4, n=3 \quad \therefore m+n=7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad & a = \frac{9^{-10}+3^{-8}}{3^{-10}+9^{-11}} = \frac{3^{-20}+3^{-8}}{3^{-10}+3^{-22}} = \frac{3^{-8}(3^{-12}+1)}{3^{-10}(1+3^{-12})} \\ & = \frac{3^{-8}}{3^{-10}} = 3^2 = 9 \\ b & = \frac{5^{-7}}{10^{-8}} = \frac{5^{-7}}{(2\times 5)^{-8}} = \frac{5^{-7}}{2^{-8}\times 5^{-8}} = 2^8 \times 5 = 1280 \\ \therefore a+b & = 1289 \end{aligned}$$

$$8 \quad \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \right)^{\frac{5}{2}} \right\}^{-\frac{6}{5}} = \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{6}{5} \right)} = \left(\frac{4}{5} \right)^{-1} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad & \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}} \\ & = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}} \\ \therefore a & = \frac{7}{6}, b = \frac{1}{2} \quad \therefore a+b = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad & \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \{2 \times (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = (2 \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}} \\ & \sqrt[4]{4\sqrt[4]{4}} = (4 \times 4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}} = (4^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{5}{16}} = 2^{\frac{5}{8}} \\ \therefore & \frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt[4]{4\sqrt[4]{4}}} = \frac{2^{\frac{7}{8}}}{2^{\frac{5}{8}}} = 2^{\frac{1}{4}} \text{이므로 } k = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad & \sqrt[n]{m\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{mn}} \text{이므로 } f(m, n) = \frac{1}{mn} \\ \therefore & f(1, 2) + f(2, 3) + f(3, 4) + \cdots + f(9, 10) \\ & = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} \\ & = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) \\ & = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$12 \quad (a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{2}} \times (\sqrt[3]{a})^{6\sqrt{6}} \div a^{3\sqrt{6}} = a^{2\sqrt{6}} \times a^{2\sqrt{6}} \div a^{3\sqrt{6}} \\ = a^{2\sqrt{6}+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}} = a^{\sqrt{6}} \\ \therefore k = \sqrt{6} \quad \therefore k^2 = 6$$

13 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = \sqrt[3]{32}\pi$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \sqrt[6]{32} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$$

원의 둘레의 길이 $a\pi$ 는

$$a\pi = 2\pi r = 2\pi \times 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{11}{6}}\pi \quad \therefore a = 2^{\frac{11}{6}}$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면

$$x^3 = \sqrt[4]{27}$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = \sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{3^3} = 3^{\frac{1}{4}}$$

정육면체의 겉넓이 b 는

$$b = 6x^2 = 6 \times (3^{\frac{1}{4}})^2 = 2 \times 3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 2 \times 3^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $ab = 2^{\frac{11}{6}} \times 2 \times 3^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{17}{6}} 3^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$\alpha = \frac{17}{6}, \beta = \frac{3}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \frac{13}{3}$$

$$14 \quad (3^{\frac{1}{3}} - 1)(9^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + 1) = (3^{\frac{1}{3}} - 1)(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + 1) \\ = (3^{\frac{1}{3}})^3 - 1 = 3 - 1 = 2 \\ (2^{\frac{1}{4}} - 1)(2^{\frac{1}{4}} + 1)(2^{\frac{1}{2}} + 1) = (2^{\frac{1}{2}} - 1)(2^{\frac{1}{2}} + 1) \\ = 2 - 1 = 1 \\ \therefore \frac{(3^{\frac{1}{3}} - 1)(9^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + 1)}{(2^{\frac{1}{4}} - 1)(2^{\frac{1}{4}} + 1)(2^{\frac{1}{2}} + 1)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$15 \quad (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}})^3 - 3a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}) \\ = (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}})^3 - 3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}) \\ = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (a^{-\frac{2}{3}})^3 \quad \blacktriangleleft (x+y)^3 - 3xy(x+y) = x^3 + y^3 \\ = a + a^{-2} = a + \frac{1}{a^2}$$

$$16 \quad \frac{1}{1-a^{-\frac{1}{8}}} + \frac{1}{1+a^{-\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+a^{-\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+a^{-\frac{1}{2}}} \\ = \frac{2}{1-a^{-\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+a^{-\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+a^{-\frac{1}{2}}} \\ = \frac{4}{1-a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a^{-\frac{1}{2}}} \\ = \frac{8}{1-a^{-1}} = \frac{8a}{a-1} \\ = \frac{8 \times 9}{9-1} = 9$$

$$17 \quad x+y = (a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}) + (b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}) \\ = (a^{\frac{1}{3}})^3 + 3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2 + (b^{\frac{1}{3}})^3 \\ = (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})^3 \\ x-y = (a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}) - (b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}) \\ = (a^{\frac{1}{3}})^3 - 3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2 - (b^{\frac{1}{3}})^3 \\ = (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})^3 \\ \therefore (x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})^2 + (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})^2 \\ = 2(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) \\ = 2 \times 1 = 2$$

$$18 \quad x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 1 \text{의 양변을 제곱하면} \\ x - 2 + x^{-1} = 1 \quad \therefore x + x^{-1} = 3 \\ \therefore x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1}) \\ = 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

$$19 \quad x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 4 \text{의 양변을 세제곱하면} \\ x + 3(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) + x^{-1} = 64 \quad \therefore x + x^{-1} = 52 \\ (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = x - 2 + x^{-1} = 50 \text{이고 } x > 1 \text{이므로} \\ x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$20 \quad (3^x + 3^{-x})^2 = 3^{2x} + 2 + 3^{-2x} = 9^x + 9^{-x} + 2 = 49 \\ \therefore 3^x + 3^{-x} = 7 \\ (3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}})^2 = 3^x + 2 + 3^{-x} = 7 + 2 = 9 \\ \therefore 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 3 \\ (3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}})^2 = 3^{\frac{x}{2}} + 2 + 3^{-\frac{x}{2}} = 3 + 2 = 5 \\ \therefore 3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}} = \sqrt{5}$$

$$21 \quad x^3 = (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3 \\ = 2 - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) - 2^{-1} \\ = \frac{3}{2} - 3x \\ \text{즉, } x^3 + 3x = \frac{3}{2} \text{이므로} \\ 2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 \\ = 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 4$$

$$22 \quad \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면} \\ \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{7+1}{7-1} = \frac{4}{3}$$

- 23 $9^x=3^{2x}=\sqrt{2}-1$ 이므로 주어진 식의 분모, 분자에 3^x 를 곱하면

$$\frac{3^{3x}+3^{-3x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^{4x}+3^{-2x}}{3^{2x}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1)+1}$$

$$=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$$

- 24 등식의 좌변의 분모, 분자에 a^m 을 곱하면

$$\frac{a^{2m}+1}{a^{2m}-1}=3, a^{2m}+1=3(a^{2m}-1) \quad \therefore a^{2m}=2$$

$$\therefore a^{6m}-a^{-2m}=2^3-2^{-1}=\frac{15}{2}$$

- 25 $3^x=2$ 에서 $3=2^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$48^y=2$ 에서 $48=2^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $\frac{1}{16}=2^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}, 2^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=2^{-4}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-4$

- 26 $a^x=2^4$ 에서 $a=2^{\frac{4}{x}}$ ㉢

$b^y=2^4$ 에서 $b=2^{\frac{4}{y}}$ ㉣

$c^z=2^4$ 에서 $c=2^{\frac{4}{z}}$ ㉤

㉢ $\times$ ㉣ $\times$ ㉤을 하면 $abc=2^{\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}}$

이때 $abc=8$ 이므로 $2^{\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}}=2^3$

$\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}=3 \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$

- 27 $a^x=b^y=4^z=k(k>0)$ 라 하면 $a=k^{\frac{1}{x}}, b=k^{\frac{1}{y}}, 4=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{z}$ 이므로

$ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{3}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^3=4^3=64$

- 28 $5=\frac{10}{2}=\frac{10}{10^b}=10^{1-b}$ 이므로

$$5^{\frac{a+b+1}{1-b}}=(10^{1-b})^{\frac{a+b+1}{1-b}}=10^{a+b+1}=10^a \times 10^b \times 10^1$$

$$=7 \times 2 \times 10=140$$

- 29 $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}, \sqrt[6]{15}=15^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$\sqrt[3]{4}=(4^4)^{\frac{1}{12}}=256^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{6}=(6^3)^{\frac{1}{12}}=216^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{15}=(15^2)^{\frac{1}{12}}=225^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt[4]{6}<\sqrt[6]{15}<\sqrt[3]{4}$

- 30 ① $\sqrt[3]{2 \times 3}=6^{\frac{1}{3}}=(6^2)^{\frac{1}{6}}=36^{\frac{1}{6}}$

② $\sqrt{3 \sqrt{2}}=(3 \times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(3^3 \times 2)^{\frac{1}{6}}=54^{\frac{1}{6}}$

③ $\sqrt{2 \sqrt[3]{3}}=(2 \times 3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(2^3 \times 3)^{\frac{1}{6}}=24^{\frac{1}{6}}$

④ $\sqrt[3]{2 \sqrt{3}}=(2 \times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(2^2 \times 3)^{\frac{1}{6}}=12^{\frac{1}{6}}$

⑤ $\sqrt[3]{3 \sqrt{2}}=(3 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(3^2 \times 2)^{\frac{1}{6}}=18^{\frac{1}{6}}$

따라서 가장 큰 수는 ②이다.

- 31 $A-B=(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})-2\sqrt[3]{3}=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$

$=2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}-(3^2)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}-9^{\frac{1}{6}}<0$

$\therefore A<B$ ㉠

$B-C=2\sqrt[3]{3}-(\sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{5}$

$=3^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{4}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}-(5^3)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}-125^{\frac{1}{12}}<0$

$\therefore B<C$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A<B<C$

- 32 커지는 비율을 $r(r>1)$ 라 하면 2를 입력하고 버튼을 6번 누르면 4가 출력되므로

$2r^6=4 \quad \therefore r^6=2$

4에서 버튼을 4번 더 눌러서 출력되는 수는

$4r^4=4(r^6)^{\frac{4}{6}}=4 \times 2^{\frac{2}{3}}$

$$=2^2 \times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{8}{3}}$$

- 33 음식물의 개수가 $4p$, 음식물의 부피가 $8q$ 가 되었을 때, 데우는 데 걸리는 시간을 t' 이라 하면

$t'=a(4p)^{\frac{1}{2}}(8q)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{3}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}$

$=2 \times 2^{\frac{9}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}$

$=32\sqrt{2}t \quad (\because t=ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}})$

따라서 데우는 데 걸리는 시간은 $32\sqrt{2}$ 배 증가한다.

- 34 10년 동안 품목 A의 가격 상승률은

$\sqrt[10]{\frac{2a}{a}}-1=\sqrt[10]{2}-1$

10년 동안 품목 B의 가격 상승률은

$\sqrt[10]{\frac{4a}{a}}-1=\sqrt[10]{4}-1$

$\therefore \frac{\sqrt[10]{4}-1}{\sqrt[10]{2}-1}=\frac{(\sqrt[10]{2})^2-1}{\sqrt[10]{2}-1}=\frac{(\sqrt[10]{2}-1)(\sqrt[10]{2}+1)}{\sqrt[10]{2}-1}$

$=\sqrt[10]{2}+1=1.07+1 \quad (\because \sqrt[10]{2}=2^{\frac{1}{10}}=1.07)$

$=2.07$

따라서 10년 동안 품목 B의 가격 상승률은 품목 A의 가격 상승률의 2.07배이다.

02 로그

기초 문제 Training

p.10

- 1 (1) $2=\log_2 4$ (2) $4=\log_{16} 36$
 (3) $-2=\log_{\frac{1}{3}} 9$ (4) $-\frac{1}{2}=\log_{25} \frac{1}{5}$
- 2 (1) $x > -2$ (2) $x < 3$ (3) $6 < x < 7$ 또는 $x > 7$
 (4) $x < -2$ 또는 $-2 < x < -1$
- 3 (1) -1 (2) 2 (3) 2 (4) 1
- 4 (1) 4 (2) $\frac{5}{2}$ (3) 3 (4) 27
- 5 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -4 (4) $-\frac{2}{5}$
- 6 (1) 0.1492 (2) 0.2122 (3) 1.5 (4) 1.34
- 7 (1) 0 (2) 1 (3) 3 (4) -2

핵심 유형 Training

p.11~18

- 1 ⑤ 2 24 3 ④ 4 ③ 5 ① 6 ②
 7 ③ 8 $\frac{3}{2}$ 9 ③ 10 ⑤ 11 ⑤ 12 ④
 13 $8a-2$ 14 2 15 2 16 105 17 ④
 18 ④ 19 $\frac{3a+b}{b+1}$ 20 ③ 21 ③ 22 ①
 23 81 24 ⑤ 25 $A > B$ 26 ① 27 0
 28 ⑤ 29 3 30 ⑤ 31 ② 32 ③ 33 $-\frac{5}{3}$
 34 ④ 35 ③ 36 9 37 ⑤ 38 21.91
 39 ② 40 36자리 41 9 42 ② 43 10
 44 ② 45 ② 46 60 47 3 48 17 49 ④
 50 6 51 3.3km 52 102만 4천 원 53 30
 54 6% 55 ③ 56 3.3배

- 1 $2^x=5^y$ 에서 $2=5^{\frac{y}{x}}$ 이므로 $\frac{y}{x}=\log_5 2$
- 2 $\log_{\frac{1}{2}} x=4$ 에서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$
 $\log_y 2=-\frac{1}{3}$ 에서 $2=y^{-\frac{1}{3}}$ $\therefore y=2^{-3}=\frac{1}{8}$
 $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=16+8=24$

- 3 $\log_2 \{\log_4 (\log_3 a)\} = -1$ 에서 $\log_4 (\log_3 a) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
 $\log_4 (\log_3 a) = \frac{1}{2}$ 에서 $\log_3 a = 4^{\frac{1}{2}} = 2$
 $\log_3 a = 2$ 에서 $a = 3^2 = 9$

- 4 $x = \frac{1}{2} \log_3 (\sqrt{2}+1)$ 에서 $\log_3 (\sqrt{2}+1) = 2x$ 이므로
 $3^{2x} = \sqrt{2}+1$
 $\therefore \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = \frac{3^{2x} + 1}{3^{2x} - 1} = \frac{(\sqrt{2}+1) + 1}{(\sqrt{2}+1) - 1}$
 $= \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$

- 5 (i) $a-5 > 0$, $a-5 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a > 5$, $a \neq 6$ ㉠
 (ii) $-a^2 + 11a - 18 > 0$ 이어야 하므로
 $a^2 - 11a + 18 < 0$, $(a-2)(a-9) < 0$
 $\therefore 2 < a < 9$ ㉡
 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수 a 는 7, 8의 2개이다.

- 6 (i) $a-3 > 0$, $a-3 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a > 3$, $a \neq 4$ ㉠
 (ii) $a-1 > 0$, $8-a > 0$ 이어야 하므로
 $1 < a < 8$ ㉡
 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수 a 는 5, 6, 7이므로 그 합은 $5+6+7=18$

- 7 (i) $(a-2)^2 > 0$, $(a-2)^2 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$ ㉠
 (ii) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2ax + 8 > 0$ 이어야 한다.
 ㉠ $a=0$ 이면 $8 > 0$ 이 성립한다.
 ㉡ $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + 2ax + 8 = 0$ 의 판별식
 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = a^2 - 8a < 0$, $a(a-8) < 0$
 $\therefore 0 < a < 8$
 ㉠, ㉡에서 $0 \leq a < 8$ ㉢
 ㉠, ㉢을 동시에 만족하는 정수 a 는 0, 4, 5, 6, 7이므로
 최댓값과 최솟값의 합은 $7+0=7$

- 8 $\log_3 \sqrt{15} + \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{5} + \frac{3}{2} \log_3 \sqrt{9}$
 $= \frac{1}{2} \log_3 15 + \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \log_3 9$
 $= \frac{1}{2} (\log_3 15 + \log_3 \frac{1}{5} + \log_3 9)$
 $= \frac{1}{2} \log_3 27 = \frac{1}{2} \times 3 \log_3 3 = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} 9 \quad 2A - B &= 2\log_a \frac{x^2}{y^3} - \log_a \frac{1}{x^2 y^3} = \log_a \frac{x^4}{y^6} - \log_a \frac{1}{x^2 y^3} \\ &= \log_a \left(\frac{x^4}{y^6} \times x^2 y^3 \right) = \log_a \frac{x^6}{y^3} \\ &= \log_a \left(\frac{x^2}{y} \right)^3 = 3\log_a \frac{x^2}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad \log_2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{9} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{16} \right) \\ + \cdots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{64} \right) \\ = \log_2 \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \\ + \cdots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{8^2} \right) \\ = \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \\ + \cdots + \log_2 \left(\frac{7}{8} \times \frac{9}{8} \right) \\ = \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{8} \right) \\ = \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{8} \right) = \log_2 9 - \log_2 16 = 2\log_2 3 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad a &= \log_2 12 = \log_2 (2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3 \text{에서} \\ \log_2 3 &= a - 2 \\ \therefore \log_2 108 &= \log_2 (2^2 \times 3^3) = 2 + 3\log_2 3 \\ &= 2 + 3(a - 2) = 3a - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad a &= \log_3 18 = \log_3 (3^2 \times 2) = 2 + \log_3 2 \text{에서} \\ \log_3 2 &= a - 2 \\ b &= \log_3 \frac{15}{2} = \log_3 \frac{3 \times 5}{2} = 1 + \log_3 5 - \log_3 2 \text{에서} \\ \log_3 5 &= b - 1 + \log_3 2 = b - 1 + (a - 2) = a + b - 3 \\ \therefore \log_3 100 &= \log_3 (2^2 \times 5^2) = 2\log_3 2 + 2\log_3 5 \\ &= 2(a - 2) + 2(a + b - 3) = 4a + 2b - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \quad \text{근과 계수의 관계에 의해 } a\beta &= \frac{5}{4} \\ \therefore \log_5 \frac{5}{a^4} + \log_5 \frac{5}{\beta^4} &= \log_5 \frac{25}{(a\beta)^4} = \log_5 \left\{ 25 \times \left(\frac{4}{5} \right)^4 \right\} \\ &= \log_5 \frac{2^8}{5^2} = 8\log_5 2 - 2 \\ &= 8a - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \quad 5^a &= 10 \text{에서 } a = \log_5 10 = \log_5 (5 \times 2) = 1 + \log_5 2 \\ \therefore \log_5 2 &= a - 1 \\ 5^b &= 15 \text{에서 } b = \log_5 15 = \log_5 (5 \times 3) = 1 + \log_5 3 \\ \therefore \log_5 3 &= b - 1 \\ 5^c &= 35 \text{에서 } c = \log_5 35 = \log_5 (5 \times 7) = 1 + \log_5 7 \\ \therefore \log_5 7 &= c - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_5 \frac{700}{3} &= \log_5 \frac{2^2 \times 5^2 \times 7}{3} \\ &= 2\log_5 2 + 2 + \log_5 7 - \log_5 3 \\ &= 2(a - 1) + 2 + (c - 1) - (b - 1) \\ &= 2a - b + c \end{aligned}$$

따라서 $p=2, q=-1, r=1$ 이므로 $p+q+r=2$

$$\begin{aligned} 15 \quad \log_3 4 \times \log_2 5 \times \log_5 6 - \log_3 25 \times \log_5 2 \\ = 2\log_3 2 \times \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 6}{\log_3 5} - 2\log_3 5 \times \frac{\log_3 2}{\log_3 5} \\ = 2(\log_3 6 - \log_3 2) = 2\log_3 3 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \quad \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_7 2} &= \frac{1}{\log_k 2} \text{에서} \\ \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7 &= \log_2 k \\ \log_2 (3 \times 5 \times 7) &= \log_2 k \quad \therefore k = 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 \quad \frac{\log_3 25}{\log_3 4} &= \frac{2\log_3 5}{2\log_3 2} = \log_2 5 \text{이고} \\ \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 \text{이므로 } 2 < \log_2 5 < 3 \\ \therefore a &= 2, b = \log_2 5 - 2 \\ \therefore \frac{b-a}{a+b} &= \frac{\log_2 5 - 4}{\log_2 5} = 1 - 4 \times \frac{1}{\log_2 5} \\ &= 1 - 4\log_5 2 = 1 - \log_5 16 \\ \therefore k &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 \quad \log_a b &= \log_b a \text{에서 } \log_a b = \frac{1}{\log_a b} \\ (\log_a b)^2 &= 1 \quad \therefore \log_a b = \pm 1 \\ \text{이때 } a \neq b \text{이므로 } \log_a b &= -1 \text{에서 } b = \frac{1}{a} \\ a > 0, b > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해} \\ a + 4b &= a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}} = 4 \\ &\quad (\text{단, 등호는 } a=2 \text{일 때 성립}) \\ \text{따라서 } a + 4b \text{의 최솟값은 } 4 \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 \quad \log_{15} 24 &= \frac{\log_5 24}{\log_5 15} = \frac{\log_5 (2^3 \times 3)}{\log_5 (5 \times 3)} \\ &= \frac{3\log_5 2 + \log_5 3}{1 + \log_5 3} = \frac{3a + b}{1 + b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 \quad \log_2 3 &= a \text{에서 } \log_3 2 = \frac{1}{a} \\ b &= \log_3 \frac{45}{2} = \log_3 \frac{3^2 \times 5}{2} = 2 + \log_3 5 - \log_3 2 \text{에서} \\ \log_3 5 &= b - 2 + \log_3 2 = b - 2 + \frac{1}{a} \\ \therefore \log_6 45 &= \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3^2 \times 5)}{\log_3 (3 \times 2)} = \frac{2 + \log_3 5}{1 + \log_3 2} \\ &= \frac{2 + b - 2 + \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{ab + 1}{a + 1} \end{aligned}$$

21 $2^a=3$ 에서 $a=\log_2 3$

$$3^b=5 \text{에서 } b=\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{\log_2 5}{a}$$

$$\therefore \log_2 5 = ab$$

$$5^c=7 \text{에서 } c=\log_5 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 5} = \frac{\log_2 7}{ab}$$

$$\therefore \log_2 7 = abc$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_5 42 &= \frac{\log_2 42}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (2 \times 3 \times 7)}{\log_2 5} \\ &= \frac{1 + \log_2 3 + \log_2 7}{\log_2 5} = \frac{1 + a + abc}{ab} \end{aligned}$$

22 $\left(\log_2 5 + \log_4 \frac{1}{5}\right) \left(\log_5 2 + \log_{25} \frac{1}{2}\right)$
 $= \left(\log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 5\right) \left(\log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 2\right)$
 $= \frac{1}{2} \log_2 5 \times \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{1}{4}$

23 $\log_2 3 + \log_4 27 - 3 \log_8 \sqrt{3}$
 $= \log_2 3 + \frac{3}{2} \log_2 3 - 3 \times \frac{1}{6} \log_2 3 = 2 \log_2 3$
 $\therefore 4^{\log_2 3 + \log_4 27 - 3 \log_8 \sqrt{3}} = 4^{2 \log_2 3} = 4^{\log_2 9}$
 $= 9^{\log_2 4} = 9^2 = 81$

24 $\log_4 a + \log_8 a^2 + \log_{64} a^3$
 $= \frac{1}{2} \log_2 a + \frac{2}{3} \log_2 a + \frac{3}{6} \log_2 a = \frac{5}{3} \log_2 a$
 $\therefore m = \frac{5}{3}$

25 $A - B = 2 \log_{\frac{1}{4}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5} - \log_{32} \frac{1}{125}$
 $= 2 \times \left(-\frac{1}{2} \log_2 5\right) - \left(-\frac{1}{2} \log_2 5\right) - \left(-\frac{3}{5} \log_2 5\right)$
 $= -\frac{1}{10} \log_2 5$
 이때 $\log_2 5 > \log_2 1 = 0$ 이므로 $A - B = -\frac{1}{10} \log_2 5 > 0$
 $\therefore A > B$

26 $27^x = 18$ 에서 $x = \log_{27} 18$
 $12^y = 18$ 에서 $y = \log_{12} 18$
 $\therefore \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_{18} 27 + \log_{18} 12 = \log_{18} 324$
 $= \log_{18} 18^2 = 2$

다른 풀이

$$27^x = 18 \text{에서 } 27 = 18^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$12^y = 18 \text{에서 } 12 = 18^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \text{을 하면 } 324 = 18^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, 18^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 18^2$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \quad \therefore \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

27 $2^x = 3^y = \left(\frac{1}{36}\right)^z = k (k > 0)$ 라 하면

$$x = \log_2 k, y = \log_3 k, z = \log_{\frac{1}{36}} k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= 2 \log_k 2 + 2 \log_k 3 + \log_k \frac{1}{36} \\ &= \log_k \left(4 \times 9 \times \frac{1}{36}\right) = 0 \end{aligned}$$

28 $\log_a 9 = \log_b 27$ 에서 $\log_3 a = \log_{27} b$

$$\frac{1}{2} \log_3 a = \frac{1}{3} \log_3 b \quad \therefore \log_3 a = \frac{2}{3} \log_3 b$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{ab} a^2 b^3 &= \log_{ab} \{(ab)^2 \times b\} = 2 + \log_{ab} b \\ &= 2 + \frac{\log_3 b}{\log_3 ab} = 2 + \frac{\log_3 b}{\log_3 a + \log_3 b} \\ &= 2 + \frac{\log_3 b}{\frac{2}{3} \log_3 b + \log_3 b} = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

29 $\log_3 x - 2 \log_3 y + 3 \log_{27} z = -1$ 에서

$$\log_3 x - \log_3 y + \log_3 z = -1$$

$$\log_3 \frac{xz}{y} = -1$$

$$\text{따라서 } \frac{xz}{y} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$27^{\frac{xz}{y}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

30 근과 계수의 관계에 의해 $\log_3 a + \log_3 b = 3$ 이므로

$$\log_3 a \beta = 3$$

$$\therefore a \beta = 3^3 = 27$$

31 근과 계수의 관계에 의해

$$\log_2 a + \log_2 b = -5, \log_2 a \times \log_2 b = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(-5)^2 - 2 \times 5}{5} = 3 \end{aligned}$$

32 근과 계수의 관계에 의해 $a + \beta = 5, a \beta = \frac{5}{2}$ 이므로

$$(a - \beta)^2 = (a + \beta)^2 - 4a\beta = 5^2 - 4 \times \frac{5}{2} = 15$$

$$\therefore a = |\alpha - \beta| = \sqrt{15}$$

$$\therefore \log_a 2a + \log_a 3\beta = \log_a 6a\beta = \log_{\sqrt{15}} 15 = 2$$

33 $\log \sqrt{10} - \log \sqrt[3]{100} + \log \sqrt{\frac{1}{1000}}$

$$= \log 10^{\frac{1}{2}} - \log 10^{\frac{2}{3}} + \log 10^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}
 34 \quad & \log 10x^3 - \log \frac{x^5}{\sqrt{10}} + \log \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\
 &= 1 + 3\log x - \left(5\log x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\log x \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{8}{3}\log x = \frac{3}{2} - \frac{8}{3}\log 10^{\frac{3}{10}} = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{7}{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 35 \quad & ① \log 163 = \log(10^2 \times 1.63) = 2 + 0.2122 = 2.2122 \\
 & ② \log 1630 = \log(10^3 \times 1.63) = 3 + 0.2122 = 3.2122 \\
 & ③ \log 0.163 = \log(10^{-1} \times 1.63) \\
 & \quad = -1 + 0.2122 = -0.7878 \\
 & ④ \log 0.0163 = \log(10^{-2} \times 1.63) \\
 & \quad = -2 + 0.2122 = -1.7878 \\
 & ⑤ \log 0.00163 = \log(10^{-3} \times 1.63) \\
 & \quad = -3 + 0.2122 = -2.7878
 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

$$\begin{aligned}
 36 \quad & \log \frac{\sqrt[5]{327}}{1000} = \frac{1}{5}\log 327 - 3 = \frac{1}{5}\log(10^2 \times 3.27) - 3 \\
 & = \frac{1}{5}(2 + 0.5145) - 3 = -2.4971 \\
 & \text{따라서 } a = [-2.4971] = -3 \text{이므로 } a^2 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 37 \quad & a = \log 2340 = \log(10^3 \times 2.34) = 3 + 0.3692 = 3.3692 \\
 & \log b = -1.6308 = -2 + 0.3692 \\
 & \quad = \log 10^{-2} + \log 2.34 = \log 0.0234 \\
 & \therefore b = 0.0234 \\
 & \therefore a + 100b = 3.3692 + 100 \times 0.0234 = 5.7092
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 38 \quad & \log 0.155 = -0.8097 = -1 + 0.1903, \\
 & \log 641 = 2.8069 = 2 + 0.8069 \text{이므로} \\
 & \log a = 0.8069 = -2 + \log 641 = \log 6.41 \\
 & \therefore a = 6.41 \\
 & \log b = 1.903 = 1 + 0.903 = 1 + (1 + \log 0.155) \\
 & \quad = 2 + \log 0.155 = \log 15.5 \\
 & \therefore b = 15.5 \\
 & \therefore a + b = 6.41 + 15.5 = 21.91
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 39 \quad & A = 10^{-1.0970} \text{에서} \\
 & \log A = -1.0970 = -2 + 0.9030 = -2 + 3 \times 0.3010 \\
 & \quad = \log 10^{-2} + 3\log 2 = \log 0.08 \\
 & \therefore A = 0.08 \\
 & B = 10^{-1.2219} \text{에서} \\
 & \log B = -1.2219 = -2 + 0.7781 \\
 & \quad = -2 + 0.3010 + 0.4771 \\
 & \quad = \log 10^{-2} + \log 2 + \log 3 = \log 0.06 \\
 & \therefore B = 0.06 \\
 & \therefore 100(A+B) = 100(0.08+0.06) = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 40 \quad & \log 15^{30} = 30\log \frac{3 \times 10}{2} = 30(\log 3 + 1 - \log 2) \\
 & \quad = 30(0.4771 + 1 - 0.3010) = 35.283 \\
 & \text{따라서 } \log 15^{30} \text{의 정수 부분이 35이므로 } 15^{30} \text{은 36자리의 자연수이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41 \quad & \log \left(\frac{2}{3}\right)^{50} = 50(\log 2 - \log 3) = 50(0.3010 - 0.4771) \\
 & \quad = -8.805 = -9 + 0.195 \\
 & \text{따라서 } \log \left(\frac{2}{3}\right)^{50} \text{의 정수 부분이 } -9 \text{이므로 } \left(\frac{2}{3}\right)^{50} \text{은 소수} \\
 & \text{점 아래 9째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.} \\
 & \therefore n = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 42 \quad & N^{100} \text{이 150자리의 자연수이므로 } \log N^{100} \text{의 정수 부분이} \\
 & 149 \text{이다. 즉, } 149 \leq \log N^{100} < 150 \text{이므로} \\
 & 1.49 \leq \log N < 1.5, \quad -1.5 < -\log N \leq -1.49 \\
 & \therefore -2 + 0.5 < \log \frac{1}{N} \leq -2 + 0.51 \\
 & \text{따라서 } \log \frac{1}{N} \text{의 정수 부분이 } -2 \text{이므로 } \frac{1}{N} \text{은 소수점 아} \\
 & \text{래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43 \quad & a^2 \text{이 7자리의 자연수이므로 } \log a^2 \text{의 정수 부분이 6이다.} \\
 & \text{즉, } 6 \leq \log a^2 < 7 \text{이므로} \\
 & 3 \leq \log a < \frac{7}{2} \quad \dots\dots ㉠ \\
 & \log a \text{의 정수 부분이 3이므로 } a \text{는 4자리의 자연수이다.} \\
 & \therefore m = 4 \\
 & \text{한편 } ab^3 \text{이 20자리의 자연수이므로 } \log ab^3 \text{의 정수 부분} \\
 & \text{이 19이다.} \\
 & \text{즉, } 19 \leq \log ab^3 < 20 \text{이므로} \\
 & 19 \leq \log a + 3\log b < 20 \quad \dots\dots ㉡ \\
 & ㉠, ㉡에 의해 $\frac{31}{2} < 3\log b < 17$ \\
 & \therefore \frac{31}{6} < \log b < \frac{17}{3} \\
 & \log b \text{의 정수 부분이 5이므로 } b \text{는 6자리의 자연수이다.} \\
 & \therefore n = 6 \\
 & \therefore m + n = 4 + 6 = 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 44 \quad & \log 12^{30} = 30(2\log 2 + \log 3) \\
 & \quad = 30(2 \times 0.3010 + 0.4771) = 32.373 \\
 & \text{이때 } \log 2 < 0.373 < \log 3 \text{이므로} \\
 & 32 + \log 2 < 32.373 < 32 + \log 3 \\
 & \log(2 \times 10^{32}) < \log 12^{30} < \log(3 \times 10^{32}) \\
 & \therefore 2 \times 10^{32} < 12^{30} < 3 \times 10^{32} \\
 & \text{따라서 } 12^{30} \text{의 최고 자리의 숫자는 2이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45 \quad \log\left(\frac{5}{6}\right)^{30} &= 30 \log \frac{10}{2^2 \times 3} = 30(1 - 2\log 2 - \log 3) \\
 &= 30(1 - 2 \times 0.3010 - 0.4771) \\
 &= -2.373 = -3 + 0.627 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$ 의 정수 부분이 -3 이므로 $\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$ 은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\therefore m=3$$

①에서 $\log\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$ 의 소수 부분은 0.627이고

$$\begin{aligned}
 \log 4 &= 2\log 2 = 0.6020, \log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990 \text{이므로} \\
 \log 4 &< 0.627 < \log 5
 \end{aligned}$$

$$-3 + \log 4 < -3 + 0.627 < -3 + \log 5$$

$$\log(10^{-3} \times 4) < \log\left(\frac{5}{6}\right)^{30} < \log(10^{-3} \times 5)$$

$$\therefore \frac{4}{10^3} < \left(\frac{5}{6}\right)^{30} < \frac{5}{10^3}$$

따라서 $\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$ 의 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 4이다.

$$\therefore n=4 \quad \therefore m+n=3+4=7$$

$$\begin{aligned}
 46 \quad \log 3^{90} &= 90 \log 3 = 90 \times 0.4771 \\
 &= 42.939 = 42 + 0.939 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$\log 3^{90}$ 의 정수 부분이 42이므로 3^{90} 은 43자리의 수이다.

$$\therefore a=43$$

①에서 $\log 3^{90}$ 의 소수 부분은 0.939이고

$$\log 8 = 3\log 2 = 0.9030, \log 9 = 2\log 3 = 0.9542 \text{이므로}$$

$$\log 8 < 0.939 < \log 9, \quad 42 + \log 8 < 42.939 < 42 + \log 9$$

$$\log(8 \times 10^{42}) < \log 3^{90} < \log(9 \times 10^{42})$$

$$\therefore 8 \times 10^{42} < 3^{90} < 9 \times 10^{42}$$

따라서 3^{90} 의 최고 자리의 숫자는 8이므로 $b=8$

한편 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 차례로 반복되므로 3^{90} 의 일의 자리의 숫자는 9이다.

$$\therefore c=9 \quad \therefore a+b+c=43+8+9=60$$

47 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x - \log \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \log x \Rightarrow (\text{정수})$$

이때 $100 \leq x \leq 1000$ 에서 $2 \leq \log x \leq 3$ 이므로

$$\frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} \log x \leq 2$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3} \log x = 2 \text{이므로 } \log x = 3$$

48 (가)에서 $2 \leq \log x < 3$ ⑦

(나)에서 $\log x^3$ 과 $\log \frac{1}{x^4}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^3 - \log \frac{1}{x^4} = 7 \log x \Rightarrow (\text{정수})$$

⑦에서 $14 \leq 7 \log x < 21$

즉, $7 \log x$ 가 될 수 있는 수는 14, 15, 16, ..., 20이므로

$\log x$ 가 될 수 있는 수는 $2, \frac{15}{7}, \frac{16}{7}, \dots, \frac{20}{7}$

이때 x 의 값의 곱이 A 이므로

$$\log A = 2 + \frac{15}{7} + \frac{16}{7} + \dots + \frac{20}{7} = 17$$

49 $\log x^4$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\log x^4 + \log \frac{1}{x} = 3 \log x \Rightarrow (\text{정수})$$

이때 $\log x$ 의 정수 부분이 3이므로 $3 \leq \log x < 4$

$$\therefore 9 \leq 3 \log x < 12$$

즉, $3 \log x$ 는 9 또는 10 또는 11이므로

$$\log x = 3 \text{ 또는 } \log x = \frac{10}{3} \text{ 또는 } \log x = \frac{11}{3}$$

$$\therefore x = 10^3 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{10}{3}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{11}{3}}$$

따라서 모든 x 의 값의 곱은

$$10^3 \times 10^{\frac{10}{3}} \times 10^{\frac{11}{3}} = 10^{10}$$

50 $\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\log x^2 + \log \sqrt{x} = \frac{5}{2} \log x \Rightarrow (\text{정수})$$

이때 $1 < x < 10$ 에서 $0 < \log x < 1$ 이므로

$$0 < \frac{5}{2} \log x < \frac{5}{2}$$

즉, $\frac{5}{2} \log x$ 는 1 또는 2이므로

$$\log x = \frac{2}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{4}{5}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{2}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{4}{5}}$$

$$\text{따라서 } A = 10^{\frac{2}{5}} \times 10^{\frac{4}{5}} = 10^{\frac{6}{5}} \text{이므로}$$

$$\log A^5 = 5 \log 10^{\frac{6}{5}} = 6$$

51 기압이 30기압인 곳과 300기압인 곳의 높이의 차는

$$\begin{aligned}
 3.3 \log \frac{1}{30} - 3.3 \log \frac{1}{300} &= 3.3 \log 10 \\
 &= 3.3(\text{km})
 \end{aligned}$$

52 3년 후의 중고 상품의 가격을 a 만 원이라 하면

$$\log(1-0.2) = \frac{1}{3} \log \frac{a}{200}$$

$$3 \log 0.8 = \log a - \log 200$$

$$\log a = \log \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \log 200 = \log \left(\frac{4^3}{5^3} \times 200\right)$$

$$= \log \frac{512}{5}$$

$$\therefore a = \frac{512}{5} = 102.4$$

따라서 3년 후의 중고 상품의 가격은 102만 4천 원이다.

- 53 처음 기억 상태가 100일 때 9개월 후의 기억 상태가 50이므로

$$\log \frac{100}{50} = c \log(9+1) \quad \therefore c = \log 2$$

처음 기억 상태가 60일 때 9개월 후의 기억 상태를 a 라 하면

$$\log \frac{60}{a} = \log 2 \times \log(9+1) = \log 2$$

$$\therefore a = 30$$

따라서 처음 기억 상태가 60일 때 9개월 후의 기억 상태는 30이다.

- 54 이번 달 저축 금액을 a 라 하고 저축 금액을 매달 $r\%$ 씩 증가시킨다고 하면 12개월 후의 저축 금액은 $2a$ 이므로

$$a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} = 2a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$12 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{0.3}{12} = 0.025$$

이때 $\log 1.06 = 0.025$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.06 \quad \therefore r = 6$$

따라서 매달 6%씩 증가시켜야 한다.

- 55 현재 미세 먼지의 농도를 a 라 하고 매년 $r\%$ 씩 감소시킨다고 하면 10년 후의 농도는 $\frac{1}{3}a$ 이므로

$$a \left(1 - \frac{r}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3}a \quad \therefore \left(1 - \frac{r}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = -\log 3$$

$$\log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = -\frac{0.48}{10} = -0.048 = -1 + 0.952$$

이때 $\log 8.96 = 0.952$ 이므로

$$1 - \frac{r}{100} = 0.896 \quad \therefore r = 10.4$$

따라서 매년 10.4%씩 감소시켜야 한다.

- 56 1997년의 매출액을 a 라 하면 1998년의 매출액은 $0.5a$ 이므로 2018년의 매출액을 ka 라 하면

$$0.5a(1+0.1)^{20} = ka \quad \therefore k = 0.5 \times 1.1^{20}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log k = -\log 2 + 20 \log 1.1$$

$$= -0.301 + 20 \times 0.041 = 0.519$$

이때 $\log 3.3 = 0.519$ 이므로 $k = 3.3$

따라서 2018년 매출액은 1997년 매출액의 3.3배이다.

I-2. 지수함수와 로그함수

01 지수함수와 로그함수

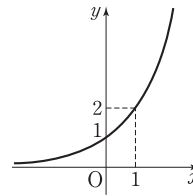
기초 문제 Training

p.20

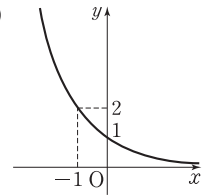
1 ㄱ, ㄴ

2 (1) $\frac{13}{4}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) 4 (4) $\sqrt{2}+3$

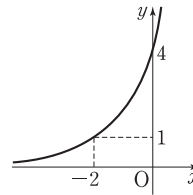
3 (1)



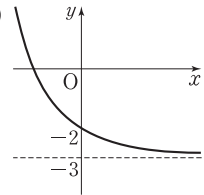
(2)



4 (1)



(2)



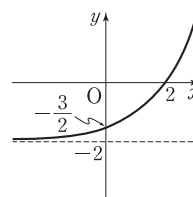
치역: $\{y | y > 0\}$

점근선의 방정식: $y = 0$

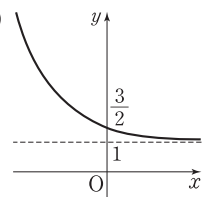
치역: $\{y | y > -3\}$

점근선의 방정식: $y = -3$

(3)



(4)



치역: $\{y | y > -2\}$

점근선의 방정식: $y = -2$

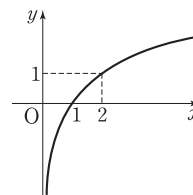
치역: $\{y | y > 1\}$

점근선의 방정식: $y = 1$

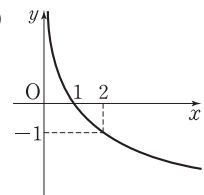
5 ㄴ, ㄷ

6 (1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) -2

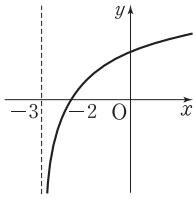
7 (1)



(2)

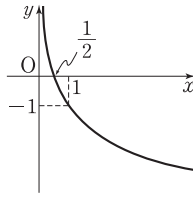


8 (1)



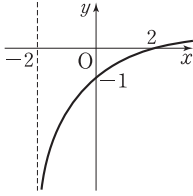
치역: $\{x|x>-3\}$
점근선의 방정식: $x=-3$

(2)



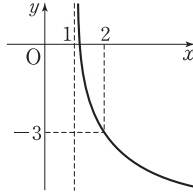
치역: $\{x|x>0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

(3)



치역: $\{x|x>-2\}$
점근선의 방정식: $x=-2$

(4)



치역: $\{x|x>1\}$
점근선의 방정식: $x=1$

9 (1) $y=\log_3 x$

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

핵심 유형 Training

p.21~26

- 1 ⑤ 2 ㄱ, ㄷ 3 $\frac{1}{4}$ 4 ⑤ 5 ㄱ, ㄴ, ㄷ
6 1 7 ① 8 3 9 4 10 $\frac{5}{2}$ 11 ②
12 ② 13 ④ 14 ③ 15 ③ 16 ③ 17 ②
18 ㄱ 19 ③ 20 ⑤ 21 ㄱ, ㄴ, ㄷ 22 -5
23 ④ 24 ① 25 $\frac{15}{2}$ 26 ③ 27 58 28 38
29 ① 30 1 31 -10 32 3 33 ④ 34 ③
35 ④ 36 21 37 ① 38 11 39 5

1 ⑤ 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

2 ㄱ. $f(m)f(-m)=a^m a^{-m}=a^0=1$

ㄴ. $f(2m)=a^{2m}=(a^m)^2=\{f(m)\}^2$

ㄷ. $f(m+n)=a^{m+n}=a^m a^n=f(m)f(n)$

ㄹ. $f\left(\frac{1}{m}\right)=a^{\frac{1}{m}}, \frac{1}{f(m)}=\frac{1}{a^m}=a^{-m}$

$\therefore f\left(\frac{1}{m}\right) \neq \frac{1}{f(m)}$

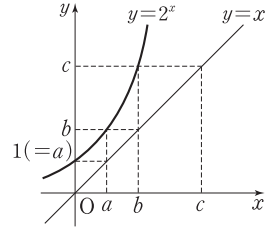
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 오른쪽 그림에서 $a=1$

$2^a=b$ 에서 $b=2$

$2^b=c$ 에서 $c=4$

$\therefore 2^{b-c}=2^{2-4}=\frac{1}{4}$



4 $y=4(2^{2x}+1)=4^{x+1}+4$ 의 그래프는 $y=2^{2x}=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것과 같으므로

$m=-1, n=4 \quad \therefore m+n=3$

5 ㄱ. $y=-3^{x+1}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=\frac{3^x+1}{3}=3^{x-1}+\frac{1}{3}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=3^{3x}+1=27^x+1$ 이므로 $y=3^x$ 의 그래프를 평행이동, 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

따라서 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

6 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 $y=2^{x-a}+b$

이때 점근선의 방정식이 $y=-2$ 이므로 $b=-2$

$y=2^{x-a}-2$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$0=2^{-a}-2 \quad \therefore a=-1$

$\therefore a-b=-1-(-2)=1$

7 $y=2^{3x}3^{-2x}=\left(\frac{8}{9}\right)^x$ 에서 밑 $\frac{8}{9}$ 이 $0<\frac{8}{9}<1$ 이므로

최댓값 $M=\left(\frac{8}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{8}$, 최솟값 $m=\frac{8}{9}$

$\therefore Mm=1$

8 $y=3^{-x}+k=\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$ 에서 밑 $\frac{1}{3}$ 이 $0<\frac{1}{3}<1$ 이므로

$x=-2$ 일 때 최대이다.

즉, $9+k=10$ 에서 $k=1$

$x=0$ 일 때 최소이므로 $m=3^0+1=2$

$\therefore k+m=1+2=3$

- 9 (i) $0 < a < 1$ 이면 $x=1$ 일 때 최대이므로
 $a^0 + 2 = 18 \quad \therefore 3 = 18 \Rightarrow$ 모순
 (ii) $a > 1$ 이면 $x=3$ 일 때 최대이므로
 $a^2 + 2 = 18, a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 (\because a > 1)$
 (i), (ii)에 의해 $a = 4$
- 10 $y = a^{3-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$ 에서
 (i) $0 < a < 1$ 이면 $\frac{1}{a} > 1$ 이므로 $x=2$ 일 때 최댓값이 a ,
 $x=-1$ 일 때 최솟값이 a^4 이다.
 최댓값이 최솟값의 8배이므로
 $a = 8a^4, a^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because 0 < a < 1)$
 (ii) $a > 1$ 이면 $0 < \frac{1}{a} < 1$ 이므로 $x=-1$ 일 때 최댓값이
 $a^4, x=2$ 일 때 최솟값이 a 이다.
 최댓값이 최솟값의 8배이므로
 $a^4 = 8a, a^3 = 8 \quad \therefore a = 2 (\because a > 1)$
 (i), (ii)에 의해 a 의 값의 합은
 $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$
- 11 $t = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$ 라 하면
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-2 \leq t \leq 2$
 따라서 $-2 \leq t \leq 2$ 에서 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 은 $t = -2$ 일 때 최댓값
 $M = 4, t = 2$ 일 때 최솟값 $m = \frac{1}{4}$ 이다.
 $\therefore M + m = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$
- 12 $t = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3$ 이라 하면 $t \geq 3$
 $t \geq 3$ 에서 $y = a^t (0 < a < 1)$ 은 $t = 3$ 일 때 최댓값이 a^3 이므로
 $a^3 = \frac{8}{27} \quad \therefore a = \frac{2}{3} (\because 0 < a < 1)$
- 13 $t = -x^2 + 8x - a = -(x-4)^2 + 16 - a$ 라 하면
 $t \leq 16 - a$
 $t \leq 16 - a$ 에서 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ 은 $t = 16 - a$, 즉 $x = 4$ 일 때 최대
 이므로
 $b = 4$
 최댓값이 $\frac{2}{3}$ 이므로 $\left(\frac{3}{2}\right)^{16-a} = \frac{2}{3}$ 에서
 $16 - a = -1 \quad \therefore a = 17$
 $\therefore a + b = 17 + 4 = 21$
- 14 $y = 4^x - 2^{x+2} + 3$ 에서 $2^x = t (t > 0)$ 라 하면
 $y = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

- $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ 이므로 $\textcircled{7}$ 은 $t = 4$ 일 때 최댓값
 $M = 3, t = 2$ 일 때 최솟값 $m = -1$ 이다.
 $\therefore M - m = 3 - (-1) = 4$
- 15 $y = 9^x - 2 \times 3^{x+a} + 4 \times 3^b$ 에서 $3^x = t (t > 0)$ 라 하면
 $y = t^2 - 2 \times 3^a \times t + 4 \times 3^b$
 $= (t - 3^a)^2 - 3^{2a} + 4 \times 3^b \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $t = 3^a$ 일 때 최솟값이 $-3^{2a} + 4 \times 3^b$ 이다.
 $\textcircled{7}$ 은 $x = 1$, 즉 $t = 3$ 일 때 최소이므로
 $3^a = 3 \quad \therefore a = 1$
 또 최솟값이 3이므로
 $-3^2 + 4 \times 3^b = 3, 3^b = 3 \quad \therefore b = 1$
 $\therefore a + b = 1 + 1 = 2$
- 16 $y = 4^x + 4^{-x} - 6(2^x + 2^{-x}) + 12$ 에서 $2^x + 2^{-x} = t$ 라 하면
 $y = t^2 - 2 - 6t + 12 = (t-3)^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 이때 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계
 에 의해
 $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$ (단, 등호는 $x = 0$ 일 때 성립)
 따라서 $t \geq 2$ 에서 $\textcircled{7}$ 은 $t = 3$ 일 때 최솟값이 1이다.
- 17 ① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전
 체의 집합이다.
 ② $\frac{4}{3} > 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 ③ 그래프는 원점을 지나지 않는다.
 ④ 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.
 ⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.
 따라서 옳은 것은 ②이다.
- 18 $\neg, f(ab) = \log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b = f(a) + f(b)$
 $\hookrightarrow, f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_2 a + \log_2 \frac{1}{a}$
 $= \log_2 a - \log_2 a = 0$
 $\dashv, f(a-b) = \log_2(a-b)$
 $f(a) - f(b) = \log_2 a - \log_2 b = \log_2 \frac{a}{b}$
 $\therefore f(a-b) \neq f(a) - f(b)$
 따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다.
- 19 주어진 그림에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 두 점
 $(a, c), (b, a)$ 를 지나므로
 $\log_{\frac{1}{3}} a = c, \log_{\frac{1}{3}} b = a$
 로그의 정의에 의해 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^c = 3^{-c}, b = \left(\frac{1}{3}\right)^a = 3^{-a}$
 $\therefore 3^{-a-c} = 3^{-a} \times 3^{-c} = ab$

- 20 $y = \log_3 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y = \log_3 4(x-m) + n$$

$$y = \log_3 (36x - 108) \text{에서}$$

$$y = \log_3 9(4x - 12)$$

$$\therefore y = \log_3 4(x-3) + 2$$

$$\therefore m=3, n=2 \quad \therefore m+n=5$$

- 21 $\neg$. $y = \log_2 (4x+4) = \log_2 (x+1) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것과 같다.

$\neg$. $y = \log_2 \frac{4}{x} + 1 = -\log_2 x + 3$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것과 같다.

$\neg$. $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x+2) = -\log_2 \{-(x-2)\}$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것과 같다.

$\neg$. $y = \log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x = \log_4 x$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동, 대칭이동하여 겹칠 수 없다.
따라서 겹쳐지는 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

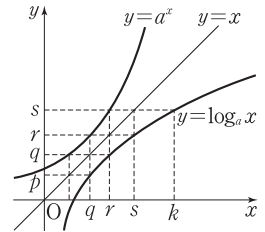
- 22 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 $y = -\log_2 (x-m) + n$
이때 점근선의 방정식이 $x = -2$ 이므로 $m = -2$
 $y = -\log_2 (x+2) + n$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로 $-4 = -\log_2 2 + n \quad \therefore n = -3$
 $\therefore m+n = -2 + (-3) = -5$

- 23 $y = \frac{1}{2} \log_2 (x-3) + 1$ 에서 $\log_2 (x-3) = 2(y-1)$
로그의 정의에 의해 $x-3 = 2^{2(y-1)} \quad \therefore x = 4^{y-1} + 3$
 x 와 y 를 바꾸어 역함수를 구하면 $y = 4^{x-1} + 3$
 $\therefore a=4, b=-1, c=3 \quad \therefore a+b+c=6$

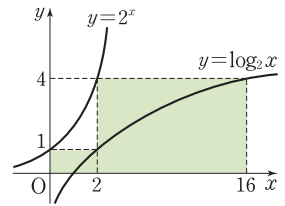
- 24 $g(4) = 2$ 이므로 $f(2) = 4$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^0 + k = 4 \quad \therefore k = 3$
 $\therefore f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 3$
 $g(12) = a$ 라 하면 $f(a) = 12$ 이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{a-2} + 3 = 12 \quad \therefore a = 0 \quad \therefore g(12) = 0$

- 25 $(f \circ g)(x) = x$ 이면 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 역함수 관계
이므로 $g(3) = 2$ 에서 $f(2) = 3$
 $a^2 - 1 = 3, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 1)$
따라서 $f(x) = 2^x - 2^{-x+2}$ 이므로 $f(3) = 2^3 - 2^{-1} = \frac{15}{2}$

- 26 오른쪽 그림에서 $\log_a (\log_a (\log_a k))$
 $= \log_a (\log_a s)$
 $= \log_a r$
 $= q$



- 27 점선 또는 그 연장선이 축과 만나는 x 좌표 또는 y 좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 색칠한 부분의 넓이는 $16 \times 4 - 2 \times 3 = 58$



- 28 두 함수 $y = \log_2 (x-1)$ 과 $y = g(x)$ 가 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
점 $Q(2, b)$ 가 $y = g(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 점 $(b, 2)$ 는 $y = \log_2 (x-1)$ 의 그래프 위의 점이다.
 $2 = \log_2 (b-1)$ 에서 $b-1 = 2^2 \quad \therefore b = 5$
점 $P(a, 5)$ 가 $y = \log_2 (x-1)$ 의 그래프 위의 점이므로 $5 = \log_2 (a-1), a-1 = 2^5 \quad \therefore a = 33$
 $\therefore a+b = 33+5 = 38$

- 29 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-1) + 2$ 에서 밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $x = 3$ 일 때 최댓값 $M = \log_{\frac{1}{2}} 2 + 2 = 1$, $x = 17$ 일 때 최솟값 $m = \log_{\frac{1}{2}} 16 + 2 = -2$ 이다.
 $\therefore M+m = 1 + (-2) = -1$

- 30 $y = \log_3 (x+2) + k$ 에서 밑 $3 > 1$ 이므로 $x = 13$ 일 때 최댓값은 $\log_3 15 + k$, $x = 3$ 일 때 최솟값은 $\log_3 5 + k$ 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $\log_3 15 + k - (\log_3 5 + k) = \log_3 3 = 1$

- 31 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-1) + b$ 에서 밑 $\frac{1}{3}$ 이 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $x = a$ 일 때 최댓값이 1 이고, $x = 10$ 일 때 최솟값이 -3 이다.
즉, $\log_{\frac{1}{3}} (a-1) + b = 1, \log_{\frac{1}{3}} 9 + b = -3$ 에서 $b = -1, a = \frac{10}{9} \quad \therefore 9ab = -10$

- 32 (i) $0 < a < 1$ 이면 $x = -3$ 일 때 최대이므로
 $\log_a 1 + 1 = 3 \quad \therefore 1 = 3 \Rightarrow$ 모순
 (ii) $a > 1$ 이면 $x = 5$ 일 때 최대이므로
 $\log_a 9 + 1 = 3, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 1)$
 (i), (ii)에 의해 $a = 3$
- 33 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 3)$ 에서 $x^2 - 2x + 3 = t$ 라 하면
 $t = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
 $2 \leq x \leq 6$ 에서 $3 \leq t \leq 27$
 $3 \leq t \leq 27$ 에서 $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ 는 $t = 3$ 일 때 최댓값 $M = -1$,
 $t = 27$ 일 때 최솟값 $m = -3$ 이다.
 $\therefore Mm = -1 \times (-3) = 3$
- 34 $y = \log(x-a) + \log(5a-x) \quad \left\{ \begin{array}{l} x-a > 0, 5a-x > 0 \\ a < x < 5a \end{array} \right.$ 에서
 $= \log(-x^2 + 6ax - 5a^2)$
 에서 $-x^2 + 6ax - 5a^2 = t$ 라 하면
 $t = -x^2 + 6ax - 5a^2 = -(x-3a)^2 + 4a^2$
 $a < x < 5a$ 에서 $0 < t \leq 4a^2$
 $0 < t \leq 4a^2$ 에서 $y = \log t$ 는 $t = 4a^2$, 즉 $x = 3a$ 일 때 최대
 이므로 $b = 3a$ ㉠
 최댓값이 2이므로
 $\log 4a^2 = 2, 4a^2 = 10^2 \quad \therefore a = 5 (\because a > 0)$
 이를 ㉠에 대입하면 $b = 15$
 $\therefore a + b = 5 + 15 = 20$
- 35 $y = \log_a 2(|x-2| + 2)$ 에서 $2(|x-2| + 2) = t$ 라 하면
 $t = 2|x-2| + 4$
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $4 \leq t \leq 8$
 (i) $a > 1$ 이면 $y = \log_a t$ 는 $t = 8$ 일 때 최대이므로
 $\log_a 8 = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{8}$
 그런데 $a > 1$ 이므로 조건에 맞지 않다.
 (ii) $0 < a < 1$ 이면 $y = \log_a t$ 는 $t = 4$ 일 때 최대이므로
 $\log_a 4 = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$
 따라서 $y = \log_{\frac{1}{4}} t$ 는 $t = 8$ 일 때 최소이므로 최솟값은
 $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}$
- 36 $y = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 + 3$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 라 하면
 $y = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$ ㉠
 $t = \log_{\frac{1}{3}} x$ 이므로 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $-3 \leq t \leq 0$
 $-3 \leq t \leq 0$ 에서 ㉠은 $t = -3$ 일 때 최댓값 $M = 18$, $t = 0$
 일 때 최솟값 $m = 3$ 이다.
 $\therefore M + m = 18 + 3 = 21$

- 37 $y = \log x^{\log x} - 4 \log 10x = (\log x)^2 - 4(1 + \log x)$
 $= (\log x)^2 - 4 \log x - 4$
 $\log x = t$ 라 하면
 $y = t^2 - 4t - 4 = (t-2)^2 - 8$ ㉠
 $t = \log x$ 이므로 $10 \leq x \leq 1000$ 에서 $1 \leq t \leq 3$
 $1 \leq t \leq 3$ 에서 ㉠은 $t = 1$ 또는 $t = 3$ 일 때 최댓값
 $M = -7$, $t = 2$ 일 때 최솟값 $m = -8$ 이다.
 $\therefore M - m = -7 - (-8) = 1$
- 38 $y = \log_2 4x \times \log_2 \frac{16}{x} = (2 + \log_2 x)(4 - \log_2 x)$
 $\log_2 x = t$ 라 하면
 $y = (2+t)(4-t) = -t^2 + 2t + 8 = -(t-1)^2 + 9$
 따라서 $t = 1$ 일 때, 즉 $x = 2$ 일 때 최댓값이 9이므로
 $a = 2, M = 9 \quad \therefore a + M = 11$
- 39 $y = (\log_3 x)^2 + a \log_3 x + b$
 $= (\log_3 x)^2 + \frac{a}{2} \log_3 x + b$
 $\log_3 x = t$ 라 하면
 $y = t^2 + \frac{a}{2}t + b = \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + b - \frac{a^2}{16}$
 따라서 $t = -\frac{a}{4}$ 에서 최솟값이 $b - \frac{a^2}{16}$ 이고, 주어진 조건
 에서 $x = 3$, 즉 $t = 1$ 에서 최솟값이 8이므로
 $-\frac{a}{4} = 1, b - \frac{a^2}{16} = 8$
 $\therefore a = -4, b = 9 \quad \therefore a + b = 5$

02 지수함수와 로그함수의 활용

기초 문제 Training

p.27

- 1 (1) $x = 5$ (2) $x = 2$ (3) $x = -2$ (4) $x = \frac{3}{2}$
- 2 4, 4, 2, 2
- 3 (1) $x < 3$ (2) $x > 0$ (3) $x \geq 3$ (4) $x \leq 4$
- 4 (1) $x = 8$ (2) $x = 4$
- 5 (1) $x = 2$ (2) $x = 3$
- 6 2, $\log_3 9$, 9, 11, 11
- 7 (1) $\frac{4}{3} < x < 2$ (2) $x \geq 3$

1 4	2 4	3 ⑤	4 5	5 ④	6 ⑤
7 ⑤	8 ①	9 ③	10 ③	11 4	12 ④
13 2	14 ④	15 ③	16 ⑤	17 ③	18 ②
19 ③	20 2	21 $x=2$	22 ①	23 80	
24 ④	25 ②	26 ①	27 ⑤	28 ①	29 -4
30 ②	31 8	32 1	33 ④	34 ④	35 1
36 ②	37 ④	38 ③	39 ③	40 ③	41 ⑤
42 ①	43 ②	44 ④	45 ①		
46 6.25% 이상 12.5% 이하			47 ③		

- 1 $2^x 4^x = 8$ 에서 $2^{x+2x} = 2^3$ 이므로
 $x^2 + 2x = 3, (x+3)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 1$
 따라서 두 근의 차는 $1 - (-3) = 4$

- 2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-8} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-x}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}$ 이므로
 $2x^2 - 8 = x - 5, 2x^2 - x - 3 = 0$
 $(x+1)(2x-3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = \frac{3}{2}$
 따라서 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -1$ 이므로
 $2\alpha - \beta = 3 - (-1) = 4$

- 3 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 라 하면 $t^2 + \frac{1}{9}t = 9t + 1$
 $9t^2 - 80t - 9 = 0, (9t+1)(t-9) = 0$
 $\therefore t = 9 (\because t > 0)$
 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 이므로
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9, \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \therefore x = -2$
 따라서 $\alpha = -2$ 이므로
 $\log_2 \alpha^2 = \log_2 (-2)^2 = 2$

- 4 $\begin{cases} x+y=3 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 2^x+2^{y+1}=2^{x+y} & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $y = 3 - x$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $2^x + 2^{4-x} = 2^3$
 $2^x = t (t > 0)$ 라 하면 $t + \frac{16}{t} = 8$
 $t^2 - 8t + 16 = 0, (t-4)^2 = 0 \therefore t = 4$
 $t = 2^x$ 이므로 $2^x = 4 \therefore x = 2$
 $x = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y = 1$
 $\therefore \alpha = 2, \beta = 1 \therefore \alpha^2 + \beta^2 = 4 + 1 = 5$

- 5 $x^{x+6} = (x^x)^x$ 에서 $x^{x+6} = x^{x^2}$ 이고 밑이 같으므로
 (i) 밑이 1이면 $x = 1$
 (ii) 지수가 같으면 $x + 6 = x^2, x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0 \therefore x = 3 (\because x > 0)$
 (i), (ii)에서 모든 근의 합은 $1 + 3 = 4$

- 6 $(x-1)^{3+2x} = (x-1)^{x^2}$ 에서 밑이 같으므로
 (i) 밑이 1이면 $x - 1 = 1 \therefore x = 2$
 (ii) 지수가 같으면 $3 + 2x = x^2, x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0 \therefore x = 3 (\because x > 1)$
 (i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $2 \times 3 = 6$

- 7 $(4x-1)^{2x-5} = (2x+2)^{2x-5}$ 에서 지수가 같으므로
 (i) 밑이 같으면 $4x - 1 = 2x + 2 \therefore x = \frac{3}{2}$
 (ii) 지수가 0이면 $2x - 5 = 0 \therefore x = \frac{5}{2}$
 (i), (ii)에서 모든 근의 합은 $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

- 8 $3^x = t (t > 0)$ 라 하면 $81t^2 - 81at + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $3^a, 3^b$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해
 $3^a \times 3^b = \frac{1}{81}, 3^{a+b} = 3^{-4} \therefore a + b = -4$

- 9 $2^x = t (t > 0)$ 라 하면 $4t^2 - 2 \times 2^a t + 16 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
 오직 하나의 실근을 가지므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식 $D = 0$ 에서
 $\frac{D}{4} = (2^a)^2 - 4 \times 16 = 0$
 $4^a - 4^3 = 0 \therefore a = 3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4t^2 - 16t + 16 = 0$
 $(t-2)^2 = 0 \therefore t = 2$
 즉, $2^a = 2$ 이므로 $a = 1$
 $\therefore a + a = 3 + 1 = 4$

참고 $t > 0$ 에서 $\textcircled{1}$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면 $\textcircled{1}$ 의 두 근이 서로 다른 부호인 경우도 확인해야 하지만 $\textcircled{1}$ 에서
 $(\text{두 근의 곱}) = \frac{16}{4} = 4 > 0$ 이므로 두 근은 서로 같은 부호이다.

- 10 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 라 하면 $t^2 - at + 2 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.
 (i) (판별식) > 0 에서 $D = a^2 - 8 > 0$
 $\therefore a < -2\sqrt{2}$ 또는 $a > 2\sqrt{2}$
 (ii) (두 근의 합) > 0 에서 $a > 0$
 (iii) (두 근의 곱) > 0 에서 $2 > 0$
 (i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는
 $a > 2\sqrt{2}$
 따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

11 밑을 같게 하면

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x-5}$$

◀ $0 < (\text{밑}) < 1$

$$2x-5 < -4 < x \quad \therefore -4 < x < \frac{1}{2}$$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0$ 의 4개이다.

12 $3^x=t(t>0)$ 라 하면

$$t^2+7 \leq 4(3t-5), t^2-12t+27 \leq 0$$

$$(t-3)(t-9) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq t \leq 9$$

$$t=3^x \text{이므로 } 3 \leq 3^x \leq 9$$

◀ $(\text{밑}) > 1$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2$$

따라서 $\alpha=1, \beta=2$ 이므로 $\alpha+\beta=3$

13

$$\begin{cases} 2^{x^2-6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x & \dots\dots \textcircled{㉠} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \times 2^{-x} - 4 < 0 & \dots\dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2^{x^2-6} \leq 2^{-x}$$

◀ $(\text{밑}) > 1$

$$x^2-6 \leq -x, x^2+x-6 \leq 0$$

$$(x+3)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^x = t(t>0) \text{라 하면 } t^2-3t-4 < 0$$

$$(t+1)(t-4) < 0 \quad \therefore 0 < t < 4 (\because t>0)$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로 } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

◀ $0 < (\text{밑}) < 1$

$$\therefore x > -2$$

..... ㉤

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉤} \text{의 공통부분은 } -2 < x \leq 2$$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 $-1+0+1+2=2$

14 $x^2-(2^{a+1}-4)x+2^a=0$ 의 판별식 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2^a-2)^2 - 2^a < 0$$

$$2^{2a}-5 \times 2^a+4 < 0$$

$$2^a=t(t>0) \text{라 하면 } t^2-5t+4 < 0$$

$$(t-1)(t-4) < 0 \quad \therefore 1 < t < 4$$

$$t=2^a \text{이므로 } 2^0 < 2^a < 2^2$$

◀ $(\text{밑}) > 1$

$$\therefore 0 < a < 2$$

15 (i) $0 < x < 1$ 일 때, $x-3 \leq 5-x \quad \therefore x \leq 4$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때, $1 \geq 1$ 이므로 $x=1$ 은 해이다.

(iii) $x>1$ 일 때, $x-3 \geq 5-x \quad \therefore x \geq 4$

(i), (ii), (iii)에서 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 4$

16 (i) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때

$$x^2-x > 8+x, x^2-2x-8 > 0$$

$$(x+2)(x-4) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 4$$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x-1=1$ 일 때

주어진 부등식은 $1 < 1$ 이므로 모순이다.

즉, $x=2$ 는 해가 아니다.

(iii) $x-1>1$, 즉 $x>2$ 일 때

$$x^2-x < 8+x, x^2-2x-8 < 0$$

$$(x+2)(x-4) < 0 \quad \therefore -2 < x < 4$$

그런데 $x>2$ 이므로 $2 < x < 4$

(i), (ii), (iii)에서 $2 < x < 4$

따라서 $\alpha=2, \beta=4$ 이므로 $\alpha+\beta=6$

17 (i) $0 < x^2-x+1 < 1$, 즉 $0 < x < 1$ 일 때

$$2x-5 > x+2 \quad \therefore x > 7$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-x+1=1$ 일 때

주어진 부등식은 $1 < 1$ 이므로 모순이다.

즉, $x=0, x=1$ 은 해가 아니다.

(iii) $x^2-x+1>1$, 즉 $x<0$ 또는 $x>1$ 일 때

$$2x-5 < x+2 \quad \therefore x < 7$$

그런데 $x<0$ 또는 $x>1$ 이므로

$$x < 0 \text{ 또는 } 1 < x < 7$$

(i), (ii), (iii)에서 $x < 0$ 또는 $1 < x < 7$

따라서 자연수 x 는 $2, 3, 4, 5, 6$ 의 5개이다.

18 2500만 원을 투자하여 x 년 후에 1억 원 이상이 되면

$$2500 \times 2^{\frac{x}{5}} \geq 10000, 2^{\frac{x}{5}} \geq 4$$

◀ $(\text{밑}) > 1$

$$\frac{x}{5} \geq 2 \quad \therefore x \geq 10$$

따라서 총액이 1억 원 이상이 되는 것은 10년 후이다.

19 x 분 후 실험실 A의 암모니아 분자는 $2^{10} \times 8^x$ 개, 실험실

B의 암모니아 분자는 $4^{15} \times 2^x$ 개이므로

$$2^{10} \times 8^x = 4^{15} \times 2^x, 2^{10+3x} = 2^{30+x}$$

$$10+3x=30+x \quad \therefore x=10$$

따라서 암모니아 분자 수가 같아지는 것은 10분 후이다.

20 x 시간 후 세균 A는 2×2^x 만 마리, 세균 B는 4×4^x 만 마
리이므로

$$2 \times 2^x + 4 \times 4^x = 72$$

$$2^x=t(t>0) \text{라 하면}$$

$$2t+4t^2=72, (2t+9)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 (\because t>0)$$

$$t=2^x \text{이므로 } 2^x=4 \quad \therefore x=2$$

21 진수의 조건에 의해 $x-1>0, x+2>0$ 이므로

$$x > 1$$

..... ㉠

주어진 방정식에서 밑을 같게 하면

$$\log_2(x-1)(x+2)=\log_2 4 \text{이므로}$$

$$(x-1)(x+2)=4, x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=2(\because \textcircled{㉠})$$

22 진수의 조건에 의해

$$x^2-3x-10>0, x-2>0 \text{이므로}$$

$$x>5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

주어진 방정식에서 밑을 같게 하면

$$\log_2(x^2-3x-10)=\log_2(2x-4) \text{이므로}$$

$$x^2-3x-10=2x-4, x^2-5x-6=0$$

$$(x+1)(x-6)=0$$

$$\therefore x=6(\because \textcircled{㉠})$$

23 $\log_3 x=t$ 라 하면

$$(t-1)^2=t+5, t^2-3t-4=0$$

$$(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=4$$

$$t=\log_3 x \text{이므로 } \log_3 x=-1 \text{ 또는 } \log_3 x=4$$

$$\therefore x=\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=81$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}, \beta=81$ 이므로

$$\beta-3\alpha=81-1=80$$

24 $\log_5 x=t$ 라 하면

$$t+\frac{6}{t}-5=0, t^2-5t+6=0$$

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

$$t=\log_5 x \text{이므로}$$

$$\log_5 x=2 \text{ 또는 } \log_5 x=3$$

$$\therefore x=25 \text{ 또는 } x=125$$

따라서 두 근의 차는 $125-25=100$

25 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$$(x-1)\log 2=(1-2x)\log 5$$

$$x(\log 2+2\log 5)=\log 2+\log 5$$

$$\therefore x=\frac{\log 2+\log 5}{\log 2+2\log 5}=\frac{\log 10}{\log 50}=\frac{1}{\log \frac{100}{2}}$$

$$=\frac{1}{2-\log 2}=\frac{1}{2-a}$$

26 방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$(\log_3 x)^2=3-2\log_3 x$$

$$\log_3 x=t \text{라 하면}$$

$$t^2=3-2t, t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

$$t=\log_3 x \text{이므로 } \log_3 x=-3 \text{ 또는 } \log_3 x=1$$

$$\therefore x=\frac{1}{27} \text{ 또는 } x=3$$

27 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$$(\log 5x)^2=(\log 3x)^2$$

$$(\log 5x+\log 3x)(\log 5x-\log 3x)=0$$

$$\therefore \log 5x=-\log 3x \text{ 또는 } \log 5x=\log 3x$$

이때 진수의 조건에 의해 $x>0$ $\dots\dots \textcircled{㉠}$

(i) $\log 5x=-\log 3x$ 에서

$$5x=\frac{1}{3x}, x^2=\frac{1}{15}$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{15}}{15}(\because \textcircled{㉠})$$

(ii) $\log 5x=\log 3x$ 에서 $5x=3x$, 즉 $x=0$

그런데 $\textcircled{㉠}$ 을 만족하지 않으므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15} \quad \therefore \frac{1}{\alpha^2}=15$

28 $\log_3 x=t$ 라 하면 $(\log_3 2+t)(\log_3 5+t)-2=0$

$$t^2+(\log_3 2+\log_3 5)t+\log_3 2 \times \log_3 5-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=-(\log_3 2+\log_3 5)$$

$$\log_3 \alpha \beta=\log_3 \frac{1}{10} \quad \therefore \alpha \beta=\frac{1}{10}$$

29 $\log_4 x=t$ 라 하면 $(t+k)(t+1)+2=0$

$$t^2+(k+1)t+k+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 두 근은 $\log_4 \alpha, \log_4 \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\log_4 \alpha+\log_4 \beta=-(k+1)$$

$$\log_4 \alpha \beta=-k-1$$

이때 $\alpha \beta=64$ 이므로 $\log_4 64=-k-1$

$$3=-k-1 \quad \therefore k=-4$$

30 $\log_2 x=t$ 라 하면 $t^2=4(t+k)$

$$t^2-4t-4k=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한 실근만을 가지므로 $\textcircled{㉠}$ 의 판별식 $D=0$ 에서

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-4k)=0 \quad \therefore k=-1$$

31 $\log x=t$ 라 하면

$$t^2-2(a-4)t+2a=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

주어진 방정식의 두 근이 $x>1$ 인 부분에 있으면

$$t=\log x \text{에서 } \textcircled{㉠} \text{의 두 근은 } t>0 \text{인 부분에 있다.}$$

즉, $\textcircled{㉠}$ 의 두 근이 모두 양수이어야 하므로

(i) (판별식) ≥ 0 에서 $\frac{D}{4}=(a-4)^2-2a\geq 0$

$$(a-2)(a-8)\geq 0 \quad \therefore a\leq 2 \text{ 또는 } a\geq 8$$

(ii) (두 근의 합) >0 에서 $2(a-4)>0 \quad \therefore a>4$

(iii) (두 근의 곱) >0 에서 $2a>0 \quad \therefore a>0$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는 $a\geq 8$

따라서 a 의 최솟값은 8이다.

- 32 진수의 조건에 의해 $x^2-2x-15>0$, $x-3>0$ 이므로
 $x>5$ ㉠

주어진 부등식에서

$$\log_3(x^2-2x-15)<\log_3(3x-9)\text{이므로} \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$$

$$x^2-2x-15<3x-9, x^2-5x-6<0$$

$$(x+1)(x-6)<0$$

$$\therefore -1<x<6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $5<x<6$

따라서 $a=5$, $b=6$ 이므로

$$\beta-a=1$$

- 33 진수의 조건에 의해 $1-x>0$, $2x+6>0$ 이므로
 $-3<x<1$ ㉠

주어진 부등식에서 밑을 같게 하면

$$\log_{\frac{1}{4}}(1-x)^2>\log_{\frac{1}{4}}(2x+6)\text{이므로} \quad \blacktriangleleft 0<(\text{밑})<1$$

$$(1-x)^2<2x+6, x^2-4x-5<0$$

$$(x+1)(x-5)<0$$

$$\therefore -1<x<5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$-1<x<1$$

- 34 $\log_4 x=t$ 라 하면

$$2t-t\left(\frac{1}{2}+t\right)+1\geq 0, 2t^2-3t-2\leq 0$$

$$(2t+1)(t-2)\leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2}\leq t\leq 2$$

$$t=\log_4 x\text{이므로 } -\frac{1}{2}\leq \log_4 x\leq 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$$

$$\therefore \frac{1}{2}\leq x\leq 16$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3, ..., 16의 16개이다.

- 35 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$ 라 하면

$$t^2+2at+b\leq 0 \quad \text{..... ㉠}$$

주어진 부등식의 해가 $1\leq x\leq 9$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 9\leq \log_{\frac{1}{3}} x\leq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\therefore -2\leq t\leq 0$$

해가 $-2\leq t\leq 0$ 이고 최고차항의 계수가 1인 이차부등식은

$$t(t+2)\leq 0 \quad \therefore t^2+2t\leq 0$$

이를 ㉠과 비교하면 $a=1$, $b=0$

$$\therefore a+b=1$$

- 36 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$(x-5)\log 4<3-x$$

$$(\log 4+1)x<3+5\log 4$$

$$(2\log 2+1)x<3+10\log 2$$

$$\therefore x<\frac{3+10\log 2}{2\log 2+1}=\frac{3+10\times 0.3}{2\times 0.3+1}=3.75$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3의 3개이다.

- 37 진수의 조건에 의해 $x>0$

부등식의 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$$(\log x)^2<3+2\log x$$

$$\therefore (\log x)^2-2\log x-3<0$$

$\log x=t$ 라 하면

$$t^2-2t-3<0, (t+1)(t-3)<0$$

$$\therefore -1<t<3$$

$$t=\log x\text{이므로 } -1<\log x<3$$

$$\therefore \frac{1}{10}<x<1000$$

따라서 자연수 x 의 최댓값은 999, 최솟값은 1이므로 합은

$$999+1=1000$$

- 38 진수의 조건에 의해 $x>0$

부등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 정리하면

$$(\log_3 x-3)\log_3 x<-2$$

$$\therefore (\log_3 x)^2-3\log_3 x+2<0$$

$\log_3 x=t$ 라 하면

$$t^2-3t+2<0, (t-1)(t-2)<0$$

$$\therefore 1<t<2$$

$$t=\log_3 x\text{이므로 } 1<\log_3 x<2$$

$$\therefore 3<x<9$$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 $4+5+6+7+8=30$

- 39 진수의 조건에 의해 $x>0$, $\log_2 x>0$ 이므로

$$x>1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x)\geq -1\text{에서} \quad \blacktriangleleft 0<(\text{밑})<1$$

$$\log_2 x\leq 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$$

$$\therefore x\leq 8 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $1<x\leq 8$

- 40 진수의 조건에 의해 $x>0$, $\log_4 x>0$, $\log_3(\log_4 x)>0$ 이므로

$$\log_4 x>1$$

$$\therefore x>4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\log_2\{\log_3(\log_4 x)\}\leq 0\text{에서} \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$$

$$\log_3(\log_4 x)\leq 1 \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$$

$$\log_4 x\leq 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$$

$$\therefore x\leq 64 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$4<x\leq 64$$

따라서 정수 x 의 개수는 $64-4=60$

- 41 진수의 조건에 의해 $x > 0$, $\log_3 x > 0$ 이므로
 $x > 1$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{5}}(\log_3 x) \geq -2$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $\log_3 x \leq 25$ $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $\therefore x \leq 3^{25}$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $1 < x \leq 3^{25}$
 따라서 가장 큰 정수 x 는 3^{25} 이다.
 이때 $\log 3^{25} = 25 \log 3 = 25 \times 0.4771 = 11.9275$ 이므로
 3^{25} 은 12자리의 정수이다.

- 42 부등식의 양변에 상용로그를 취하면
 $(\log x)^2 > k(2 + 2 \log x)$
 $\log x = t$ 라 하면
 $t^2 > k(2 + 2t) \quad \therefore t^2 - 2kt - 2k > 0$ ㉠
 $t = \log x$ 이므로 $x > 0$ 이면 t 는 모든 실수이다.
 따라서 ㉠이 모든 실수 t 에 대하여 항상 성립하므로
 $t^2 - 2kt - 2k = 0$ 의 판별식 $D < 0$ 에서
 $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (-2k) < 0$
 $k(k+2) < 0 \quad \therefore -2 < k < 0$

- 43 부등식의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면 $a > 1$ 이므로
 $(x^2 + 8 \log_a 2) \log_a 2 > 2x$
 $(\log_a 2)x^2 - 2x + 8(\log_a 2)^2 > 0$ ㉠
 이때 $\log_a 2 > 0$ 이므로 ㉠이 모든 실수 x 에 대하여 성립하
 려면 이차방정식 $(\log_a 2)x^2 - 2x + 8(\log_a 2)^2 = 0$ 의 판별
 식 $D < 0$ 이어야 한다.
 $\frac{D}{4} = 1 - (2 \log_a 2)^3 < 0$
 $2 \log_a 2 = t$ 라 하면
 $1 - t^3 < 0, (t-1)(t^2 + t + 1) > 0$
 $\therefore t > 1 (\because t^2 + t + 1 > 0)$
 $t = 2 \log_a 2$ 이므로
 $2 \log_a 2 > 1, \log_a 2 > \frac{1}{2}, \log_a 2 > \log_a \sqrt{a}$ $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $2 > \sqrt{a} \quad \therefore 1 < a < 4 (\because a > 1)$
 따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은 $2 + 3 = 5$

- 44 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$ 이어
 야 하므로
 $\frac{D}{4} = (2 - \log_2 a)^2 - 1 \geq 0$
 $(\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a + 3 \geq 0$
 진수의 조건에 의해 $a > 0$ ㉠
 $\log_2 a = t$ 라 하면
 $t^2 - 4t + 3 \geq 0, (t-1)(t-3) \geq 0$
 $\therefore t \leq 1$ 또는 $t \geq 3$

$t = \log_2 a$ 이므로 $\log_2 a \leq 1$ 또는 $\log_2 a \geq 3$
 $\therefore a \leq 2$ 또는 $a \geq 8$ ㉡
 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는
 $0 < a \leq 2$ 또는 $a \geq 8$
 따라서 한 자리의 자연수 a 는 1, 2, 8, 9의 4개이다.

- 45 $k=2, I=3 \times 10^5, x=1000$ 을 대입하면
 $1000 = -\frac{1000}{2} \log \frac{L \times 1000^2}{3 \times 10^5}$
 $-2 = \log \frac{10L}{3}$
 $\frac{10L}{3} = 10^{-2}$
 $\therefore L = 10^{-3} \times 3 = 0.003$
 따라서 조도는 0.003이다.

- 46 거리가 30cm인 곳에서 $T = \frac{1}{2}T_0$ 이므로
 $30 = k \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \quad \therefore k = 30$
 거리가 90cm 이상 120cm 이하인 곳에서 T 가 T_0 의
 $x\%$ 만큼이라 하면 $T = -\frac{x}{100}T_0$ 이므로
 $90 \leq 30 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \leq 120$
 $3 \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \leq 4$
 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$
 밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로
 $\frac{1}{16} \leq \frac{x}{100} \leq \frac{1}{8}$
 $\therefore 6.25 \leq x \leq 12.5$
 따라서 측정되는 전자파의 양은 방출량의 6.25% 이상
 12.5% 이하이다.

- 47 처음 물의 양을 a 라 하면 x 일 후 남아 있는 물의 양은
 $a \times \left(\frac{9}{10}\right)^x$ 이므로
 $a \times \left(\frac{9}{10}\right)^x \leq \frac{1}{2}a \quad \therefore \left(\frac{9}{10}\right)^x \leq \frac{1}{2}$
 양변에 상용로그를 취하면
 $x \log \frac{9}{10} \leq -\log 2$
 $x(2 \log 3 - 1) \leq -\log 2$
 $\therefore x \geq \frac{-\log 2}{2 \log 3 - 1}$
 $= \frac{-0.3010}{2 \times 0.4771 - 1} = 6.572 \dots$
 따라서 물의 양이 절반 이하가 되는 것은 7일 후이다.

II-1. 삼각함수

01 삼각함수

기초 문제 Training

p.36

- 1 (1) $360^\circ \times n + 60^\circ$ (단, n 은 정수)
 (2) $360^\circ \times n + 130^\circ$ (단, n 은 정수)
 (3) $360^\circ \times n + 335^\circ$ (단, n 은 정수)
 (4) $360^\circ \times n + 190^\circ$ (단, n 은 정수)
- 2 (1) 제4사분면 (2) 제3사분면
 (3) 제2사분면 (4) 제1사분면
- 3 (1) $-\frac{4}{5}\pi$ (2) $\frac{5}{3}\pi$ (3) -105° (4) 252°
- 4 (1) $l=2\pi, S=6\pi$ (2) $l=2\pi, S=10\pi$
- 5 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{3}$
- 6 (1) $\sin\theta < 0, \cos\theta > 0, \tan\theta < 0$
 (2) $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0, \tan\theta < 0$
 (3) $\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$
 (4) $\sin\theta > 0, \cos\theta > 0, \tan\theta > 0$
- 7 (1) 제4사분면 (2) 제3사분면
 (3) 제2사분면 또는 제3사분면
 (4) 제1사분면 또는 제3사분면
- 8 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $-\frac{3}{4}$

핵심 유형 Training

p.37~42

1 ③	2 ③	3 ②	4 ④	5 ②	6 ①
7 ②	8 180°	9 ⑤	10 6	11 ②	12 ④
13 ③	14 ②	15 ⑤	16 ④	17 ④	18 ③
19 ④	20 ①	21 ②	22 $\frac{3}{2}$	23 ③	24 ①
25 ②	26 ④	27 $\neg, \sqsubset$	28 ⑤	29 ④	
30 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	31 ⑤	32 5	33 ①	34 ③	
35 57	36 ⑤	37 ④	38 55		

- 1 ① $390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$
 ② $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$
 ③ $1050^\circ = 360^\circ \times 2 + 330^\circ$

$$\textcircled{4} -330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$$

$$\textcircled{5} -690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ③이다.

- 2 ① $840^\circ = 360^\circ \times 2 + 120^\circ$
 ② $1200^\circ = 360^\circ \times 3 + 120^\circ$
 ③ $1680^\circ = 360^\circ \times 4 + 240^\circ$
 ④ $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$
 ⑤ $-1320^\circ = 360^\circ \times (-4) + 120^\circ$

따라서 α 의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

- 3 $675^\circ = 360^\circ \times 1 + 315^\circ$
 $\neg. 315^\circ = 360^\circ \times 0 + 315^\circ$
 $\sqcup. 585^\circ = 360^\circ \times 1 + 225^\circ$
 $\sqsubset. 1125^\circ = 360^\circ \times 3 + 45^\circ$
 $\kappa. -405^\circ = 360^\circ \times (-2) + 315^\circ$
 $\mu. -765^\circ = 360^\circ \times (-3) + 315^\circ$
 $\nu. -1035^\circ = 360^\circ \times (-3) + 45^\circ$

따라서 각 675° 를 나타내는 동경과 일치하는 각은 $\neg, \kappa, \mu$ 이다.

- 4 $\neg. 160^\circ = 360^\circ \times 0 + 160^\circ \rightarrow$ 제2사분면의 각
 $\sqcup. 390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ \rightarrow$ 제1사분면의 각
 $\sqsubset. 570^\circ = 360^\circ \times 1 + 210^\circ \rightarrow$ 제3사분면의 각
 $\kappa. -70^\circ = 360^\circ \times (-1) + 290^\circ \rightarrow$ 제4사분면의 각
 $\mu. -480^\circ = 360^\circ \times (-2) + 240^\circ \rightarrow$ 제3사분면의 각
 $\nu. -600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ \rightarrow$ 제2사분면의 각
 따라서 동경이 같은 사분면에 있는 것은 $\neg - \mu, \sqsubset - \mu$ 이다.

- 5 θ 가 제2사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$
 (i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때
 $360^\circ \times k + 45^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 90^\circ$
 $\Rightarrow \frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각
 (ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때
 $360^\circ \times k + 225^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 270^\circ$
 $\Rightarrow \frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각
 (i), (ii)에 의해 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

- 6 $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각
 θ 가 제4사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 120^\circ$
 (i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때
 $360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 120^\circ$
 $\Rightarrow \frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각
 (ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때
 $360^\circ \times k + 210^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 240^\circ$
 $\Rightarrow \frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각
 (iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때
 $360^\circ \times k + 330^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$
 $\Rightarrow \frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각
 (i), (ii), (iii)에 의해 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.
- 7 두 각 $\theta, 9\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일치하므로
 $9\theta - \theta = 360^\circ \times n$ (단, n 은 정수)
 $8\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 45^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로
 $90^\circ < 45^\circ \times n < 180^\circ \quad \therefore 2 < n < 4$
 이때 n 은 정수이므로 $n=3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\theta = 135^\circ$
- 8 두 각 $2\theta, 6\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로
 $6\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로
 $0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$
 이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\theta = 45^\circ$ 또는 $\theta = 135^\circ$
 따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은 $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$
- 9 두 각 $5\theta, 7\theta$ 를 나타내는 두 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로
 $5\theta + 7\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $12\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로
 $0^\circ < 30^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{23}{2}$
 이때 n 은 정수이므로 각 θ 는 $n=0$ 일 때 최솟값, $n=11$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$n=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\theta = 15^\circ$
 $n=11$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\theta = 345^\circ$
 따라서 각 θ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $345^\circ + 15^\circ = 360^\circ$

- 10 두 각 $\theta, 5\theta$ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$ (n 은 정수)
 $6\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad \therefore \theta = 60^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로
 $0^\circ < 60^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{23}{4}$
 이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\theta = 15^\circ, 75^\circ, 135^\circ, 195^\circ, 255^\circ, 315^\circ$
 따라서 각 θ 는 모두 6개이다.
- 11 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (라디안), 1 (라디안) $= \frac{180^\circ}{\pi}$ 이므로
 ① $10^\circ = 10 \times 1^\circ = 10 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$
 ② $36^\circ = 36 \times 1^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$
 ③ $\frac{5}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi \times 1 = \frac{5}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$
 ④ $\frac{8}{9}\pi = \frac{8}{9}\pi \times 1 = \frac{8}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 160^\circ$
 ⑤ $132^\circ = 132 \times 1^\circ = 132 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{15}\pi$
 따라서 옳지 않은 것은 ②이다.
- 12 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (라디안), 1 (라디안) $= \frac{180^\circ}{\pi}$ 이므로
 ㄱ. $30^\circ = 30 \times 1^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$
 $\therefore \frac{\pi}{30^\circ} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6$
 ㄴ. $\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{30} \times 1 = \frac{\pi}{30} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 6^\circ$
 ㄷ. $\pi^\circ = \pi \times 1^\circ = \pi \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi^2}{180}, 30^\circ = \frac{\pi}{6} (\because \textcircled{1})$
 $\therefore \frac{30^\circ}{\pi^\circ} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi^2}{180}} = \frac{30}{\pi}$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
- 13 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (라디안)이므로
 $648^\circ = 648 \times 1^\circ = 648 \times \frac{\pi}{180} = \frac{18}{5}\pi$
 $\therefore a=5, b=18$

$$\begin{aligned} \text{또 } 1(\text{라디안}) &= \frac{180^\circ}{\pi} \text{이므로} \\ \frac{5}{18}\pi &= \frac{5}{18}\pi \times 1 = \frac{5}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 50^\circ \\ \therefore c &= 50 \\ \therefore a+b+c &= 5+18+50=73 \end{aligned}$$

- 14 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 호의 길이가 π 이므로

$$\pi = r \times \frac{\pi}{3} \quad \therefore r=3$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$$

- 15 부채꼴의 넓이가 $\frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{또 } l = 2 \times \frac{3}{4}\pi, \text{ 즉 } l = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \theta + l = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{9}{4}\pi$$

- 16 부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 12이므로
 $2r+l=12 \quad \therefore l=12-2r \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\text{부채꼴의 넓이가 9이므로 } \frac{1}{2}r(12-2r)=9$$

$$r^2-6r+9=0, (r-3)^2=0 \quad \therefore r=3$$

$$r=3\text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } l=6$$

$$l=r\theta \text{에서 } 6=3\theta \quad \therefore \theta=2$$

$$\therefore r+\theta=3+2=5$$

- 17 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$16=2r+l \quad \therefore l=16-2r$$

$$\text{이때 } r>0, 16-2r>0 \text{이므로 } 0<r<8$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r$$

$$=-(r-4)^2+16$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0<r<8$ 에서 $r=4$ 일 때 최대이다.

- 18 부채꼴의 반지름의 길이를 rm , 호의 길이를 lm 라 하면

$$2r+l=100 \quad \therefore l=100-2r$$

$$\text{이때 } r>0, 100-2r>0 \text{이므로 } 0<r<50$$

부채꼴의 넓이를 $S\text{m}^2$ 라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(100-2r)=-r^2+50r$$

$$=-(r-25)^2+625$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0<r<50$ 에서 $r=25$ 일 때 최대
 이므로 넓이의 최댓값은 625m^2 이다.

- 19 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하고 둘레의 길이가 일정하므로 $2r+l=c$ (c 는 상수)라 하면

$$l=c-2r$$

$$\text{이때 } r>0, c-2r>0 \text{이므로 } 0<r<\frac{c}{2}$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(c-2r)=-r^2+\frac{c}{2}r$$

$$=-\left(r-\frac{c}{4}\right)^2+\frac{c^2}{16}$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0<r<\frac{c}{2}$ 에서 $r=\frac{c}{4}$ 일 때 최대

이므로 넓이의 최댓값은 $\frac{c^2}{16}$ 이다.

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{4}\right)^2\times\theta=\frac{c^2}{16} \quad \therefore \theta=2$$

- 20 오른쪽 그림에서

$$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$$

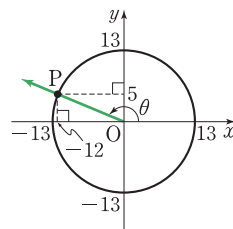
이므로 삼각함수의 정의에 의해

$$\cos\theta=-\frac{12}{13}, \tan\theta=-\frac{5}{12}$$

$$\therefore 13\cos\theta-12\tan\theta$$

$$=13\times\left(-\frac{12}{13}\right)-12\times\left(-\frac{5}{12}\right)$$

$$=-7$$



- 21 점 P의 좌표를 $(-3a, -4a)$ ($a>0$)라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-3a)^2+(-4a)^2}=5a$$

이므로 삼각함수의 정의에 의해

$$\sin\theta=\frac{-4a}{5a}=-\frac{4}{5}, \cos\theta=\frac{-3a}{5a}=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{5}$$

- 22 조건 ㉞에서

$$y^2=3x^2 \text{이므로 } y=\pm\sqrt{3}x$$

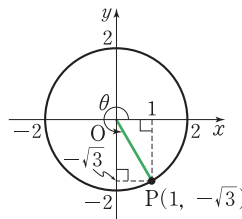
$$x^2+3x^2=4 \text{에서 } x^2=1$$

$$\therefore x=\pm 1, y=\pm\sqrt{3}$$

조건 ㉞에서 점 $P(x, y)$ 는

제4사분면에 있으므로 각 θ 를

나타내는 동경과 만나는 점 P의 좌표는 $(1, -\sqrt{3})$ 이다.



따라서 삼각함수의 정의에 의해

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \theta \tan \theta = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$$

23 ㄱ. θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta > 0$$

ㄴ. θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta \tan \theta > 0$$

ㄷ. θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

즉, $\cos \theta \sin \theta < 0$ 이고 $\sin \theta + \tan \theta < 0$ 이므로

$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \theta + \tan \theta} > 0$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} + \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} + \frac{\tan \theta}{|\tan \theta|} \\ = \frac{\sin \theta}{-\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{-\cos \theta} + \frac{\tan \theta}{\tan \theta} \\ = (-1) + (-1) + 1 = -1 \end{aligned}$$

25 (i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

즉, $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \tan \theta > 0, \cos \theta + \tan \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{(\sin \theta - \tan \theta)^2} - \sqrt{(\cos \theta + \tan \theta)^2} \\ = |\cos \theta| + |\sin \theta - \tan \theta| - |\cos \theta + \tan \theta| \\ = -\cos \theta + (\sin \theta - \tan \theta) + (\cos \theta + \tan \theta) \\ = \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26 (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} + \frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta} + \frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2}{\sin\theta-\cos\theta} \\ &= (\sin\theta+\cos\theta) + (\sin\theta-\cos\theta) \\ &= 2\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 \quad \text{ㄱ. } \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} + \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + (1-\cos \theta)^2}{\sin \theta(1-\cos \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta(1-\cos \theta)} \\ &= \frac{2(1-\cos \theta)}{\sin \theta(1-\cos \theta)} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \frac{\cos \theta}{1-\tan \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\frac{1}{\tan \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta}{1-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{1-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \sin \theta + \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta) \cos^2 \theta \\ &= \tan^2 \theta + (1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta \\ &= \tan^2 \theta + (\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \\ &= \tan^2 \theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \\ &= \tan^2 \theta + (1 - \tan^2 \theta) = 1 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} 28 \quad &\cdot (1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^4 \theta) \\ &= \cos^2 \theta(1 - \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \\ &= (1 - \tan^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 1 - \boxed{\tan^2 \theta} \\ &\cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta - \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}\right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}\right) \\ &= \tan^2 \theta(1 - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta \times \boxed{\tan^2 \theta} \\ \therefore \text{ㄱ) } \tan^2 \theta \quad \text{ㄴ) } \tan^2 \theta \end{aligned}$$

29 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이면 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 4 \tan \theta - 5 \cos \theta = 4 \times \frac{3}{4} - 5 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 7$$

$$\begin{aligned} 30 \quad \frac{1}{1-\cos \theta} + \frac{1}{1+\cos \theta} &= \frac{1+\cos \theta + 1-\cos \theta}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)} \\ &= \frac{2}{1-\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\sin^2 \theta} = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{또 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\therefore \sin \theta \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} 31 \quad \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}} \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \\ &= \sin \theta = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\text{또 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

$$\begin{aligned} 32 \quad \frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan \theta - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \sin \theta}{\frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta}} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta(1-\cos \theta)} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1+\cos \theta)}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1+\cos \theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \theta = 2$$

이때 $\sin \theta \cos \theta > 0$ 이고 $\tan \theta > 0$ 이므로 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

삼각함수의 정의에 의해

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{또는 } \sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{이므로 } \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = \frac{1}{\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

33 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta} &= \frac{3(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{3 \times \frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

34 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이면 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} \times \left\{ 1 + \left(-\frac{3}{8} \right) \right\} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \end{aligned}$$

35 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{1}{25} \\ 1 - 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{25} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{12}{25} = \frac{49}{25} \end{aligned}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이면 $\sin \theta + \cos \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= \frac{7}{5} \\ \therefore \sin^6 \theta - \cos^6 \theta &= (\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &\quad \times (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{7}{5} \times \left(1 - \frac{12}{25} \right) \times \left(-\frac{1}{5} \right) \times \left(1 + \frac{12}{25} \right) \\ &= \frac{7}{5} \times \frac{13}{25} \times \left(-\frac{1}{5} \right) \times \frac{37}{25} \\ &= -\frac{7 \times 13 \times 37}{5^6} \\ \therefore p + q + r &= 7 + 13 + 37 = 57 \end{aligned}$$

36 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin^2 \theta}$, $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ 이

므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \right)^2} = 9 \end{aligned}$$

이므로 $-a = 9 \quad \therefore a = -9$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 9$$

이므로 $b = 9$

$$\therefore b - a = 9 - (-9) = 18$$

37 이차방정식 $5x^2 - 7x + \frac{k}{5} = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 이므로

근과 계수의 관계에 의해

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{25}$$

이때 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ 이므로

$$\left(\frac{7}{5} \right)^2 = 1 + 2 \times \frac{k}{25}, \quad \frac{24}{25} = \frac{2k}{25}$$

$$\therefore k = 12$$

38 이차방정식 $2x^2 - x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 이므로
근과 계수의 관계에 의해

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{a}{2}$$

이때 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1 + 2 \times \frac{a}{2} \quad \therefore a = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $2x^2 + bx + 2 = 0$ 의 두 근이 $\tan \theta$, $\frac{1}{\tan \theta}$ 이므로
근과 계수의 관계에 의해

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{b}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{b}$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } -\frac{2}{b} = -\frac{3}{8} \quad \therefore b = \frac{16}{3}$$

$$\therefore 12(a+b) = 12 \left(-\frac{3}{4} + \frac{16}{3} \right) = 55$$

02 삼각함수의 그래프

기초 문제 Training

p.43

1 (1) 주기: 2π , 치역: $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$

(2) 주기: π , 치역: $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$

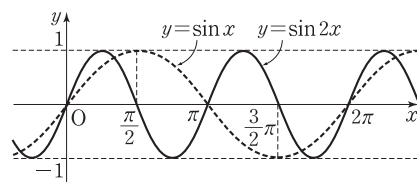
(3) 주기: 2π , 치역: $\left\{ y \mid -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3} \right\}$

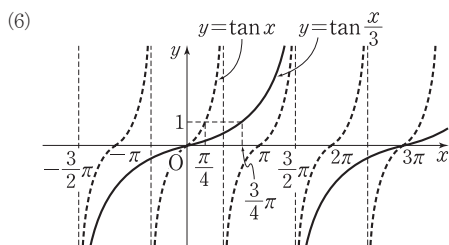
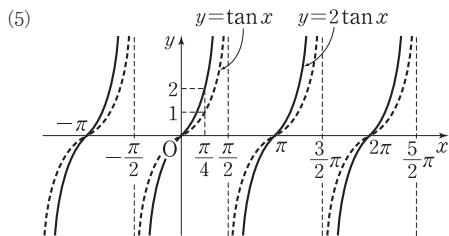
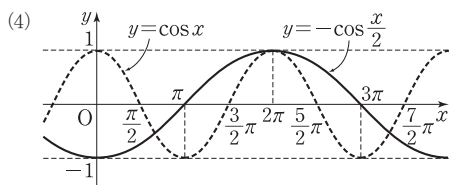
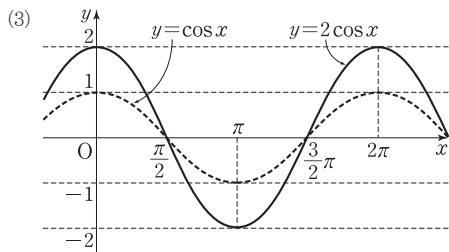
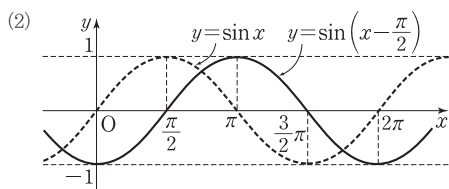
(4) 주기: 4π , 치역: $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

2 (1) 주기: π , 점근선의 방정식: $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

(2) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식: $x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

3 (1)





- 4 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (6) $-\sqrt{3}$ (7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (8) $-\frac{1}{2}$ (9) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (10) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- 5 (1) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$
 (2) $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$
 (3) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

- 6 (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi \leq x < 2\pi$
 (2) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$
 (3) $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$

- | | | | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------|-------|----------------------|---------------------|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 10 | 4 ④ | 5 2π | 6 ㄱ, ㄴ |
| 7 ⑤ | 8 20 | 9 $\frac{3}{2}$ | 10 4 | 11 $\frac{10}{3}\pi$ | 12 $-\frac{\pi}{2}$ |
| 13 ④ | 14 ② | 15 ④ | 16 1 | 17 ① | 18 ② |
| 19 ⑤ | 20 ① | 21 0 | 22 ④ | 23 ③ | 24 3 |
| 25 ② | 26 ④ | 27 ③ | 28 ⑤ | 29 ② | 30 ① |
| 31 $\frac{5}{6}\pi$ | 32 ④ | 33 ③ | 34 10 | 35 ④ | 36 ② |
| 37 ③ | 38 ④ | 39 ② | 40 ⑤ | 41 $\frac{\pi}{6}$ | 42 $-\frac{1}{2}$ |
| 43 ⑤ | 44 $\frac{3}{2}\pi$ | 45 ⑤ | 46 ③ | 47 ③ | 48 ④ |
| 49 ③ | 50 ⑤ | | | | |

1 보기의 함수의 주기를 각각 구하면

$$\text{ㄱ. } \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \quad \text{ㄴ. } \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{ㄷ. } \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\pi \quad \text{ㄹ. } \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 주기가 같은 함수는 ㄱ - ㄹ, ㄴ - ㄷ이다.

2 ㄱ. $y = -\cos 2x + 1$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\text{ㄴ. } y = \cos(2x + \pi) - 1 = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \text{의 그래프는}$$

$y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y = 2\cos 2x + 3$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 후 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\text{ㄹ. } y = \cos(2x - 5\pi) = \cos 2\left(x - \frac{5}{2}\pi\right) \text{의 그래프는}$$

$y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{2}\pi$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

3 $f(x) = -4\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ 에서

$$a\pi = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \text{이므로 } a = 4$$

$$b = 4 + 3 = 7$$

$$c = -4 + 3 = -1$$

$$\therefore a + b + c = 4 + 7 + (-1) = 10$$

4 ① 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ 이다.

② 최댓값은 $3+2=5$ 이다.

③ 최솟값은 $-3+2=-1$ 이다.

④, ⑤ $f(x)=-3\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)+2=-3\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$

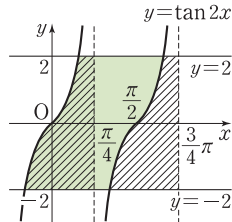
이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=-3\cos\frac{1}{2}x$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평

행이동한 것이다. 따라서 직선 $x=-\frac{\pi}{3}$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

- 5 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는 가로 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 세로의 길이가 4인 직사각형의 넓이와 같다.



$\therefore \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$

- 6 ㄱ. $f(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

ㄴ. 점근선의 방정식은

$$2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

ㄷ. $f(x)=3\tan(2x-\pi)-4=3\tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-4$ 이므로

로 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=3\tan 2x$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이

동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 7 $f(x)=a\sin(bx+\pi)+c$ 의 최솟값이 -1 , 최댓값이 5 이고 $a>0$ 이므로

$$a+c=5, -a+c=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, c=2$

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고, $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$$

$$\therefore abc=3 \times 4 \times 2=24$$

- 8 ㄷ에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 3π 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=3\pi \quad \therefore b=\frac{2}{3}$$

ㄹ에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+c=1$ 이므로

$$\frac{1}{2}a+c=1$$

$$\therefore a+2c=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

ㄴ에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4 이고 $a>0$ 이므로

$$a+c=4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a=6, c=-2$

$$\therefore a+3b-6c=6+3 \times \frac{2}{3}-6 \times (-2)=20$$

- 9 $y=2\tan(ax-\pi)+1$ 의 주기가 3π 이고 $a>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a}=3\pi \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\tan\left(\frac{1}{3}x-\pi\right)+1$ 이므로

점근선의 방정식은

$$\frac{1}{3}x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore x=3n\pi+\frac{9}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4<b<5 \text{이므로 } b=\frac{9}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{3} \times \frac{9}{2}=\frac{3}{2}$$

- 10 $y=a\sin b\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+c$ 의 최댓값이 3 , 최솟값이 -1 이고

$a>0$ 이므로

$$a+c=3, -a+c=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, c=1$

또 주기가 $\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b+c=2 \times 2 \times 1=4$$

- 11 $y=a\cos(bx-c)+d$ 의 최댓값이 4 , 최솟값이 0 이고

$a>0$ 이므로

$$a+d=4, -a+d=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=2$

또 주기가 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=2\pi \quad \therefore b=1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\cos(x-c)+2$ 이고,

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{6}\pi, 4\right)$ 를 지나므로

$$4=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)+2 \quad \therefore \cos\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)=1$$

$$0< c < \pi \text{이므로 } c=\frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore abcd=2 \times 1 \times \frac{5}{6}\pi \times 2=\frac{10}{3}\pi$$

- 12 $y = \tan(ax+b) + c$ 의 주기가 $\frac{7}{8}\pi - \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}$ 이고 $a > 0$

이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

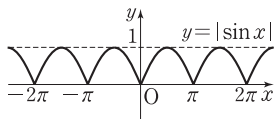
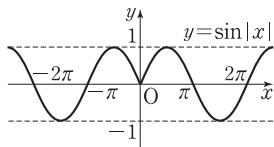
따라서 주어진 그래프는 $y = \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

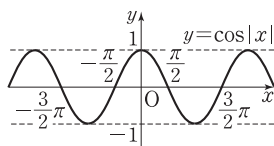
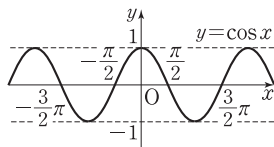
$$\therefore b = -\frac{\pi}{4}, c = 1$$

$$\therefore abc = 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \times 1 = -\frac{\pi}{2}$$

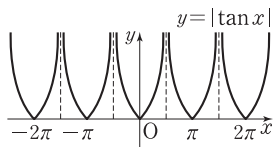
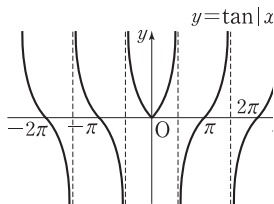
- 13 ㄱ. $y = \sin |x|$ 와 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



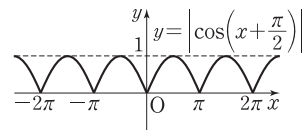
ㄴ. $y = \cos x$ 와 $y = \cos |x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄷ. $y = \tan |x|$ 와 $y = |\tan x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

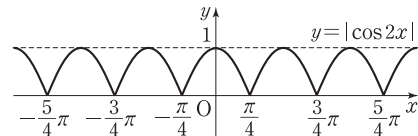


ㄹ. $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$ 의 그래프는 다음과 같다.

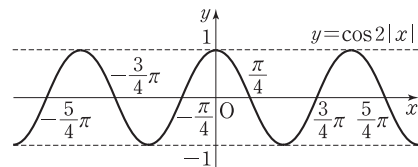


따라서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

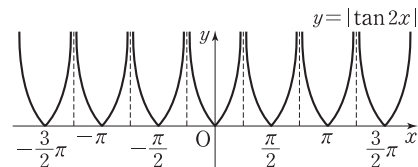
- 14 ㄱ. $y = |\cos 2x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



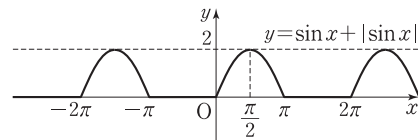
ㄴ. $y = \cos 2|x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 π 이다.



ㄷ. $y = |\tan 2x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

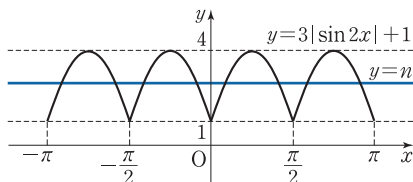


ㄹ. $y = \sin x + |\sin x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 2π 이다.



따라서 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

- 15 $y = 3|\sin 2x| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$a_1=5, a_2=8, a_3=8, a_4=4$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 8 + 8 + 4 = 25$$

$$\begin{aligned}
16 \quad \cos \frac{7}{6}\pi &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) &= -\tan \frac{4}{3}\pi = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \\
\sin \frac{11}{6}\pi &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\
\tan \frac{5}{4}\pi &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\
\therefore \cos \frac{7}{6}\pi \tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) + \sin \frac{11}{6}\pi \tan \frac{5}{4}\pi \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17 \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
&= -(-\sin \theta) = \sin \theta \\
\therefore \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sin(\pi + \theta)} &\times \frac{\cos(\pi - \theta)}{1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} \\
&= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \times \frac{-\cos \theta}{1 + \sin \theta} \\
&= \frac{-\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{-\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18 \quad \tan\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
&= -\frac{1}{\tan \theta} \\
\text{이므로} \\
\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin(\pi + \theta)} &\times \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\theta - \pi)} \times \frac{\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)}{\tan(\pi - \theta)} \\
&= \frac{-\cos \theta}{-\sin \theta} \times \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \times \frac{-\frac{1}{\tan \theta}}{-\tan \theta} = -\frac{1}{\tan^2 \theta} \\
\text{이때 } \theta &= \frac{2}{3}\pi \text{ 이므로} \\
\tan \theta &= \tan \frac{2}{3}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \\
\therefore -\frac{1}{\tan^2 \theta} &= -\frac{1}{(-\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
19 \quad \sin(90^\circ - \theta) &= \cos \theta \text{ 이므로} \\
A &= \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cdots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ \\
&= (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) \\
&\quad + (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ) \\
&\quad + \sin^2 90^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\
&\quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\
&\quad + \sin^2 90^\circ
\end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
B &= (\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) \\
&\quad + (\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ) + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ) \\
&\quad + \cos^2 90^\circ \\
&= (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) \\
&\quad + (\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ) + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) \\
&\quad + \cos^2 90^\circ
\end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
C &= (\tan^2 10^\circ \times \tan^2 80^\circ) \times (\tan^2 20^\circ \times \tan^2 70^\circ) \\
&\quad \times (\tan^2 30^\circ \times \tan^2 60^\circ) \times (\tan^2 40^\circ \times \tan^2 50^\circ) \\
&= \left(\tan^2 10^\circ \times \frac{1}{\tan^2 10^\circ}\right) \times \left(\tan^2 20^\circ \times \frac{1}{\tan^2 20^\circ}\right) \\
&\quad \times \left(\tan^2 30^\circ \times \frac{1}{\tan^2 30^\circ}\right) \times \left(\tan^2 40^\circ \times \frac{1}{\tan^2 40^\circ}\right) \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\therefore C < B < A$$

$$20 \quad A + B + C = \pi \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. (우변)} &= \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A \text{ 이므로} \\ \sin A &= \sin(B + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄴ. (우변)} &= \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2} \text{ 이므로} \\
\cos \frac{A}{2} &\neq \sin \frac{B+C}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄷ. (좌변)} &= \tan A \tan(B + C) = \tan A \tan(\pi - A) \\
&= \tan A \times (-\tan A) = -\tan^2 A \\
\text{이므로 } \tan A \tan(B + C) &\neq 1
\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

$$21 \quad 5\theta = \pi \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta + \cos 4\theta = \cos \theta + \cos(\pi - \theta) = \cos \theta - \cos \theta = 0$$

$$\text{같은 방법으로 } \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$$

$$\text{또, } 15\theta = 3\pi \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
\cos 6\theta + \cos 9\theta &= \cos 6\theta + \cos(3\pi - 6\theta) \\
&= \cos 6\theta + \cos(\pi - 6\theta) \\
&= \cos 6\theta - \cos 6\theta = 0
\end{aligned}$$

$$\text{같은 방법으로 } \cos 7\theta + \cos 8\theta = 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 10\theta \\
&= \cos 5\theta + \cos 10\theta = \cos \pi + \cos 2\pi \\
&= -1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

22 $\sin x = t$ 라 하면 $y = \left| t - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2}$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 2, $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{1}{2}$

이므로 $M = 2, m = \frac{1}{2}$

$\therefore M + m = \frac{5}{2}$

23 $\cos x = t$ 라 하면 $y = a|2t + 1| + b$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

$a > 0$ 이므로 $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 b , $t = 1$ 일 때 최댓값은 $3a + b$ 이다.

$\therefore b = -1, 3a + b = 5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a = 2, b = -1$

$\therefore a + b = 1$

24 $\tan x = t$ 라 하면 $y = -|t - 1| + k$

이때 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 k , $t = -1$ 일 때 최솟값은 $-2 + k$ 이고, 최댓값과 최솟값의 합이 4이므로

$k + (-2 + k) = 4 \quad \therefore k = 3$

25 $\sin x = t$ 라 하면 $y = \frac{1}{t - 2} + 1$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 $\frac{2}{3}$, $t = 1$ 일 때 최솟값은 0

이므로 $M = \frac{2}{3}, m = 0$

$\therefore M + m = \frac{2}{3}$

26 $\cos x = t$ 라 하면 $y = \frac{t - 5}{t + 3} = -\frac{8}{t + 3} + 1$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 -1 , $t = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y | -3 \leq y \leq -1\} \quad \therefore m = -3, n = -1$

$\therefore mn = 3$

27 $|\tan x| = t$ 라 하면

$y = -\frac{t + a}{t - 2} = -\frac{2 + a}{t - 2} - 1$

이때 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq \tan x \leq 1$ 이므로 $0 \leq t \leq 1$

$a > -2$ 이므로 $a + 2 > 0$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 $a + 1$ 이므로

$a + 1 = 2 \quad \therefore a = 1$

28 $y = \sin^2 x - 3\cos^2 x - 4\sin x$
 $= \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 4\sin x$
 $= 4\sin^2 x - 4\sin x - 3$

$\sin x = t$ 라 하면

$y = 4t^2 - 4t - 3 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 4$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 5, $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 -4

이므로 $M = 5, m = -4$

$\therefore M - m = 5 - (-4) = 9$

29 $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(\pi - x) + a$
 $= \sin^2 x + 4\cos x + a$
 $= 1 - \cos^2 x + 4\cos x + a$
 $= -\cos^2 x + 4\cos x + a + 1$

$\cos x = t$ 라 하면

$y = -t^2 + 4t + a + 1 = -(t - 2)^2 + a + 5$

이때 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 $a + 4$ 이므로

$a + 4 = 3 \quad \therefore a = -1$

30 $y = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 3$
 $= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} + 2\tan x + 3$
 $= \tan^2 x + 2\tan x + 4$

$\tan x = t$ 라 하면

$y = t^2 + 2t + 4 = (t + 1)^2 + 3$

이때 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $-1 \leq \tan x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $t = -1$, 즉 $x = -\frac{\pi}{4}$ 일 때 최솟값은 3이므로

$\alpha = -\frac{\pi}{4}, \beta = 3 \quad \therefore \alpha\beta = -\frac{3}{4}\pi$

31 $2\cos 2x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x = t$ 라 하면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq t < 2\pi$ 이고, 주어진 방정

식은 $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

함수 $y=\cos t$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표가

$$\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi \text{이므로}$$

$$2x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x=\frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x=\frac{11}{12}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha=\frac{\pi}{12}, \beta=\frac{11}{12}\pi \text{이므로}$$

$$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi$$

32 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 에서 $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}=t \text{라 하면 } 0 < x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} < t < \frac{2}{3}\pi \text{이고,}$$

$$\text{주어진 방정식은 } \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

함수 $y=\sin t$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 t 좌표가

$$\frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4} \quad \therefore x=\frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \sin 4\alpha = \sin \frac{14}{3}\pi = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

33 $2x+\frac{\pi}{4}=t$ 라 하면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{17}{4}\pi$ 이고,

$$\text{주어진 방정식은 } \cos t = \sin t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\cos t = \sin t$ 에서 $\cos t = 0$ 인 경우 $\sin t \neq 0$ 이므로

$$\cos t \neq 0$$

①의 양변을 $\cos t$ 로 나누면

$$1 = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \therefore \tan t = 1$$

함수 $y=\tan t$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 t 좌표가

$$\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi \text{이므로}$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{9}{4}\pi \text{ 또는 } 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{13}{4}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi$$

$$\text{따라서 모든 근의 합은 } \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

34 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ 에서 $\cos x = 0$ 인 경우 $\sin x \neq 0$ 이므로

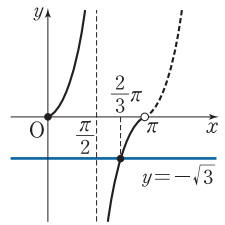
$$\sin x + \sqrt{3}\cos x \neq 0 \quad \therefore \cos x \neq 0$$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ 의 양변을 $\cos x$ 로 나누어 정리하면

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3} \quad \therefore \tan x = -\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\tan x = -\sqrt{3}$ 의 근이 한 개 존재하므로 $0 \leq x < 10\pi$ 에서 $\tan x = -\sqrt{3}$ 의 근은 모두 10개 존재한다.

따라서 주어진 방정식을 만족하는 실수 x 는 10개이다.



35 $\cos^2 x - \sin x - \sin^2 x = 0$ 에서

$$(1 - \sin^2 x) - \sin x - \sin^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

(i) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = -1$ 의 해는 함수

$y=\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=-1$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = \frac{3}{2}\pi$$

(ii) $0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y=\sin x$

의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

(i), (ii)에 의해 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

36 $3\sin^2 \frac{A}{2} - 5\cos \frac{A}{2} = 1$ 에서

$$3\left(1 - \cos^2 \frac{A}{2}\right) - 5\cos \frac{A}{2} = 1$$

$$3\cos^2 \frac{A}{2} + 5\cos \frac{A}{2} - 2 = 0$$

$$\cos \frac{A}{2} = t \text{라 하면 } -1 < \cos \frac{A}{2} < 1 \text{이므로 } -1 < t < 1 \text{이}$$

고, 주어진 방정식은 $3t^2 + 5t - 2 = 0$

$$(t+2)(3t-1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3} (\because -1 < t < 1)$$

따라서 $\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$ 이고, $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi-A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

37 $4=4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$ 라 하면 주어진 방정식은

$$10\sin^2 \theta - 5\sin \theta \cos \theta - 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0$$

$$6\sin^2 \theta - 5\sin \theta \cos \theta - 4\cos^2 \theta = 0$$

θ 는 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta \neq 0$

양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\frac{6\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{5\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{4\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 0$$

$$6\tan^2 \theta - 5\tan \theta - 4 = 0$$

$$(2\tan \theta + 1)(3\tan \theta - 4) = 0$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{4}{3} \quad (\because \theta \text{는 제3사분면의 각})$$

따라서 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

38 $2\cos x - a + 1 = 0$ 에서 $2\cos x + 1 = a$

이 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = 2\cos x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 교점을 가져야 한다.

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

$$\therefore -1 \leq 2\cos x + 1 \leq 3$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-1 \leq a \leq 3$$

39 $\sin^2 x + \cos x + a = 0$ 에서 $\sin^2 x + \cos x = -a$

이 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = \sin^2 x + \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -a$ 가 교점을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x + \cos x = (1 - \cos^2 x) + \cos x \\ &= -\cos^2 x + \cos x + 1 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 라 하면 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

$$y = -t^2 + t + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

이므로 $y = \sin^2 x + \cos x$ 의 최솟값은 -1 , 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $-1 \leq -a \leq \frac{5}{4}$, 즉 $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$ 이므로

$$M = 1, m = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore M + m = -\frac{1}{4}$$

40 $(a+1)\tan x - 2a + 5 = 0$ 에서

$$a(\tan x - 2) + \tan x + 5 = 0$$

이때 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 이므로 $-1 \leq \tan x \leq 1$, 즉 $\tan x \neq 2$

이므로

$$a = \frac{-\tan x - 5}{\tan x - 2}$$

이 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = \frac{-\tan x - 5}{\tan x - 2}$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 교점을 가져야 한다.

$\tan x = t$ 라 하면 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

$$y = \frac{-t-5}{t-2} = -\frac{7}{t-2} - 1$$

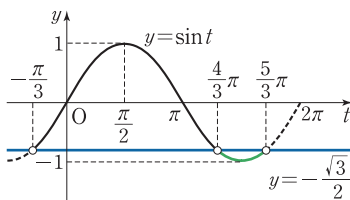
이므로 $y = \frac{-\tan x - 5}{\tan x - 2}$ 의 최솟값은 $\frac{4}{3}$, 최댓값은 6이다.

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는 $\frac{4}{3} \leq a \leq 6$ 이므로 구하는 정수 a 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

41 $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} < 0$ 에서 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x - \frac{\pi}{3} = t$ 라 하면 $0 < x < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{5}{3}\pi$ 이고,

주어진 부등식은 $\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



위의 그림에서 부등식 $\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 $\frac{4}{3}\pi < t < \frac{5}{3}\pi$

이므로

$$\frac{4}{3}\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \quad \therefore \frac{5}{6}\pi < x < \pi$$

따라서 $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, $\beta = \pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$

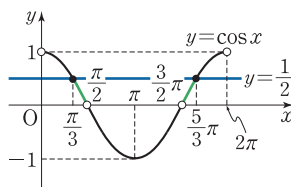
42 $\log_2(\cos x) + 1 \leq 0$ 에서 $0 < \cos x \leq \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식

$0 < \cos x \leq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{5}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ 이

$$\text{므로 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

43 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$$

$$\tan A - \tan(B + C) + 2 \leq 0 \text{에서}$$

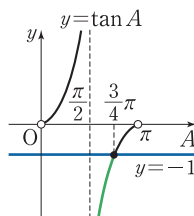
$$2\tan A + 2 \leq 0 \quad \therefore \tan A \leq -1$$

오른쪽 그림에서 부등식

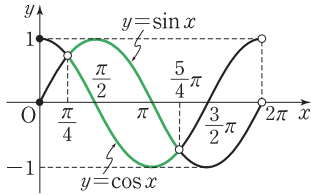
$\tan A \leq -1$ 의 해는

$$\frac{\pi}{2} < A \leq \frac{3}{4}\pi$$

따라서 A 의 최댓값은 $\frac{3}{4}\pi$ 이다.



44 $\sin x - \cos x > 0$ 에서 $\sin x > \cos x$



위의 그림에서 부등식 $\sin x > \cos x$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{5\pi}{4}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$$

45 $2\cos^2 x - 3\sin x \leq 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x \leq 0, 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \geq 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) \geq 0$$

이때 $\sin x + 2 > 0$ 이므로 $2\sin x - 1 \geq 0$

$$\therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식

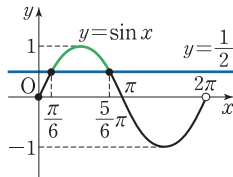
$\sin x \geq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \sin(\beta - \alpha) = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



46 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x > 0$ 이므로 주어진 식의 양변을

$\cos^2 x$ 로 나누면

$$\sqrt{3}\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x + 1 \leq 0$$

$$(\sqrt{3}\tan x - 1)(\tan x - 1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq 1$$

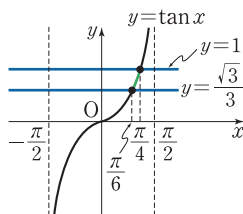
오른쪽 그림에서 부등식

$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq 1$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{5}{12}\pi$$



47 $\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$ 이므로

$$2\sin \alpha > \frac{3}{\tan \alpha}$$

$\sin \alpha > 0$ 이므로 양변에 $\sin \alpha$ 를 곱하면

$$2\sin^2 \alpha > 3\cos \alpha$$

$$2(1 - \cos^2 \alpha) > 3\cos \alpha, 2\cos^2 \alpha + 3\cos \alpha - 2 < 0$$

$$(2\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 2) < 0$$

$$\cos \alpha + 2 > 0 \text{이므로 } 2\cos \alpha - 1 < 0$$

$$\therefore \cos \alpha < \frac{1}{2}$$

이때 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로 α 의 값의 범위는 $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ 를 대입하면 $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$, 즉 $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$

따라서 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = 0$, $\theta_4 = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{6} = 0$$

48 이차방정식 $x^2 - 2x\cos \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \cos^2 \theta - (\cos \theta + \sin^2 \theta) = 0$$

$$\cos^2 \theta - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta - \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 0$$

$$2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$$

$$(2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta = 1$$

이때 $0 < \theta < 2\pi$ 이므로 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = \frac{4}{3}\pi$

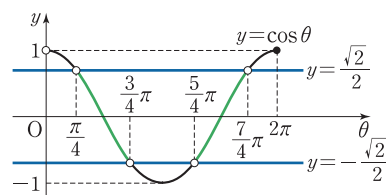
따라서 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{4}{3}\pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$

49 이차방정식 $x^2 + 2x\sin \theta + \cos^2 \theta = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta > 0$$

$$(1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta > 0, \cos^2 \theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



위의 그림에서 θ 의 값의 범위는

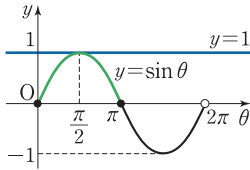
$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$$

따라서 조건을 만족하지 않는 θ 의 값은 ③이다.

- 50 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 방정식 $x^2 - 2x \sin \theta + \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - \sin \theta \leq 0$$

$$\sin \theta (\sin \theta - 1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq \sin \theta \leq 1$$



위의 그림에서 θ 의 값의 범위는 $0 \leq \theta \leq \pi$

따라서 $\alpha = 0, \beta = \pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \pi$$

03 사인법칙과 코사인법칙

기초 문제 Training

p.52

- 1 (1) $\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $8\sqrt{3}$
- 2 (1) 30° (2) 45° 또는 135° (3) 60° 또는 120°
- 3 (1) 4 (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- 4 (1) $\sqrt{39}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $3\sqrt{7}$
- 5 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$
- 6 (1) 15 (2) $5\sqrt{3}$ (3) 6
- 7 (1) 6 (2) $48\sqrt{3}$
- 8 (1) $12\sqrt{2}$ (2) $\frac{45}{4}$

핵심 유형 Training

p.53~58

- | | | | | | |
|---------|-------|-------------------------|---------------------------------|-------------------------|------|
| 1 ③ | 2 ⑤ | 3 ④ | 4 ② | 5 ② | 6 ⑤ |
| 7 ② | 8 ① | 9 ⑤ | 10 ④ | 11 $30\sqrt{3}\text{m}$ | |
| 12 20cm | | 13 $10\sqrt{6}\text{m}$ | 14 $\sqrt{19}$ | 15 ③ | |
| 16 ① | 17 17 | 18 ④ | 19 ③ | 20 ③ | 21 ② |
| 22 ④ | 23 ④ | 24 $40\sqrt{7}\text{m}$ | 25 $\frac{169}{3}\pi\text{m}^2$ | | |
| 26 10km | 27 ④ | 28 ⑤ | 29 ③ | 30 ④ | |
| 31 ③ | 32 ② | 33 4 | 34 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ | 35 $14\sqrt{3}$ | |
| 36 18 | 37 ③ | 38 ③ | 39 ② | | |

- 1 $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$b \sin 45^\circ = 2\sqrt{6} \sin 60^\circ \quad \therefore b = 6$$
- 2 $C = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$ 이므로 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{12}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \therefore R = 6 \times 2 = 12$$
 따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 넓이는 $\pi \times 12^2 = 144\pi$
- 3 $A + B + C = 180^\circ$ 이고 $A : B : C = 2 : 3 : 7$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{2}{12} = 30^\circ, B = 180^\circ \times \frac{3}{12} = 45^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{7}{12} = 105^\circ$$
 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}$

$$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$$
- 4 $A + C = 180^\circ$ 이므로 원에 내접하는 사각형의 성질에 의해 사각형 $ABCD$ 는 원에 내접한다.
삼각형 ACD 의 외접원의 지름의 길이가 20이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 135^\circ} = 20 \quad \therefore \overline{AC} = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$
- 5 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해 $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$ 이므로

$$a + b + c = 2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C$$

$$= 2R (\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 2 \times 5 \times \frac{3}{2} = 15$$

6 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 7$ 이므로

$$a : b : c = 4 : 5 : 7$$

$a = 4k, b = 5k, c = 7k$ ($k > 0$)라 하면

$$\frac{a^2 + c^2}{ab} = \frac{(4k)^2 + (7k)^2}{4k \times 5k} = \frac{65k^2}{20k^2} = \frac{13}{4}$$

7 $A + B + C = 180^\circ$ 이고 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 1 : 4 : 1$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{4}{6} = 120^\circ, B = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = \sin 120^\circ : \sin 30^\circ : \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

따라서 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{3} : 1 : 1$ 이므로

$a = \sqrt{3}k, b = k, c = k$ ($k > 0$)라 하면

$$\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^4 + b^4 + c^4} = \frac{3k^4 + k^4 + 3k^4}{9k^4 + k^4 + k^4} = \frac{7}{11}$$

8 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$a \sin A = b \sin B \text{에서 } a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R}$$

$$a^2 = b^2 \quad \therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$b^2 \sin C = c^2 \sin B \text{에서 } b^2 \times \frac{c}{2R} = c^2 \times \frac{b}{2R}$$

$$\therefore b = c \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 의해 $a = b = c$

따라서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

9 $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \cos^2 B = 1 - \sin^2 B$ 이므로

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C = 2 \text{에서}$$

$$(1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) + \sin^2 C = 2$$

$$\therefore \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\textcircled{9}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

10 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 B - (\sin A + \sin C)(\sin A - \sin C)$$

$$= \sin^2 B - (\sin^2 A - \sin^2 C) = 0$$

$$\therefore \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\textcircled{10}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 \quad \therefore b^2 + c^2 = a^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

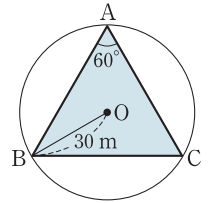
11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 그으면

외접원의 반지름의 길이가 30 m이

므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 60$$

$$\therefore \overline{BC} = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}(\text{m})$$



12 두 개의 삼각자의 가장 짧은 변을 서로 맞댄 도형은 세 내각의 크기가 각각 $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ 이고, 가장 긴 변의 길이가 $10\sqrt{3}\text{cm}$ 인 이등변삼각형이다.

이 삼각형이 내접하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{10\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\therefore 2R = 10\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 20(\text{cm})$$

따라서 구하는 원의 지름의 길이는 20 cm이다.

13 $\triangle ABQ$ 에서 $\angle AQB = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 60^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ}$$

$$\overline{BQ} \sin 45^\circ = 20 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{BQ} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{6}(\text{m})$$

이때 $\triangle PBQ$ 에서 $\overline{PQ} = \overline{BQ}$ 이므로

$$\overline{PQ} = 10\sqrt{6}\text{m}$$

14 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ = 19$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{19} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

15 코사인법칙에 의해

$$a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60^\circ = 21$$

$$\therefore a = \sqrt{21} \quad (\because a > 0)$$

이때 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{21}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$$

16 코사인법칙에 의해

$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (\sqrt{3}+1) \times \cos 45^\circ = 4$$

$$\therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

사인법칙에 의해

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}, \quad 2 \sin A = \sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$ 또는 $A = 150^\circ$

그런데 $A = 150^\circ$ 이면 $A + B > 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ$$

17 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos(\angle ABC) = 24$$

$$\text{또, } \cos(\angle BAD) = -\cos(\angle ABC) = -\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos(\angle BAD) = 44$$

$$\therefore \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2)$$

$$= \frac{1}{4}(24 + 44) = 17$$

18 $\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{7}$ 에서

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$$

$a = 3k, b = 5k, c = 7k \quad (k > 0)$ 라 하면 코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

19 $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ 에서

$$(a+b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 60^\circ$

20 $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 15 : 21 : 20$ 이므로

$$a+b = 15k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b+c = 21k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c+a = 20k \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$(k > 0)$ 라 하고, $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 을 하면 $2(a+b+c) = 56k$

$$\therefore a+b+c = 28k \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} - \textcircled{1}, \textcircled{4} - \textcircled{2}, \textcircled{4} - \textcircled{3}$ 을 하면

$$a = 7k, \quad b = 8k, \quad c = 13k$$

따라서 삼각형의 가장 긴 변의 대각인 C 의 크기가 가장 크다.

코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{(7k)^2 + (8k)^2 - (13k)^2}{2 \times 7k \times 8k} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

21 코사인법칙에 의해

$$b = 2a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$a^2 = c^2 \quad \therefore a = c$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

22 $\frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{a^2}{b^2}$ 에서 $a^2 \cos A \sin B = b^2 \sin A \cos B$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의해

$$a^2 \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R} = b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 - b^4$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a = b$ 인 이등변삼각형 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

23 코사인법칙에 의해

$$a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = b \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

양변에 $2abc$ 를 곱하여 정리하면

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = b^2(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$a^4 - 2a^2c^2 + c^4 - b^4 = 0$$

$$(a^2 - c^2)^2 - (b^2)^2 = 0$$

$$(a^2 - c^2 - b^2)(a^2 - c^2 + b^2) = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A = 90^\circ$ 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- 24 $\triangle APQ$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{PQ}^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \times 120 \times 80 \times \cos 60^\circ = 11200$$

$$\therefore \overline{PQ} = 40\sqrt{7} \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

따라서 두 나무 P, Q 사이의 거리는 $40\sqrt{7}\text{m}$ 이다.

- 25 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos A = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \times 8 \times 7} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{13}{\sin 120^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{13}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

따라서 물웅덩이의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{169}{3} \pi (\text{m}^2)$$

- 26 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos B = \frac{12^2 + 18^2 - 15^2}{2 \times 12 \times 18} = \frac{9}{16}$$

새로 건설하는 도로의 길이를 $x\text{km}$ 라 하면 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$x^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \times 12 \times 8 \times \cos B = 100$$

$$\therefore x = 10 \quad (\because x > 0)$$

따라서 새로 건설하는 도로의 길이는 10km 이다.

- 27 $\triangle ABC$ 의 넓이가 $15\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin A = 15\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $A > 90^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

코사인법칙에 의해

$$a^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ = 196$$

$$\therefore a = 14 \quad (\because a > 0)$$

- 28 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 원의 둘레의 길이가 12π 이므로

$$2\pi R = 12\pi \quad \therefore R = 6$$

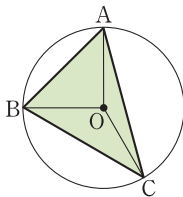
한편, 원의 중심을 O 라 하면 원의

둘레가 $3:4:5$ 로 나누어졌으므로

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$



$$\therefore \triangle ABC$$

$$= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 120^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 150^\circ$$

$$= 18 + 9\sqrt{3} + 9 = 9(3 + \sqrt{3})$$

- 29 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$

한편, $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ 이고

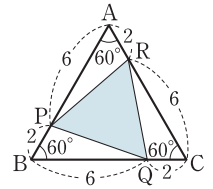
$$\triangle APR = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin 60^\circ$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle PQR$$

$$= \triangle ABC - 3\triangle APR$$

$$= 16\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$



- 30 코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \times 8 \times 10} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$$

- 31 코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

이때 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2} (5 + 7 + 8) r = 10\sqrt{3} \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

- 32 $a = 3k, b = 5k, c = 7k (k > 0)$ 라 하면

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3k \times 5k \times \sin 120^\circ = \frac{15k^2}{4} \sqrt{3}$$

삼각형의 넓이가 $135\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{15k^2}{4} \sqrt{3} = 135\sqrt{3} \quad \therefore k = 6 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore a = 18, b = 30, c = 42$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{42}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = 21 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 14\sqrt{3}$$

33 $\overline{BC} = x$ 라 하면 평행사변형 $ABCD$ 의 넓이가 16이므로

$$\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ = 4 \times x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2}$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 16$$

$$\therefore \overline{AC} = 4 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

34 $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$, $\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ 이고 사다리꼴

$ABCD$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (4+8) \times 4 = 24$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \theta = 24$$

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} \times \sin \theta = 24$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

35 $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ 라 하면 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ 에서 코사인 법칙에 의해

$$6^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$8^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$2xy = 28 \quad \therefore xy = 14$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x \times 2y \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= xy \times \sqrt{3}$$

$$= 14\sqrt{3}$$

36 두 대각선의 길이를 각각 a , b 라 하면 $a+b=12$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{에서 } 12 \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore ab \leq 36 \quad (\text{단, 등호는 } a=b=6 \text{일 때 성립})$$

한편, $\square ABCD$ 의 두 대각선이 이루는 각을 θ , 넓이를 S 라 하면 $ab \leq 36$ 이고 $\sin \theta \leq 1$ 이므로

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \leq \frac{1}{2} \times 36 \times 1 = 18$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이 S 는 $a=b=6$ 이고 $\theta=90^\circ$ 일 때, 최댓값 18을 갖는다.

37 $\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \cos 60^\circ = 75$$

$$\therefore \overline{BD} = 5\sqrt{3} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

38 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면

$$\triangle ABD \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos C = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{5}{7}$$

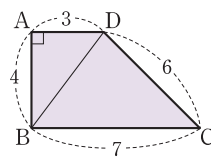
$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$= 6 + 6\sqrt{6} = 6(1 + \sqrt{6})$$



39 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos B$$

$$= 8 - 8 \cos B \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos D$$

$$= 52 - 48 \cos(\pi - B)$$

$$= 52 + 48 \cos B \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} = \textcircled{B} \text{이므로}$$

$$8 - 8 \cos B = 52 + 48 \cos B$$

$$\therefore \cos B = -\frac{11}{14}$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

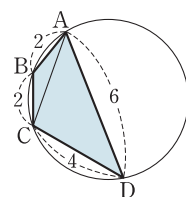
$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin B + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin(\pi - B)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= 5\sqrt{3}$$



III-1. 등차수열과 등비수열

01 등차수열

기초 문제 Training

p.60

1 (1) 11 (2) 1024 (3) $\frac{1}{7}$ (4) -9

2 (1) 2, 3, 4 (2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

3 (1) -2 (2) $\frac{1}{2}$

4 (1) 8 (2) 3

5 (1) $a_n = 3n - 2$ (2) $a_n = 5n - 8$
(3) $a_n = 4n - 2$ (4) $a_n = -3n - 2$

6 (1) $x = 5, y = 9$ (2) $x = -1, y = 1$

7 (1) 48 (2) 480 (3) 276 (4) $\frac{145}{3}$

핵심 유형 Training

p.61~66

1 ④	2 ④	3 ②	4 ③	5 ③	6 ⑤
7 ②	8 제18항	9 15	10 제25항		
11 ④	12 ②	13 ④	14 ①	15 ③	16 -6
17 6	18 10	19 ②	20 ③	21 ④	22 ①
23 2	24 35	25 3	26 ③	27 ②	28 290
29 ②	30 9	31 ③	32 ②	33 ③	34 630
35 6	36 75	37 20	38 ④	39 26	40 ④
41 ⑤					

1 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = (1+1)^2 - 1, a_2 = (2+1)^2 - 2, a_3 = (3+1)^2 - 3,$
 $a_4 = (4+1)^2 - 4, \dots$
 따라서 일반항 a_n 은 $a_n = (n+1)^2 - n = n^2 + n + 1$

2 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = \frac{1}{2 \times 1 - 1}, a_2 = \frac{1}{2 \times 2 - 1}, a_3 = \frac{1}{2 \times 3 - 1},$
 $a_4 = \frac{1}{2 \times 4 - 1}, \dots$
 따라서 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{1}{2n-1}$
 $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{101}, 2n-1=101 \therefore n=51$

3 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = 1 \times 2, a_2 = 2 \times 3, a_3 = 3 \times 4, a_4 = 4 \times 5, \dots$
 따라서 일반항 a_n 은 $a_n = n(n+1)$
 $\therefore a_{10} - a_9 = 10 \times 11 - 9 \times 10 = 20$

4 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2 = a + d = 7, a_{10} = a + 9d = 23$
 두 식을 연립하여 풀면 $a = 5, d = 2$
 따라서 첫째항이 5, 공차가 2인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 5 + (n-1) \times 2 = 2n + 3$
 $\therefore a_1 + a_{20} = 5 + 43 = 48$

5 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2 + a_8 = (a + d) + (a + 7d) = 16$
 $\therefore a + 4d = 8 \dots\dots \textcircled{A}$
 $a_3 = 2a_6$ 에서 $a + 2d = 2(a + 5d)$
 $\therefore a + 8d = 0 \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = 16, d = -2$
 따라서 첫째항이 16, 공차가 -2인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 16 + (n-1) \times (-2) = -2n + 18$
 $\therefore a_9 = -2 \times 9 + 18 = 0$

6 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_8 + a_{18} = (a + 7d) + (a + 17d) = 2a + 24d = 9$
 $\therefore a_7 + a_{11} + a_{15} + a_{19}$
 $= (a + 6d) + (a + 10d) + (a + 14d) + (a + 18d)$
 $= 4a + 48d = 2(2a + 24d) = 18$

7 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하고, 공차를 각각 d_1, d_2 라 하면
 $a_3 : b_3 = 4 : 5$ 에서
 $(a + 2d_1) : (a + 2d_2) = 4 : 5$
 $a + 10d_1 - 8d_2 = 0 \dots\dots \textcircled{A}$
 $a_5 : b_5 = 7 : 9$ 에서
 $(a + 4d_1) : (a + 4d_2) = 7 : 9$
 $a + 18d_1 - 14d_2 = 0 \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면 $-8d_1 + 6d_2 = 0 \therefore d_1 = \frac{3}{4}d_2$
 이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $a = \frac{1}{2}d_2$
 $\therefore a_7 : b_7 = (a + 6d_1) : (a + 6d_2)$
 $= \left(\frac{1}{2}d_2 + \frac{9}{2}d_2\right) : \left(\frac{1}{2}d_2 + 6d_2\right)$
 $= 5d_2 : \frac{13}{2}d_2$
 $= 10 : 13$

- 8 첫째항이 11, 공차가 $-\frac{2}{3}$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 11 + (n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}n + \frac{35}{3}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n = -\frac{2}{3}n + \frac{35}{3} < 0 \quad \therefore n > 17.5$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 18이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제18항이다.

- 9 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = -47, a_{10} = a + 9d = -19$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -55, d = 4$

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -55 + (n-1) \times 4 = 4n - 59$$

$$a_n = 4n - 59 > 0 \quad \therefore n > \frac{59}{4} = 14.75$$

따라서 n 은 자연수이므로 $a_n > 0$ 을 만족하는 n 의 최솟값은 15이다.

- 10 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_7 = 16 \text{에서 } a + 6d = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 : a_9 = 2 : 5 \text{에서}$$

$$(a + 2d) : (a + 8d) = 2 : 5, 2(a + 8d) = 5(a + 2d)$$

$$\therefore a - 2d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 4, d = 2$

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 + (n-1) \times 2 = 2n + 2$$

이때 제 n 항에서 처음으로 50보다 크게 된다고 하면

$$a_n = 2n + 2 > 50 \quad \therefore n > 24$$

따라서 처음으로 50보다 크게 되는 항은 제25항이다.

- 11 첫째항이 10, 공차가 $-\frac{1}{2}$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 10 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}n + \frac{21}{2}$$

첫째항이 -10, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 일반항 b_n 은

$$b_n = -10 + (n-1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n - \frac{31}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n - b_n\}$ 의 일반항은

$$-\frac{1}{2}n + \frac{21}{2} - \left(\frac{1}{3}n - \frac{31}{3}\right) = -\frac{5}{6}n + \frac{125}{6}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$-\frac{5}{6}n + \frac{125}{6} < 0 \quad \therefore n > 25$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제26항이다.

- 12 공차를 d 라 하면 첫째항이 8, 제7항이 20이므로

$$8 + 6d = 20 \quad \therefore d = 2$$

- 13 첫째항이 -10, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이

20이므로

$$-10 + (m+2-1) \times \frac{3}{4} = 20$$

$$\frac{3}{4}(m+1) = 30, m+1 = 40$$

$$\therefore m = 39$$

- 14 공차를 d 라 하면 첫째항이 1, 제 $(m+2)$ 항이 100이므로

$$1 + (m+2-1)d = 100$$

$$(m+1)d = 99 \quad \therefore d = \frac{99}{m+1}$$

이때 d 가 자연수가 되려면 $m+1$ 은 99의 약수가 되어야 하므로

$$m+1 = 3, 9, 11, 33, 99$$

$$\therefore d = 1, 3, 9, 11, 33$$

따라서 구하는 자연수 d 는 모두 5개이다.

- 15 $a^2 - 1$ 은 a 와 $a^2 + a + 1$ 의 등차중항이므로

$$a^2 - 1 = \frac{a + (a^2 + a + 1)}{2}$$

$$2(a^2 - 1) = a + a^2 + a + 1$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 a 는 양수이므로 $a = 3$

- 16 네 수 $1 - 2\sqrt{3}, a, 1, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{(1 - 2\sqrt{3}) + 1}{2} \quad \therefore a = 1 - \sqrt{3}$$

$$1 = \frac{a+b}{2} \text{에서 } 2 = (1 - \sqrt{3}) + b$$

$$\therefore b = 1 + \sqrt{3}$$

네 수 $5, c, 1, d$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c = \frac{5+1}{2} \quad \therefore c = 3$$

$$1 = \frac{c+d}{2} \text{에서 } 2 = 3 + d \quad \therefore d = -1$$

$$\therefore ab - c + d = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) - 3 + (-1) = -6$$

- 17 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 6$$

이때 p 는 α 와 β 의 등차중항이므로

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \therefore p = 3$$

또 q 는 $\frac{1}{\alpha}$ 과 $\frac{1}{\beta}$ 의 등차중항이므로

$$q = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \therefore q = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{p}{q} = 6$$

- 18 $a, b, 10$ 에서 b 는 a 와 10의 등차중항이므로

$$b = \frac{a+10}{2} \text{에서 } 2b = a+10 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

10, c, d 에서 c 는 10과 d 의 등차중항이므로

$$c = \frac{10+d}{2} \text{에서 } 2c = 10+d \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} - \textcircled{8} \text{을 하면 } 2b - 2c = a - d$$

또, $b, e, 0$ 에서 e 는 b 와 0의 등차중항이고, 5, e, c 에서 e 는 5와 c 의 등차중항이므로

$$b+0=5+c \quad \therefore b-c=5$$

$$\therefore a-d=2b-2c=2(b-c)=2 \times 5=10$$

- 19 삼차방정식의 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$(a-d)+a+(a+d)=9$$

$$3a=9 \quad \therefore a=3$$

따라서 삼차방정식 $x^3-9x^2+26x+k=0$ 의 한 근이 3이므로 방정식에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^3-9 \times 3^2+26 \times 3+k=0$$

$$\therefore k=-24$$

- 20 가로, 세로, 높이를 각각 $a-d, a, a+d$ 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=48, 12a=48$$

$$\therefore a=4$$

또 부피가 60이므로

$$(a-d) \times a \times (a+d)=60$$

$$a(a^2-d^2)=60 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4(16-d^2)=60$$

$$d^2=1 \quad \therefore d=\pm 1$$

따라서 가로, 세로, 높이를 각각 3, 4, 5 또는 5, 4, 3이므로 구하는 겉넓이는

$$2(3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 3)=94$$

- 21 네 수를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 라 하면 네 수의 합이 20이므로

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=20$$

$$4a=20 \quad \therefore a=5$$

또 네 수의 제곱의 합이 120이므로

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=120$$

$a=5$ 를 대입하면

$$(5-3d)^2+(5-d)^2+(5+d)^2+(5+3d)^2=120$$

$$20d^2+100=120, d^2=1 \quad \therefore d=\pm 1$$

따라서 구하는 네 수는 2, 4, 6, 8이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는 $8-2=6$

- 22 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2=a+d=5, a_6=a+5d=17$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=2, d=3$$

따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20} 은

$$S_{20} = \frac{20\{2 \times 2 + (20-1) \times 3\}}{2} = 610$$

- 23 첫째항이 1, 제 m 항이 39인 등차수열의 첫째항부터 제 m 항까지의 합이 400이므로

$$\frac{m(1+39)}{2} = 400 \quad \therefore m=20$$

즉, $a_{20}=39$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$1+19d=39 \quad \therefore d=2$$

- 24 첫째항이 50, 공차가 -3 이므로

$$S_n = \frac{n\{2 \times 50 + (n-1) \times (-3)\}}{2} = \frac{n(103-3n)}{2}$$

$$\text{이때 } S_n < 0 \text{이므로 } \frac{n(103-3n)}{2} < 0, n(103-3n) < 0$$

$$\therefore n > \frac{103}{3} = 34.3\cdots (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 S_n 의 값이 처음으로 음수가 되게 하는 n 의 값은 35이다.

- 25 첫째항이 1, 제 $(m+2)$ 항이 58인 등차수열의 첫째항부터 제 $(m+2)$ 항까지의 합이 590이므로

$$\frac{(m+2)(1+58)}{2} = 590, m+2=20$$

$$\therefore m=18$$

이 수열의 공차를 d 라 하면 제20항이 58이므로

$$1+(20-1)d=58 \quad \therefore d=3$$

- 26 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2a + (3-1)d\}}{2} = 6$$

$$\therefore a+d=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_6 = \frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} = 3$$

$$\therefore 2a+5d=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } a=3, d=-1$$

따라서 첫째항이 3, 공차가 -1 인 등차수열의 첫째항부터 제9항까지의 합 S_9 는

$$S_9 = \frac{9\{2 \times 3 + (9-1) \times (-1)\}}{2} = -9$$

- 27 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a + (5-1)d\}}{2} = 40$$

$$\therefore a+2d=8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 155$$

$$\therefore 2a + 9d = 31 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2, d=3$

따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는

$$S_{15} = \frac{15\{2 \times 2 + (15-1) \times 3\}}{2} = 345$$

$$\therefore a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{15} = S_{15} - S_5 = 305$$

28 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\textcircled{A} \text{에서 } S_{20} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 90$$

$$\therefore 2a + 19d = 9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } S_{40} - S_{20} = \frac{40\{2a + (40-1)d\}}{2} - 90 = 490$$

$$\therefore 2a + 39d = 29 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-5, d=1$

$$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{30}$$

$$= S_{30} - S_{10}$$

$$= \frac{30\{2 \times (-5) + (30-1) \times 1\}}{2}$$

$$= \frac{10\{2 \times (-5) + (10-1) \times 1\}}{2}$$

$$= 290$$

29 첫째항이 15, 공차가 -2 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 15 + (n-1) \times (-2) = -2n + 17$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n = -2n + 17 < 0 \quad \therefore n > 8.5$$

따라서 첫째항부터 제8항까지가 양수이고, 제9항부터 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore S_8 = \frac{8\{2 \times 15 + (8-1) \times (-2)\}}{2} = 64$$

다른 풀이

$$S_n = \frac{n\{2 \times 15 + (n-1) \times (-2)\}}{2}$$

$$= -n^2 + 16n = -(n-8)^2 + 64$$

따라서 S_n 은 $n=8$ 일 때 최댓값 64를 갖는다.

30 공차를 d 라 하면

$$S_7 = \frac{7\{34 + (7-1)d\}}{2} = 21d + 119$$

$$S_{11} = \frac{11\{34 + (11-1)d\}}{2} = 55d + 187$$

$$S_7 = S_{11} \text{에서 } 21d + 119 = 55d + 187$$

$$34d = -68 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 17 + (n-1) \times (-2) = -2n + 19$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n = -2n + 19 < 0 \quad \therefore n > 9.5$$

따라서 첫째항부터 제9항까지는 양수이고, 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n=9$$

31 공차를 d 라 하면

$$a_{10} = -45 + 9d = -27 \quad \therefore d=2$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = -45 + (n-1) \times 2 = 2n - 47$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$$a_n = 2n - 47 > 0 \quad \therefore n > 23.5$$

따라서 첫째항부터 제23항까지가 음수이고, 제24항부터 양수이므로 첫째항부터 제23항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore S_{23} = \frac{23\{2 \times (-45) + (23-1) \times 2\}}{2} = -529$$

$$\therefore k-m = 23 - (-529) = 552$$

다른 풀이

$a_1 = -45, d=2$ 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-45) + (n-1) \times 2\}}{2}$$

$$= n^2 - 46n = (n-23)^2 - 529$$

따라서 $k=23, m=-529$ 이므로 $k-m=552$

32 두 자리의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 5

인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 19, 26, \dots, 96$$

이므로 첫째항이 12, 공차가 7인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 12 + (n-1) \times 7 = 7n + 5$$

이때 $7n+5=96$ 에서 $n=13$ 이므로 96은 제13항이다.

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제13항까지의 합이므로 $\frac{13(12+96)}{2} = 702$

33 100 이상 300 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지고

5로도 나누어떨어지는 수는 3과 5의 최소공배수인 15로 나누어떨어지는 수이다. 이 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$105, 120, 135, \dots, 300$$

이므로 첫째항이 105, 공차가 15인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 105 + (n-1) \times 15 = 15n + 90$$

이때 $15n+90=300$ 에서 $n=14$ 이므로 300은 제14항이다.

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제14항까지의 합이므로 $\frac{14(105+300)}{2} = 2835$

34 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...

이 중에서 3으로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

9, 21, 33, ...

이므로 첫째항이 9, 공차가 12인 등차수열이다.

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \times 9 + (10-1) \times 12\}}{2} = 630$$

35 n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ \quad \text{..... ㉠}$$

첫째항이 95° , 공차가 10° 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \times 95^\circ + (n-1) \times 10^\circ\}}{2} = 5^\circ \times n^2 + 90^\circ \times n \quad \text{..... ㉡}$$

따라서 ㉠=㉡이므로 $180^\circ \times n - 360^\circ = 5^\circ \times n^2 + 90^\circ \times n$
 $n^2 - 18n + 72 = 0, (n-6)(n-12) = 0$

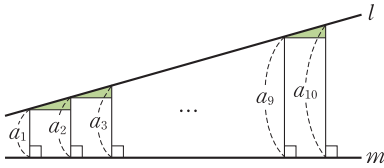
$\therefore n=6$ 또는 $n=12$

이때 $n=12$ 이면 가장 큰 내각의 크기가

$$95^\circ + 11 \times 10^\circ = 205^\circ \text{이므로 } n=6$$

36 다음 그림에서 색칠한 삼각형은 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 같으므로 모두 합동이다.

$$\therefore a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{10} - a_9$$



따라서 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \frac{10(5+10)}{2} = 75$$

37 가장 아래층에 있는 통조림의 개수를 a 라 하면 각 층의 통조림의 개수는 공차가 -1 인 등차수열을 이룬다.

이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은 165보다 작아야 하므로

$$\frac{10\{2a + (10-1) \times (-1)\}}{2} < 165$$

$$2a - 9 < 33 \quad \therefore a < 21 \quad \text{..... ㉠}$$

또 첫째항부터 제11항까지의 합이 165보다 크거나 같아야 하므로

$$\frac{11\{2a + (11-1) \times (-1)\}}{2} \geq 165$$

$$2a - 10 \geq 30 \quad \therefore a \geq 20 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $20 \leq a < 21$

따라서 가장 아래층에 있는 통조림의 수는 20개이다.

38 $S_n = 3n^2 - 5n + 7$ 에서

$$a_1 = S_1 = 5$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (3 \times 10^2 - 5 \times 10 + 7) - (3 \times 9^2 - 5 \times 9 + 7)$$

$$= 52$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 5 + 52 = 57$$

39 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 $A_n = n^2 + kn, B_n = 2n^2 - 3n + k$ 라 하면

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = A_n - A_{n-1}, b_n = B_n - B_{n-1}$ 이므로

a_5 와 b_{10} 을 구하면

$$a_5 = A_5 - A_4$$

$$= (25 + 5k) - (16 + 4k) = 9 + k$$

$$b_{10} = B_{10} - B_9$$

$$= (200 - 30 + k) - (162 - 27 + k) = 35$$

주어진 조건에서 $a_5 = b_{10}$ 이므로

$$9 + k = 35 \quad \therefore k = 26$$

40 $S_n = n^2 - 12n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 12n - \{(n-1)^2 - 12(n-1)\}$$

$$= 2n - 13$$

..... ㉠

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 12 \times 1 = -11$$

..... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 13$

$$a_n < 0 \text{에서 } 2n - 13 < 0 \quad \therefore n < 6.5$$

따라서 $a_n < 0$ 을 만족하는 n 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

41 나머지 정리에 의해

$$S_n = (-n)^2 + 2(-n) = n^2 - 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}$$

$$= 2n - 3$$

..... ㉠

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = -1$$

..... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 3$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = (-1) + 3 + 7 + 11 + 15 = 35$$

02 등비수열

기초 문제 Training

p.67

- 1 (1) 3 (2) 4 (3) $\sqrt{3}$ (4) -1
- 2 (1) 12 (2) -4 (3) $\frac{1}{16}$ (4) 3
- 3 (1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) $a_n = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
(3) $a_n = (\sqrt{5})^n$ (4) $a_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- 4 (1) $x=2, y=8$ (2) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{9}{8}$
(3) $x=6, y=36$ (4) $x=32, y=8$
- 5 (1) $3^{15}-1$ (2) $-\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$
(3) $-\frac{1}{3}\{1-(-2)^{13}\}$ (4) $\frac{1}{9}(1-0.1^{10})$

핵심 유형 Training

p.68~72

- | | | | | | |
|--------|---------|--------|---------------------|------|------|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 ③ | 4 10 | 5 ④ | 6 ③ |
| 7 8 | 8 제11항 | 9 ① | 10 ② | 11 ② | |
| 12 3 | 13 0 | 14 ③ | 15 ⑤ | 16 ③ | 17 ④ |
| 18 12 | 19 2 | 20 7번째 | 21 $\frac{3}{1024}$ | | |
| 22 488 | 23 1023 | 24 ② | 25 9207 | 26 ④ | 27 ③ |
| 28 ⑤ | 29 ③ | 30 ⑤ | 31 5 | 32 8 | 33 ① |
| 34 ③ | 35 ④ | | | | |

- 1 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_4 = ar^3 = 24$ ㉠
 $a_7 = ar^6 = 192$ ㉡
 ㉡ $\div$ ㉠을 하면
 $\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{192}{24}, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$
 이를 ㉠에 대입하면 $8a = 24 \quad \therefore a = 3$
 $\therefore a + r = 3 + 2 = 5$
- 2 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_1 + a_3 = a + ar^2 = a(1+r^2) = 5$ ㉠
 $a_4 + a_6 = ar^3 + ar^5 = ar^3(1+r^2) = -40$ ㉡
 ㉡ $\div$ ㉠을 하면
 $\frac{ar^3(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{-40}{5}, r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$

$$\begin{aligned} \text{이를 ㉠에 대입하면 } 5a &= 5 \quad \therefore a = 1 \\ \therefore a_7 + a_8 &= ar^6 + ar^7 \\ &= ar^6(1+r) \\ &= 1 \times (-2)^6 \times (1-2) = -64 \end{aligned}$$

- 3 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_3 = ar^2 = 36$ ㉠
 $a_5 = ar^4 = 324$ ㉡
 ㉡ $\div$ ㉠을 하면
 $\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{324}{36}, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$
 이를 ㉠에 대입하면 $9a = 36 \quad \therefore a = 4$
 즉, $a_9 = ar^8 = 4 \times 3^8$
 $\therefore \log_3 \frac{a_9}{4} = \log_3 \frac{4 \times 3^8}{4} = \log_3 3^8 = 8$
- 4 $a_n = \frac{20}{5^{2n-1}} = \frac{4}{5^{2n-2}} = \left(\frac{2}{5^{n-1}}\right)^2$ 이므로
 $\sqrt{a_n} = \frac{2}{5^{n-1}} = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
 따라서 수열 $\{\sqrt{a_n}\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이므로
 $\frac{a}{r} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$
- 5 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_5 = ar^4 = 4r^4 = \frac{1}{4}, r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$
 $\therefore a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
 이때 제 n 항에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아진다고 하면
 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} < \frac{1}{1000}$
 $\therefore 2^{n-3} > 1000$
 이때 $2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ 이므로
 $n-3 \geq 10 \quad \therefore n \geq 13$
 따라서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아지는 항은 제13항이다.
- 6 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 = ar = 6$ ㉠
 $a_5 = ar^4 = 48$ ㉡
 ㉡ $\div$ ㉠을 하면
 $\frac{ar^4}{ar} = \frac{48}{6}, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$
 이를 ㉠에 대입하면 $a = 3$
 따라서 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ 이므로
 $500 < a_n < 1000$, 즉 $\frac{500}{3} < 2^{n-1} < \frac{1000}{3}$ 에서

$$2^7=128, 2^8=256, 2^9=512 \text{이므로}$$

$$n-1=8 \quad \therefore n=9$$

따라서 $500 < a_n < 1000$ 을 만족하는 자연수 n 의 값은 9이다.

- 7 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_5 = ar^4 = 18 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} \div \textcircled{A}$ 을 하면

$$\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{18}{6}, r^2 = 3 \quad \therefore r = \sqrt{3} (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $a_n = 2 \times (\sqrt{3})^{n-1}$ 이므로 $a_n^2 = 4 \times 3^{n-1}$

$$a_n^2 > 4000, \text{ 즉 } 4 \times 3^{n-1} > 4000 \text{에서}$$

$$3^6 = 729, 3^7 = 2187 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

- 8 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_4 = ar^3 = 54 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_6 = ar^5 = 486 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} \div \textcircled{A}$ 을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^3} = \frac{486}{54}, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 27a = 54 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ 이므로 $a_n \geq 100000$

$$\therefore 2 \times 3^{n-1} \geq 100000$$

양변에 상용로그를 취하여 n 의 값의 범위를 구하면

$$\log(2 \times 3^{n-1}) \geq \log 100000$$

$$\log 2 + (n-1)\log 3 \geq 5$$

$$n-1 \geq \frac{5-\log 2}{\log 3}$$

$$n-1 \geq \frac{5-0.3010}{0.4771} = 9.849 \dots$$

$$\therefore n \geq 10.849 \dots$$

그런데 n 은 자연수이므로 처음으로 6자리의 정수가 되는
항은 제11항이다.

- 9 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제6항이 128이므로

$$4r^5 = 128, r^5 = 32 \quad \therefore r = 2$$

따라서 $x_1 = 4 \times 2, x_2 = 4 \times 2^2 = 16, x_3 = 4 \times 2^3 = 32,$

$$x_4 = 4 \times 2^4 = 64$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120$$

- 10 첫째항이 $\frac{64}{81}$, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이

$$\frac{81}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{64}{81} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} = \frac{81}{4}, \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} = \frac{81^2}{64 \times 4} = \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

따라서 $m+1=8$ 이므로 $m=7$

- 11 공비를 r 라 하면 첫째항이 3, 제13항이 48이므로

$$3r^{12} = 48, r^{12} = 16$$

이때 모든 항이 양수이므로 $r^3 = 2$

$$\begin{aligned} \therefore x_1 : x_4 : x_{10} &= 3r : 3r^4 : 3r^{10} \\ &= 1 : r^3 : r^9 \\ &= 1 : 2 : 8 \end{aligned}$$

- 12 $4x+3$ 은 $x+2$ 와 $10x+15$ 의 등비중항이므로

$$(4x+3)^2 = (x+2)(10x+15)$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 10x^2 + 35x + 30$$

$$6x^2 - 11x - 21 = 0, (6x+7)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{7}{6} \text{ 또는 } x = 3$$

이때 x 는 정수이므로 $x=3$

- 13 a 는 1과 b 의 등차중항이므로

$$a = \frac{1+b}{2}, 2a = 1+b$$

$$\therefore b = 2a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 b 는 a 와 1의 등비중항이므로

$$b^2 = a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$(2a-1)^2 = a, 4a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$(4a-1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 1, b = 1$$

이때 a, b 는 서로 다른 수이므로

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore 4a + 2b = 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

- 14 $\log_2 x$ 는 4와 16의 등비중항이므로

$$(\log_2 x)^2 = 4 \times 16 = 64$$

이때 $\log_2 x > 0$ 이므로 $\log_2 x = 8$

$$\therefore x = 2^8$$

또 16은 $\log_2 x$ 와 $\log_2 y$ 의 등비중항이므로

$$16^2 = \log_2 x \times \log_2 y$$

이때 $\log_2 x = 8$ 이므로 $\log_2 y = 32$

$$\therefore y = 2^{32}$$

$$\therefore \log_2 \frac{y}{x} = \log_2 \frac{2^{32}}{2^8} = \log_2 2^{24} = 24$$

다른 풀이

공비를 r 라 하면

$$a_1=4, a_3=ar^2=16 \text{이므로}$$

$$4r^2=16, r^2=4 \quad \therefore r=2 (\because r>0)$$

따라서 첫째항이 4, 공비가 2인 등비수열이므로

$$\log_2 x = 4 \times 2 = 8 \quad \therefore x = 2^8$$

$$\log_2 y = 4 \times 2^3 = 32 \quad \therefore y = 2^{32}$$

$$\therefore \log_2 \frac{y}{x} = \log_2 \frac{2^{32}}{2^8} = 24$$

- 15 B 는 A 와 C 의 등차중항이므로

$$B = \frac{A+C}{2}, 2B = A+C$$

이때 $A+B+C=\pi$, 즉 $A+C=\pi-B$ 이므로

$$3B = \pi \quad \therefore B = \frac{\pi}{3}$$

또 b 는 a 와 $a+c$ 의 등비중항이므로

$$b^2 = a(a+c)$$

$$\therefore a^2 - b^2 = -ac \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{코사인법칙에 의해 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = ac \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } -c^2 = -2ac$$

$$c^2 - 2ac = 0, c(2a - c) = 0 \quad \therefore c = 2a (\because c > 0)$$

$$c = 2a \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b^2 = 3a^2$$

$$\therefore b = \sqrt{3}a (\because b > 0)$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3a^2 + 4a^2 - a^2}{2 \times \sqrt{3}a \times 2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 16 삼차방정식의 세 실근을 $a, ar, ar^2 (a \neq 0)$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$a + ar + ar^2 = p$$

$$\Rightarrow a(1 + r + r^2) = p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + a \times ar^2 + ar \times ar^2 = -54$$

$$\Rightarrow a^2 r(1 + r + r^2) = -54 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -216$$

$$\Rightarrow (ar)^3 = -216 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } ar = -6$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } -6a(1 + r + r^2) = -54$$

$$\therefore a(1 + r + r^2) = 9$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } p = a(1 + r + r^2) = 9$$

- 17 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 $a, ar, ar^2 (a \neq 0)$ 이라 하면

모든 모서리의 길이의 합이 76이므로

$$4(a + ar + ar^2) = 76$$

$$\Rightarrow a(1 + r + r^2) = 19 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 겉넓이가 288이므로

$$2(a \times ar + a \times ar^2 + ar \times ar^2) = 228$$

$$\Rightarrow a^2 r(1 + r + r^2) = 114 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피는

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

- 18 네 자연수를 $a, ar, ar^2, ar^3 (r > 1)$ 이라 하면 $ar^3 \leq 100$ 이므로

$$(i) r = 2 \text{일 때, } a \leq \frac{100}{8} = 12.5 \text{에서}$$

$$a = 1, 2, 3, \dots, 12$$

$$(ii) r = 3 \text{일 때, } a \leq \frac{100}{27} = 3.7 \dots \text{에서}$$

$$a = 1, 2, 3$$

$$(iii) r = 4 \text{일 때, } a \leq \frac{100}{64} = 1.5625 \text{에서}$$

$$a = 1$$

$$(iv) r \geq 5 \text{일 때, } ar^3 \leq 100 \text{을 만족하는 } a \text{가 존재하지 않는다.}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 자연수 a 의 최댓값은 12이다.

- 19 1시간 후 세포의 수는 $10 \times r = 10r$

$$2 \text{시간 후 세포의 수는 } 10 \times r \times r = 10r^2$$

$$3 \text{시간 후 세포의 수는 } 10 \times r \times r \times r = 10r^3$$

$$4 \text{시간 후 세포의 수는 } 10 \times r \times r \times r \times r = 10r^4$$

이때 4시간 후 세포의 수가 160마리가 되었으므로

$$10r^4 = 160$$

$$\therefore r = 2 (\because r > 0)$$

- 20 첫 번째 시행 후 남은 조각의 수는 3

$$\text{두 번째 시행 후 남은 조각의 수는 } 3 \times 3$$

$$\text{세 번째 시행 후 남은 조각의 수는 } 3 \times 3 \times 3$$

$\vdots$

$$n \text{번째 시행 후 남은 조각의 수는 } 3^n$$

따라서 남은 조각의 수가 1000개를 넘는 것은

$$3^n > 1000$$

$$\text{이때 } 3^6 = 729, 3^7 = 2187 \text{이므로 } n \geq 7$$

따라서 남은 조각의 수가 처음으로 1000개를 넘는 것은 7번째 시행 후이다.

- 21 C_1 의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이므로 둘레의 길이 A_1 은

$$A_1 = 3 \times \frac{1}{2}$$

$$C_2 \text{의 한 변의 길이는 } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{이므로 둘레의 길이 } A_2 \text{는}$$

$$A_2 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

C₃의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 이므로 둘레의 길이 A₃은
 $A_3 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$

∴

C_n의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 둘레의 길이 A_n은
 $A_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 $\therefore A_{10} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{3}{1024}$

22 공비를 r라 하면 첫째항이 8이므로

$$a_5 = 8 \times r^4 = 648, r^4 = 81 \quad \therefore r = -3 (\because r < 0)$$

따라서 첫째항이 8, 공비가 -3인 등비수열의 첫째항부터
 제5항까지의 합은

$$\frac{8\{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 488$$

23 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_1 + a_4 = a + ar^3 = 9$$

$$\therefore a(1 + r^3) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_4 + a_7 = ar^3 + ar^6 = 72$$

$$\therefore ar^3(1 + r^3) = 72 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

① ÷ ②을 하면

$$\frac{ar^3(1+r^3)}{a(1+r^3)} = \frac{72}{9}, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

이를 ①에 대입하면 $9a = 9 \quad \therefore a = 1$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

24 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_3 = ar^2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_4 = ar^3 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } \frac{ar^3}{ar^2} = \frac{24}{12} \quad \therefore r = 2$$

이를 ①에 대입하면 $a = 3$

이때 $S_n = 189$ 이므로

$$\frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 189, 2^n - 1 = 63$$

$$2^n = 64 \quad \therefore n = 6$$

25 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_3 = ar^2 = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_7 = ar^6 = \frac{1}{24} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

① ÷ ②을 하면

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}, r^4 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because r > 0)$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } \frac{1}{2}a = \frac{1}{6} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_n^2 = \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 9 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_{10}^2} = \frac{9(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 9207$$

26 첫째항을 a, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_5 = \frac{a\{1 - (-2)^5\}}{1 - (-2)} = 22$$

$$11a = 22 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore S_{11} = \frac{2\{1 - (-2)^{11}\}}{1 - (-2)} = \frac{2 \times 2049}{3} = 1366$$

27 첫째항을 a, 공비를 r라 하고 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 7 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} - 1)(r^{10} + 1)}{r - 1} = 28 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } r^{10} + 1 = 4 \quad \therefore r^{10} = 3$$

$$\therefore S_{30} = \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} \\ = \frac{a(r^{10} - 1)(r^{20} + r^{10} + 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{a(r^{10} - 1)(r^{20} + r^{10} + 1)}{r - 1}$$

$$= 7(3^2 + 3 + 1) = 91$$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$S_{30} - S_{20} = 91 - 28 = 63$$

28 항의 개수가 짝수이므로 전체 항의 개수를 2n이라 하고
 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

홀수 번째의 항의 합은

$$a + ar^2 + \dots + ar^{2n-2} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1} = 119 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 짝수 번째의 항의 합은

$$ar + ar^3 + \dots + ar^{2n-1} = \frac{ar(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1} = 357 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } r = 3$$

29 $S_n = 3^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 - 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 2 + 18 + 162 = 182$$

30 $S_n = 2 \times (-3)^{n+1} + 2k$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2 \times (-3)^{n+1} + 2k - \{2 \times (-3)^n + 2k\} \\ &= 2 \times (-3)^n \times (-3 - 1) \\ &= -8 \times (-3)^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times (-3)^2 + 2k = 18 + 2k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값이 ㉡과 같아야 하므로

$$-8 \times (-3) = 18 + 2k, \quad 24 = 18 + 2k$$

$$\therefore k = 3$$

31 $S_n = 4^{n+1} - 4$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4^{n+1} - 4 - (4^n - 4) \\ &= 3 \times 4^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 3 \times 4^n$

$$a_n > 2000, \quad \text{즉 } 3 \times 4^n > 2000 \text{에서}$$

$$4^4 = 256, \quad 4^5 = 1024 \text{이므로 } n \geq 5$$

따라서 $a_n > 2000$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

32 $S_n = a^{n+1} + b$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= a^{n+1} + b - (a^n + b) \\ &= (a-1)a^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = a^2 + b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore a = 2$$

또 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값이 ㉡과 같아야 하므로

$$(a-1)a = a^2 + b \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

33 연이율 5%, 1년마다 복리로 매년 말에 a 만 원씩 10년 동안 적립할 때, 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= a + a(1+0.05) + a(1+0.05)^2 + \dots + a(1+0.05)^9 \\ &= \frac{a\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{(1+0.05) - 1} \\ &= \frac{a(1.6 - 1)}{0.05} \\ &= 12a = 1200 \\ \therefore a &= 100 \end{aligned}$$

34 월이율 1%, 1개월마다 복리로 매월 초에 10만 원씩 2년 동안 적금을 넣을 때, 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 10(1+0.01) + 10(1+0.01)^2 + \dots + 10(1+0.01)^{24} \\ &= \frac{10(1+0.01)\{(1+0.01)^{24} - 1\}}{(1+0.01) - 1} \\ &= 10 \times \frac{1.01^{25} - 1.01}{0.01} \\ &= 10 \times \frac{1.281 - 1.01}{0.01} \\ &= 271(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 만기 후 받을 수 있는 금액은 약 271만 원이다.

35 매달 주문받는 양을 10%씩 늘려갈 때의 1년 후의 양을 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 1000 + 1000(1+0.1) + \dots + 1000(1+0.1)^{11} \\ &= \frac{1000\{(1+0.1)^{12} - 1\}}{(1+0.1) - 1} \\ &= \frac{1000(1.1^{12} - 1)}{0.1} \\ &= 21400(\text{개}) \end{aligned}$$

따라서 1년 동안 주문받은 양은 모두 21400개이다.

- 7 $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{a_k + b_k} = 10(1-10) = -90$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{b_k}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k + b_k - a_k}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{10} \left(1 - \frac{a_k}{a_k + b_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 1 - \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{a_k + b_k}$$

$$= 10 - (-90) = 100$$
- 8 $a_n = 3^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} = 1 + 3^1 + \cdots + 3^{n-1}$$

$$= \frac{1 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$\frac{3^n - 1}{2} = 364 \text{에서 } 3^n = 729$$

$$\therefore n = 6$$
- 9 $f(10, 2) = \sum_{k=1}^1 2^k + \sum_{k=1}^2 2^k + \sum_{k=1}^3 2^k + \cdots + \sum_{k=1}^{10} 2^k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n 2^k = a_n$$
이라 하면

$$a_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

$$\therefore f(10, 2) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (2^{k+1} - 2)$$

$$= \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} - 20 = 4072$$
- 10 $a_n = P\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$ 이므로

$$a_k - 1 = \left\{3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^k - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\right\} - 1$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^k - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (a_k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^k - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$= 3 \times \frac{\frac{1}{4} \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{4}} - 2 \times \frac{\frac{1}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$
따라서 $p = -1$, $q = 2$, $r = -1$ 이므로 $p + q + r = 0$
- 11 $\sum_{k=1}^{10} k^2(k+1) - \sum_{k=1}^{10} k(k-1)$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{(k^3 + k^2) - (k^2 - k)\} = \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k)$$

$$= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \times 11}{2} = 3080$$

- 12 $\sum_{k=n}^{2n} (2k-1)$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (2k-1) - \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

$$= 2 \times \frac{2n(2n+1)}{2} - 2n - 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + (n-1)$$

$$= 3n^2 + 2n - 1$$

$$3n^2 + 2n - 1 = 319 \text{에서}$$

$$3n^2 + 2n - 320 = 0, (3n+32)(n-10) = 0$$
이때 n 은 자연수이므로
 $n = 10$
- 13 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ 이므로

$$a_{2k-1} = 3(2k-1) - 1 = 6k - 4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{20} (6k - 4)$$

$$= 6 \times \frac{20 \times 21}{2} - 80$$

$$= 1180$$
- 14 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{11} (\alpha - k)(\beta - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{11} \{\alpha\beta - (\alpha + \beta)k + k^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{11} (k^2 - k - 1)$$

$$= \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - \frac{11 \times 12}{2} - 11$$

$$= 429$$
- 15 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$
수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} \frac{k+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{20 \times 21}{2} + 20 \right) = 115$$
- 16 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2$$
수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (2k^3 - k^2)$$

$$= 2 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + n - 1)}{6}$$

17 $S_n = \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\}$

$$= \{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2\} + (2n+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 - \sum_{k=1}^n (2k)^2 + (2n+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n \{(2k-1)^2 - (2k)^2\} + (2n+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (-4k+1) + (2n+1)^2$$

$$= -4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n + (2n+1)^2$$

$$= 2n^2 + 3n + 1$$

 $S_k = 120$ 에서 $2k^2 + 3k + 1 = 120$
 $2k^2 + 3k - 119 = 0, (2k+17)(k-7) = 0$
 이때 k 는 자연수이므로 $k=7$

18 $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{l=1}^5 (k+2l) \right\} = \sum_{k=1}^{10} \left(k \sum_{l=1}^5 1 + 2 \sum_{l=1}^5 l \right)$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(5k + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (5k + 30)$$

$$= 5 \times \frac{10 \times 11}{2} + 300$$

$$= 575$$

19 $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^k km \right) = \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{m=1}^k m \right)$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ k \times \frac{k(k+1)}{2} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + k^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

따라서 $a=24, b=2, c=1$ 이므로 $a+b+c=27$

20 $\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^k \left(\sum_{m=1}^l 12 \right) \right\}$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 12l \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ 12 \times \frac{k(k+1)}{2} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^n (6k^2 + 6k)$$

$$= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2n^3 + 6n^2 + 4n$$

 $2n^3 + 6n^2 + 4n = 420$ 에서
 $n^3 + 3n^2 + 2n - 210 = 0, (n-5)(n^2 + 8n + 42) = 0$
 이때 n 은 자연수이므로 $n=5$

21 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n + 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + n + 1 - \{(n-1)^2 + (n-1) + 1\}$$

$$= 2n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은 $a_1=3, a_n=2n (n \geq 2)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=2}^9 a_k$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_9)$$

$$= a_1 + a_{10} = 3 + 2 \times 10 = 23$$

22 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+2) = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$

$$= 2n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n=2n+1$

따라서 $a_{2k}=4k+1, a_{k+1}=2k+3$ 이므로

$$\sum_{k=1}^5 k^2 a_k - \sum_{k=1}^5 k a_{2k} + \sum_{k=1}^5 a_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^5 k^2 (2k+1) - \sum_{k=1}^5 k (4k+1) + \sum_{k=1}^5 (2k+3)$$

$$= \sum_{k=1}^5 \{(2k^3 + k^2) - (4k^2 + k) + (2k + 3)\}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (2k^3 - 3k^2 + k + 3)$$

$$= 2 \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 - 3 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} + 15$$

$$= 315$$

23 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3(3^n - 1)$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3(3^n - 1) - 3(3^{n-1} - 1)$$

$$= 3^{n+1} - 3^n$$

$$= 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3(3-1) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $\textcircled{L}$ 은 $\textcircled{I}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2 \times 3^n$

따라서 $a_{2k-1} = 2 \times 3^{2k-1} = \frac{2}{3} \times 9^k$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3} \times 9^k \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{9(9^{10}-1)}{9-1} = \frac{3(9^{10}-1)}{4} = \frac{3^{21}-3}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p=21$, $q=4$ 이므로 $p+q=25$

24 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = \frac{1}{(2n)^2-1}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k)^2-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{25} \quad a_n &= \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n+1} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{100} \frac{6}{k(k+1)} \\ &= 6 \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \right\} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{600}{101} \end{aligned}$$

$$\textbf{26} \quad S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = \frac{29}{45} \end{aligned}$$

따라서 $p=45$, $q=29$ 이므로 $p+q=74$

27 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \sum_{k=1}^{48} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{48} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{48} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+2}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{1} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{4}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{47} - \sqrt{49}) + (\sqrt{48} - \sqrt{50}) \} \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} - 7 - 5\sqrt{2}) \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=2$ 이므로

$$a+b=5$$

28 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}}{(\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k})(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{200} - \sqrt{198}) \} \\ &= \frac{1}{2} (10\sqrt{2} - \sqrt{2}) \\ &= \frac{9}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $p=2$, $q=9$ 이므로

$$pq=18$$

$$\begin{aligned} \textbf{29} \quad \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{1} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{2m-1} - \sqrt{2m+1}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2m+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} (\sqrt{2m+1} - 1) = 3 \text{에서}$$

$$\sqrt{2m+1} = 7, \quad 2m+1 = 49$$

$$\therefore m=24$$

30 S_n 에서 $n=10$ 일 때

$$S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{19}{2^{10}}$$

등비수열의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $S_{10} - \frac{1}{2}S_{10}$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{19}{2^{10}} \\ - \frac{1}{2}S_{10} &= \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{17}{2^{10}} + \frac{19}{2^{11}} \\ \hline \frac{1}{2}S_{10} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^{10}} - \frac{19}{2^{11}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{19}{2^{11}} \\ &= -23\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \frac{3}{2} \\ \therefore S_{10} &= 3 - 23\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=-23$ 이므로

$$a-b=26$$

31 $S - (-3S)$ 를 하면

$$\begin{aligned} S &= 1 - 2 \times 3 + 3 \times 3^2 - \cdots - 20 \times 3^{19} \\ -) -3S &= \frac{-3 + 2 \times 3^2 - \cdots - 19 \times 3^{19} + 20 \times 3^{20}}{4S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots - 3^{19} - 20 \times 3^{20}} \\ &= \frac{1 - (-3)^{20}}{1 - (-3)} - 20 \times 3^{20} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3^{24}}{4} \\ \therefore 16S &= 1 - 3^{24} \end{aligned}$$

32 $f(2) = 2^{10} + 4 \times 2^9 + 7 \times 2^8 + \cdots + 28 \times 2 + 31$ 이므로

$$\begin{aligned} f(2) - \frac{1}{2}f(2) &\text{를 하면} \\ f(2) &= 2^{10} + 4 \times 2^9 + 7 \times 2^8 + \cdots + 31 \\ - \frac{1}{2}f(2) &= \frac{2^9 + 4 \times 2^8 + \cdots + 28 + 31 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}f(2) = 2^{10} + 3 \times 2^9 + 3 \times 2^8 + \cdots + 3 - \frac{31}{2}} \\ &= 2^{10} + 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9) - \frac{31}{2} \\ &= 2^{10} + 3 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} - \frac{31}{2} \\ &= 2^{12} - \frac{37}{2} \\ \therefore f(2) &= 2^{13} - 37 \end{aligned}$$

33 주어진 수열을 다음과 같이 수가 같은 것끼리 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(2, 2)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(3, 3, 3)}_{\text{제3군}}, \underbrace{(4, 4, 4, 4)}_{\text{제4군}}, \cdots$$

제 n 군의 항의 개수는 n 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{13 \times 14}{2} = 91, \frac{14 \times 15}{2} = 105 \text{이므로 제100항은 제14군의}$$

9번째 항이다.

제 n 군의 항의 합은 $n \times n = n^2$

따라서 첫째항부터 제100항까지의 합은

(제1군부터 제13군까지의 항의 합)

+ (제14군의 첫째항부터 제9항까지의 합)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{13} k^2 + \sum_{k=1}^9 14 \\ &= \frac{13 \times 14 \times 27}{6} + 9 \times 14 \\ &= 945 \end{aligned}$$

34 주어진 수열을 다음과 같이 분모가 같은 것끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \cdots$$

제1군 제2군 제3군 제4군

제 n 군의 항의 개수는 n 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

제 n 군의 k 번째 항은 $\frac{n-k+1}{n+1}$ 이다.

따라서 $\frac{7}{15}$ 은 제14군의 8번째 항이므로

$$\frac{13 \times 14}{2} + 8 = 99$$

$\therefore$ 제99항

35 주어진 수열을 다음과 같이 두 수의 곱이 같은 순서쌍끼리 묶으면

$$\{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 4), (2, 2), (4, 1)\}$$

제1군 제2군

$$\{(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)\}, \cdots$$

제3군

제 n 군의 항의 개수는 $n+1$ 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}$$

$$\frac{8 \times 11}{2} = 44, \frac{9 \times 12}{2} = 54 \text{이므로 제50항은 제9군의 6번째 항이다.}$$

제 n 군의 k 번째 항은 $(2^{k-1}, 2^{n-k+1})$ 이다.

따라서 제9군의 6번째항은 $(32, 16)$ 이므로

$$a=32, b=16$$

$$\therefore a+b=48$$

- 36 위에서 k 번째 줄에 나열된 마지막 수는 k^2 이고 가장 아랫줄의 마지막 수가 100이므로 가장 아랫줄은 10번째 줄이다.

n 번째 줄의 첫 번째 수는 $(n-1)$ 번째 줄의 마지막 수보다 1 크므로 n 번째 줄의 색칠한 부분의 수를 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\{(n-1)^2+1\}+n^2}{2} \\ &= n^2-n+1 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (k^2-k+1) \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} + 10 \\ &= 340 \end{aligned}$$

- 37 주어진 표에서 다음과 같이 자연수 순서대로 대각선끼리 묶으면

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), ...

제1군 제2군 제3군 제4군

제 n 항의 일반항은 n 이고 제 n 군의 항의 개수는 n 이다.

제 n 군의 첫째항의 위치는 n 번째 줄의 왼쪽에서 첫 번째 칸이고, 제 n 군의 k 번째 항의 위치는 $n-k+1$ 번째 줄의 왼쪽에서 k 번째 칸이다.

따라서 6번째 줄의 왼쪽에서 7번째 칸에 있는 수는 제12군의 7번째 항이다.

$$\therefore (1+2+\cdots+11)+7=73$$

- 38 주어진 점을 다음과 같이 y 좌표가 같은 것끼리 묶으면

$A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(1, 1)$, $A_4(2, 1)$, $A_5(3, 1)$,

제1군

제2군

$A_6(3, 2)$, $A_7(4, 2)$, $A_8(5, 2)$, $A_9(6, 2)$, ...

제3군

제 n 군의 점의 개수는 $n+1$ 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 점의 개수는

$$\begin{aligned} 2+3+\cdots+(n+1) &= \frac{n(n+3)}{2} \\ \frac{12 \times 15}{2} &= 90, \quad \frac{13 \times 16}{2} = 104 \text{이므로 제100항은 제13군의 10번째 점이다.} \end{aligned}$$

제 n 군의 첫 번째 점의 x 좌표는 제 $(n-2)$ 군까지의 점의 개수에 1을 더한 것과 같고, y 좌표는 $n-1$ 이다.

제11군까지의 점의 개수는 $\frac{11 \times 14}{2} = 77$ 이므로 제13군의 첫 번째 점의 x 좌표는 78이다.

따라서 점 A_{100} 의 좌표는 (78, 12)이다.

02 수학적 귀납법

기초 문제 Training

p.81

- 1 (1) 8 (2) $\frac{9}{2}$ (3) 30 (4) 22

- 2 (1) $a_{n+1}=a_n+3$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 (2) $a_{n+1}=a_n+2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 (3) $a_{n+1}=2a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 (4) $a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

- 3 (1) $a_{n+1}=a_n+3n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 (2) $a_{n+1}=a_n \times 3^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

- 4 (가) 1 (나) $k+1$

- 5 (가) $k+1$ (나) $k+2$

핵심 유형 Training

p.82~88

1 ②	2 27	3 1	4 19	5 ③	6 ④
7 22	8 ②	9 ④	10 ④	11 8	12 ④
13 ①	14 ③	15 ②	16 ③	17 ③	18 17
19 1	20 ④	21 ②	22 33	23 ②	24 ①
25 59	26 $a_{n+1}=2a_n-10$ ($n=1, 2, 3, \dots$)	27 34			
28 ③	29 ③	30 ⑤	31 ②		
32 (가) $(k+1)(k+2)$	(나) $k+3$	33 (가) 9	(나) 9^k-1		
34 ④	35 ④				

- 1 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_3=2+2d=5 \quad \therefore d=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_n=2+(n-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_{99}=149$$

- 2 $a_{n+1}+4=a_n$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 102, 공차가 -4 인 등차수열이므로

$$a_n=102+(n-1) \times (-4) = -4n+106$$

$$a_k < 0 \text{에서}$$

$$-4k+106 < 0 \quad \therefore k > \frac{106}{4} = 26.5$$

따라서 $a_k < 0$ 을 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 27이다.

- 3 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 공차가 각각 2, d 인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n\{2a + (n-1) \times 2\}}{2} \\ &= a + (n-1) \times 1 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 a 이고 공차가 1인 등차수열이므로 $d=1$

- 4 $\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 하면 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} \text{이므로 } a_n = \frac{2}{n+1}$$

$$a_k = \frac{1}{10} \text{에서 } \frac{2}{k+1} = \frac{1}{10} \quad \therefore k=19$$

- 5 $a_n = \frac{1}{3}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1} = 3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이므로 첫째항을 a_1 이라 하면

$$a_2 = 3a_1 = 1 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{n-2} \quad \therefore a_{15} = 3^{13}$$

- 6 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1} = 2^{n-3}$$

이때 제 k 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$2^{k-3} > 1000$$

이때 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로 처음으로 1000보다 커지는 항은 제13항이다.

- 7 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 공비를 r 라 하면

$$a_2 = 3r = \frac{3}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \left\{ 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right\} = \frac{3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}$$

따라서 $a=4$, $b=18$ 이므로 $a+b=22$

- 8 $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 - 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 - 1$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 - 1$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2(n-1) - 1$$

$$a_n = a_1 + 2\{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\} - (n-1)$$

$$\therefore a_n = a_1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - (n-1)$$

$$= 1 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} - (n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 2$$

$$\therefore a_{20} - a_{10} = (400 - 40 + 2) - (100 - 20 + 2) = 280$$

- 9 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{1 \times 2}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{2 \times 3}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{3 \times 4}$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$a_n = a_1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{n}$$

$$|a_k - 3| < \frac{1}{100} \text{에서}$$

$$\left| -\frac{1}{k} \right| < \frac{1}{100}, \frac{1}{k} < \frac{1}{100}$$

$$\therefore k > 100$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 101이다.

- 10 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1})$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) &= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 2^k \\ &= \frac{2(2^{20}-1)}{2-1} = 2^{21} - 2\end{aligned}$$

- 11** $a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{3} a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{5} a_2 \\ a_4 &= \frac{5}{7} a_3 \\ &\vdots \\ \times \Big) a_n &= \frac{2n-3}{2n-1} a_{n-1} \\ a_n &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2n-1} \right) \times a_1 \\ \therefore a_n &= \frac{3}{2n-1} \\ \therefore a_5 + \frac{1}{a_{12}} &= \frac{1}{3} + \frac{23}{3} = 8\end{aligned}$$

- 12** $a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n$, 즉 $a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1 \times 3}{2 \times 2} a_1 \\ a_3 &= \frac{2 \times 4}{3 \times 3} a_2 \\ a_4 &= \frac{3 \times 5}{4 \times 4} a_3 \\ &\vdots \\ \times \Big) a_n &= \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} a_{n-1} \\ a_n &= \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \cdots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \times a_1 \\ \therefore a_n &= \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)(a_{k+1} - 1) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}\end{aligned}$$

- 13** $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{2} \right)^n$, 즉 $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 모두 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_3 &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 a_2 \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2} \right)^3 a_3 \\ &\vdots \\ \times \Big) a_n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} a_{n-1} \\ a_n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \times a_1 \\ \therefore a_n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(n-1)n}{2}} \\ a_k &< \frac{1}{1024} \text{에서 } \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(k-1)k}{2}} < \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \text{이므로} \\ \frac{(k-1)k}{2} &> 10, \quad k^2 - k - 20 > 0 \\ (k+4)(k-5) &> 0 \quad \therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 5 \\ \text{따라서 자연수 } k \text{의 최솟값은 } 6 \text{이다.}\end{aligned}$$

- 14** $a_{n+1} = 2a_n - 3$ 에서 $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$
이때 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 1$ 이고, 공비가 2인 등비수열이므로
 $a_n - 3 = 2^{n-1} \quad \therefore a_n = 2^{n-1} + 3$
 $\therefore a_{10} = 515$

- 15** $2a_{n+1} - a_n = 3$ 에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$
 $\therefore a_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(a_n - 3)$
이때 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 3$ 이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로
 $a_n - 3 = 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 3$
 $\therefore a_8 - a_{10} = \left(\frac{3}{2^7} + 3 \right) - \left(\frac{3}{2^9} + 3 \right) = \frac{12-3}{2^9} = \frac{9}{512}$

- 16** $a_{n+1} = 3a_n + 4$ 에서 $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$
이때 수열 $\{a_n + 2\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 2 = 3$ 이고, 공비가 3인 등비수열이므로
 $a_n + 2 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n \quad \therefore a_n = 3^n - 2$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} \log_3(a_k + 2) = \sum_{k=1}^{10} \log_3 3^k = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

- 17** $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
이때 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 3$ 이고, 공비가 3인 등비수열이므로
 $a_{n+1} - a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 3^n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 3^3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1})$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 2 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$= \frac{3^n + 1}{2}$$

$$\therefore a_{20} = \frac{3^{20} + 1}{2}$$

18 $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에서 $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 2$ 이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = a_1 + 2 \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}$$

$$\therefore a_n = a_1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + 2 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 3a_{20} = 7 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{19} = 7 + \left(\frac{1}{2}\right)^{17}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(3a_{20} - 7) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{17} = 17$$

19 (가)에서 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = a_1$ ($\because$ (나))이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - a_n = a_1 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + a_1 \times 2^{n-1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + a_1 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + a_1 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + a_1 \times 2^2$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + a_1 \times 2^{n-2}$$

$$a_n = a_1 + a_1(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2})$$

$$\therefore a_n = a_1 + a_1 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = a_1 + a_1 \times \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = a_1 \times 2^{n-1}$$

이때 (다)에서 $a_{10} = 512$ 이므로

$$a_1 \times 2^9 = 512 \quad \therefore a_1 = 1$$

20 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n}$ 의 양변에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2+a_n}{2a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{이라 하면 } b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

이때 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{2}$

인 등차수열이므로

$$b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{이므로 } \frac{1}{a_n} = \frac{n}{2} \quad \therefore a_n = \frac{2}{n}$$

$$\therefore a_5 + a_{10} = \frac{2}{5} + \frac{2}{10} = \frac{3}{5}$$

21 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ 의 양변에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+na_n}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{이라 하면 } b_{n+1} = b_n + n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$b_2 = b_1 + 1$$

$$b_3 = b_2 + 2$$

$$b_4 = b_3 + 3$$

$\vdots$

$$+) b_n = b_{n-1} + n - 1$$

$$b_n = b_1 + \{(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))\}$$

$$\therefore b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = b_1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

이때 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$ 이므로

$$b_n = \frac{n^2 - n + 4}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{이므로 } \frac{1}{a_n} = \frac{n^2 - n + 4}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n^2 - n + 4}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 제 k 항이 $\frac{1}{47}$ 이라 하면

$$\frac{2}{k^2 - k + 4} = \frac{1}{47}, \quad k^2 - k - 90 = 0$$

$$(k+9)(k-10) = 0$$

$$\therefore k = 10 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

따라서 $\frac{1}{47}$ 은 제10항이다.

22 $3a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면

$$3 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 3$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{이라 하면 } b_{n+1} = b_n + 3$$

이때 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 3인

등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{이므로 } \frac{1}{a_n} = 3n - 2$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3n - 2}$$

$$a_k > \frac{1}{100} \text{에서 } \frac{1}{3k-2} > \frac{1}{100}, \quad 3k-2 < 100$$

$$\therefore k < 34$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 33이다.

23 $S_n = -\frac{1}{4}a_n + \frac{5}{4}$ 에서 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{5}{4}$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로

$$a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이

므로

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \therefore a_{15} = \frac{1}{5^{14}}$$

24 $S_n = n^2 a_n$ 에서 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면 $S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n, \quad \{(n+1)^2 - 1\} a_{n+1} = n^2 a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4} a_2$$

$$a_4 = \frac{3}{5} a_3$$

$\vdots$

$$\times \left) a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1}\right) a_1$$

$$\therefore a_n = \frac{1 \times 2}{n(n+1)} a_1 = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{20}} = 3 + 210 = 213$$

25 $2S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n = a_n$ 에서

$$2(S_{n+2} - S_{n+1}) = S_{n+1} - S_n + a_n$$

이때 $S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad 2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

이때 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 1$ 이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_{n+1} = a_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_4 = a_3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$\vdots$

$$+ \left) a_n = a_{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = a_1 + \left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_6 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3 \times 16} = \frac{43}{16}$$

따라서 $p = 16$, $q = 43$ 이므로 $p + q = 59$

26 첫 번째 실험 후 살아 있는 세균의 수 a_1 은

$$a_1 = (50 - 5) \times 2 = 90$$

같은 방법으로 $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ 을 구하면

$$a_2 = (a_1 - 5) \times 2$$

$$a_3 = (a_2 - 5) \times 2$$

$\vdots$

$$\therefore a_{n+1} = (a_n - 5) \times 2 = 2a_n - 10 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

27 1개의 돌로 이루어진 징검다리를 건너는 방법은

(1) $\Rightarrow$ 1가지

$$\therefore a_1 = 1$$

2개의 돌로 이루어진 징검다리를 건너는 방법은

(1 $\rightarrow$ 1), (2) $\Rightarrow$ 2가지

$$\therefore a_2 = 2$$

3개의 돌로 이루어진 징검다리를 건너는 방법은

(1 $\rightarrow$ 2), (1 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 1), (2 $\rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3가지

1개의 돌 2개의 돌

$$\therefore a_3 = 3$$

4개의 돌로 이루어진 징검다리를 건너는 방법은

(1 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 2), (2 $\rightarrow$ 2),

2개의 돌

(1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 1), (1 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 1), (2 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 1)

3개의 돌

$\Rightarrow$ 5가지

$$\therefore a_4 = 5$$

따라서 n 개의 돌로 이루어진 징검다리를 건너는 방법은

($n-2$ 개의 돌을 건너 후 2개를 한 번에 건너는 경우),

($n-1$ 개의 돌을 건너 후 1개를 건너는 경우)

$$\text{이므로 } a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

이때 $a_5, \dots, a_8$ 을 차례로 구하면

$$a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 5 + 8 = 13$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 8 + 13 = 21$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 13 + 21 = 34$$

28 n 일 후 물탱크의 물의 양을 a_n 이라 하면

$$a_1 = \frac{1}{2} \times 100 + 10 = 60$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times a_1 + 10$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \times a_2 + 10$$

$\vdots$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 10$$

$$\text{위의 식을 변형하면 } a_{n+1} - 20 = \frac{1}{2}(a_n - 20)$$

이때 수열 $\{a_n - 20\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 20 = 40$ 이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 $a_n - 20 = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore a_n = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 20$$

$$a_n < \frac{1}{4} \times 100 = 25 \text{에서}$$

$$40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 20 < 25, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$n-1 > 3 \quad \therefore n > 4$$

따라서 물탱크의 물의 양이 처음 양의 $\frac{1}{4}$ 미만이 되는 것은

5일 후부터이다.

29 $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5)$ 도 참이다.

$p(3)$ 이 참이면 $p(3 \times 3) = p(9), p(3 \times 5) = p(15)$ 도 참이다.

$p(5)$ 가 참이면 $p(5 \times 5) = p(25)$ 도 참이다.

$\vdots$

따라서 $p(1)$ 이 참이면 자연수 a, b 에 대하여

$p(3^a \times 5^b)$ 이 참이다.

$$\textcircled{1} p(30) = p(2 \times 3 \times 5)$$

$$\textcircled{2} p(90) = p(2 \times 3^2 \times 5)$$

$$\textcircled{3} p(135) = p(3^3 \times 5)$$

$$\textcircled{4} p(175) = p(5^2 \times 7)$$

$$\textcircled{5} p(210) = p(2 \times 3 \times 5 \times 7)$$

따라서 반드시 참인 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

30 $\neg$. $p(1)$ 이 참이면 $p(1+3) = p(4)$ 도 참이다.

$p(4)$ 가 참이면 $p(4+3) = p(7)$ 도 참이다.

$p(7)$ 이 참이면 $p(7+3) = p(10)$ 도 참이다.

즉, $p(1)$ 이 참이면 $p(4), p(7), p(10), \dots$ 도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(3k+1)$ 도 참이다.

$\neg$. $p(3)$ 이 참이면 $p(3+3) = p(6)$ 도 참이다.

$p(6)$ 이 참이면 $p(6+3) = p(9)$ 도 참이다.

$p(9)$ 가 참이면 $p(9+3) = p(12)$ 도 참이다.

즉, $p(3)$ 이 참이면 $p(6), p(9), p(12), \dots$ 도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(3k)$ 도 참이다.

$\neg$. $p(1)$ 이 참이면 $p(4), p(7), p(10), \dots$ 도 참이다.

$p(2)$ 가 참이면 $p(5), p(8), p(11), \dots$ 도 참이다.

$p(3)$ 이 참이면 $p(6), p(9), p(12), \dots$ 도 참이다.

즉, $p(1), p(2), p(3)$ 이 참이면 $p(4), p(5), p(6), p(7), \dots$ 도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(k)$ 도 참이다.

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

31 $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times 2^n$
 $= 2n(2n-1)(2n-2) \times \cdots \times \{2n-(n-1)\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(i) $n=1$ 일 때

(좌변) $= 1 \times 2^1 = 2$, (우변) $= 2$ 이므로 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1) \times 2^k \\ &= 2k(2k-1)(2k-2) \times \cdots \times (k+1) \\ & \text{위의 식의 양변에 } \boxed{2(2k+1)} \text{을 곱하면} \\ & 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1) \times \boxed{2(2k+1)} \times 2^{k+1} \\ &= 2k(2k-1)(2k-2) \\ & \quad \times \cdots \times (k+2)(k+1) \times \boxed{2(2k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2k(2k-1) \times \cdots \times (k+2)(2k+2)(2k+1) \\ &= (2k+2)(2k+1) \times 2k \times \cdots \times (k+2) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

$$\therefore \boxed{(k+1)} \div \boxed{(k)} = (2k+1)2^{k+1} \div 2(2k+1) = 2^k$$

32 $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$
 $= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(i) $n=1$ 일 때

(좌변) $= 1 \times 2 = 2$, (우변) $= \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3 = 2$ 이므로 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \\ & \text{위의 식의 양변에 } \boxed{(k+1)(k+2)} \text{를 더하면} \\ & 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1) + \boxed{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + \boxed{(k+1)(k+2)} \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{1}{3}k+1 \right) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2) \boxed{(k+3)} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

33 (i) $n=1$ 일 때, $9^1-1=8$ 은 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, 9^k-1 이 8의 배수

즉 $9^k-1=8m$ (m 은 자연수)이라 가정하면

$$\begin{aligned} 9^{k+1}-1 &= \boxed{9} \times 9^k - 1 = (8+1)9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + \boxed{9^k-1} = 8 \times 9^k + 8m \\ &= 8(9^k+m) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 9^n-1 은 8의 배수이다.

34 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n > 2^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(i) $n=4$ 일 때

(좌변) $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = \boxed{24}$, (우변) $= 2^4 = 16$ 이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때, 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^k \\ & \text{위의 식의 양변에 } \boxed{k+1} \text{을 곱하면} \\ & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \boxed{k+1} > 2^k \times \boxed{k+1} \end{aligned}$$

이때 $\boxed{k+1} > 2$ 이므로

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \boxed{k+1} > 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

35 $2^n > 2n+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(i) $n=3$ 일 때

(좌변) $= 2^3 = 8$, (우변) $= 2 \times 3 + 1 = 7$ 이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & 2^k > 2k+1 \\ & \text{위의 식의 양변에 } \boxed{2} \text{를 곱하면} \\ & 2^k \times \boxed{2} > (2k+1) \times \boxed{2} \\ & 2^{k+1} > \boxed{4k+2} \\ & \text{이때 } \boxed{4k+2} - (\boxed{2(k+1)} + 1) = 2k-1 > 0 \text{이므로} \\ & \boxed{4k+2} > \boxed{2(k+1)} + 1 \\ & \therefore 2^{k+1} > \boxed{2(k+1)} + 1 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

따라서 $a=2$, $f(k)=4k+2$, $g(k)=2k+3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \{a+f(k)+g(k)\} &= \sum_{k=1}^{10} (2+4k+2+2k+3) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6k+7) \\ &= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 70 = 400 \end{aligned}$$

