

맞춤형 핵심 유형 마스터

**마레
PM**

정답과 해설

고등 수학 (양)

01 다항식의 연산

핵심
유형

- 유형01 $-x^2-5xy+7y^2$ 유형02 ③
 유형03 ④ 유형04 $x^4+4x^3+3x^2-2x-2$
 유형05 ⑤ 유형06 ② 유형07 $\frac{5}{6}$ 유형08 ③
 유형09 22 유형10 $x-4$ 유형11 ①
 유형12 $a=-2, b=3, c=0, d=4, e=1$

핵심
유형

완성하기

- 001 $-10x^2+9xy-13y^2$ 002 ⑤ 003 ②
 004 ④ 005 11 006 ① 007 ③ 008 -2
 009 -1 010 ④ 011 ⑤ 012 x^4+4x^2+16
 013 ① 014 ② 015 ⑤ 016 ② 017 ②
 018 9 019 ④ 020 ② 021 ① 022 ⑤
 023 ① 024 ④ 025 $10\sqrt{13}$ 026 ① 027 ④
 028 ⑤ 029 ④ 030 11 031 14 032 ②
 033 ④ 034 ③ 035 ① 036 9 037 ②
 038 ④ 039 ② 040 ② 041 ③ 042 ①
 043 $5\sqrt{2}$ 044 ② 045 270 046 ④ 047 1
 048 ⑤ 049 ⑤ 050 ③
 051 몫: $3x+7$, 나머지: 7 052 ① 053 ④
 054 -3 055 $x-4$ 056 몫: x^2-x+3 , 나머지: 5
 057 137

핵심
유형

최종 점검하기

- 1 ④ 2 ② 3 ③ 4 $x^2-y^2-z^2-2yz$
 5 ④ 6 -12 7 ② 8 ⑤ 9 ②
 10 1 11 48 12 ①
 13 몫: $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지: R 14 ①

핵심 유형 8~10쪽

유형01 답 $-x^2-5xy+7y^2$

$2X-A=3A-2B$ 에서 $2X=4A-2B$

$$\begin{aligned} \therefore X &= 2A-B = 2(x^2-2xy+3y^2)-(3x^2+xy-y^2) \\ &= 2x^2-4xy+6y^2-3x^2-xy+y^2 \\ &= -x^2-5xy+7y^2 \end{aligned}$$

유형02 답 ③

$(x^2+3x-2)(2x^2-x+6)$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $x^2 \times 6 + 3x \times (-x) + (-2) \times 2x^2 = 6x^2 - 3x^2 - 4x^2 = -x^2$
 따라서 x^2 의 계수는 -1 이다.

유형03 답 ④

$$④ (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = a^3 - (2b)^3 = a^3 - 8b^3$$

유형04 답 $x^4+4x^3+3x^2-2x-2$

$x^2+2x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2+2x+1)(x^2+2x-2) &= (X+1)(X-2) \\ &= X^2 - X - 2 \\ &= (x^2+2x)^2 - (x^2+2x) - 2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

유형05 답 ⑤

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ 에서

$$\begin{aligned} 2^2 &= 20 - 2xy \quad \therefore xy = 8 \\ \therefore x^3 - y^3 &= (x-y)^3 + 3xy(x-y) \\ &= 2^3 + 3 \times 8 \times 2 = 56 \end{aligned}$$

유형06 답 ②

$x^2+3x+1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$\begin{aligned} x + 3 + \frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = -3 \\ \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (-3)^3 - 3 \times (-3) = -18 \end{aligned}$$

유형07 답 $\frac{5}{6}$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 에서

$$\begin{aligned} 14 &= 2^2 - 2(ab+bc+ca) \\ \therefore ab+bc+ca &= -5 \\ \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

유형08 답 ③

$$\begin{aligned} (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &= (2^8-1)(2^8+1) \\ &= 2^{16}-1 \end{aligned}$$

유형09 답 22

직육면체의 가로 길이를 a , 세로 길이를 b , 높이를 c 라고 하면

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$$4(a+b+c)=24 \quad \therefore a+b+c=6$$

또 대각선의 길이가 $\sqrt{14}$ 이므로

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{14} \quad \therefore a^2+b^2+c^2=14$$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 에서

$$14=6^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore 2(ab+bc+ca)=22$$

따라서 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$2(ab+bc+ca)=22$$

유형10 ② $x-4$

다항식 x^3-2x^2+5x-3 을 다항식 A 로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x+2 이고 나머지가 $11x+5$ 이므로
 $x^3-2x^2+5x-3=A(x^2+2x+2)+11x+5$
 $A(x^2+2x+2)=x^3-2x^2-6x-8$
 $\therefore A=(x^3-2x^2-6x-8)\div(x^2+2x+2)$

$$\begin{array}{r} x-4 \\ x^2+2x+2 \overline{) x^3-2x^2-6x-8} \\ \underline{x^3+2x^2+2x} \\ -4x^2-8x-8 \\ \underline{-4x^2-8x-8} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A=x-4$

유형11 ①

다항식 $f(x)$ 를 $x-\frac{3}{2}$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{3}{2}\right)Q(x)+R \\ &= (2x-3)\times\frac{1}{2}Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x-3$ 으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

유형12 ② $a=-2, b=3, c=0, d=4, e=1$

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+3x^2-1 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}$$

$\therefore a=-2, b=3, c=0, d=4, e=1$

핵심 유형 완성하기 11~19쪽

001 ② $-10x^2+9xy-13y^2$

$2X-A=3(X-2B)$ 에서 $2X-A=3X-6B$

$$\begin{aligned} \therefore X &= -A+6B \\ &= -(4x^2-3xy+y^2)+6(-x^2+xy-2y^2) \\ &= -4x^2+3xy-y^2-6x^2+6xy-12y^2 \\ &= -10x^2+9xy-13y^2 \end{aligned}$$

002 ⑤

$$\begin{aligned} 2A-B-3(A-C) &= 2A-B-3A+3C \\ &= -A-B+3C \\ &= -(2x^3-3x+4)-(-3x^2+2x) \\ &\quad +3(2x^3-x^2+1) \\ &= -2x^3+3x-4+3x^2-2x+6x^3-3x^2+3 \\ &= 4x^3+x-1 \end{aligned}$$

003 ②

$$\begin{aligned} \langle x+2y-1, 3x-4y+1 \rangle &= 2(x+2y-1)-(3x-4y+1)+3 \\ &= 2x+4y-2-3x+4y-1+3 \\ &= -x+8y \end{aligned}$$

004 ④

$A+2B=x^3+6x^2-5x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$A-B=4x^3-9x^2+4x-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}$ 을 하면

$3B=-3x^3+15x^2-9x+6$

$\therefore B=-x^3+5x^2-3x+2$

따라서 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$\begin{aligned} A &= B+(4x^3-9x^2+4x-3) \\ &= (-x^3+5x^2-3x+2)+(4x^3-9x^2+4x-3) \\ &= 3x^3-4x^2+x-1 \end{aligned}$$

$\therefore A+B=(3x^3-4x^2+x-1)+(-x^3+5x^2-3x+2)$
 $= 2x^3+x^2-2x+1$

005 ⑪

$(x^3+4x-1)(2x^2-x+3)$ 의 전개식에서 x^3 항은
 $x^3 \times 3 + 4x \times 2x^2 = 3x^3 + 8x^3 = 11x^3$
 따라서 x^3 의 계수는 11이다.

006 ①

$(x-2y-3)(4x+5y-6)$ 의 전개식에서 xy 항은
 $x \times 5y + (-2y) \times 4x = 5xy - 8xy = -3xy$
 따라서 xy 의 계수는 -3 이다.

007 ③

$$\begin{aligned} (2x^2+x-3)(x^2-5x+k) \text{의 전개식에서 } x^2 \text{항은} \\ 2x^2 \times k + x \times (-5x) + (-3) \times x^2 = 2kx^2 - 5x^2 - 3x^2 \\ = (2k-8)x^2 \end{aligned}$$

따라서 x^2 의 계수는 $2k-8$ 이므로
 $2k-8=-6 \quad \therefore k=1$

008 ② -2

두 다항식 A, B 에서 x^3 의 계수를 각각 a, b 라고 하면 $A-2B$ 에서 x^3 의 계수는 $a-2b$ 이다.

$(x-1)(x^3-3x^2+1)$ 의 전개식에서 x^3 항은
 $x \times (-3x^2) + (-1) \times x^3 = -3x^3 - x^3 = -4x^3$

즉, 다항식 A 에서 x^3 의 계수는 -4 이므로

$a=-4$

$(2x^2-x+1)(x^3-x-2)$ 의 전개식에서 x^3 항은
 $2x^2 \times (-x) + 1 \times x^3 = -2x^3 + x^3 = -x^3$

즉, 다항식 B 에서 x^3 의 계수는 -1 이므로

$b=-1$

따라서 다항식 $A-2B$ 의 x^3 의 계수는

$a-2b=-4-2 \times (-1)=-2$

009 ② -1

$$\begin{aligned}
 & (1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})^2 \\
 &= (1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50}) \\
 & \text{이므로 주어진 다항식의 전개식에서 } x^4 \text{항은} \\
 & 1 \times x^4 + (-x) \times (-x^3) + x^2 \times x^2 + (-x^3) \times (-x) + x^4 \times 1 \\
 &= x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 \\
 &= 5x^4 \\
 &\therefore a=5 \\
 & \text{또 주어진 다항식의 전개식에서 } x^5 \text{항은} \\
 & 1 \times (-x^5) + (-x) \times x^4 + x^2 \times (-x^3) + (-x^3) \times x^2 \\
 & \quad + x^4 \times (-x) + (-x^5) \times 1 \\
 &= -x^5 - x^5 - x^5 - x^5 - x^5 - x^5 \\
 &= -6x^5 \\
 &\therefore b=-6 \\
 &\therefore a+b=-1
 \end{aligned}$$

010 ④

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ 중 임의의 4개의 일차식에서 x 만 뽑아 곱하면 x^4 이 되고, 여기에 남은 일차식의 상수항을 곱하면 x^4 의 계수가 되므로

$$x^4 + 2x^4 + 3x^4 + 4x^4 + 5x^4 = 15x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 15이다.

011 ⑤

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} & (a-b-1)^2 \\
 &= a^2 + (-b)^2 + (-1)^2 + 2 \times a \times (-b) + 2 \times (-b) \times (-1) \\
 & \quad + 2 \times (-1) \times a \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1 \\
 \textcircled{2} & (a+2b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2b + 3 \times a \times (2b)^2 + (2b)^3 \\
 &= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 \\
 \textcircled{3} & (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x^2-x \times 1 + 1^2) \\
 &= x^3 + 1 \\
 \textcircled{4} & (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \\
 &= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \\
 &= (x^4-y^4)(x^4+y^4) \\
 &= x^8 - y^8
 \end{aligned}$$

012 ② x^4+4x^2+16

$$\begin{aligned}
 (x^2+2x+4)(x^2-2x+4) &= (x^2+x \times 2+2^2)(x^2-x \times 2+2^2) \\
 &= x^4 + x^2 \times 2^2 + 2^4 \\
 &= x^4 + 4x^2 + 16
 \end{aligned}$$

013 ①

$$\begin{aligned}
 (2x-3)^3 &= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times 2x \times 3^2 - 3^3 \\
 &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \\
 & \text{따라서 } a=-36, b=54, c=-27 \text{이므로} \\
 a+b+c &= -9
 \end{aligned}$$

014 ②

$$\begin{aligned}
 & (x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx) \\
 &= \{x+(-y)+z\} \\
 & \quad \times \{x^2+(-y)^2+z^2-x \times (-y)-(-y) \times z-z \times x\} \\
 &= x^3+(-y)^3+z^3-3 \times x \times (-y) \times z \\
 &= x^3-y^3+z^3+3xyz
 \end{aligned}$$

015 ⑤

$$\begin{aligned}
 & (a+b-2c)^2 \\
 &= a^2+b^2+(-2c)^2+2 \times a \times b+2 \times b \times (-2c)+2 \times (-2c) \times a \\
 &= a^2+b^2+4c^2+2(ab-2bc-2ca) \\
 &= 41+2 \times (-16)=9
 \end{aligned}$$

016 ②

$$\begin{aligned}
 & (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
 &= \{(x+y)(x^2-xy+y^2)\} \{(x-y)(x^2+xy+y^2)\} \\
 &= (x^3+y^3)(x^3-y^3)=x^6-y^6
 \end{aligned}$$

017 ②

$$\begin{aligned}
 & x+y+z=2 \text{에서} \\
 & x+y=2-z, y+z=2-x, z+x=2-y \\
 & \therefore (x+y)(y+z)(z+x) \\
 &= (2-z)(2-x)(2-y) \\
 &= 2^3-2^2(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz \\
 &= 8-4 \times 2+2 \times (-1)-(-2)=0
 \end{aligned}$$

018 ⑨

$$\begin{aligned}
 & x^2-3x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2-3x+1)(x^2-3x-4)+2=(X+1)(X-4)+2 \\
 &= X^2-3X-2 \\
 &= (x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-2 \\
 &= x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x-2 \\
 &= x^4-6x^3+6x^2+9x-2
 \end{aligned}$$

따라서 $a=-6, b=6, c=9$ 이므로

$$a+b+c=9$$

019 ④

$$\begin{aligned}
 & x+y=X \text{로 놓으면} \\
 & (x+y+z)(x+y-z)=(X+z)(X-z)=X^2-z^2 \\
 &= (x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2
 \end{aligned}$$

020 ②

$$\begin{aligned}
 & (x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=\{(x-1)(x+5)\} \{(x+1)(x+3)\} \\
 &= (x^2+4x-5)(x^2+4x+3) \\
 & x^2+4x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=(X-5)(X+3)=X^2-2X-15 \\
 &= (x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15 \\
 &= x^4+8x^3+16x^2-2x^2-8x-15 \\
 &= x^4+8x^3+14x^2-8x-15
 \end{aligned}$$

021 답 ①

$$\begin{aligned}
 & (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-3x^2+1) \\
 &= (x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1) \\
 & x^4+1=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1) = (X+x^2)(X-3x^2) \\
 &= X^2-2x^2X-3x^4 \\
 &= (x^4+1)^2-2x^2(x^4+1)-3x^4 \\
 &= x^8+2x^4+1-2x^6-2x^2-3x^4 \\
 &= x^8-2x^6-x^4-2x^2+1
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=-2, c=-1, d=-2$ 이므로
 $abcd=-4$

022 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 & (x+y)^2=x^2+y^2+2xy \text{에서} \\
 & 1^2=5+2xy \quad \therefore xy=-2 \\
 & \therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \\
 &=1^3-3 \times (-2) \times 1=7
 \end{aligned}$$

023 답 ①

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} \\
 &= \frac{4^2-2 \times (-2)}{-2} = -10
 \end{aligned}$$

024 답 ④

$$\begin{aligned}
 & x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y) \text{에서} \\
 & -9=(-3)^3+3xy \times (-3) \quad \therefore xy=-2 \\
 & \therefore x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy \\
 &= (-3)^2+(-2)=7
 \end{aligned}$$

025 답 $10\sqrt{13}$

$$\begin{aligned}
 & (x+y)^2=x^2+y^2+2xy \text{에서} \\
 & 3^2=11+2xy \quad \therefore xy=-1 \\
 & \therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy \\
 &= 3^2-4 \times (-1)=13 \\
 & \text{그런데 } x>y \text{이므로 } x-y=\sqrt{13} \\
 & \therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y) \\
 &= (\sqrt{13})^3+3 \times (-1) \times \sqrt{13} \\
 &= 13\sqrt{13}-3\sqrt{13}=10\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

026 답 ①

$$\begin{aligned}
 & x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\
 & xy=(1+\sqrt{2}) \times (1-\sqrt{2})=-1 \\
 & \therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3+y^3}{xy} \\
 &= \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\
 &= \frac{2^3-3 \times (-1) \times 2}{-1} = -14
 \end{aligned}$$

027 답 ④

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -2 \text{에서 } \frac{x-y}{xy} = 2 \\
 & \frac{2}{xy} = 2 \quad \therefore xy=1 \\
 & \therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\
 &= \{(x-y)^2+2xy\}^2-2(xy)^2 \\
 &= (2^2+2 \times 1)^2-2 \times 1^2=34
 \end{aligned}$$

028 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 & x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \text{에서} \\
 & 7=1^3-3xy \times 1 \quad \therefore xy=-2 \\
 & \therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \\
 &= 1^2-2 \times (-2)=5 \\
 & (x^3+y^3)(x^2+y^2)=x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5 \text{이므로} \\
 & x^5+y^5=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y) \\
 &= 7 \times 5 - (-2)^2 \times 1 = 31
 \end{aligned}$$

029 답 ④

$$\begin{aligned}
 & x^2-x-1=0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\
 & x-1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=1 \\
 & \therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right) \\
 &= 1^3+3 \times 1=4
 \end{aligned}$$

030 답 11

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$$

031 답 14

$$\begin{aligned}
 & x^2-4x+1=0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\
 & x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4 \\
 & x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \\
 &= 4^2-2=14 \\
 & x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
 &= 4^3-3 \times 4=52 \\
 & \therefore x^3-2x^2-10-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10 \\
 &= 52-2 \times 14-10=14
 \end{aligned}$$

032 답 ②

$$\begin{aligned}
 & x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \text{에서} \\
 & 7=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \quad \therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \\
 & \text{그런데 } x>0 \text{이므로 } x+\frac{1}{x}=3 \\
 & \therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
 &= 3^3-3 \times 3=18
 \end{aligned}$$

033 답 ④

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4 = (-2\sqrt{3})^2 + 4 = 16$$

그런데 $x^2 > 0$ 이므로 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{에서}$$

$$4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad \therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3} &= x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (\sqrt{6})^3 - 3 \times \sqrt{6} + \sqrt{6} = 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

034 답 ③

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 4^2 - 2 \times 5 = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{6}{2} = 3$$

035 답 ①

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$21 = (-1)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -10$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (-1) \times \{21 - (-10)\} + 3 \times (-8) = -55 \end{aligned}$$

036 답 9

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \text{에서}$$

$$6 = 2^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx = -1$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \text{에서}$$

$$8 = 2 \times \{6 - (-1)\} + 3xyz$$

$$\therefore xyz = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \\ &= (xy+yz+zx)^2 - 2(xy^2z + yz^2x + zx^2y) \\ &= (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) \\ &= (-1)^2 - 2 \times (-2) \times 2 = 9 \end{aligned}$$

037 답 ②

$$a-b=5, b-c=-2 \text{를 변끼리 더하면 } a-c=3$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{5^2 + (-2)^2 + 3^2\} \\ &= 19 \end{aligned}$$

038 답 ④

$$\begin{aligned} (3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4) &= (3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4) \\ &= (3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4) \\ &= (3^4-2^4)(3^4+2^4) \\ &= 3^8-2^8 \end{aligned}$$

039 답 ②

2018=a로 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{2018^2}{2017(2018^2+2019)+1} &= \frac{a^2}{(a-1)(a^2+a+1)+1} \\ &= \frac{a^2}{a^3-1+1} = \frac{a^2}{a^3} \\ &= \frac{1}{a} = \frac{1}{2018} \end{aligned}$$

040 답 ②

100=a로 놓으면

$$\begin{aligned} 99^3 + 101^3 &= (a-1)^3 + (a+1)^3 \\ &= (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) \\ &= 2a^3 + 6a \\ &= 2 \times 100^3 + 6 \times 100 \\ &= 2000600 \end{aligned}$$

따라서 구하는 각 자리의 숫자의 합은

$$2+6=8$$

041 답 ③

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 5 \times 17 \times 257 + 1}{32} &= \frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{(2^8-1)(2^8+1)+1}{2^5} \\ &= \frac{2^{16}-1+1}{2^5} \\ &= \frac{2^{16}}{2^5} = 2^{11} \end{aligned}$$

042 답 ①

$$10=x \text{로 놓으면 } 10.3 = 10 + \frac{3}{10} = x + \frac{3}{x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 10.3^3 &= \left(x + \frac{3}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{27}{x^3} + 3 \times x \times \frac{3}{x} \left(x + \frac{3}{x}\right) \\ &= x^3 + \frac{27}{x^3} + 9x + \frac{27}{x} \\ &= 10^3 + \frac{27}{10^3} + 9 \times 10 + \frac{27}{10} \\ &= 1092.727 \end{aligned}$$

따라서 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 7, 둘째 자리의 숫자는 2
이므로 $a=7, b=2$

$$\therefore a+b=9$$

043 ④ $5\sqrt{2}$

직육면체의 가로, 세로의 길이를 a , 세로의 길이를 b , 높이를 c 라고 하면
직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$$4(a+b+c)=48 \quad \therefore a+b+c=12$$

$$\text{또 겉넓이가 94이므로 } 2(ab+bc+ca)=94$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ =12^2-94=50$$

따라서 구하는 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

044 ②

직사각형 ABCD의 가로, 세로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라고 하면
직사각형의 둘레의 길이가 16이므로

$$2(x+y)=16 \quad \therefore x+y=8$$

또 직사각형 ABCD가 반지름의 길이가 3인 원에 내접하므로 대각선의 길이는 원의 지름인 6이다.

$$\text{이때 피타고라스 정리에 의하여 } x^2+y^2=6^2$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \text{에서}$$

$$36=8^2-2xy \quad \therefore xy=14$$

따라서 구하는 직사각형의 넓이는 14이다.

045 ④ 270

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x , y 라고 하면

$$x+y=9, x^3+y^3=243$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \text{에서}$$

$$243=9^3-3xy \times 9 \quad \therefore xy=18$$

따라서 구하는 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$$6(x^2+y^2)=6\{(x+y)^2-2xy\} \\ =6 \times (9^2-2 \times 18)=270$$

046 ④

다항식 $2x^3+3x^2-x+2$ 를 다항식 A 로 나누었을 때의 몫이 $2x+1$ 이고 나머지가 3이므로

$$2x^3+3x^2-x+2=A(2x+1)+3$$

$$A(2x+1)=2x^3+3x^2-x-1$$

$$\therefore A=(2x^3+3x^2-x-1) \div (2x+1)$$

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \\ 2x+1 \overline{) 2x^3+3x^2-x-1} \\ \underline{2x^3+x^2} \\ 2x^2-x \\ \underline{2x^2+x} \\ -2x-1 \\ \underline{-2x-1} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A=x^2+x-1$$

047 ①

$$a=2, b=-7, c=6 \text{이므로 } a+b+c=1$$

048 ⑤

다항식 $3x^3-2x^2+10$ 을 x^2-x+5 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ x^2-x+5 \overline{) 3x^3-2x^2+10} \\ \underline{3x^3-3x^2+15x} \\ x^2-15x+10 \\ \underline{x^2-x+5} \\ -14x+5 \end{array}$$

따라서 몫은 $3x+1$, 나머지는 $-14x+5$ 이므로

$$a=3, b=1, c=-14, d=5$$

$$\therefore ad+bc=15-14=1$$

049 ⑤

다항식 $x^4-x^3+6x^2+2x+11$ 을 x^2+1 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2-x+5 \\ x^2+1 \overline{) x^4-x^3+6x^2+2x+11} \\ \underline{x^4+x^2} \\ -x^3+5x^2+2x \\ \underline{-x^3-x} \\ 5x^2+3x+11 \\ \underline{5x^2+x+5} \\ 3x+6 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-x+5$, $R(x)=3x+6$ 이므로

$$Q(1)-R(-1)=5-3=2$$

050 ③

다항식 x^3-4x^2+ax-5 를 x^2+x+b 로 나누면

$$\begin{array}{r} x-5 \\ x^2+x+b \overline{) x^3-4x^2+ax-5} \\ \underline{x^3+x^2+bx} \\ -5x^2+(a-b)x-5 \\ \underline{-5x^2-5x-5b} \\ (a-b+5)x-5+5b \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로 $(a-b+5)x-5+5b=0$

따라서 $a-b+5=0$, $-5+5b=0$ 이므로

$$a=-4, b=1 \quad \therefore a+b=-3$$

051 ④ 몫: $3x+7$, 나머지: 7

다항식 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x-5$ 이고 나머지가 3이므로

$$f(x)=(x+2)(3x-5)+3=3x^2+x-7$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+7 \\ x-2 \overline{) 3x^2+x-7} \\ \underline{3x^2-6x} \\ 7x-7 \\ \underline{7x-14} \\ 7 \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $3x+7$, 나머지는 7이다.

052 답 ①

다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)Q(x) + R \\ &= (2x+1) \times \frac{1}{2}Q(x) + R \end{aligned}$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

053 답 ④

다항식 $f(x)$ 를 $3x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-2)Q(x) + R \\ &= \left(x - \frac{2}{3}\right) \times 3Q(x) + R \end{aligned}$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $x-\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R 이다.

054 답 -3

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+2x-3 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -6 \end{array}$$

$$\therefore a=-1, b=0, c=1, d=3, e=-6$$

$$\therefore a+b+c+d+e=-3$$

055 답 $x-4$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 9 \\ & & -2 & 10 & -8 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 4 & 1 \\ & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x)=x^2-5x+4$$

따라서 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 $x-4$ 이다.

056 답 몫: x^2-x+3 , 나머지: 5

다항식 $f(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫이 $2x^2-2x+6$, 나머지가 5이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+6) + 5 \\ &= (2x-1)(x^2-x+3) + 5 \end{aligned}$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+3 , 나머지는 5이다.

057 답 137

주어진 조립제법은 다항식 $6x^3+2ax^2+2bx+6$ 을 $x-\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} \square & 6 & 2a & 2b & 6 \\ & & 4 & 8 & -4 \\ \hline & 6 & p & q & 2 \end{array}$$

$$\frac{2}{3}p=8, \frac{2}{3}q=-4 \text{에서}$$

$$p=12, q=-6$$

$$\text{또 } 2a+4=p, 2b+8=q \text{에서}$$

$$a=4, b=-7$$

$$\begin{aligned} \therefore 6x^3+8x^2-14x+6 &= \left(x - \frac{2}{3}\right)(6x^2+12x-6) + 2 \\ &= (3x-2)(2x^2+4x-2) + 2 \end{aligned}$$

$6x^3+8x^2-14x+6=(3x-2)(2x^2+4x-2)+2$ 의 양변을 2로 나누면

$$3x^3+4x^2-7x+3=(3x-2)(x^2+2x-1)+1$$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-1$, $R=1$ 이므로

$$\begin{aligned} aQ(b)+R &= 4Q(-7)+1 \\ &= 4 \times 34 + 1 = 137 \end{aligned}$$

핵심 유형 최종 점검하기

20~21쪽

1 답 ④

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

$$\begin{aligned} &3(A-B)+2(B+C) \\ &= 3A-3B+2B+2C \\ &= 3A-B+2C \\ &= 3(2x^3-x^2-x+6)-(x^3-2x)+2(3x^3-x^2) \\ &= 6x^3-3x^2-3x+18-x^3+2x+6x^3-2x^2 \\ &= 11x^3-5x^2-x+18 \end{aligned}$$

2 답 ②

유형 02 다항식의 전개식에서 계수

$$\begin{aligned} &(x^2-2x+1)(2x^3-x+3) \text{의 전개식에서} \\ &x^3 \text{항은 } x^2 \times (-x) + 1 \times 2x^3 = x^3 \quad \therefore a=1 \\ &x^2 \text{항은 } x^2 \times 3 + (-2x) \times (-x) = 5x^2 \quad \therefore b=5 \\ &\therefore a+b=6 \end{aligned}$$

3 답 ③

유형 03 곱셈 공식을 이용한 식의 전개

$$\begin{aligned} &(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) \\ &= x^3+y^3+x^3-8y^3 \\ &= 2x^3-7y^3 \end{aligned}$$

4 답 $x^2-y^2-z^2-2yz$

유형 04 공통부분이 있는 식의 전개

$$\begin{aligned} &(x+y+z)(x-y-z) = \{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\} \\ &y+z=X \text{로 놓으면} \\ &\{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\} = (x+X)(x-X) \\ &= x^2-X^2 = x^2-(y+z)^2 \\ &= x^2-y^2-z^2-2yz \end{aligned}$$

5 답 ④

유형 04 공통부분이 있는 식의 전개

$$\begin{aligned} & (x-4y)(x-2y)(x-y)(x+y) \\ &= \{(x-4y)(x+y)\} \{(x-2y)(x-y)\} \\ &= (x^2-3xy-4y^2)(x^2-3xy+2y^2) \\ & x^2-3xy=X \text{로 놓으면} \\ & (x^2-3xy-4y^2)(x^2-3xy+2y^2) \\ &= (X-4y^2)(X+2y^2) \\ &= X^2-2y^2X-8y^4 \\ &= (x^2-3xy)^2-2y^2(x^2-3xy)-8y^4 \\ &= x^4-6x^3y+9x^2y^2-2x^2y^2+6xy^3-8y^4 \\ &= x^4-6x^3y+7x^2y^2+6xy^3-8y^4 \end{aligned}$$

6 답 -12

유형 05 곱셈 공식의 변형 - $x^n \pm y^n$ 의 값

$$\begin{aligned} & (x+y)^2=x^2+y^2+2xy \text{에서} \\ & (-2)^2=6+2xy \quad \therefore xy=-1 \\ & \therefore x^3+y^3-2xy=(x+y)^3-3xy(x+y)-2xy \\ & \quad =(-2)^3-3 \times (-1) \times (-2)-2 \times (-1)=-12 \end{aligned}$$

7 답 ②

유형 06 곱셈 공식의 변형 - $x^n \pm \frac{1}{x^n}$ 의 값

$$\begin{aligned} & x^2-3x-1=0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ & x-3-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=3 \\ & \therefore \frac{x^4+1}{x^2}-\frac{x^6-1}{x^3}=x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right) \\ & \quad =\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\} \\ & \quad =3^2+2-(3^3+3 \times 3)=-25 \end{aligned}$$

8 답 ⑤

유형 07 곱셈 공식의 변형 - $a^n+b^n+c^n$ 의 값

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \text{에서 } \frac{ab+bc+ca}{abc}=1 \\ & \frac{ab+bc+ca}{-4}=1 \quad \therefore ab+bc+ca=-4 \\ & \therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ & \quad =1^2-2 \times (-4)=9 \end{aligned}$$

9 답 ②

유형 07 곱셈 공식의 변형 - $a^n+b^n+c^n$ 의 값

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{에서} \\ & 12=2^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-4 \\ & a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \text{에서} \\ & 8=2 \times \{12-(-4)\}+3abc \quad \therefore abc=-8 \end{aligned}$$

10 답 1

유형 08 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

$$\begin{aligned} & 1004=a \text{로 놓으면} \\ & \frac{1002 \times 1006+4}{1004^2}=\frac{(a-2)(a+2)+4}{a^2} \\ & \quad =\frac{a^2-4+4}{a^2}=1 \end{aligned}$$

11 답 48

유형 09 곱셈 공식의 도형에의 활용

직사각형의 가로, 세로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라고 하면 직사각형의 둘레의 길이가 28이므로
 $2(x+y)=28$
 $\therefore x+y=14$
 직사각형의 대각선의 길이는 반지름의 길이 10과 같으므로 피타고라스 정리에 의하여
 $x^2+y^2=10^2$
 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서
 $100=14^2-2xy$
 $\therefore xy=48$
 따라서 구하는 직사각형의 넓이는 48이다.

12 답 ①

유형 10 다항식의 나눗셈

다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 x^2-3 이고 나머지가 -1 이므로
 $f(x)=(x-2)(x^2-3)-1$
 $=x^3-2x^2-3x+5$
 $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누면

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2-1 \overline{) x^3-2x^2-3x+5} \\ \underline{x^3-2x^2+2x-2} \\ -2x^2-2x+7 \\ \underline{-2x^2-2x+2} \\ -2x+5 \\ \underline{-2x+2} \\ 3 \end{array}$$

 따라서 나머지가 $-2x+3$ 이므로
 $a=-2$

13 답 몫: $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지: R

유형 11 몫과 나머지의 변형

다항식 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로
 $f(x)=(x+3)Q(x)+R$
 $= (3x+9) \times \frac{1}{3}Q(x)+R$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $3x+9$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

14 답 ①

유형 12 조립제법

조립제법을 이용하여 다항식 x^3-3x+a 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & a \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & a-2 \end{array}$$

$\therefore b=1, c=0, d=1, e=-2$
 이때 $a-2=-1$ 이므로 $a=1$

02 나머지정리와 인수분해

핵심
유형

유형01 ①	유형02 -2	유형03 5
유형04 ②	유형05 20	유형06 ⑤
유형08 $-x+2$	유형09 4	유형10 1
유형11 ①	유형12 2	유형13 ④
유형15 ④	유형16 ⑤	유형17 ③
유형19 ④	유형20 ③	유형21 ⑤
		유형22 ①

핵심
유형

완성하기

001 3	002 2	003 6	004 ②	005 ⑤
006 -6	007 ①	008 ④	009 ①	010 1
011 ④	012 ③	013 ②	014 ⑤	015 ⑤
016 ②	017 ②	018 -3	019 ③	020 -6
021 12	022 14	023 ③	024 ①	
025 $4x-5$		026 ④	027 $2x$	028 ④
029 $-x^2+2x-1$		030 $2x^2+5x+1$		031 ①
032 4	033 ①	034 18	035 ②	
036 -12	037 6	038 ①	039 2	040 ⑤
041 -10	042 ③	043 -2	044 ③	045 ①
046 ②	047 3	048 ④	049 ⑤	
050 $(x+y)^2(x-y)^2$	051 ⑤	052 $x(x-3y)^3$		
053 $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$		054 ③		
055 ②	056 $(a+b-1)(a+b-2)$	057 ①		
058 ③	059 -13	060 ②	061 ③	062 ⑤
063 ①	064 ③	065 ④		
066 $(x-y+1)(x^2-x-y+1)$		067 ④		
068 $\perp, \sqsubset$	069 14	070 $(x+1)(x+2)(x-3)$		
071 ⑤	072 ④	073 2	074 ②	075 ②
076 ④	077 ③	078 정삼각형		079 ⑤
080 ③	081 ④	082 ②	083 417	084 ④
085 ①	086 ③			

핵심
유형

최종 점검하기

1 ③	2 ①	3 ②	4 64	5 ③
6 11	7 7	8 -5	9 ⑤	10 ⑤
11 12	12 24	13 ④	14 ⑤	
15 $2x^2+10x-6$	16 ③	17 ④		
18 $(x-y-z)(x+y-z-1)$		19 2	20 -5	
21 ⑤	22 12	23 ②		

핵심 유형 24~26쪽

유형01 답 ①

주어진 등식에서 좌변을 정리하면

$$x^3 + (a-9)x + 3a = x^3 + bx - 18$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-9=b, 3a=-18$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-6, b=-15$$

$$\therefore a+b=-21$$

유형02 답 -2

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2=-2c \quad \therefore c=-1$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a+3=0 \quad \therefore a=-3$$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$6-2a=6b, 12=6b \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b+c=-2$$

유형03 답 5

주어진 이차방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-(k+1)+(k-3)a-b+1=0$$

$$\therefore (a-1)k-3a-b+1=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, -3a-b+1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-2$$

$$\therefore a^2+b^2=1+4=5$$

유형04 답 ②

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$1=a_0$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6)-a_0 \\ =0-1=-1$$

유형05 답 20

다항식 x^3+ax^2+b 를 x^2-x+2 로 나누었을 때의 몫을

$x+c$ (c 는 상수)라고 하면

$$x^3+ax^2+b=(x^2-x+2)(x+c)-6x+4$$

$$=x^3+(c-1)x^2-(c+4)x+2c+4$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-1, 0=c+4, b=2c+4$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=-5, b=-4, c=-4$$

$$\therefore ab=20$$

유형06 답 ⑤

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ & & 2 & 6 & 10 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 5 & 14 \\ & & 2 & 10 & \\ \hline 2 & 1 & 5 & 15 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & 7 \end{array}$$

따라서 $a=1, b=7, c=15, d=14$ 이므로 $a+b-c+d=7$

유형07 답 8

$f(x)=x^3+ax^2+bx-5$ 라고 하면 나머지정리에 의하여

$$f(1)=2, f(-2)=-1$$

$$f(1)=2 \text{에서 } 1+a+b-5=2, a+b=6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(-2)=-1 \text{에서 } -8+4a-2b-5=-1, 2a-b=6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

$$\therefore ab=8$$

유형08 답 $-x+2$

나머지정리에 의하여 $f(-2)=4, f(3)=-1$

$f(x)$ 를 x^2-x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x-6)Q(x) + ax+b \\ &= (x+2)(x-3)Q(x) + ax+b \end{aligned}$$

$$f(-2)=4 \text{에서 } -2a+b=4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(3)=-1 \text{에서 } 3a+b=-1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

따라서 구하는 나머지는 $-x+2$

유형09 답 4

나머지정리에 의하여 $f(-3)=4$

따라서 $f(-4x+9)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-4 \times 3 + 9) = f(-3) = 4$$

유형10 답 1

$f(x)=x^3-3x^2+6$ 이라고 하면 $f(1)=4$ 이므로

$$f(x)=(x-1)Q(x)+4 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $f(-1)=2$ 이고 $Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-1)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$2 = -2Q(-1) + 4 \quad \therefore Q(-1) = 1$$

유형11 답 ①

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$x^{100} = (x+1)Q(x) + R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=1$

$x^{100} = (x+1)Q(x) + 1$ 의 양변에 $x=19$ 를 대입하면

$$19^{100} = 20Q(19) + 1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

유형12 답 2

$f(x)=ax^3-5x^2+bx+2$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $x-1, x-2$ 로 각각 나누어떨어지므로

$$f(1)=0, f(2)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } a-5+b+2=0, a+b=3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(2)=0 \text{에서 } 8a-20+2b+2=0, 4a+b=9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore ab=2$$

유형13 답 ④

$f(x)=2x^3-5x^2+ax+b$ 라고 하면 $f(x)$ 가 x^2-x-6 , 즉 $(x+2)(x-3)$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(-2)=0, f(3)=0$$

$$f(-2)=0 \text{에서 } -16-20-2a+b=0$$

$$2a-b=-36 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 54-45+3a+b=0$$

$$3a+b=-9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9, b=18$

$$\therefore a+b=9$$

핵심 유형 완성하기

27~33쪽

001 답 3

주어진 등식에서 우변을 정리하면

$$x^3-2x^2+ax-32=x^3+(b+c)x^2+(bc-16)x-16b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2=b+c, a=bc-16, -32=-16b$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=-24, b=2, c=-4$$

$$\therefore \frac{a}{bc} = \frac{-24}{2 \times (-4)} = 3$$

002 답 2

주어진 등식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+y-3)k+2x-3y+4=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x+y-3=0, 2x-3y+4=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=2$

$$\therefore xy=2$$

003 답 6

주어진 등식에서 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x+(a-2b)y+c=4x+y+2$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a+b=4 \quad \dots\dots ㉠, a-2b=1 \quad \dots\dots ㉡, c=2$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=1$

$$\therefore abc=6$$

004 답 ②

주어진 식의 일정한 값을 k 라고 하면

$$\frac{6x+3a}{2x+4}=k \quad \therefore 6x+3a=2kx+4k$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$6=2k, 3a=4k$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=3, a=4$

005 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2b=-4 \quad \therefore b=2$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$3c=-3 \quad \therefore c=-1$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$6a=6 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a+b+c=2$$

006 답 -6

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$c=3$$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$9=-3b+c, 9=-3b+3 \quad \therefore b=-2$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$5=-2a-2b+c, 5=-2a+4+3 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore abc=-6$$

007 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=1+a+b, a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$ 를 대입하면

$$0=4+2a+b, 2a+b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=2$

$$\therefore ab=-6$$

008 답 ④

주어진 이차방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$a-b(k+2)+a(k-1)=4$$

$$\therefore (a-b)k-2b-4=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-b=0, -2b-4=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-2$

$$\therefore ab=4$$

009 답 ①

$x-y=-1$ 에서 $x=y-1$ 을 주어진 등식에 대입하면

$$(y-1)^2-2(y-1)=ay^2+by+c$$

$$y^2-4y+3=ay^2+by+c$$

이 등식이 y 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=-4, c=3 \quad \therefore abc=-12$$

010 답 1

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-1=a_0$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5)-a_0 \\ =0-(-1)=1$$

011 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(1+1-1)^7=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}$$

$$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}=1$$

012 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면 } 2^{10}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=2^9=512$$

013 답 ②

$$(3x-5)^5(x^3-4x^2+3x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{23}x^{23} \\ (a_0, a_1, \cdots, a_{23} \text{은 상수})$$

이라 하고 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-32=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{23}$$

따라서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 -32 이다.

014 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2+b 를 x^2-x+3 으로 나누었을 때의 몫을

$x+c$ (c 는 상수)라고 하면

$$x^3+ax^2+b=(x^2-x+3)(x+c)+2 \\ =x^3+(c-1)x^2+(-c+3)x+3c+2$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-1, 0=-c+3, b=3c+2$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=11, c=3$

$$\therefore a+b=13$$

015 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2+bx+6 을 x^2-4x+3 으로 나누었을 때의 몫을

$x+c$ (c 는 상수)라고 하면

$$x^3+ax^2+bx+6=(x^2-4x+3)(x+c) \\ =x^3+(c-4)x^2+(-4c+3)x+3c$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-4, b=-4c+3, 6=3c$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-5, c=2$

$$\therefore ab=10$$

016 답 ②

다항식 $x^4+2x^3+4x^2+4$ 를 x^2+ax+b 로 나누었을 때의 몫이

x^2+1 이고 나머지가 $-2x+1$ 이므로

$$x^4+2x^3+4x^2+4=(x^2+ax+b)(x^2+1)-2x+1$$

$$=x^4+ax^3+(b+1)x^2+(a-2)x+b+1$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2=a, 4=b+1, 0=a-2, 4=b+1$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로 $a-b=-1$

017 답 ②

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ & & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 5 & 7 & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & & 6 & \end{array}$$

따라서 $a=6, b=7, c=3$ 이므로

$$a-b+c=2$$

018 답 -3

$$p-1=2 \text{에서 } p=3$$

$$q-2=-1 \text{에서 } q=1$$

주어진 조립제법에서 $a=1, b=1, c=-1$ 이므로

$$abc p q = -3$$

019 답 ③

$$x^3+8x^2+21x+21=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c \text{이므로}$$

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 8 & 21 & 21 \\ & & -2 & -12 & -18 \\ \hline -2 & 1 & 6 & 9 & 3 \\ & & -2 & -8 & \\ \hline -2 & 1 & 4 & 1 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & & 2 & \end{array}$$

따라서 $a=2, b=1, c=3$ 이므로

$$f(x)=(x+2)^3+2(x+2)^2+(x+2)+3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(98) &= 100^3 + 2 \times 100^2 + 100 + 3 \\ &= 1000000 + 20000 + 100 + 3 \\ &= 1020103 \end{aligned}$$

이때 각 자리의 숫자의 합은

$$1+2+1+3=7$$

020 답 -6

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ 라고 하면 나머지정리에 의하여

$$f(-1)=1, f(-3)=-3$$

$$f(-1)=1 \text{에서 } -1+2-a+b=1$$

$$a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-3)=-3 \text{에서 } -27+18-3a+b=-3$$

$$3a-b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3, b=-3$

$$\therefore a+b=-6$$

021 답 12

나머지정리에 의하여 $f(2)=4$

따라서 $(x+1)f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$(2+1)f(2)=3 \times 4=12$$

022 답 14

나머지정리에 의하여 $f(-1)=2$ 이므로

$$-1+a+5=2 \quad \therefore a=-2$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=14$$

023 답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-ax+1$ 이라고 하면 나머지정리에 의하여

$$f(-2)=f(3) \text{이므로 } 2a+1=-3a+46 \quad \therefore a=9$$

024 답 ①

나머지정리에 의하여 $f(3)=3, g(3)=-2$

따라서 $f(x)g(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)g(3)=-6$$

025 답 $4x-5$

나머지정리에 의하여 $f(1)=-1, f(2)=3$

$f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b(a, b \text{는 상수})$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=3 \text{에서 } 2a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=4, b=-5$

따라서 구하는 나머지는 $4x-5$

026 답 ④

나머지정리에 의하여 $f(-2)=1, f(2)=5$

$x^2f(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b(a, b \text{는 상수})$ 라고 하면

$$\begin{aligned} x^2f(x) &= (x^2-4)Q(x) + ax + b \\ &= (x+2)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$\text{양변에 } x=-2 \text{를 대입하면 } 4 \times 1 = -2a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } 4 \times 5 = 2a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=4, b=12$

따라서 $R(x)=4x+12$ 이므로 $R(1)=16$

027 답 2x

$f(x)$ 를 x^2+x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라고 하면

$$f(x) = (x^2+x-6)Q_1(x) + 4$$

$$= (x+3)(x-2)Q_1(x) + 4$$

$$\therefore f(2) = 4$$

$f(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라고 하면

$$f(x) = (x^2-2x-3)Q_2(x) + x-1$$

$$= (x+1)(x-3)Q_2(x) + x-1$$

$$\therefore f(-1) = -2$$

$f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면

$$f(x) = (x^2-x-2)Q(x) + ax+b$$

$$= (x+1)(x-2)Q(x) + ax+b$$

$$f(-1) = -2 \text{에서 } -a+b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = 4 \text{에서 } 2a+b = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2, b=0$

따라서 구하는 나머지는 $2x$

028 답 ④

$x^{10}+x^7+x^5+x^2$ 을 x^3-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라고 하면

$$x^{10}+x^7+x^5+x^2 = (x^3-x)Q(x) + ax^2+bx+c$$

$$= x(x+1)(x-1)Q(x) + ax^2+bx+c$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0=c \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=a-b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$4=a+b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면 $a=2, b=2, c=0$

따라서 구하는 나머지는 $2x^2+2x$

029 답 $-x^2+2x-1$

$f(x)$ 를 $x(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라고 하면

$$f(x) = x(x+1)Q_1(x) + 3x-1$$

$$\therefore f(0) = -1, f(-1) = -4$$

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라고 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q_2(x) + x-3$$

$$\therefore f(2) = -1$$

$f(x)$ 를 $x(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라고 하면

$$f(x) = x(x+1)(x-2)Q(x) + ax^2+bx+c$$

$$f(0) = -1 \text{에서 } c = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-1) = -4 \text{에서 } a-b+c = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f(2) = -1 \text{에서 } 4a+2b+c = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2, c=-1$

따라서 구하는 나머지는 $-x^2+2x-1$

030 답 $2x^2+5x+1$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라고 하면

$$f(x) = (x+1)^2(x+2)Q(x) + ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이므로 ①에서

ax^2+bx+c 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이다.

$$\therefore ax^2+bx+c = a(x+1)^2 + x-1$$

이를 ①에 대입하면

$$f(x) = (x+1)^2(x+2)Q(x) + a(x+1)^2 + x-1$$

한편 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -1 이므로

$$f(-2) = -1 \text{에서 } a-3 = -1 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 나머지는

$$2(x+1)^2 + x-1 = 2x^2+5x+1$$

031 답 ①

나머지정리에 의하여 $f(-1) = -2$

따라서 $f(x+6)$ 을 $x+7$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-7+6) = f(-1) = -2$$

032 답 4

$f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$f(x) = (x+2)(x-1)Q(x) + x+3$$

$$\therefore f(1) = 4$$

따라서 $f(3x-5)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3 \times 2 - 5) = f(1) = 4$$

033 답 ①

$f(x)$ 를 x^2+5x+6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$f(x) = (x^2+5x+6)Q(x) + 3x+2$$

$$= (x+3)(x+2)Q(x) + 3x+2$$

$$\therefore f(-2) = -4$$

따라서 $(4x^2-1)f(2x-5)$ 를 $2x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$\left(4 \times \frac{9}{4} - 1\right) f\left(2 \times \frac{3}{2} - 5\right) = 8f(-2)$$

$$= 8 \times (-4) = -32$$

034 답 18

$f(x) = x^3-x-5$ 라고 하면 $f(2) = 1$ 이므로

$$x^3-x-5 = (x-2)Q(x) + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 $Q(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $Q(3)$ 이므로 ①의

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$19 = Q(3) + 1 \quad \therefore Q(3) = 18$$

035 답 ②

$$f(x) = (x+3)Q(x) + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 나머지정리에 의하여 $f(2) = -3$ 이고 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누

었을 때의 나머지는 $Q(2)$ 이므로 ①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$-3 = 5Q(2) + 2 \quad \therefore Q(2) = -1$$

036 답 -12

$$f(x) = (x-1)Q(x) + 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 나머지정리에 의하여 $Q(-2)=5$ 이고 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $f(-2) = -3Q(-2) + 3 = -3 \times 5 + 3 = -12$

037 답 6

$$f(x) = (x^2 - 2x + 4)Q(x) + 3x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라고 하면

$$Q(x) = (x+2)Q'(x) + 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 4)\{(x+2)Q'(x) + 1\} + 3x + 2 \\ &= (x^3 + 8)Q'(x) + x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

따라서 $R(x) = x^2 + x + 6$ 이므로

$$R(-1) = 6$$

038 답 ①

x^{50} 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$x^{50} = (x-1)Q(x) + R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=1$

$$x^{50} = (x-1)Q(x) + 1 \text{의 양변에 } x=9 \text{를 대입하면}$$

$$9^{50} = 8Q(9) + 1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

039 답 2

$2x^{50}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$2x^{50} = (x+1)Q(x) + R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=2$

$$2x^{50} = (x+1)Q(x) + 2 \text{의 양변에 } x=3 \text{를 대입하면}$$

$$2 \times 3^{50} = 4Q(3) + 2$$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

040 답 ⑤

$$2^{2018} = (2^5)^{403} \times 2^3 = 8 \times 32^{403}$$

$8x^{403}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$8x^{403} = (x-1)Q(x) + R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=8$

$$8x^{403} = (x-1)Q(x) + 8 \text{의 양변에 } x=32 \text{를 대입하면}$$

$$8 \times 32^{403} = 31Q(32) + 8$$

$$\therefore 2^{2018} = 31Q(32) + 8$$

따라서 구하는 나머지는 8이다.

041 답 -10

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 15$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $x+1$, $x-3$ 으로 각각 나누어떨어지므로

$$f(-1) = 0, f(3) = 0$$

$$f(-1) = 0 \text{에서 } -1 + a - b - 15 = 0$$

$$a - b = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3) = 0 \text{에서 } 27 + 9a + 3b - 15 = 0$$

$$3a + b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-13$

$$\therefore a + b = -10$$

042 답 ③

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + kx^2 - x + 7$ 이라고 하면 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로 $f(1) = 0$ 에서

$$2 - 3 + k - 1 + 7 = 0 \quad \therefore k = -5$$

043 답 -2

$f(x+1)$ 이 $x+2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-2+1) = f(-1) = 0$$

$$-2 + a + 3 + 1 = 0 \quad \therefore a = -2$$

044 답 ③

$f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ 에서

$$f(-1) + 1 = 0, f(1) - 1 = 0, f(2) - 2 = 0$$

즉, $f(x) - x$ 는 $x+1$, $x-1$, $x-2$ 로 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차식이므로

$$f(x) - x = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + x$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3) = (3+1)(3-1)(3-2) + 3 = 11$$

045 답 ①

$f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $x^2 - x - 2$, 즉

$(x+1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) = 0, f(2) = 0$$

$$f(-1) = 0 \text{에서 } -1 + 1 - a + b = 0$$

$$a - b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = 0 \text{에서 } 8 + 4 + 2a + b = 0$$

$$2a + b = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-4$

$$\therefore a + b = -8$$

046 답 ②

$f(x) = 2x^3 - 11x^2 + ax + b$ 가 $x^2 - 5x + 6$, 즉 $(x-2)(x-3)$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(2) = 0, f(3) = 0$$

$$f(2) = 0 \text{에서 } 16 - 44 + 2a + b = 0$$

$$2a + b = 28 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3) = 0 \text{에서 } 54 - 99 + 3a + b = 0$$

$$3a + b = 45 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=17$, $b=-6$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(1) = 2$$

047 답 3

$f(x)-3$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로
 $f(-1)-3=0, f(1)-3=0$
 $\therefore f(-1)=3, f(1)=3$
 $f(x+2)$ 를 x^2+4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라고 하면
 $f(x+2)=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b$
 $= (x+3)(x+1)Q(x)+ax+b$
 양변에 $x=-3$ 을 대입하면 $3=-3a+b$ ㉠
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $3=-a+b$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=3$
 따라서 구하는 나머지는 3이다.

핵심 유형 34~36쪽

유형14 답 ③

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca \\ &= a^2+b^2+(-c)^2+2 \times a \times b+2 \times b \times (-c)+2 \times (-c) \times a \\ &= (a+b-c)^2 \end{aligned}$$

유형15 답 ④

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6 \\ &= \{(x-1)(x+3)\} \{(x-2)(x+4)\}+6 \\ &= (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6 \\ & x^2+2x=X \text{로 놓으면} \\ & (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6=(X-3)(X-8)+6 \\ &= X^2-11X+30 \\ &= (X-5)(X-6) \\ &= (x^2+2x-5)(x^2+2x-6) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

유형16 답 ⑤

$$\begin{aligned} & x^2=X \text{로 놓으면} \\ & x^4-10x^2+9=X^2-10X+9 \\ &= (X-1)(X-9) \\ &= (x^2-1)(x^2-9) \\ &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \\ \therefore & a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+(-1)^2+3^2+(-3)^2=20 \end{aligned}$$

유형17 답 ③

$$\begin{aligned} & x \text{에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면} \\ & x^2-xy-2y^2+2x+5y-3=x^2+(-y+2)x-2y^2+5y-3 \\ &= x^2+(-y+2)x-(2y-3)(y-1) \\ &= \{x+(y-1)\} \{x-(2y-3)\} \\ &= (x+y-1)(x-2y+3) \end{aligned}$$

유형18 답 -2

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$ 라고 할 때, $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= (x-1)(x^2+3x+2) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

이때 $a < b < c$ 이므로 $a=-1, b=1, c=2$
 $\therefore a+b-c=-2$

유형19 답 ④

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-x^2+2x+1 &= x^2 \left(x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ x^2+\frac{1}{x^2}+2 \left(x+\frac{1}{x} \right)-1 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x+\frac{1}{x} \right)^2+2 \left(x+\frac{1}{x} \right)-3 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x+\frac{1}{x} \right)+3 \right\} \left\{ \left(x+\frac{1}{x} \right)-1 \right\} \\ &= (x^2+3x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

유형20 답 ③

주어진 등식의 좌변을 a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} & a^2b+ab^2+b^2c-bc^2-c^2a-ca^2 \\ &= (b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2 \\ &= (b-c)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\ &= (b-c)(a+b)(a+c) \\ \therefore & (b-c)(a+b)(a+c)=0 \end{aligned}$$

그런데 $a+b \neq 0, a+c \neq 0$ 이므로

$$b-c=0 \quad \therefore b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

유형21 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\ &= \{(x-y)^2+3xy\} \{(x-y)^2+xy\} \\ &= (4+3)(4+1) \\ &= 35 \end{aligned}$$

유형22 답 ①

$2018=a$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{2018^3-1}{2018 \times 2019+1} &= \frac{a^3-1}{a(a+1)+1} \\ &= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} \\ &= a-1 \\ &= 2017 \end{aligned}$$

048 답 ④

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4bc + 4ca \\ = a^2 + (-b)^2 + (2c)^2 + 2 \times a \times (-b) + 2 \times (-b) \times 2c \\ \quad \quad \quad + 2 \times 2c \times a \\ = (a - b + 2c)^2 \end{aligned}$$

049 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^2 - x + xy - y &= x(x-1) + y(x-1) \\ &= (x+y)(x-1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

050 답 $(x+y)^2(x-y)^2$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 &= (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= (x+y)^2(x-y)^2 \end{aligned}$$

051 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^3 + 125 &= x^3 + 5^3 = (x+5)(x^2 - 5x + 25) \\ \text{따라서 } a &= 5, b = -5, c = 25 \text{ 이므로} \\ a + b + c &= 25 \end{aligned}$$

052 답 $x(x-3y)^3$

$$\begin{aligned} x^4 - 9x^3y + 27x^2y^2 - 27xy^3 &= x(x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3) \\ &= x(x-3y)^3 \end{aligned}$$

053 답 $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$\begin{aligned} (x-y)(x^4+y^4) + x^3y^2 - x^2y^3 \\ = (x-y)(x^4+y^4) + x^2y^2(x-y) \\ = (x-y)(x^4+y^4+x^2y^2) \\ = (x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

054 답 ③

$$\begin{aligned} x^3 - 8y^3 - 7xy(x-2y) \\ = (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) - 7xy(x-2y) \\ = (x-2y)(x^2-5xy+4y^2) \\ = (x-2y)(x-y)(x-4y) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

055 답 ②

$$\begin{aligned} (x-3)(x-2)(x+1)(x+2) + 4 \\ = \{(x-3)(x+2)\} \{(x-2)(x+1)\} + 4 \\ = (x^2-x-6)(x^2-x-2) + 4 \\ x^2-x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2-x-6)(x^2-x-2) + 4 &= (X-6)(X-2) + 4 \\ &= X^2-8X+16 = (X-4)^2 \\ &= (x^2-x-4)^2 \end{aligned}$$

따라서 $a = -1, b = -4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 1 + 16 = 17$$

056 답 $(a+b-1)(a+b-2)$

$a+b = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (a+b+1)(a+b-4) + 6 &= (X+1)(X-4) + 6 \\ &= X^2-3X+2 \\ &= (X-1)(X-2) \\ &= (a+b-1)(a+b-2) \end{aligned}$$

057 답 ①

$x^2-2x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x) - 3 &= X^2-2X-3 \\ &= (X+1)(X-3) \\ &= (x^2-2x+1)(x^2-2x-3) \\ &= (x-1)^2(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\therefore a+bc = -1+1 \times (-3) = -4$$

058 답 ③

$x^2+3x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2+3x-1)(x^2+3x-3) - 15 \\ = (X-1)(X-3) - 15 \\ = X^2-4X-12 \\ = (X+2)(X-6) \\ = (x^2+3x+2)(x^2+3x-6) \\ = (x+1)(x+2)(x^2+3x-6) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

059 답 -13

$$\begin{aligned} (x^2-4x+3)(x^2+6x+8) + 21 \\ = (x-1)(x-3)(x+4)(x+2) + 21 \\ = \{(x-1)(x+2)\} \{(x-3)(x+4)\} + 21 \\ = (x^2+x-2)(x^2+x-12) + 21 \end{aligned}$$

$x^2+x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2+x-2)(x^2+x-12) + 21 \\ = (X-2)(X-12) + 21 \\ = X^2-14X+45 \\ = (X-5)(X-9) \\ = (x^2+x-5)(x^2+x-9) \\ \therefore a+b+c = 1+(-5)+(-9) = -13 \end{aligned}$$

060 답 ②

$x^2 = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 &= X^2 - 13X + 36 \\ &= (X-4)(X-9) \\ &= (x^2-4)(x^2-9) \\ &= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

이때 $a < b < c < d$ 이므로

$$a = -3, b = -2, c = 2, d = 3$$

$$\therefore ab - cd = 6 - 6 = 0$$

072 답 ④

$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ 라고 할 때, $f(1)=0$, $f(2)=0$ 이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\ & & 1 & 0 & -2 & -4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ & & 2 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x-1)(x-2)(x^2+2x+2)$$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=2$ 이므로 $a+b+c=2$

073 답 2

$f(x) = x^3 - (a+1)x^2 - a(2a-1)x + 2a^2$ 이라고 할 때, $f(1)=0$ 이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a-1 & -2a^2+a & 2a^2 \\ & & 1 & -a & -2a^2 \\ \hline & 1 & -a & -2a^2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 - (a+1)x^2 - a(2a-1)x + 2a^2 &= (x-1)(x^2 - ax - 2a^2) \\ &= (x-1)(x+a)(x-2a) \end{aligned}$$

이때 세 일차식의 상수항의 합이 -3 이므로

$$-1 + a - 2a = -3 \quad \therefore a = 2$$

074 답 ②

$f(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 2$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $x-1$, $x+2$ 를 인수로 가지므로 $f(1)=0$, $f(-2)=0$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1+3+a+b+2=0, \quad a+b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2)=0 \text{에서 } 16-24+4a-2b+2=0, \quad 2a-b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-5$

$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -1 & -5 & 2 \\ & & 1 & 4 & 3 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ & & -2 & -4 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2 = (x-1)(x+2)(x^2+2x-1)$$

따라서 $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ 이므로 $Q(-2) = -1$

075 답 ②

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 6 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right\} \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 4 \right\} \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=1$ 이므로 $a+b+c=-2$

076 답 ④

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right\} \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

077 답 ③

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + ab - 2bc - ac &= (b-c)a + b^2 + c^2 - 2bc \\ &= (b-c)a + (b-c)^2 \\ &= (b-c)(a+b-c) \end{aligned}$$

$$\therefore (b-c)(a+b-c) = 0$$

그런데 $a+b-c \neq 0$ 이므로

$$b-c=0 \quad \therefore b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

078 답 정삼각형

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \end{aligned}$$

$$\therefore (a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

그런데 $a+b+c \neq 0$ 이므로

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\therefore a-b=0, \quad b-c=0, \quad c-a=0 \quad \therefore a=b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 정삼각형이다.

079 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 b 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^3 - ab^2 + ac^2 + a^2c - b^2c + c^3 &= -(a+c)b^2 + a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 \\ &= -(a+c)b^2 + a^2(a+c) + c^2(a+c) \\ &= (a+c)(a^2 - b^2 + c^2) \\ \therefore (a+c)(a^2 - b^2 + c^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } a+c \neq 0 \text{이므로 } a^2 - b^2 + c^2 = 0 \quad \therefore a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

080 답 ③

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \\ &= \{(a+b)^2 - ab\} \{(a+b)^2 - 3ab\} \\ &= (4+2)(4+6) = 60 \end{aligned}$$

081 답 ④

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{에서}$$

$$a+b+c=0 \text{이므로}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$$

082 답 ②

$$a-b=2-\sqrt{3}, c-a=2+\sqrt{3} \text{을 변끼리 더하면}$$

$$c-b=4 \quad \therefore b-c=-4$$

$$\therefore ab^2-a^2b+bc^2-b^2c-ac^2+a^2c$$

$$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c$$

$$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$$

$$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$

$$=-(b-c)(a-b)(a-c)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=(2-\sqrt{3}) \times (-4) \times (2+\sqrt{3})$$

$$=-4$$

083 답 417

$$416=a \text{로 놓으면}$$

$$\frac{416^3+1}{416^2-416+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=417$$

084 답 ④

$$86=a, 14=b \text{로 놓으면}$$

$$\frac{86^3+14^3}{86 \times 72+14^2}=\frac{a^3+b^3}{a(a-b)+b^2}$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}$$

$$=a+b=100$$

085 답 ①

$$20=a \text{로 놓으면}$$

$$18 \times 19 \times 20 \times 21+1=(a-2)(a-1)a(a+1)+1$$

$$=\{(a-2)(a+1)\}\{a(a-1)\}+1$$

$$=(a^2-a-2)(a^2-a)+1$$

$$a^2-a=X \text{로 놓으면}$$

$$(a^2-a-2)(a^2-a)+1=(X-2)X+1$$

$$=X^2-2X+1$$

$$=(X-1)^2$$

$$=(a^2-a-1)^2$$

$$=(400-20-1)^2$$

$$=379^2$$

$$\therefore \sqrt{18 \times 19 \times 20 \times 21+1}=\sqrt{379^2}=379$$

086 답 ③

$$f(1)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+6x+9)$$

$$=(x-1)(x+3)^2$$

$$\therefore f(97)=96 \times 100^2=960000$$

핵심 유형 최종 점검하기

43~45쪽

1 답 ③

유형 01 미정계수법 - 계수비교법

$$\text{주어진 등식을 } k \text{에 대하여 정리하면}$$

$$(x+2y+5)k+2x-3y-4=0$$

$$\text{이 등식이 } k \text{에 대한 항등식이므로}$$

$$x+2y+5=0, 2x-3y-4=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-1, y=-2$$

$$\therefore xy=2$$

2 답 ①

유형 02 미정계수법 - 수치대입법

$$\text{주어진 등식의 양변에 } x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$1+5+3=a \quad \therefore a=9$$

3 답 ②

유형 02 미정계수법 - 수치대입법

$$\text{주어진 등식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0=-6c \quad \therefore c=0$$

$$\text{주어진 등식의 양변에 } x=-2 \text{를 대입하면}$$

$$15=15b \quad \therefore b=1$$

$$\text{주어진 등식의 양변에 } x=3 \text{을 대입하면}$$

$$30=10a \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b+c=4$$

4 답 64

유형 04 항등식에서 계수의 합

$$\text{주어진 등식의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$2^6=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{주어진 등식의 양변에 } x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$2^6=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면}$$

$$2 \times 2^6=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12})$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12}=2^6=64$$

5 답 ③

유형 05 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식 x^3+ax^2+bx+1 을 x^2+x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}x^3+ax^2+bx+1 &= (x^2+x-2)Q(x)+2x+3 \\ &= (x+2)(x-1)Q(x)+2x+3\end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b+1=5, a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-8+4a-2b+1=-1, 2a-b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore a-b=1$$

6 답 11

유형 07 나머지정리 - 일차식으로 나누는 경우

$f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ 라고 하면 나머지정리에 의하여

$$f(1)=3, f(3)=-1$$

$$f(1)=3 \text{에서 } 1-3+a+b=3$$

$$a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(3)=-1 \text{에서 } 27-27+3a+b=-1$$

$$3a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=8$

$$\therefore b-a=11$$

7 답 7

유형 08 나머지정리 - 이차식 또는 삼차식으로 나누는 경우

나머지정리에 의하여 $f(0)=1, f(1)=3, f(-2)=3$

$f(x)$ 를 x^3+x^2-2x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^3+x^2-2x)Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= x(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c\end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{에서 } c=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(1)=3 \text{에서 } a+b+c=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f(-2)=3 \text{에서 } 4a-2b+c=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=1, b=1, c=1$$

따라서 $R(x)=x^2+x+1$ 이므로

$$R(2)=7$$

8 답 -5

유형 09 $f(ax+b)$ 를 $x-a$ 로 나누는 경우

$f(x)$ 를 $2x^2+x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x^2+x-1)Q(x)+3x-2 \\ &= (2x-1)(x+1)Q(x)+3x-2\end{aligned}$$

$$\therefore f(-1)=-5$$

따라서 $f(2x+3)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2 \times (-2)+3)=f(-1)=-5$$

9 답 ⑤

유형 10 몫 $Q(x)$ 를 $x-a$ 로 나누는 경우

$$x^3+ax^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a-11+7=-1 \quad \therefore a=2$$

$x^3+2x^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8+8-22+7=Q(2)-1 \quad \therefore Q(2)=2$$

따라서 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

10 답 ⑤

유형 11 나머지정리를 이용한 수의 나눗셈

x^{15} 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 하면

$$x^{15}=(x+1)Q(x)+R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-1$

$x^{15}=(x+1)Q(x)-1$ 의 양변에 $x=46$ 을 대입하면

$$46^{15}=47Q(46)-1$$

이때 46^{15} 을 47로 나누었을 때의 나머지를 r 라고 하면 $0 \leq r < 47$ 이

므로

$$\begin{aligned}46^{15} &= 47Q(46)-1 \\ &= 47\{Q(46)-1\}+47-1 \\ &= 47\{Q(46)-1\}+46\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 46이다.

11 답 12

유형 12 인수정리 - 일차식으로 나누는 경우

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $x-1, x+2$ 를 인수로 가지므로

$$f(1)=0, f(-2)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1-2+a+b=0, a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-2)=0 \text{에서 } -8-8-2a+b=0, 2a-b=-16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5, b=6$

따라서 $g(x)=x^2-5x+6$ 이라고 하면 $g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$g(-1)=12$$

12 답 24

유형 13 인수정리 - 이차식으로 나누는 경우

$f(x+2)$ 가 x^2+2x-3 , 즉 $(x+3)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-3+2)=0, f(1+2)=0$$

$$\therefore f(-1)=0, f(3)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -2-3-a+b=0, a-b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 54-27+3a+b=0, 3a+b=-27 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8, b=-3$

$$\therefore ab=24$$

13 답 ④

유형 14 인수분해 공식

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad x^6-y^6 &= (x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3) \\ &= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)\end{aligned}$$

14 답 ⑤

유형 14 인수분해 공식

$$\begin{aligned} a^3+1+(a^2-1)a &= (a+1)(a^2-a+1)+(a+1)(a-1)a \\ &= (a+1)(a^2-a+1+a^2-a) \\ &= (a+1)(2a^2-2a+1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

15 답 $2x^2+10x-6$

유형 15 공통부분이 있는 식의 인수분해

$$\begin{aligned} x^2+5x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2+5x-1)(x^2+5x-5)+3 &= (X-1)(X-5)+3 \\ &= X^2-6X+8 \\ &= (X-2)(X-4) \\ &= (x^2+5x-2)(x^2+5x-4) \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$(x^2+5x-2)+(x^2+5x-4)=2x^2+10x-6$$

16 답 ③

유형 16 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

$$\begin{aligned} x^2 &= X \text{로 놓으면} \\ x^4-8x^2+16 &= X^2-8X+16=(X-4)^2 \\ &= (x^2-4)^2=(x+2)^2(x-2)^2 \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-2$ 이므로 $a-b=4$

17 답 ④

유형 16 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

$$\begin{aligned} x^4+3x^2y^2+4y^4 &= x^4+4x^2y^2+4y^4-x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-(xy)^2 \\ &= (x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

18 답 $(x-y-z)(x+y-z-1)$

유형 17 문자가 여러 개인 식의 인수분해

x 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2-y^2+z^2-2xz-x+y+z &= x^2-(2z+1)x-y^2+z^2+y+z \\ &= x^2-(2z+1)x-(y+z)(y-z)+(y+z) \\ &= x^2-(2z+1)x-(y+z)(y-z-1) \\ &= \{x-(y+z)\}\{x+(y-z-1)\} \\ &= (x-y-z)(x+y-z-1) \end{aligned}$$

19 답 2

유형 18 인수정리를 이용한 인수분해

$f(x)=x^3+2x^2+ax-4$ 라고 하면 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로

$$f(1)=0 \text{에서 } 1+2+a-4=0 \quad \therefore a=1$$

$$f(x)=x^3+2x^2+x-4 \text{이므로 조립제법}$$

1	1	2	1	-4
		1	3	4

$$x^3+2x^2+x-4=(x-1)(x^2+3x+4)$$

1	3	4	0
---	---	---	---

따라서 $Q(x)=x^2+3x+4$ 이므로

$$Q(-1)=2$$

20 답 -5

유형 19 계수가 대칭인 사차식의 인수분해

$$\begin{aligned} x^4-2x^3-5x^2+2x+1 &= x^2\left(x^2-2x-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)+1\right\}\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &= (x^2+x-1)(x^2-3x-1) \end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-3$, $c=-1$ 이므로

$$a+b+c=-5$$

21 답 ⑤

유형 20 삼각형의 모양 판단하기

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^4+b^4-c^4+2a^2b^2 &= (a^2+b^2)^2-(c^2)^2 \\ &= (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2) \end{aligned}$$

$$\therefore (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

그런데 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ 이므로

$$a^2+b^2-c^2=0 \quad \therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각 삼각형이다.

22 답 12

유형 21 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} x+y &= (1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\ xy &= (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1 \\ \therefore x^3+x^2y+xy^2+y^3 &= x^2(x+y)+y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2+y^2) \\ &= (x+y)\{(x+y)^2-2xy\} \\ &= 2 \times \{2^2-2 \times (-1)\} \\ &= 12 \end{aligned}$$

23 답 ②

유형 22 인수분해를 이용한 수의 계산

$f(-1)=0$, $f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

-1	1	-5	6	4	-8
		-1	6	-12	8
2	1	-6	12	-8	0
		2	-8	8	
	1	-4	4	0	

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-4x+4)$$

$$=(x+1)(x-2)^3$$

$$\therefore f(2.1)=(2.1+1)(2.1-2)^3$$

$$=3.1 \times 0.1^3$$

$$=0.0031$$

03 복소수

핵심
유형

유형01 ⑤	유형02 $5+6i$	유형03 12
유형04 -3	유형05 ①	유형06 3
유형07 $\neg, \sqsubset$	유형08 10	유형09 $6+8i$
유형10 ③	유형11 ②	유형12 -4
유형13 -b		

핵심
유형

완성하기

001 ③	002 ②	003 3	004 $4+i$	005 ④
006 ①	007 ②	008 4	009 ①	010 2
011 ③	012 ②	013 0	014 7	015 ⑤
016 -3	017 0	018 ①	019 -1	020 -6
021 ④	022 16	023 $-\frac{2}{5}$	024 10	
025 $\neg, \sqsubset, \sqsupset$	026 ⑤	027 ②	028 3	
029 25	030 $3-9i$	031 $-2i$	032 ④	033 ②
034 $1\pm\sqrt{2}i$	035 ③	036 ③	037 0	
038 0	039 12	040 -2	041 ①	
042 $-1+i$	043 $\neg, \sqsubset$	044 $-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$		
045 ⑤	046 ⑤	047 $x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$		
048 $2a+2b$	049 ④	050 ①		

핵심
유형

최종 점검하기

1 ⑤	2 ⑤	3 4	4 ④	5 -13
6 ④	7 ①	8 ③	9 ②	10 $4-2i$
11 ③	12 1	13 24	14 $b+c$	

핵심 유형 48~50쪽

유형01 답 ⑤

⑤ $\sqrt{2}-i$ 의 실수부분은 $\sqrt{2}$, 허수부분은 -1 이다.

유형02 답 $5+6i$

$$\begin{aligned}
 (3-i)(1+2i) - \frac{1-i}{1+i} &= 3+6i-i-2i^2 - \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \\
 &= 3+5i+2 - \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} \\
 &= 5+5i - \frac{1-2i-1}{1+1} \\
 &= 5+5i+i \\
 &= 5+6i
 \end{aligned}$$

유형03 답 12

$$z = x(1-2i) + 3(i-4)$$

$$= (x-12) + (-2x+3)i$$

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$$x-12=0, -2x+3 \neq 0 \quad \therefore x=12$$

유형04 답 -3

$$x(5+i) - y(4+3i) = 3+5i$$

$$(5x-4y) + (x-3y)i = 3+5i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$5x-4y=3, x-3y=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=-2$

$$\therefore x+y=-3$$

유형05 답 ①

$$x=2+\sqrt{6}i \text{에서 } x-2=\sqrt{6}i$$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=-6, x^2-4x=-10$

$$\therefore x^2-4x+5=-10+5=-5$$

유형06 답 3

$$\bar{z}=1-i \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z+1}{z} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}} &= \frac{2+i}{1+i} + \frac{2-i}{1-i} \\
 &= \frac{(2+i)(1-i) + (2-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\
 &= \frac{(2-2i+i+1) + (2+2i-i+1)}{1+1} \\
 &= \frac{(3-i) + (3+i)}{2} = 3
 \end{aligned}$$

유형07 답 $\neg, \sqsubset$

$$z=a+bi(a, b \text{는 실수}) \text{라고 하면 } \bar{z}=a-bi$$

$$\neg. z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \text{ (실수)}$$

$$\begin{aligned}
 \sqcup. \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} \\
 &= \frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{2a}{a^2+b^2} \text{ (실수)}
 \end{aligned}$$

$$\sqsubset. z=-\bar{z} \text{이면 } a+bi=-a-bi \text{에서 } a=-a$$

따라서 $a=0$ 이므로 $z=bi(b \neq 0)$ 는 순허수이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

유형08 답 10

$$\begin{aligned}
 \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) + \beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) \\
 &= (\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) \\
 &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})
 \end{aligned}$$

이때 $\alpha+\beta=(2-5i)+(-1+2i)=1-3i$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) \\
 &= (1-3i)(1+3i) \\
 &= 1+9=10
 \end{aligned}$$

유형09 답 6+8i

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$
 $(2i-3)z+5i\bar{z}=6+18i$ 에서
 $(2i-3)(a+bi)+5i(a-bi)=6+18i$
 $(-3a+3b)+(7a-3b)i=6+18i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $-3a+3b=6, 7a-3b=18$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=6, b=8$
 $\therefore z=6+8i$

유형10 답 ③

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$ 이므로
 $1+i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{200}$
 $=1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)$
 $\quad\quad\quad+\dots+(i^{197}+i^{198}+i^{199}+i^{200})$
 $=1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\dots+i^{196}(i+i^2+i^3+i^4)$
 $=1+0+0+\dots+0=1$

유형11 답 ②

$(1+i)^2=2i, (1-i)^2=-2i$ 이므로
 $(1+i)^{120}-(1-i)^{120}=\{(1+i)^2\}^{60}-\{(1-i)^2\}^{60}$
 $= (2i)^{60}-(-2i)^{60}$
 $= 2^{60}i^{60}-2^{60}i^{60}$
 $= 0$

유형12 답 -4

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\sqrt{-6}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{2}i\sqrt{8}i+\sqrt{6}i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}i}$
 $= -4+2\sqrt{3}i+\frac{\sqrt{12}i}{i^2}$
 $= -4+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i$
 $= -4$

유형13 답 -b

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 에서 $a<0, b<0$ 이므로 $a+b<0$
 $\therefore \sqrt{(a+b)^2}-|a|=- (a+b)-(-a)$
 $= -a-b+a$
 $= -b$

핵심 유형 완성하기 51~57쪽

001 답 ③

- ① 0은 실수인 복소수이다.
- ② $b=0$ 이어도 a 가 허수이면 $a+bi$ 는 허수이다.
- ④ $\frac{2-5i}{3}$ 의 허수부분은 $-\frac{5}{3}$ 이다.
- ⑤ $\sqrt{3}i$ 의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{3}$ 이다.

002 답 ②

$\frac{5i-1}{2}$ 의 실수부분은 $-\frac{1}{2}$, $2-i$ 의 허수부분은 -1 이므로
 $a=-\frac{1}{2}, b=-1 \quad \therefore a+b=-\frac{3}{2}$

003 답 3

허수는 $8+\sqrt{-1}, -i, \sqrt{5}-9i$ 의 3개이다.

004 답 4+i

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)-\frac{1-2i}{2+i}=3+1-\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$
 $=4-\frac{2-i-4i-2}{4+1}$
 $=4-\frac{-5i}{5}=4+i$

005 답 ④

④ $(5-i)^2=25-10i-1=24-10i$

006 답 ①

$(2+3i) \odot (3+2i)=(2+3i)(3+2i)-(2+3i)-(3+2i)$
 $=6+4i+9i-6-2-3i-3-2i$
 $=-5+8i$

007 답 ②

$z+\frac{2}{z}=1-i+\frac{2}{1-i}=1-i+\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
 $=1-i+\frac{2(1+i)}{1+1}=1-i+(1+i)=2$
 $\therefore \left(z+\frac{2}{z}\right)^2=2^2=4$

008 답 4

$z_1=(1+i)^2=1+2i-1=2i$
 $z_2=\frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}$
 $=\frac{2+4\sqrt{2}i-4}{2+4}=\frac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$
 $\therefore z_1z_2=2i \times \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3}=-\frac{4\sqrt{2}+2i}{3}$
 따라서 실수부분은 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 허수부분은 $-\frac{2}{3}$ 이므로
 $a=-\frac{4\sqrt{2}}{3}, b=-\frac{2}{3} \quad \therefore a^2+b^2=\frac{32}{9}+\frac{4}{9}=4$

009 답 ①

$z=2(3+5i)-x(4i-1)=(x+6)+(-4x+10)i$
 z^2 이 음의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로
 $x+6=0, -4x+10 \neq 0 \quad \therefore x=-6$

010 답 2

$x(i-x)+1-2i=(-x^2+1)+(x-2)i$
 이 복소수가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 하므로
 $x-2=0 \quad \therefore x=2$

011 답 ③

$(1+i)(1-i)a^2 + (2i-3)a + 1 - 2i = (2a^2 - 3a + 1) + (2a-2)i$
이 복소수가 순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이
아니어야 하므로

$$2a^2 - 3a + 1 = 0, 2a - 2 \neq 0$$

$$2a^2 - 3a + 1 = 0 \text{에서 } (2a-1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2a - 2 \neq 0 \text{에서 } a \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡에서 $a = \frac{1}{2}$

012 답 ②

$$z = x(x+4+i) - 5(1-i) = (x^2+4x-5) + (x+5)i$$

z^2 이 실수가 되려면 z 의 실수부분이 0이거나 허수부분이 0이어야
하므로

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \text{ 또는 } x + 5 = 0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 x 의 값의 합은 $-5 + 1 = -4$

013 답 0

$$z = (a+4i)(a-3i) + a^2(i-2) - 11 = (-a^2+1) + (a^2+a)i$$

z^2 이 양의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이 아니고 허수부분은
0이어야 하므로

$$-a^2 + 1 \neq 0, a^2 + a = 0$$

$$-a^2 + 1 \neq 0 \text{에서 } (1-a)(1+a) \neq 0$$

$$\therefore a \neq -1 \text{이고 } a \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a^2 + a = 0 \text{에서 } a(a+1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡에서 $a = 0$

014 답 7

$$x(1+i) - 2y(3-i) = 1+9i \text{에서}$$

$$(x-6y) + (x+2y)i = 1+9i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-6y=1, x+2y=9$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=7, y=1$

$$\therefore xy=7$$

015 답 ⑤

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2=0, 3x+y-5=0$$

따라서 $x=2, y=-1$ 이므로 $x-y=3$

016 답 -3

$$x(2-i)^2 - y(3+i) = 3y + (5-2x)i \text{에서}$$

$$3(x-y) - (4x+y)i = 3y - (2x-5)i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=y, 4x+y=2x-5 \quad \therefore x-2y=0, 2x+y=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2, y=-1$

$$\therefore x+y=-3$$

017 답 0

$$\frac{x}{1+3i} + \frac{y}{1-3i} = \frac{6}{1-i} \text{에서}$$

$$\frac{x(1-3i) + y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{6(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{(x+y) - 3(x-y)i}{10} = 3+3i$$

$$(x+y) - 3(x-y)i = 30+30i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+y=30, x-y=-10$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=10, y=20$

$$\therefore 2x-y=20-20=0$$

018 답 ①

$$x=3-4i \text{에서 } x-3=-4i$$

양변을 제곱하면

$$x^2 - 6x + 9 = -16, x^2 - 6x = -25$$

$$\therefore x^2 - 6x + 10 = -25 + 10 = -15$$

019 답 -1

$$a+b = (2+2\sqrt{3}i) + (2-2\sqrt{3}i) = 4$$

$$ab = (2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i) = 16$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \\ = \frac{4^2 - 2 \times 16}{16} = -1$$

020 답 -6

$$a = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i,$$

$$b = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i \text{이므로}$$

$$a+b = (1-i) + (1+i) = 2$$

$$ab = (1-i)(1+i) = 2$$

$$\therefore a^3 + b^3 - ab = (a+b)^3 - 3ab(a+b) - ab \\ = 2^3 - 3 \times 2 \times 2 - 2 = -6$$

021 답 ④

$$x = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{5}$$

$$x = \frac{2-i}{5} \text{에서 } 5x-2=-i$$

양변을 제곱하면

$$25x^2 - 20x + 4 = -1, 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\therefore 5x^3 - 4x^2 + 6x - 2 = x(5x^2 - 4x + 1) + 5x - 2$$

$$= 5x - 2 = 5 \times \frac{2-i}{5} - 2 = -i$$

022 답 16

$$z = \frac{10}{3-i} = \frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 3+i$$

따라서 $\bar{z} = 3-i$ 이므로

$$z + \bar{z} + z\bar{z} = (3+i) + (3-i) + (3+i)(3-i) \\ = 6 + 10 = 16$$

023 답 $-\frac{2}{5}$

$\bar{z}=4-2i$ 이므로

$$\frac{1-\bar{z}}{z}=\frac{1-(4-2i)}{4+2i}=\frac{-3+2i}{4+2i}$$

$$=\frac{(-3+2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=-\frac{2}{5}+\frac{7}{10}i$$

따라서 구하는 실수부분은 $-\frac{2}{5}$ 이다.

024 답 10

$\bar{\alpha}=2-i, \bar{\beta}=3+4i$ 이므로

$$(\bar{\alpha}-\bar{\beta})(\alpha-\beta)=\{(2-i)-(3-4i)\}\{(2+i)-(3+4i)\}$$

$$=(-1+3i)(-1-3i)=10$$

025 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

ㄴ. $z\bar{z}=0$ 이면 $(a+bi)(a-bi)=0$

$$a^2+b^2=0 \quad \therefore a=0, b=0 \quad \therefore z=0$$

ㄷ. $z=\bar{z}$ 이면 $a+bi=a-bi$ 에서 $b=-b \quad \therefore b=0$

$$\therefore z=a \text{ (실수)}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

026 답 ⑤

$z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이므로 ⑤이다.

027 답 ②

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

ㄴ. $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

ㄷ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)

$$\text{ㄹ. } \frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\text{ㅁ. } \frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}=\frac{2a}{a^2+b^2} \text{ (실수)}$$

따라서 보기 중 실수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

028 답 3

$$z=2(1+2i)x^2-7x+3-i=(2x^2-7x+3)+(4x^2-1)i$$

$z=-\bar{z}$ 이면 z 는 순허수이므로

$$2x^2-7x+3=0, 4x^2-1 \neq 0$$

$$2x^2-7x+3=0 \text{에서 } (2x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$4x^2-1 \neq 0 \text{에서 } (2x+1)(2x-1) \neq 0$$

$$\therefore x \neq -\frac{1}{2} \text{이고 } x \neq \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡에서 $x=3$

029 답 25

$$\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$

$$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$$

이때 $\alpha-\beta=(4+i)-(7-3i)=-3+4i$ 이므로

$$\alpha-\beta=-3-4i$$

$$\therefore \alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$$

$$=(-3+4i)(-3-4i)=25$$

030 답 $3-9i$

$\bar{z}_2-\bar{z}_1=\overline{z_2-z_1}=-1-4i$ 이므로 $z_2-z_1=-1+4i$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2=\overline{z_1 z_2}=5+i$ 이므로 $z_1 z_2=5-i$

$$\therefore (z_1-2)(z_2+2)=z_1 z_2-2(z_2-z_1)-4$$

$$=(5-i)-2(-1+4i)-4=3-9i$$

031 답 $-2i$

$\bar{\alpha}\beta=1$ 에서 $\frac{1}{\beta}=\bar{\alpha}$ 이므로

$$\bar{\beta}+\frac{1}{\beta}=\bar{\beta}+\bar{\alpha}=\overline{\alpha+\beta}=2i$$

$$\therefore \alpha+\beta=-2i$$

또 $\bar{\alpha}\beta=1$ 에서 $\frac{1}{\alpha}=\beta$ 이므로

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta=-2i$$

032 답 ④

$$\bar{\alpha}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{이므로}$$

$$\alpha+\bar{\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$\alpha\bar{\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$\therefore z\bar{z}=\frac{\alpha+2}{\alpha-1} \times \frac{(\bar{\alpha}+2)}{(\bar{\alpha}-1)}=\frac{\alpha+2}{\alpha-1} \times \frac{\bar{\alpha}+2}{\bar{\alpha}-1}$$

$$=\frac{\alpha\bar{\alpha}+2(\alpha+\bar{\alpha})+4}{\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})+1}$$

$$=\frac{1+2+4}{1-1+1}=7$$

033 답 ②

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$2z-(i+2)\bar{z}=9i-2 \text{에서}$$

$$2(a+bi)-(i+2)(a-bi)=9i-2$$

$$(-a+4b)i-b=9i-2$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a+4b=9, -b=-2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

$$\therefore z=-1+2i$$

034 답 $1 \pm \sqrt{2}i$

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$z+\bar{z}=2 \text{에서 } (a+bi)+(a-bi)=2$$

$$2a=2 \quad \therefore a=1$$

$$z\bar{z}=3 \text{에서 } (a+bi)(a-bi)=3$$

$$a^2+b^2=3, b^2=2 \quad \therefore b=\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore z=1 \pm \sqrt{2}i$$

035 답 ③

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

이때 z 는 실수가 아닌 복소수이므로 $b \neq 0$

$$\begin{aligned}\bar{z} - \frac{1}{z} &= (a-bi) - \frac{1}{a+bi} \\ &= (a-bi) - \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= a\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) - b\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right)i\end{aligned}$$

$\bar{z} - \frac{1}{z}$ 이 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$$b\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) = 0$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\frac{1}{a^2+b^2} = 1 \quad \therefore a^2+b^2=1$

$$\therefore z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2=1$$

036 답 ③

$$-i+i^2-i^3+i^4 = -i-1+i+1=0 \text{이므로}$$

$$1-i+i^2-i^3+i^4-\dots+i^{120}$$

$$\begin{aligned}&= 1 + (-i+i^2-i^3+i^4) + i^4(-i+i^2-i^3+i^4) \\ &\quad + \dots + i^{116}(-i+i^2-i^3+i^4)\end{aligned}$$

$$= 1+0+0+\dots+0=1$$

037 답 0

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{100}}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right)\end{aligned}$$

$$= 0+0+\dots+0=0$$

038 답 0

$$i+2i^2+3i^3+4i^4+\dots+59i^{59}+60i^{60}$$

$$= (i-2-3i+4) + (5i-6-7i+8) + \dots + (57i-58-59i+60)$$

$$= (2-2i) + (2-2i) + \dots + (2-2i)$$

$$= 15(2-2i) = 30-30i$$

따라서 $a=30, b=-30$ 이므로 $a+b=0$

039 답 12

$$f(1)=i+(-i)=0$$

$$f(2)=i^2+(-i)^2=-1-1=-2$$

$$f(3)=i^3+(-i)^3=-i+i=0$$

$$f(4)=i^4+(-i)^4=1+1=2$$

$$f(5)=i^5+(-i)^5=i-i=0$$

$$f(6)=i^6+(-i)^6=-1-1=-2$$

$\vdots$

따라서 $f(n)=2$ 를 만족하는 자연수 n 은 $4k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 꼴이므로 50 이하의 자연수 n 은 4, 8, 12, 16, $\dots$, 48의 12개이다.

040 답 -2

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} &= (-i)^{50} + i^{50} \\ &= i^{4 \times 12 + 2} + i^{4 \times 12 + 2} \\ &= -1-1 \\ &= -2\end{aligned}$$

041 답 ①

$$z^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}z^2+z^4+z^6+\dots+z^{100} \\ &= -i + (-i)^2 + (-i)^3 + \dots + (-i)^{50} \\ &= -i + i^2 - i^3 + \dots + i^{50}\end{aligned}$$

이때 $-i+i^2-i^3+i^4 = -i-1+i+1=0$ 이므로

$$\begin{aligned}z^2+z^4+z^6+\dots+z^{100} \\ &= -i+i^2-i^3+\dots+i^{50} \\ &= (-i+i^2-i^3+i^4) + i^4(-i+i^2-i^3+i^4) \\ &\quad + \dots + i^{44}(-i+i^2-i^3+i^4) - i^{49} + i^{50} \\ &= 0+0+\dots+0 - i^{4 \times 12 + 1} + i^{4 \times 12 + 2} \\ &= -1-i\end{aligned}$$

042 답 -1+i

$n=2k+1$ (k 는 음이 아닌 정수)이라고 하면

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n+1} &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4k+2} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4k+3} \\ &= i^{4k+2} + (-i)^{4k+3} \\ &= -1+i\end{aligned}$$

043 답 $\neg, \sqsubset$

$$\neg. z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}i}{1-i}\right)^2 = \frac{2i^2}{(1-i)^2}$$

$$= \frac{-2}{-2i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

$\sqsubset. \neg$ 에서 $z^2 = -i$ 이므로

$$z^6 = (z^2)^3 = (-i)^3 = -i^3 = i$$

$$\therefore z^6 \neq z^2$$

$\sqsubset. z^8 = z^6 \times z^2 = i \times (-i) = 1$ 이므로

$$z^{n+8} = z^n \times z^8 = z^n$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

044 답 $-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-7}} &= \sqrt{2}i\sqrt{6}i - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i} + \frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{7}i} \\ &= -2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}i}{i^2} + \sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3} + \sqrt{5}i + \sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3} + \sqrt{5}i\end{aligned}$$

045 답 ⑤

- ① $\sqrt{2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}\sqrt{5}i=\sqrt{10}i=\sqrt{-10}$
 ② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$
 ③ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}i=\sqrt{-\frac{2}{5}}$
 ④ $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i}=\sqrt{\frac{2}{5}}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i^2}=-\sqrt{\frac{2}{5}}i=-\sqrt{-\frac{2}{5}}$

046 답 ⑤

$$z=\frac{3+\sqrt{-9}}{3-\sqrt{-9}}=\frac{3+3i}{3-3i}=\frac{1+i}{1-i}$$

$$=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\therefore z+\frac{1}{z}=i+\frac{1}{-i}=i-\frac{i}{i^2}=i+i=2i$$

047 답 $x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$

$$\frac{8x}{1+\sqrt{-3}}+\frac{4y}{1-\sqrt{-3}}=\frac{8x}{1+\sqrt{3}i}+\frac{4y}{1-\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{8x(1-\sqrt{3}i)+4y(1+\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$=(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i$$

이때 -3 의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}i$ 이므로

(i) $(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i=\sqrt{3}i$ 일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=0, -2x+y=1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$$

(ii) $(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i=-\sqrt{3}i$ 일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=0, -2x+y=-1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$$

그런데 $x>y$ 이므로 $x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$

048 답 $2a+2b$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}\text{이므로 } a>0, b<0$$

이때 $a>b$ 이므로 $a-b>0$

$$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+|a|-3\sqrt{b^2}=(a-b)+a-3(-b)$$

$$=a-b+a+3b$$

$$=2a+2b$$

049 답 ④

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}\text{이므로 } a<0, b<0$$

① $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}\sqrt{-bi}=\sqrt{abi}=\sqrt{-ab}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{-ab^2i}=-b\sqrt{-ai}=-b\sqrt{a}$

③ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{-bi}}{\sqrt{-ai}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

④ $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-ai}}=-\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}i=-\sqrt{\frac{b}{a}}i=-\sqrt{-\frac{b}{a}}$

⑤ $|a+b|=-|(a+b)=-a-b=|a|+|b|$

050 답 ①

(가)에서 $a<0, b>0$ 이므로 $a<b$

(나)에서 $a+c=0, 2a+3b=0$

$a+c=0$ 에서 $c=-a>0$

$2a+3b=0$ 에서 $-a=\frac{3}{2}b$ 이므로 $c=-a=\frac{3}{2}b$

이때 $b>0, c>0$ 이고 $c=\frac{3}{2}b$ 이므로 $b<c$

$\therefore a<b<c$

핵심 유형 최종 점검하기

58~59쪽

1 답 ⑤

유형 01 복소수의 뜻과 분류

⑤ $1+\sqrt{3}i$ 의 허수부분은 0이다.

2 답 ⑤

유형 02 복소수의 사칙연산

① $(5+3i)+(2-11i)=7-8i$

② $(6-i)-(3-2i)=6-i-3+2i=3+i$

③ $(2-i)(3+2i)=6+4i-3i+2=8+i$

④ $(2-7i)+(2-3i)-(i-4)=2-7i+2-3i-i+4$
 $=8-11i$

⑤ $\frac{1}{1+2i}-\frac{1}{1-2i}=\frac{1-2i-(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{4}{5}i$

3 답 4

유형 03 복소수가 실수가 되는 조건

$$z=x^2+(i-4)x+i-5=(x^2-4x-5)+(x+1)i$$

$$z\text{가 실수가 되려면 } x+1=0 \quad \therefore x=-1 \quad \therefore a=-1$$

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 가 순허수이어야 하므로

$$x^2-4x-5=0, x+1\neq 0$$

$$x^2-4x-5=0\text{에서 } (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$x+1\neq 0\text{에서 } x\neq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8}\text{에서 } x=5 \quad \therefore b=5$$

$$\therefore a+b=4$$

4 답 ④

유형 04 복소수가 서로 같을 조건

$$(2+i)x-2(1-i)y=2-7i\text{에서}$$

$$2(x-y)+(x+2y)i=2+7i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=1, x+2y=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=2$

$$\therefore x+y=5$$

5 답 -13

유형 05 복소수가 주어질 때의 식의 값

$$\begin{aligned} a+b &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}i) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}i) = 2\sqrt{3} \\ ab &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i) = 5 \\ \therefore a^2+b^2-3ab &= (a+b)^2-5ab \\ &= (2\sqrt{3})^2-5 \times 5 = -13 \end{aligned}$$

6 답 ④

유형 05 복소수가 주어질 때의 식의 값

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-3i}{1+i} = \frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-2-4i}{2} = -1-2i \\ x+1 &= -2i \text{의 양변을 제곱하면} \\ x^2+2x+1 &= -4, \quad x^2+2x+5=0 \\ \therefore x^3+2x^2+5x+2 &= x(x^2+2x+5)+2=2 \end{aligned}$$

7 답 ①

유형 06 켈레복소수의 계산

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 1-\sqrt{3}i \text{이므로 } z+\bar{z}=2, \quad z\bar{z}=4 \\ \therefore z^3+\bar{z}^3 &= (z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z}) \\ &= 2^3-3 \times 4 \times 2 = -16 \end{aligned}$$

8 답 ③

유형 07 켈레복소수의 성질

$$\begin{aligned} z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라고 하면 } \bar{z} = a-bi \\ \neg. \quad z\bar{z} &= 0 \text{이므로 } (a+bi)(a-bi) = 0 \\ a^2+b^2 &= 0 \quad \therefore a=0, b=0 \\ \therefore z &= \bar{z} = 0 \\ \neg. \quad \overline{z\bar{z}} &= \overline{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \overline{a^2+b^2} = a^2+b^2 \text{ (실수)} \\ \neg. \quad z=0 \text{이면 } z &= -\bar{z} \text{이지만 } z \text{는 순허수가 아니다.} \\ \text{따라서 보기 중 옳은 것은 } \neg, \neg \text{이다.} \end{aligned}$$

9 답 ②

유형 08 켈레복소수의 성질을 이용한 계산

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha}+2\alpha\bar{\beta}+2\bar{\alpha}\beta+4\beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha}+2\bar{\beta})+2\beta(\bar{\alpha}+2\bar{\beta}) \\ &= (\alpha+2\beta)(\bar{\alpha}+2\bar{\beta}) \\ &= (\alpha+2\beta)\overline{(\alpha+2\beta)} \\ \text{이때 } \alpha+2\beta &= (1+3i)+2(3-2i) = 7-i \text{이므로} \\ \alpha+2\beta &= 7-i \\ \therefore \alpha\bar{\alpha}+2\alpha\bar{\beta}+2\bar{\alpha}\beta+4\beta\bar{\beta} &= (\alpha+2\beta)\overline{(\alpha+2\beta)} \\ &= (7-i)(7+i) = 50 \end{aligned}$$

10 답 4-2i

유형 09 조건을 만족하는 복소수 구하기

$$\begin{aligned} z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라고 하면 } \bar{z} = a-bi \\ \frac{z}{3+i} + \frac{\bar{z}}{2} &= 3 \text{에서 } \frac{a+bi}{3+i} + \frac{a-bi}{2} = 3 \\ 2(a+bi) + (a-bi)(3+i) &= 6(3+i) \\ (5a+b) + (a-b)i &= 18+6i \end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} 5a+b &= 18, \quad a-b=6 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } a &= 4, \quad b = -2 \\ \therefore z &= 4-2i \end{aligned}$$

11 답 ③

유형 10 허수단위 i의 거듭제곱

$$\begin{aligned} i+i^2+i^3+i^4 &= i-1-i+1=0 \text{이므로} \\ i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{102} &= (i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4) \\ &\quad +\dots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{101}+i^{102} \\ &= 0+0+\dots+0+i^{4 \times 25+1}+i^{4 \times 25+2} \\ &= -1+i \\ \text{따라서 } a &= -1, \quad b=1 \text{이므로} \\ a+b &= 0 \end{aligned}$$

12 답 1

유형 11 복소수의 거듭제곱

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i \text{이므로} \\ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \dots + \frac{1}{z^{30}} &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{15}} \\ \text{이때 } \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} &= \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{i} - 1 = 0 \text{이므로} \\ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \dots + \frac{1}{z^{30}} &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{15}} \\ &= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) \\ &\quad + \frac{1}{i^8} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^{12}} - \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{15}} \\ &= 0+0+0+\frac{1}{i^{4 \times 3+1}} - \frac{1}{i^{4 \times 3+2}} + \frac{1}{i^{4 \times 3+3}} \\ &= \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{i} = 1 \end{aligned}$$

13 답 24

유형 12 음수의 제곱근의 계산

$$\begin{aligned} \sqrt{-27}\sqrt{-9} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-6}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-3}} &= \sqrt{27}i\sqrt{9}i + \frac{\sqrt{18}i}{\sqrt{6}i} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}i} \\ &= -9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}i}{i^2} \\ &= -8\sqrt{3} - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } a &= -8\sqrt{3}, \quad b = -\sqrt{3} \text{이므로} \\ ab &= 24 \end{aligned}$$

14 답 b+c

유형 13 음수의 제곱근의 성질

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\sqrt{b} &= -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, \quad b < 0 \\ \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} &= -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{에서 } b < 0, \quad c > 0 \\ \text{따라서 } a+b &< 0 \text{이므로} \\ \sqrt{a^2} - |a+b| + \sqrt{c^2} &= -a + (a+b) + c \\ &= b+c \end{aligned}$$

04 이차방정식

해
심
유
형

유형01 ②	유형02 -3	유형03 ③
유형04 ⑤	유형05 서로 다른 두 실근	유형06 ⑤
유형07 $\frac{5}{4}$	유형08 20	유형09 ②
유형10 4	유형11 17	유형12 $x^2-x-4=0$
유형13 ③	유형14 $(x-2-i)(x-2+i)$	유형15 5
유형16 ①		

해
심
유
형

완성하기

001 ③	002 ②	003 5	004 1	005 ①
006 ①	007 4	008 ②	009 ①	
010 $x=-3$ 또는 $x=3$	011 ⑤	012 $k < -4$		
013 ③	014 ②	015 ②	016 ③	017 ①
018 서로 다른 두 허근	019 서로 다른 두 실근			
020 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형	021 ③	022 ②		
023 ①	024 ⑤	025 ②	026 22	027 ①
028 ④	029 9	030 ④	031 ②	032 $\frac{1}{2}$
033 ①	034 -3	035 ③	036 -3	037 ⑤
038 ④	039 10	040 ②	041 ④	042 ③
043 $x^2+x+4=0$	044 1	045 ⑤		
046 $5x^2-7x+1=0$	047 ③	048 -2	049 ④	
050 ②	051 ②	052 ②	053 ①	054 ⑤
055 ②	056 ⑤			

해
심
유
형

최종 점검하기

1 ④	2 ①	3 ③	4 ③	5 ⑤
6 서로 다른 두 실근	7 ③	8 1	9 2	
10 ①	11 ③	12 ③	13 ④	14 ②
15 $x^2-x+3=0$	16 ④	17 ③		
18 $6x^2+x-1=0$				

핵심 유형 62~63쪽

유형01 답 ②

$x^2+3x-1=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

따라서 $a=-3$, $b=13$ 이므로 $a+b=10$

유형02 답 -3

주어진 방정식의 한 근이 -2 이므로 $x=-2$ 를 대입하면

$$4-2k+6=0 \quad \therefore k=5$$

즉, 주어진 방정식은 $x^2+5x+6=0$ 이므로

$$(x+3)(x+2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-2$$

따라서 다른 한 근은 -3 이다.

유형03 답 ③

(i) $x < -3$ 일 때

$$|x+3| = -(x+3) \text{ 이므로}$$

$$x^2 - (x+3) - 9 = 0, \quad x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x < -3$ 이므로 이를 만족하는 해는 없다.

(ii) $x \geq -3$ 일 때

$$|x+3| = x+3 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + (x+3) - 9 = 0, \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 곱은 $-3 \times 2 = -6$

유형04 답 ⑤

$$x^2 - 2kx + k^2 = -4x + 5 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 1 \times (k^2 - 5)$$

$$= -4k + 9 < 0$$

$$\therefore k > \frac{9}{4}$$

유형05 답 서로 다른 두 실근

$$b-ac=2 \text{ 에서 } ac=b-2$$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = b^2 - 4ac = b^2 - 4(b-2)$$

$$= b^2 - 4b + 8 = (b-2)^2 + 4 > 0$$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

유형06 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2ax+b^2+c^2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$

이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \times (b^2 + c^2)$$

$$= a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

유형 07 답 5/4

$x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k - 1$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k - 1 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.
따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로
 $D = (2k+1)^2 - 4 \times 1 \times (k^2 + 2k - 1)$
 $= -4k + 5 = 0$
 $\therefore k = \frac{5}{4}$

핵심 유형 완성하기 64~67쪽

001 답 ③

$x^2 + 4x + 2 = 0$ 에서 근의 공식에 의하여
 $x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \times 2} = -2 \pm \sqrt{2}$
따라서 $a = -2$, $b = 2$ 이므로
 $a + b = 0$

002 답 ②

$x(x+3) = 3(x^2-1) - 2x$ 에서
 $2x^2 - 5x - 3 = 0$, $(2x+1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 3$

003 답 5

$\{x \odot (x+2)\} + \{(x-1) \odot 2\} = 7$ 에서
 $\{x(x+2) - x + (x+2)\} + \{(x-1) \times 2 - (x-1) + 2\} - 7 = 0$
 $(x^2 + 2x + 2) + (x+1) - 7 = 0$
 $x^2 + 3x - 4 = 0$, $(x+4)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
따라서 $\alpha = -4$, $\beta = 1$ 또는 $\alpha = 1$, $\beta = -4$ 이므로
 $|\alpha| + |\beta| = |-4| + |1| = 5$

004 답 1

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$ 을 곱하면
 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2 - (\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})x + (\sqrt{2}+1) \times 3 = 0$
 $x^2 - (4+3\sqrt{2})x + 3+3\sqrt{2} = 0$
 $(x-1)(x-3-3\sqrt{2}) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 3+3\sqrt{2}$
따라서 유리수인 근은 1이다.

005 답 ①

주어진 방정식의 한 근이 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면
 $1 - 4 + k = 0 \quad \therefore k = 3$

즉, 주어진 방정식은 $4x^2 + 8x + 3 = 0$ 이므로
 $(2x+3)(2x+1) = 0$
 $\therefore x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = -\frac{1}{2}$
따라서 다른 한 근은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

006 답 ①

주어진 방정식의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 - (2k+1) + k + 3 = 0$
 $-k + 3 = 0 \quad \therefore k = 3$
즉, 주어진 방정식은 $x^2 + 7x + 6 = 0$ 이므로
 $(x+6)(x+1) = 0$
 $\therefore x = -6$ 또는 $x = -1$
따라서 $a = -6$ 이므로
 $\frac{a}{k} = \frac{-6}{3} = -2$

007 답 4

$x^2 + (a+1)x + 2a = 0$ 의 한 근이 -4 이므로 $x = -4$ 를 대입하면
 $16 - 4(a+1) + 2a = 0$
 $-2a + 12 = 0 \quad \therefore a = 6$
 $x^2 - 3bx + b - 5 = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 - 3b + b - 5 = 0$, $-2b - 4 = 0 \quad \therefore b = -2$
 $\therefore a + b = 4$

008 답 ②

$x^2 + x - a = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 + 1 - a = 0 \quad \therefore a = 2$
 $3x^2 + bx + a = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x = 1$ 을 대입하면
 $3 + b + a = 0$, $b + 5 = 0 \quad \therefore b = -5$
 $\therefore ab = -10$

009 답 ①

(i) $x < -1$ 일 때
 $|x+1| = -(x+1)$ 이므로
 $x^2 + (x+1) - 1 = 0$
 $x^2 + x = 0$, $x(x+1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$
그런데 $x < -1$ 이므로 이를 만족하는 해는 없다.
(ii) $x \geq -1$ 일 때
 $|x+1| = x+1$ 이므로
 $x^2 - (x+1) - 1 = 0$
 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
(i), (ii)에 의하여 $x = -1$ 또는 $x = 2$
따라서 방정식의 모든 근의 합은
 $-1 + 2 = 1$

010 답 $x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + x - 6 = 0, (x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

다른 풀이 $x^2 = |x|^2$ 이므로

$$|x|^2 - |x| - 6 = 0, (|x|+2)(|x|-3) = 0$$

$$\therefore |x| = -2 \text{ 또는 } |x| = 3$$

그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x| = 3$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

011 답 ⑤

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 8x + 4\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 8x + 4|x-3| = 0$$

(i) $x < 3$ 일 때

$$|x-3| = -(x-3) \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 8x - 4(x-3) = 0$$

$$x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$\therefore x = 6 \pm 2\sqrt{6}$$

그런데 $x < 3$ 이므로 $x = 6 - 2\sqrt{6}$

(ii) $x \geq 3$ 일 때

$$|x-3| = x-3 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 8x + 4(x-3) = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $x = 6$

(i), (ii)에 의하여 $x = 6 - 2\sqrt{6}$ 또는 $x = 6$

따라서 $\alpha = 6 - 2\sqrt{6}$, $\beta = 6$ 이므로

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{6 - (6 - 2\sqrt{6})}{2} = \sqrt{6}$$

012 답 $k < -4$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 2x - 9 \text{ 에서}$$

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 1 \times (k^2 + 9)$$

$$= -2k - 8 > 0$$

$$\therefore k < -4$$

013 답 ③

ㄱ. $x^2 + x + 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$D_2 = 3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17 > 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 판별식을 D_3 이라고 하면

$$\frac{D_3}{4} = (-2)^2 - 1 \times 5 = -1 < 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄹ. $x^2 + 6x + 9 = 0$ 의 판별식을 D_4 라고 하면

$$\frac{D_4}{4} = 3^2 - 1 \times 9 = 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

따라서 보기 중 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

014 답 ②

$$x^2 + 4kx + 3k = 2kx - 4 \text{ 에서}$$

$$x^2 + 2kx + 3k + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 1 \times (3k + 4)$$

$$= k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$(k+1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-1 + 4 = 3$$

015 답 ②

$$x^2 + 4x + k^2 = 2kx + 8 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 1 \times (k^2 - 8)$$

$$= -4k + 12 \geq 0$$

$$\therefore k \leq 3$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 3이다.

016 답 ③

$x^2 + 2(k-a)x + k^2 - 4k + b = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - 1 \times (k^2 - 4k + b) = 0$$

$$2(2-a)k + a^2 - b = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2-a=0, a^2-b=0$$

$$\therefore a=2, b=4$$

$$\therefore ab=8$$

017 답 ①

$$2a=bc+1 \text{에서 } bc=2a-1$$

이차방정식 $x^2+2ax+bc=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-bc=a^2-(2a-1)$$

$$=a^2-2a+1=(a-1)^2 \geq 0$$

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+bc=0$ 은 실근을 갖는다.

018 답 서로 다른 두 허근

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \times (k^2-k+3)$$

$$=k-3$$

이때 $k < 3$ 이므로

$$k-3 < 0$$

따라서 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+3=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

019 답 서로 다른 두 실근

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1=a^2-4b > 0$$

이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2(a+2b)=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-1 \times 2(a+2b)$$

$$=a^2-4b+1$$

이때 $a^2-4b > 0$ 이므로

$$a^2-4b+1 > 1$$

따라서 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2(a+2b)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

020 답 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

이차방정식 $x^2+2cx+a^2-b^2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=c^2-1 \times (a^2-b^2)$$

$$=b^2+c^2-a^2=0$$

$$\therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

021 답 ③

이차방정식 $x^2+2(a+b)x+2ab+c^2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-1 \times (2ab+c^2)$$

$$=a^2+b^2-c^2 < 0$$

$$\therefore a^2+b^2 < c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 c 인 둔각삼각형이다.

022 답 ②

이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)$$

$$=b^2-a^2+c^2 > 0$$

$$\therefore b^2+c^2 > a^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다.

023 답 ①

$x^2-2kx+k^2-3k+1$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2kx+k^2-3k+1=0$ 이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \times (k^2-3k+1)$$

$$=3k-1=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{3}$$

024 답 ⑤

$x^2-2(a+2k)x+4k^2+k+b$ 가 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2(a+2k)x+4k^2+k+b=0$ 이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a+2k)^2-1 \times (4k^2+k+b)=0$$

$$(4a-1)k+a^2-b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$4a-1=0, a^2-b=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{16}$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{16}$$

025 답 ②

$kx^2+(3k+1)x+a(k+1)$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$kx^2+(3k+1)x+a(k+1)=0$ 이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(3k+1)^2-4 \times k \times a(k+1)=0$$

$$(9-4a)k^2+2(3-2a)k+1=0 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $9-4a \neq 0$ 일 때

k 의 값이 오직 한 개뿐이라면 ㉠의 판별식을 D_1 이라고 할 때,

$D_1=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4}=(3-2a)^2-(9-4a) \times 1$$

$$=4a^2-8a=0$$

$$4a(a-2)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 a 는 자연수이므로 $a=2$

(ii) $9-4a=0$ 일 때

$$9-4a=0 \text{에서 } a=\frac{9}{4}$$

그런데 a 는 자연수이므로 이를 만족하는 a 의 값은 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수 a 의 값은 2이다.

유형08 답 20

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 4, \alpha\beta = 2 \\ \therefore \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{4^3 - 3 \times 2 \times 4}{2} = 20 \end{aligned}$$

유형09 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 α , 3α ($\alpha \neq 0$)라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 3\alpha = -4k \quad \therefore \alpha = -k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha \times 3\alpha = -2k + 1 \quad \therefore 3\alpha^2 + 2k - 1 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3k^2 + 2k - 1 = 0, (k+1)(3k-1) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = \frac{1}{3}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = -1$

유형10 답 4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 4k - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (2k)^2 - 2(4k - 1) \\ &= 4k^2 - 8k + 2 \end{aligned}$$

이때 $\alpha^2 + \beta^2 = 34$ 이므로

$$4k^2 - 8k + 2 = 34, k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$(k+2)(k-4) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 4$

유형11 답 17

$x^2 - 5x + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = a \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2 + bx + 30 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -b, (\alpha + \beta) \times \alpha\beta = 30 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$5 + a = -b, 5a = 30 \quad \therefore a = 6, b = -11$$

$$\therefore a - b = 17$$

유형12 답 $x^2 - x - 4 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -2$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\alpha + 2$, $\beta + 2$ 이므로

$$(\alpha + 2) + (\beta + 2) = (\alpha + \beta) + 4 = -3 + 4 = 1$$

$$\begin{aligned} (\alpha + 2)(\beta + 2) &= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 \\ &= -2 + 2 \times (-3) + 4 = -4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - x - 4 = 0$

유형13 답 ③

원래의 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0$ 이라고 하자.

상윤이는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$-2 \times 4 = b \quad \therefore b = -8$$

상효는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$(-2 - 2i) + (-2 + 2i) = -a \quad \therefore a = 4$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$x^2 + 4x - 8 = 0$$

유형14 답 $(x - 2 - i)(x - 2 + i)$

이차방정식 $x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 근이 $x = 2 \pm i$ 이므로

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= \{x - (2 + i)\} \{x - (2 - i)\} \\ &= (x - 2 - i)(x - 2 + i) \end{aligned}$$

유형15 답 5

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α , β 라고 하면

$$\alpha + \beta = 4$$

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이므로 $f(2x - 3) = 0$ 이라면

$$2x - 3 = \alpha \text{ 또는 } 2x - 3 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + 3}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta + 3}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x - 3) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + 3}{2} + \frac{\beta + 3}{2} &= \frac{(\alpha + \beta) + 6}{2} \\ &= \frac{4 + 6}{2} = 5 \end{aligned}$$

유형16 답 ①

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2 - i$ 가 근이면 $2 + i$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(2 - i) + (2 + i) = -a \quad \therefore a = -4$$

두 근의 곱은

$$(2 - i)(2 + i) = b \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore a + b = 1$$

026 답 22

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-2)^3 - 3 \times 5 \times (-2) \\ &= 22 \end{aligned}$$

027 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta}{\alpha-3} + \frac{\alpha}{\beta-3} &= \frac{\beta(\beta-3) + \alpha(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\beta-3)} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 3(\alpha + \beta)}{\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 3(\alpha + \beta)}{\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9} \\ &= \frac{4^2 - 2 \times (-1) - 3 \times 4}{-1 - 3 \times 4 + 9} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

028 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 3^2 - 4 \times \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

그런데 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha - \beta = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 - \beta^2 &= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ &= 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

029 답 9

β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\beta^2 - 2\beta - 5 = 0 \quad \therefore \beta^2 = 2\beta + 5$$

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\alpha + \beta^2 &= 2\alpha + (2\beta + 5) \\ &= 2(\alpha + \beta) + 5 \\ &= 2 \times 2 + 5 = 9 \end{aligned}$$

030 답 ④

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 3\beta + 4 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha + 1 = 2\alpha - 3, \beta^2 - \beta + 1 = 2\beta - 3$$

$x^2 - 3x + 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^2 - \alpha + 1)(\beta^2 - \beta + 1) &= (2\alpha - 3)(2\beta - 3) \\ &= 4\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 9 \\ &= 4 \times 4 - 6 \times 3 + 9 = 7 \end{aligned}$$

031 답 ②

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0, \beta^2 + 2\beta + 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha + 3 = -\alpha, \beta^2 + \beta + 3 = -\beta$$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha + 3} + \frac{\alpha}{\beta^2 + \beta + 3} &= \frac{\beta}{-\alpha} + \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(-2)^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

032 답 $\frac{1}{2}$

주어진 이차방정식의 두 근을 $2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\alpha + 3\alpha = 5k \quad \therefore \alpha = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2\alpha \times 3\alpha = -k + 2 \quad \therefore 6\alpha^2 + k - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$6k^2 + k - 2 = 0, (3k + 2)(2k - 1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } k = \frac{1}{2}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$

033 답 ①

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha = 6k \quad \therefore \alpha = 2k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha \times 2\alpha = 7k + 1 \quad \therefore 2\alpha^2 - 7k - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$8k^2 - 7k - 1 = 0, (8k + 1)(k - 1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{8} \text{ 또는 } k = 1$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = 1$

034 답 -3

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 3$ 이라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 3) = 2k + 5 \quad \therefore \alpha = k + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha + 3) = -k - 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(k + 1)(k + 4) = -k - 5, k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$(k + 3)^2 = 0 \quad \therefore k = -3$$

035 답 ③

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 1$ 이라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 1) = 2k + 1 \quad \therefore \alpha = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha + 1) = 3k \quad \therefore \alpha^2 + \alpha - 3k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$k^2 + k - 3k = 0, k^2 - 2k = 0$$

$$k(k - 2) = 0 \quad \therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

036 답 -3

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3k, \alpha\beta = k^2 - 3k$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (3k)^2 - 4(k^2 - 3k) \\ &= 5k^2 + 12k \end{aligned}$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = 9$ 이므로

$$5k^2 + 12k = 9, 5k^2 + 12k - 9 = 0$$

$$(k+3)(5k-3)=0 \quad \therefore k=-3 \text{ 또는 } k=\frac{3}{5}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k=-3$

037 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -k + 1, \alpha\beta = k - 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta \\ &= (-k+1)^2 - 3(k-3) \\ &= k^2 - 5k + 10 \end{aligned}$$

이때 $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 4$ 이므로

$$k^2 - 5k + 10 = 4, k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$(k-2)(k-3)=0 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 곱은 $2 \times 3 = 6$

038 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$

$$\alpha + \beta - 2\alpha\beta - 7 = 0 \text{에서}$$

$$a - 2b - 7 = 0 \quad \therefore a - 2b = 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) = 8 \text{에서}$$

$$\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 4 \quad \therefore 2a + b = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-2$

$$\therefore a+b=1$$

039 답 10

$x^2 + ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2 + bx + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = -b, (\alpha - 1)(\beta - 1) = a$$

$$\therefore (\alpha + \beta) - 2 = -b, \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-a - 2 = -b, b + a + 1 = a \quad \therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$$

040 답 ②

$x^2 - ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 2 = a, -1 \times 2 = b \quad \therefore a = 1, b = -2$$

따라서 이차방정식 $2ax^2 + (a+b)x + b = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = -1$$

041 답 ④

$x^2 - x + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = a \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2 + bx + 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2 + \beta^2 = -b, \alpha^2\beta^2 = 4$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -b, (\alpha\beta)^2 = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$1 - 2a = -b, a^2 = 4$$

이때 $a < 0$ 이므로 $a = -2, b = -5$

$$\therefore ab = 10$$

042 답 ③

$x^2 - ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b \quad \dots\dots ㉠$$

$2x^2 + ax + a + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a+b}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{b} = \frac{a+b}{2} \quad \therefore a = 1, b = -2$$

$$\therefore a - b = 3$$

043 답 $x^2 + x + 4 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 4$$

구하는 이차방정식의 근이 $\alpha - 1, \beta - 1$ 이므로

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2$$

$$= 1 - 2 = -1$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= 4 - 1 + 1 = 4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 + x + 4 = 0$

044 답 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-i) + (2+i) = -a, (2-i)(2+i) = b$$

$$\therefore a = -4, b = 5$$

$$\therefore a + b = 1$$

045 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 1$$

구하는 이차방정식의 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{1} = 1$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 + 5x + 1 = 0$

046 ④ $5x^2-7x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$

구하는 이차방정식의 근이 $1+\frac{1}{\alpha}$, $1+\frac{1}{\beta}$ 이므로

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\beta}\right) &= 2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\ &= 2+\frac{3}{-5}=\frac{7}{5} \\ \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{\alpha+1}{\alpha} \times \frac{\beta+1}{\beta} = \frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{-5+3+1}{-5}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$5\left(x^2-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}\right)=0 \quad \therefore 5x^2-7x+1=0$$

047 ③

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ 이라고 하자.

가민이는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$3 \times 4 = b \quad \therefore b=12$$

예지는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=-a \quad \therefore a=-2$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2-2x+12=0$

048 ④ -2

준희는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{b}{2}=-\frac{3}{2} \quad \therefore b=-3$$

서진이는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a+b=-2$$

049 ④

이차방정식 $x^2+2x+5=0$ 의 근이 $x=-1\pm 2i$ 이므로

$$\begin{aligned}x^2+2x+5 &= \{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\} \\ &= (x+1-2i)(x+1+2i)\end{aligned}$$

050 ②

이차방정식 $4x^2-4x+3=0$ 의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}4x^2-4x+3 &= 4\left(x-\frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right) \\ &= (2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

051 ②

$f(x)=0$ 의 두 근이 α , β 이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(3x-5)=0$ 이려면

$$3x-5=\alpha \text{ 또는 } 3x-5=\beta \quad \therefore x=\frac{\alpha+5}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+5}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x-5)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+5}{3}+\frac{\beta+5}{3}=\frac{(\alpha+\beta)+10}{3}=\frac{-1+10}{3}=3$$

052 ②

$f(x)=0$ 의 두 근을 α , β 라고 하면

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=4$$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x+1)=0$ 이려면

$$2x+1=\alpha \text{ 또는 } 2x+1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-1}{2} \times \frac{\beta-1}{2} &= \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4} \\ &= \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4} \\ &= \frac{4+1+1}{4}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

053 ①

$f(3-4x)=0$ 의 두 근을 α , β 라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{4}, \alpha\beta=-2$$

$f(3-4\alpha)=0$, $f(3-4\beta)=0$ 이므로 $f(2x)=0$ 이려면

$$2x=3-4\alpha \text{ 또는 } 2x=3-4\beta$$

$$\therefore x=\frac{3-4\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3-4\beta}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{3-4\alpha}{2} \times \frac{3-4\beta}{2} &= \frac{(3-4\alpha)(3-4\beta)}{4} \\ &= \frac{9-12(\alpha+\beta)+16\alpha\beta}{4} \\ &= \frac{9-12 \times \left(-\frac{1}{4}\right)+16 \times (-2)}{4} \\ &= -5\end{aligned}$$

054 ⑤

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $-2+\sqrt{3}i$ 가 근이면 $-2-\sqrt{3}i$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=-a \quad \therefore a=4$$

두 근의 곱은

$$(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)=b \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=11$$

055 ②

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $a-2i$ 가 근이면 $a+2i$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(a-2i)+(a+2i)=-2, 2a=-2 \quad \therefore a=-1$$

두 근의 곱은

$$(a-2i)(a+2i)=b, a^2+4=b \quad \therefore b=5$$

$$\therefore ab=-5$$

056 답 ⑤

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$ 이 근이면 $2+\sqrt{3}$ 도 근이다.

두 근의 합은

$$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-2ab \quad \therefore ab=-2$$

두 근의 곱은

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=a+b \quad \therefore a+b=1$$

$$\begin{aligned} \therefore (a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\ &= 1^2 - 4 \times (-2) = 9 \end{aligned}$$

핵심 유형 최종 점검하기 •

75~77쪽

1 답 ④

유형 01 이차방정식의 풀이

$x^2+5x+8=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

따라서 $a=-5$, $b=7i$ 이므로

$$a+b=2$$

2 답 ①

유형 02 한 근이 주어진 이차방정식

주어진 방정식의 한 근이 -1 이므로 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-3k+2=0 \quad \therefore k=1$$

즉, 주어진 방정식은 $x^2+3x+2=0$ 이므로

$$(x+2)(x+1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 다른 한 근은 -2 이다.

3 답 ③

유형 03 절댓값 기호를 포함한 방정식

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2+3(x-1)-1=0, x^2+3x-4=0$$

$$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x=-4$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2-3(x-1)-1=0, x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 $x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 합은 $-4+1+2=-1$

4 답 ③

유형 04 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $kx^2+2(k+2)x+k+3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k+2)^2 - k(k+3) = k+4 < 0 \quad \therefore k < -4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -5 이다.

5 답 ⑤

유형 04 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+6k-3b=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - 1 \times (k^2+6k-3b) = 0$$

$$2(a-3)k + a^2 + 3b = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-3=0, a^2+3b=0 \quad \therefore a=3, b=-3$$

$$\therefore a+b=0$$

6 답 서로 다른 두 실근

유형 05 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k+3)^2 - 1 \times (k^2+3) = 6k+6$$

이때 $k > -1$ 이므로 $6k+6 > 0$

따라서 이차방정식 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

7 답 ③

유형 06 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양

이차방정식 $x^2+2ax+b^2+c^2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (b^2+c^2) = a^2 - b^2 - c^2 > 0 \quad \therefore a^2 > b^2+c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 a 인 둔각삼각형이다.

8 답 1

유형 07 이차식이 완전제곱식이 되는 조건

이차방정식 $x^2+2ax-b(a-2b)=0$, 즉 $x^2+2ax-ab+2b^2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \times (-ab+2b^2) = a^2+ab-2b^2=0$$

$$(a+2b)(a-b)=0 \quad \therefore a=-2b \text{ 또는 } a=b$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 $a=b$

$$\therefore \frac{b}{a}=1$$

9 답 2

유형 08 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=\frac{6}{3}=2, a\beta=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3\alpha\beta \\ &= 2^3-3 \times \frac{2}{3} \times 2-3 \times \frac{2}{3}=2 \end{aligned}$$

10 답 ①

유형 08 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2+\alpha+2=0, \beta^2+\beta+2=0$$

$$\therefore \alpha^2+2\alpha+2=\alpha, \beta^2+2\beta+2=\beta$$

$$x^2+x+2=0 \text{에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2+2\alpha+2} + \frac{1}{\beta^2+2\beta+2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}$$

11 답 ③

유형 09 두 근의 조건이 주어진 이차방정식

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+2) = -2(k-1) \quad \therefore \alpha = -k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2) = -k+6 \quad \therefore \alpha^2+2\alpha+k-6=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$k^2-k-6=0, (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=3$

12 답 ③

유형 10 두 근의 관계식이 주어진 이차방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2k+2, \alpha\beta=4k+3$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta \\ &= (2k+2)^2-(4k+3) \\ &= 4k^2+4k+1 \end{aligned}$$

이때 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=9$ 이므로

$$4k^2+4k+1=9, k^2+k-2=0$$

$$(k+2)(k-1)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-2+1=-1$

13 답 ④

유형 11 두 이차방정식이 주어질 때 미정계수 구하기

$x^2+ax+3=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=3 \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2+2x+b=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=-2, (\alpha+1)(\beta+1)=b$$

$$\therefore \alpha+\beta=-4, \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-a=-4, 3-a+1=b \quad \therefore a=4, b=0$$

$$\therefore a-b=4$$

14 답 ②

유형 12 두 수를 근으로 하는 이차방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-1$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} &= \frac{(\beta+1)+(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ &= \frac{3+2}{-1+3+1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1} &= \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ &= \frac{1}{-1+3+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$ 에서

$$3x^2-5x+1=0$$

15 답 $x^2-x+3=0$

유형 13 잘못 보고 푼 이차방정식

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ 이라고 하자.

x^2 의 계수와 b 를 바르게 보고 풀었을 때의 해가 $x=1\pm\sqrt{2}i$ 이므로 두 근의 곱은

$$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3$$

x^2 의 계수와 a 를 바르게 보고 풀었을 때의 해가 $x=-1$ 또는

$x=2$ 이므로 두 근의 합은

$$-1+2=-a \quad \therefore a=-1$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2-x+3=0$

16 답 ④

유형 14 이차식의 인수분해

이차방정식 $5x^2-4x+4=0$ 의 근이 $x=\frac{2\pm 4i}{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} 5x^2-4x+4 &= 5\left(x-\frac{2+4i}{5}\right)\left(x-\frac{2-4i}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5}(5x-2-4i)(5x-2+4i) \end{aligned}$$

따라서 $a=-2, b=4$ 이므로 $a+b=2$

17 답 ③

유형 15 이차방정식 $f(x)=0$ 의 근을 알 때, $f(ax+b)=0$ 의 근 구하기

$f(2x+1)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(2\alpha+1)=0, f(2\beta+1)=0$$

$f(x-2)=0$ 이라면

$$x-2=2\alpha+1 \text{ 또는 } x-2=2\beta+1$$

$$\therefore x=2\alpha+3 \text{ 또는 } x=2\beta+3$$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} (2\alpha+3)(2\beta+3) &= 4\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+9 \\ &= 4\times(-5)+6\times 4+9=13 \end{aligned}$$

18 답 $6x^2+x-1=0$

유형 16 이차방정식의 켤레근

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$ 가 근이면 $1-\sqrt{2}i$ 도 근이다.

$$\text{두 근의 합은 } (1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a \quad \therefore a=-2$$

$$\text{두 근의 곱은 } (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3$$

이때 구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 이므로

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}, \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$6\left(x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)=0 \quad \therefore 6x^2+x-1=0$$

05 이차방정식과 이차함수

해심
유형

유형01 ①	유형02 ④	유형03 0
유형04 ③	유형05 ①	유형06 ①
유형07 ②	유형08 ①	유형09 -12
유형10 ⑤	유형11 4	

해심
유형

완성하기

001 ③	002 16	003 ②	004 1	005 ④
006 4	007 $k \geq -5$	008 ②	009 2	
010 ②	011 ②	012 ⑤	013 ④	
014 $k > 5$	015 ④	016 ①	017 ⑤	018 ②
019 ①	020 ②	021 ②	022 ③	023 ⑤
024 ⑤	025 ②	026 3	027 ②	028 3
029 ③	030 ⑤	031 ⑤	032 ④	033 5
034 ③	035 ⑤	036 ④	037 ⑤	038 ①
039 ②	040 ⑤	041 ④	042 ②	
043 21 m	044 ③	045 ⑤	046 225	

해심
유형

최종 점검하기

1 ④	2 $\neg, \sqsubset$	3 -21	4 1	5 ①
6 2	7 ②	8 ③	9 ⑤	10 2
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ③	

핵심 유형 80~82쪽

유형01 답 ①

이차함수 $y=x^2-ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-3+1=a$, $-3 \times 1=b$ $\therefore a=-2$, $b=-3$
 $\therefore a+b=-5$

유형02 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-1=0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \times (k^2+3k-1)=-3k+1 < 0 \quad \therefore k > \frac{1}{3}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 1이다.

유형03 답 0

이차함수 $y=x^2+ax-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+b$ 의 교점의 x 좌표가 -2, 4이므로 -2, 4는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x+b$, 즉 $x^2+(a-2)x-b-1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+4=-(a-2), \quad -2 \times 4=-b-1$$

$$\therefore a=0, \quad b=7 \quad \therefore ab=0$$

유형04 답 ③

$$x^2+4x+3k=-x+k \text{에서 } x^2+5x+2k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D=5^2-4 \times 1 \times 2k=25-8k > 0 \quad \therefore k < \frac{25}{8}$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.

유형05 답 ①

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$ 라고 하면

$$x^2+3x-1=2x+b \text{에서 } x^2+x-b-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=1^2-4 \times 1 \times (-b-1)=4b+5=0 \quad \therefore b=-\frac{5}{4}$$

따라서 직선의 방정식은 $y=2x-\frac{5}{4}$ 이므로 y 절편은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

유형06 답 ①

$$y=2x^2+8kx-3=2(x+2k)^2-8k^2-3$$

이 이차함수는 $x=-2k$ 일 때 최솟값이 $-8k^2-3$ 이므로

$$-8k^2-3=-11 \quad \therefore k^2=1 \quad \therefore k=\pm 1$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k=1$

유형07 답 ②

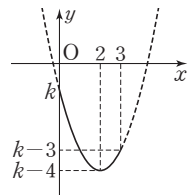
$$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$$

이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=2$ 일 때 최솟값은 $k-4$ 이므로

$$k-4=-5 \quad \therefore k=-1$$

따라서 $x=0$ 일 때 $f(x)$ 의 최댓값은 $k=-1$



유형08 답 ①

$$x^2-2x=t \text{로 놓으면 } t=(x-1)^2-1$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값은 3, $x=1$ 일 때 최솟값은 -1이므로 $-1 \leq t \leq 3$

이때 주어진 함수는

$$y=-2t^2+4t-5=-2(t-1)^2-3$$

따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 $t=1$ 일 때 최댓값은 -3이고, $t=-1$ 또는 $t=3$ 일 때 최솟값은 -11이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $-3+(-11)=-14$

유형09 답 -12

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+6y+1 &= (x^2-4x+4) + (y^2+6y+9) - 12 \\ &= (x-2)^2 + (y+3)^2 - 12 \end{aligned}$$

이때 x, y 가 실수이므로 $(x-2)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$

$$\therefore x^2+y^2-4x+6y+1 \geq -12$$

따라서 구하는 최솟값은 -12이다.

유형 10 ⑤

$x+y=1$ 에서 $y=1-x$ 이므로 이를 $4x^2+y^2$ 에 대입하면

$$4x^2+y^2=4x^2+(1-x)^2=5x^2-2x+1$$

$$=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$$

따라서 $x=\frac{1}{5}$ 일 때 최솟값은 $\frac{4}{5}$ 이다.

유형 11 ④

점 P의 좌표를 $(a, -a+4)$ 라고 하면

$$\overline{OQ}=a, \overline{PQ}=-a+4$$

사각형 ROQP의 넓이를 S라고 하면

$$S=a(-a+4)=-a^2+4a=-(a-2)^2+4$$

이때 $0 < a < 4$ 이므로 $a=2$ 일 때 사각형 ROQP의 넓이의 최댓값은 4이다.

핵심 유형 완성하기 83~89쪽

001 ③

이차함수 $y=2x^2+ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 4$ 이므로 $-1, 4$ 는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+4=-\frac{a}{2}, -1 \times 4=\frac{b}{2} \quad \therefore a=-6, b=-8$$

$$\therefore ab=48$$

002 ① 16

이차함수 $y=x^2-ax+a+5$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 2, b 이므로 2, b 는 이차방정식 $x^2-ax+a+5=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+b=a, 2 \times b=a+5$$

$$\therefore a-b=2, a-2b=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=9, b=7$

$$\therefore a+b=16$$

003 ②

이차방정식 $x^2-(k+1)x-2k=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k+1, \alpha\beta=-2k$$

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 5이므로 $|\alpha-\beta|=5$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\alpha-\beta)^2=25$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2 \text{에서 } (k+1)^2+8k=25$$

$$k^2+10k-24=0, (k+12)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-12 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=2$

004 ①

$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$c=-2 \quad \therefore y=ax^2+bx-2$$

이때 이차방정식 $ax^2+bx-2=0$ 의 계수가 유리수이고 한 근이 $-1+\sqrt{3}$ 이므로 $-1-\sqrt{3}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-\frac{b}{a}$$

$$(-1+\sqrt{3}) \times (-1-\sqrt{3})=-\frac{2}{a}$$

$$\therefore a=1, b=2 \quad \therefore a+b+c=1$$

005 ④

이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2+k+4=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1 \times (k^2+k+4)=k-3>0 \quad \therefore k>3$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 4이다.

006 ④

이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=k^2-4 \times 1 \times k=k^2-4k=0$$

$$k(k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=4$

007 ③ $k \geq -5$

이차방정식 $x^2-2(k+2)x+k^2+3k-1=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k+2)^2-1 \times (k^2+3k-1)=k+5 \geq 0 \quad \therefore k \geq -5$$

008 ②

이차방정식 $x^2+4x-3k+5=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$D_1 < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4}=2^2-1 \times (-3k+5)=3k-1 < 0$$

$$\therefore k < \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $kx^2+8x-2=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면 $D_2=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_2}{4}=4^2-k \times (-2)=2k+16=0$$

$$\therefore k=-8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에 의하여 $k=-8$

009 ②

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면 $D_1 < 0$ 이어야 하므로

$$D_1=b^2-4ac < 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

이차방정식 $bx^2+2(a+c)x+b=0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4}=(a+c)^2-b \times b=a^2+c^2+2ac-b^2$$

⑨에서 $-b^2 > -4ac$ 이므로

$$\frac{D_2}{4}=a^2+c^2+2ac-b^2 > a^2+c^2+2ac-4ac=(a-c)^2 \geq 0$$

따라서 구하는 교점의 개수는 2이다.

010 답 ②

이차함수 $y=x^2+3x+a$ 의 그래프와 직선 $y=bx-1$ 의 두 교점의 x 좌표가 $-3, 1$ 이므로 $-3, 1$ 은 이차방정식 $x^2+3x+a=bx-1$, 즉 $x^2-(b-3)x+a+1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1=b-3, -3 \times 1=a+1$$

$$\therefore a=-4, b=1$$

$$\therefore a+b=-3$$

011 답 ②

이차방정식 $-x^2+ax+3=-2x+b$, 즉 $x^2-(a+2)x+b-3=0$ 의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{5}$ 이므로 $2-\sqrt{5}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=a+2, (2+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5})=b-3$$

$$\therefore a=2, b=2 \quad \therefore ab=4$$

012 답 ⑤

이차함수 $y=x^2+ax-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x-5$ 의 두 교점의 x 좌표를 α, β 라고 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x-5$, 즉 $x^2+(a-2)x+4=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-(a-2), \alpha\beta=4$$

이때 이차함수의 그래프와 직선의 두 교점의 x 좌표의 차가 3이므로 $|\alpha-\beta|=3$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\alpha-\beta)^2=9$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2 \text{에서}$$

$$(a-2)^2-16=9, a^2-4a-21=0$$

$$(a+3)(a-7)=0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $-3+7=4$

013 답 ④

$$-x^2+kx-k^2=-kx+k-3 \text{에서 } x^2-2kx+k^2+k-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \times (k^2+k-3)=-k+3>0 \quad \therefore k<3$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

014 답 $k>5$

$$x^2+2kx+k^2-1=4x+3k \text{에서 } x^2+2(k-2)x+k^2-3k-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1 \times (k^2-3k-1)=-k+5<0 \quad \therefore k>5$$

015 답 ④

$$-x^2-(k-3)x+k+1=k(x+k) \text{에서}$$

$$x^2+(2k-3)x+k^2-k-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$D=(2k-3)^2-4 \times 1 \times (k^2-k-1)=-8k+13 \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{13}{8}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다.

016 답 ①

기울기가 4이고 y 절편이 1 이상인 직선의 방정식을

$$y=4x+b(b \geq 1) \text{라고 하면 } -x^2+2kx-k^2=4x+b \text{에서}$$

$$x^2-2(k-2)x+k^2+b=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1 \times (k^2+b)=-4k+4-b=0$$

$$\therefore b=-4k+4$$

$$\text{그런데 } b \geq 1 \text{이므로 } -4k+4 \geq 1 \quad \therefore k \leq \frac{3}{4}$$

017 답 ⑤

$$x^2+2kx+a=2bx-k^2+4k \text{에서 } x^2+2(k-b)x+k^2-4k+a=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-b)^2-1 \times (k^2-4k+a)=0$$

$$-2(b-2)k+b^2-a=0$$

$$\text{이 등식이 } k \text{에 대한 항등식이므로 } b-2=0, b^2-a=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=4, b=2$$

$$\therefore a+b=6$$

018 답 ②

직선 $y=-x+7$ 에 평행한 직선의 기울기는 -1 이다.

기울기가 -1 인 직선의 방정식을 $y=-x+b$ 라고 하면

$$x^2-5x-3=-x+b \text{에서 } x^2-4x-b-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1 \times (-b-3)=b+7=0 \quad \therefore b=-7$$

따라서 직선의 방정식은 $y=-x-7$ 이므로 y 절편은 -7 이다.

019 답 ①

점 $(-3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x+3)+1$ 이라고 하면

$$-x^2+2x+3=m(x+3)+1 \text{에서 } x^2+(m-2)x+3m-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(m-2)^2-4 \times 1 \times (3m-2)=m^2-16m+12=0$$

따라서 이차방정식 $m^2-16m+12=0$ 의 근이 직선의 기울기이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 직선의 기울기의 합은 16이다.

020 답 ②

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$ 라고 하면

$$x^2=2x+b \text{에서 } x^2-2x-b=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라고 하면 $D_1=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1 \times (-b)=b+1=0 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore y=2x-1$$

$$-2x^2+kx+k-3=2x-1 \text{에서 } 2x^2-(k-2)x-k+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라고 하면 $D_2=0$ 이어야 하므로

$$D_2=(k-2)^2-4 \times 2 \times (-k+2)=k^2+4k-12=0$$

$$(k+6)(k-2)=0 \quad \therefore k=-6 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=2$

021 답 ②

$y = -x^2 + 2kx + k = -(x-k)^2 + k^2 + k$
 이 이차함수는 $x=k$ 일 때 최댓값이 k^2+k 이므로
 $k^2+k=6, k^2+k-6=0$
 $(k+3)(k-2)=0 \quad \therefore k=-3$ 또는 $k=2$
 그런데 $k>0$ 이므로 $k=2$

022 답 ③

$y = -2x^2 + 8x + 5 = -2(x-2)^2 + 13$
 이므로 $x=2$ 일 때 최댓값은 13이다.
 $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
 이므로 $x=1$ 일 때 최솟값은 -1이다.
 따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
 $13 + (-1) = 12$

023 답 ⑤

$x=-1$ 에서 최솟값 -5를 가지므로 $f(x) = a(x+1)^2 - 5$
 $f(1)=7$ 에서 $4a-5=7 \quad \therefore a=3$
 $\therefore f(x) = 3(x+1)^2 - 5 = 3x^2 + 6x - 2$
 따라서 $a=3, b=6, c=-2$ 이므로 $a+b-c=11$

024 답 ⑤

$y = 2x^2 + kx - k = 2\left(x + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{8} - k$
 이 이차함수는 $x = -\frac{k}{4}$ 일 때 최솟값이 $-\frac{k^2}{8} - k$ 이므로
 $f(k) = -\frac{k^2}{8} - k = -\frac{1}{8}(k+4)^2 + 2$
 따라서 $k=-4$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 2이다.

025 답 ②

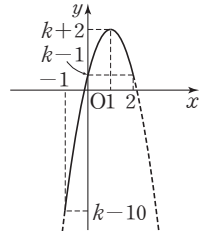
$f(x) = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$
 이 이차함수는 $x=2$ 일 때 최댓값이 $k+4$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 2$ 를 만족하려면
 $k+4 \leq 2 \quad \therefore k \leq -2$
 따라서 실수 k 의 최댓값은 -2이다.

026 답 3

(가)에서 $f(0)=f(2)=0$ 이므로
 $f(x) = ax(x-2) \quad (a \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$
 (나)에서 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값을 가지므로
 $g(x) = b(x-2)^2 + c \quad (b < 0)$
 이때 (나)에서 $g(0)=0$ 이므로 $4b+c=0 \quad \therefore c=-4b$
 $\therefore g(x) = b(x-2)^2 - 4b \quad \dots\dots ㉡$
 (다)에서 $f(3)=1, g(3)=1$ 이므로 ㉠, ㉡에서
 $3a=1, -3b=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}$
 $\therefore f(x) + 2g(x) = \frac{1}{3}x(x-2) + 2\left\{-\frac{1}{3}(x-2)^2 + \frac{4}{3}\right\}$
 $= -\frac{1}{3}x^2 + 2x = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3$
 따라서 $x=3$ 일 때 $f(x) + 2g(x)$ 의 최댓값은 3이다.

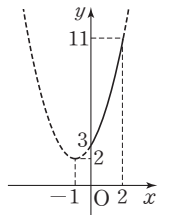
027 답 ②

$f(x) = -3x^2 + 6x + k - 1$
 $= -3(x-1)^2 + k + 2$
 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 $x=1$ 일 때 최댓값은 $k+2$ 이므로
 $k+2=4 \quad \therefore k=2$
 따라서 $x=-1$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은
 $k-10=-8$

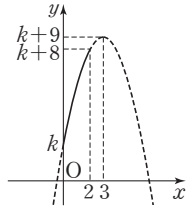


028 답 3

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ 이라고 하면
 $f(x) = (x+1)^2 + 2$
 이므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 $x=2$ 일 때 최댓값은 11이고, $x=0$ 일 때 최솟값은 3이다.



$g(x) = -x^2 + 6x + k$ 라고 하면
 $g(x) = -(x-3)^2 + k + 9$
 이므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 $x=2$ 일 때 최댓값은 $k+8$ 이고,
 $x=0$ 일 때 최솟값은 k 이다.
 이때 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값이 각각 같으므로
 $k+8=11, k=3 \quad \therefore k=3$



029 답 ③

$f(x) = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$
 이 이차함수는 $x=-1$ 일 때 최솟값이 $k-5$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 $-1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) > 2$ 를 만족하려면
 $k-5 > 2 \quad \therefore k > 7$
 따라서 정수 k 의 최솟값은 8이다.

030 답 ⑤

$y = x^2 - 2kx - 4 = (x-k)^2 - k^2 - 4$
 (i) $k < 0$ 일 때
 $x=0$ 일 때 최솟값은 -4이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
 (ii) $0 \leq k < 5$ 일 때
 $x=k$ 일 때 최솟값이 $-k^2-4$ 이므로
 $-k^2-4=-8, k^2=4 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$
 그런데 $0 \leq k < 5$ 이므로 $k=2$
 (iii) $k \geq 5$ 일 때
 $x=5$ 일 때 최솟값은 $-10k+21$ 이므로
 $-10k+21=-8 \quad \therefore k=\frac{29}{10}$
 그런데 $k \geq 5$ 이므로 만족하는 k 의 값은 없다.
 (i), (ii), (iii)에 의하여 $k=2$

031 답 ⑤

$x^2+4x=t$ 로 놓으면 $t=(x+2)^2-4$
 $-3 \leq x \leq 0$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값은 0이고, $x=-2$ 일 때 최솟값은 -4 이므로 $-4 \leq t \leq 0$
 이때 주어진 함수는
 $y=t^2+2(t+2)-3=(t+1)^2$
 따라서 $-4 \leq t \leq 0$ 에서 $t=-4$ 일 때 최댓값은 9이고, $t=-1$ 일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $9+0=9$

032 답 ④

$x^2+2x+3=t$ 로 놓으면 $t=(x+1)^2+2 \quad \therefore t \geq 2$
 이때 주어진 함수는
 $y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$
 따라서 $t \geq 2$ 에서 $t=2$ 일 때 최솟값은 5이다.

033 답 5

$x^2+4x+1=t$ 로 놓으면 $t=(x+2)^2-3 \quad \therefore t \geq -3$
 이때 주어진 함수는
 $y=t^2+4(t-1)+k=(t+2)^2+k-8$
 따라서 $t \geq -3$ 에서 $t=-2$ 일 때 최솟값은 $k-8$ 이므로
 $k-8=-3 \quad \therefore k=5$

034 답 ③

$x^2-4x=t$ 로 놓으면 $t=(x-2)^2-4$
 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $x=-2$ 일 때 최댓값은 12이고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -3 이므로 $-3 \leq t \leq 12$
 이때 주어진 함수는
 $y=\frac{1}{2}t^2+t+k=\frac{1}{2}(t+1)^2+k-\frac{1}{2}$
 따라서 $-3 \leq t \leq 12$ 에서 $t=-1$ 일 때 최솟값은 $k-\frac{1}{2}$ 이므로
 $k-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \quad \therefore k=3$

035 답 ⑤

$-x^2-y^2+2x-8y+3=-(x^2-2x+1)-(y^2+8y+16)+20$
 $=-(x-1)^2-(y+4)^2+20$
 이때 x, y 가 실수이므로
 $-(x-1)^2 \leq 0, -(y+4)^2 \leq 0$
 $\therefore -x^2-y^2+2x-8y+3 \leq 20$
 따라서 구하는 최댓값은 20이다.

036 답 ④

$x^2+5y^2+z^2+4xy-4y+2z+9$
 $=(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-4y+4)+(z^2+2z+1)+4$
 $=(x+2y)^2+(y-2)^2+(z+1)^2+4$
 이때 x, y, z 가 실수이므로
 $(x+2y)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0, (z+1)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2+5y^2+z^2+4xy-4y+2z+9 \geq 4$
 따라서 구하는 최솟값은 4이다.

037 답 ⑤

$x^2+2x=t$ 로 놓으면
 $(x^2+2x)^2-(x^2+2x)y+y^2-6y+k$
 $=t^2-ty+y^2-6y+k$
 $=\left(t^2-ty+\frac{1}{4}y^2\right)+\frac{3}{4}(y^2-8y+16)+k-12$
 $=\left(t-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}(y-4)^2+k-12$
 이때 t, y 가 실수이므로
 $\left(t-\frac{1}{2}y\right)^2 \geq 0, (y-4)^2 \geq 0$
 $\therefore (x^2+2x)^2-(x^2+2x)y+y^2-6y+k \geq k-12$
 따라서 $k-12=10$ 이므로 $k=22$

038 답 ①

$x-y=3$ 에서 $x=y+3$ 이므로 이를 x^2+y^2+2y 에 대입하면
 $x^2+y^2+2y=(y+3)^2+y^2+2y$
 $=2y^2+8y+9=2(y+2)^2+1$
 따라서 $y=-2$ 일 때 최솟값은 1이다.

039 답 ②

$2x+y=8$ 에서 $y=-2x+8$ 이므로 이를 xy 에 대입하면
 $xy=x(-2x+8)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$
 따라서 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값은 8이고, $x=4$ 일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
 $8+0=8$

040 답 ⑤

점 (a, b) 가 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로 $b=a-3$
 이를 a^2+b^2 에 대입하면
 $a^2+b^2=a^2+(a-3)^2=2a^2-6a+9$
 $=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$
 따라서 $a=\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{9}{2}$ 이다.

041 답 ④

$x+y^2=1$ 에서 $y^2=1-x$
 이때 $y^2 \geq 0$ 이므로 $1-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1$
 $y^2=1-x$ 를 x^2+4y^2 에 대입하면
 $x^2+4y^2=x^2+4(1-x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$
 따라서 $x \leq 1$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값은 1이다.

042 답 ②

점 A의 좌표를 (a, a^2-6a) ($0 < a < 3$)라고 하면
 $\overline{AD}=-a^2+6a, \overline{CD}=6-2a$
 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l 이라고 하면
 $l=2\{(-a^2+6a)+(6-2a)\}$
 $=-2a^2+8a+12$
 $=-2(a-2)^2+20$
 따라서 $0 < a < 3$ 에서 $a=2$ 일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

043 답 21 m

$$h = -5t^2 + 20t + 1 = -5(t-2)^2 + 21$$

이므로 $t=2$ 일 때 최댓값은 21이다.

따라서 공이 가장 높은 곳에 도달했을 때의 지면으로부터의 높이는 21 m이다.

044 답 ③

핫도그 한 개의 가격을 100x원 인상할 때, 핫도그 한 개의 가격은 $(1000+100x)$ 원이고, 하루 판매량은 $(200-10x)$ 개이므로 하루 판매액을 y원이라고 하면

$$y = (1000+100x)(200-10x) = -1000(x-5)^2 + 225000$$

따라서 $x=5$ 일 때 하루 판매액이 최대가 되므로 그때의 핫도그 한 개의 가격은

$$1000+100 \times 5 = 1500(\text{원})$$

045 답 ⑤

꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라고 하면

$$x+2y=16 \quad \therefore x=16-2y$$

이때 꽃밭의 넓이는

$$xy = (16-2y) \times y = -2y^2 + 16y = -2(y-4)^2 + 32$$

이때 $0 < y < 8$ 이므로 $y=4$ 일 때 꽃밭의 넓이의 최댓값은 32 m²이다.

046 답 225

$$t \text{ 초 후 } \overline{AP} = \overline{CR} = t, \overline{AS} = \overline{CQ} = 2t$$

이므로

$$\overline{BP} = \overline{DR} = 20-t$$

$$\overline{BQ} = \overline{DS} = 20-2t$$

이때 직각삼각형 APS, CRQ의 넓이는

이므로

$$\frac{1}{2} \times t \times 2t = t^2$$

또 직각삼각형 BPQ, DRS의 넓이는

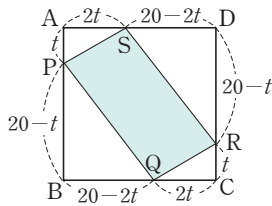
$$\frac{1}{2} \times (20-t) \times (20-2t) = t^2 - 30t + 200$$

이때 사각형 PQRS의 넓이를 S라고 하면

$$S = 20^2 - 2\{t^2 + (t^2 - 30t + 200)\}$$

$$= -4t^2 + 60t = -4\left(t - \frac{15}{2}\right)^2 + 225$$

이때 $0 < t \leq 10$ 이므로 $t = \frac{15}{2}$ 일 때 사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 225이다.



핵심 유형 최종 점검하기

90~91쪽

1 답 ④

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점

이차함수 $y = -2x^2 + ax + 3$ 의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, b이므로 1, b는 이차방정식 $-2x^2 + ax + 3 = 0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+b = \frac{a}{-2}, 1 \times b = \frac{3}{-2} \quad \therefore a = -1, b = -\frac{3}{2} \quad \therefore ab = \frac{3}{2}$$

2 답 ㄱ, ㄷ

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

ㄱ. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

$$D = b^2 - 4ac > 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. -3, 1은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+1 = -\frac{b}{a}, -3 \times 1 = \frac{c}{a} \quad \therefore b=2a, c=-3a$$

$$\therefore \frac{bc}{a^2} = \frac{2a \times (-3a)}{a^2} = -6 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 이차방정식 $bx^2 + cx + a = 0$ 의 판별식을 D라고 하면 ㄴ에서

$$b=2a, c=-3a \text{이므로}$$

$$D = c^2 - 4ab = (-3a)^2 - 4a \times (2a) = a^2 > 0$$

즉, 이차함수 $y = bx^2 + cx + a$ 의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 답 -21

유형 03 이차함수의 그래프와 직선의 교점

이차방정식 $2x^2 + (2k+1)x + k = -x + k^2$, 즉

$$2x^2 + 2(k+1)x - k^2 + k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 두 근의 합이 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2(k+1)}{2} = 5 \quad \therefore k = -6$$

이를 ①에 대입하여 정리하면 $x^2 - 5x - 21 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -21이다.

4 답 1

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

$x^2 - 2kx + k + 3 = 2x - k^2$ 에서 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + k + 3 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - 1 \times (k^2 + k + 3) = k - 2 < 0$$

$$\therefore k < 2$$

따라서 자연수 k는 1의 1개이다.

5 답 ①

유형 05 이차함수의 그래프에 접하는 직선

점 (1, 0)을 지나는 직선의 방정식을 $y = m(x-1)$ 이라고 하면

$$-x^2 + 4x - 3 = m(x-1) \text{에서 } x^2 + (m-4)x - m + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라고 하면 $D_1 = 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = (m-4)^2 - 4 \times 1 \times (-m+3) = (m-2)^2 = 0 \quad \therefore m=2$$

$$\therefore y = 2x - 2$$

$$x^2 + ax + b = 2x - 2 \text{에서 } x^2 + (a-2)x + b + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라고 하면 $D_2 = 0$ 이어야 하므로

$$D_2 = (a-2)^2 - 4 \times 1 \times (b+2) = a^2 - 4a - 4b - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 점 (1, 0)은 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프 위에 있으므로

$$0 = 1 + a + b \quad \therefore b = -a - 1$$

이를 ①에 대입하여 정리하면 $a^2 = 0$

따라서 $a=0, b=-1$ 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

6 답 2

유형 06 이차함수의 최대, 최소

$$y = x^2 + 2kx + 2k^2 - k$$

$$= (x+k)^2 + k^2 - k$$

이 이차함수는 $x = -k$ 일 때 최솟값이 $k^2 - k$ 이므로

$$k^2 - k = 2, \quad k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k+1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

7 답 2

유형 06 이차함수의 최대, 최소

$$y = -x^2 + 2kx + k$$

$$= -(x-k)^2 + k^2 + k$$

이 이차함수는 $x = k$ 일 때 최댓값이 $k^2 + k$ 이므로

$$f(k) = k^2 + k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

따라서 $k = -\frac{1}{2}$ 일 때 $f(k)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

8 답 3

유형 07 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \text{ 이라고 하면}$$

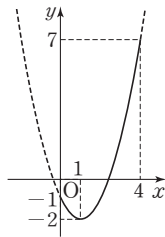
$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$

이므로 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = 4$ 일 때 최댓값은 7이고, $x = 1$ 일 때 최솟값은 -2이므로

$$M = 7, \quad m = -2$$

$$\therefore M + m = 5$$



9 답 5

유형 07 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$$y = -x^2 + 3x + 1$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

$a \geq \frac{3}{2}$ 이면 이 이차함수는 $-2 \leq x \leq a$ 에서 $x = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

따라서 $-2 \leq x \leq a$ 에서 최댓값이 3이려면 $-2 < a < \frac{3}{2}$ 이어야 한다.

이때 $x = a$ 에서 최댓값 3을 가지므로

$$-a^2 + 3a + 1 = 3, \quad a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $-2 < a < \frac{3}{2}$ 이므로 $a = 1$

한편 $x = -2$ 일 때 최솟값은

$$b = -4 - 6 + 1 = -9$$

$$\therefore a - b = 1 + 9 = 10$$

10 답 2

유형 08 공통부분이 있는 함수의 최대, 최소

$$x^2 + 2x = t \text{로 놓으면}$$

$$t = (x+1)^2 - 1 \quad \therefore t \geq -1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2(t-1) - k$$

$$= (t-1)^2 - k + 1$$

따라서 $t \geq -1$ 에서 $t = 1$ 일 때 최솟값은 $-k + 1$ 이므로

$$-k + 1 = -1 \quad \therefore k = 2$$

11 답 3

유형 09 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대, 최소

$$x^2 + 6y^2 - 4xy - 8y + 10$$

$$= (x^2 - 4xy + 4y^2) + 2(y^2 - 4y + 4) + 2$$

$$= (x - 2y)^2 + 2(y - 2)^2 + 2$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$(x - 2y)^2 \geq 0, \quad (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + 6y^2 - 4xy - 8y + 10 \geq 2$$

따라서 $x = 4, y = 2$ 일 때 최솟값은 2이므로

$$p = 4, \quad q = 2, \quad m = 2$$

$$\therefore p + q + m = 8$$

12 답 1

유형 10 조건을 만족하는 이차식의 최대, 최소

$x + 2y = 3$ 에서 $x = 3 - 2y$ 이므로 이를 $2x^2 + y^2$ 에 대입하면

$$2x^2 + y^2 = 2(3 - 2y)^2 + y^2$$

$$= 9y^2 - 24y + 18$$

$$= 9\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + 2$$

따라서 $y = \frac{4}{3}$ 일 때 최솟값은 2이다.

13 답 5

유형 10 조건을 만족하는 이차식의 최대, 최소

$$x + y = 4 \text{에서 } y = 4 - x$$

$$y \geq 0 \text{이므로 } 4 - x \geq 0, \quad x \leq 4 \quad \therefore 0 \leq x \leq 4$$

$y = 4 - x$ 를 $2x^2 - y^2$ 에 대입하면

$$2x^2 - y^2 = 2x^2 - (4 - x)^2$$

$$= x^2 + 8x - 16$$

$$= (x + 4)^2 - 32$$

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $x = 4$ 일 때 최댓값은 32이다.

14 답 3

유형 11 이차함수의 최대, 최소의 활용

t 초 후 밑면의 넓이는 $(t+4)\pi$ 이고 높이는 $8-t$ 이므로 원뿔의 부피를 V 라고 하면

$$V = \frac{1}{3} \times (t+4)\pi \times (8-t)$$

$$= -\frac{\pi}{3}(t-2)^2 + 12\pi$$

이때 $0 < t < 8$ 이므로 $t = 2$ 일 때 원뿔의 부피의 최댓값은 12π 이다.

06 여러 가지 방정식

핵심
유형

유형01 ②

유형02 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

유형03 6 유형04 ① 유형05 -1 유형06 ③

유형07 ② 유형08 $x^3-8x^2-12x+16=0$ 유형09 ④

유형10 ② 유형11 3 cm 유형12 ② 유형13 ④

유형14 ④ 유형15 5 유형16 18

유형17 $(-2, 2), (2, -2), (4, 8), (8, 4)$ 유형18 ②

핵심
유형

완성하기

001 ① 002 -4 003 3 004 ② 005 ②

006 ⑤ 007 ③ 008 ① 009 ② 010 ③

011 ① 012 ② 013 ② 014 ④ 015 1

016 ① 017 ④ 018 ③ 019 ① 020 ①

021 ⑤ 022 ② 023 ① 024 2 025 ②

026 ③ 027 ③ 028 ①

029 $x^3-2x^2+x-1=0$ 030 ④ 031 ① 032 ④

033 ① 034 ③ 035 -21 036 ② 037 ①

038 1 039 ② 040 ② 041 64 042 ③

043 ② 044 ② 045 3 046 $2\sqrt{2}$ 047 ④

048 -8 049 ③ 050 ③

051 $(-2, 2), (2, -2)$ 052 11 053 3

054 1 055 ③ 056 ④ 057 ③ 058 ②

059 ④ 060 ② 061 ④ 062 ① 063 ③

핵심
유형

최종 점검하기

1 ① 2 $-2+3\sqrt{2}$ 3 ① 4 ②

5 ③ 6 ④ 7 ④ 8 ② 9 ③

10 4 11 ④ 12 4 13 ③ 14 ④

15 ② 16 ⑤ 17 ④ 18 ⑤ 19 ①

핵심 유형 94~96쪽

유형01 답 ②

$f(x)=x^3-4x^2+8$ 이라고 할 때,

$f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$f(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-2x-4)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{5}$$

따라서 $\alpha=1+\sqrt{5}$, $\beta=1-\sqrt{5}$ 이므로

$$\alpha-\beta=1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

유형02 답 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$x^2+x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-1)(t-7)+5=0, \quad t^2-8t+12=0$$

$$(t-2)(t-6)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=6$$

(i) $t=2$ 일 때

$$x^2+x=2 \text{에서 } x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

(ii) $t=6$ 일 때

$$x^2+x=6 \text{에서 } x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=-3 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

유형03 답 6

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-13t+36=0, \quad (t-4)(t-9)=0$$

$$\therefore t=4 \text{ 또는 } t=9$$

즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$ 이므로

$$x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 3$$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 곱은

$$2 \times 3 = 6$$

유형04 답 ①

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2+4t-5=0, \quad (t+5)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-5 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-5$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}=-5 \text{에서 } x^2+5x+1=0$$

$$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

(ii) $t=1$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}=1 \text{에서 } x^2-x+1=0$$

$$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$$\frac{-5-\sqrt{21}}{2}+\frac{-5+\sqrt{21}}{2}=-5$$

유형05 ④ -1

주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$8+4k+2(k-2)+2=0 \quad \therefore k=-1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3-x^2-3x+2=0$$

$$f(x)=x^3-x^2-3x+2 \text{라고 할 때,} \quad 2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -3 & 2 \\ & 2 & 2 & -2 \end{array} \right.$$

$f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$$f(x) \text{를 인수분해하면} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2+x-1)=0$$

이때 2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+x-1=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -1이다.

유형06 ③ ③

$$f(x)=x^3+3x^2+(k+2)x+k \text{라고 할 때, } f(-1)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2+2x+k)=0$$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-1 \times k=1-k < 0$$

$$\therefore k > 1$$

유형07 ② ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2, \alpha\beta\gamma=1$$

$$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$

$$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$$

$$=1+3+2+1$$

$$=7$$

유형08 ④ $x^3-8x^2-12x+16=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=4, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-2$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ 이므로

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=2 \times 4=8$$

$$2\alpha \times 2\beta + 2\beta \times 2\gamma + 2\gamma \times 2\alpha = 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$=4 \times (-3) = -12$$

$$2\alpha \times 2\beta \times 2\gamma = 8\alpha\beta\gamma = 8 \times (-2) = -16$$

따라서 구하는 방정식은

$$x^3-8x^2-12x+16=0$$

유형09 ④ ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $\sqrt{2}$ 이면 $-\sqrt{2}$ 도 근이다. 나머지 한 근을 α 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})+\alpha=-2$$

$$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) \times \alpha + \alpha \times \sqrt{2} = a$$

$$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) \times \alpha = -b$$

세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-2, a=-2, b=-4$

$$\therefore ab=8$$

유형10 ② ②

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\therefore \omega^{1010} + \frac{1}{\omega^{1010}} = (\omega^3)^{336} \times \omega^2 + \frac{1}{(\omega^3)^{336} \times \omega^2}$$

$$= \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^4+1}{\omega^2}$$

$$= \frac{\omega+1}{\omega^2} = \frac{-\omega^2}{\omega^2} = -1$$

유형11 ③ 3 cm

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면

$$(x-1)(x-2)(x+3)=12, x^3-7x-6=0$$

$$f(x)=x^3-7x-6 \text{이라고 할 때, } -1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -6 \\ & -1 & 1 & 6 \end{array} \right.$$

하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^2-x-6)$$

$$=(x+1)(x+2)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x+1)(x-3)=0$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x>2$ 이므로 $x=3$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

핵심 유형 완성하기 97~103쪽

001 ① ①

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$ 이라고 할 때, $f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=-1 \pm \sqrt{2}i$$

따라서 방정식의 모든 실근의 합은

$$-1+2=1$$

002 ④ -4

$f(x)=x^3-2x^2-2x+1$ 이라고 할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ & & -1 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-3x+1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-3x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\gamma=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$$\alpha-\beta-\gamma=-1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=-4$$

003 ③ 3

$f(x)=x^4+x^3-15x^2+7x+6$ 이라고 할 때, $f(1)=0$, $f(3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -15 & 7 & 6 \\ & & 1 & 2 & -13 & -6 \\ \hline 3 & 1 & 2 & -13 & -6 & 0 \\ & & 3 & 15 & 6 & \\ \hline & 1 & 5 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x^2+5x+2)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x-3)(x^2+5x+2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 곱은

$$1 \times 3 = 3$$

004 ② ②

$f(x)=x^3-3x^2+2x+6$ 이라고 할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ & & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-4x+6)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-4x+6)=0$$

이때 방정식의 두 허근 α , β 는 이차방정식 $x^2-4x+6=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=6$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2 \times 6=4$$

005 ② ②

$x^2+2x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-3t=0, t(t-3)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=3$$

(i) $t=0$ 일 때

$$x^2+2x=0 \text{에서 } x(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

(ii) $t=3$ 일 때

$$x^2+2x=3 \text{에서 } x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=1$, $\beta=-3$ 이므로

$$\alpha+\beta=-2$$

006 ⑤ ⑤

$$(x^2-2x)^2=2x^2-4x+8 \text{에서}$$

$$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-8=0$$

$$x^2-2x=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t-8=0, (t+2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=4$$

(i) $t=-2$ 일 때

$$x^2-2x=-2 \text{에서 } x^2-2x+2=0$$

$$\therefore x=1 \pm i$$

(ii) $t=4$ 일 때

$$x^2-2x=4 \text{에서 } x^2-2x-4=0$$

$$\therefore x=1 \pm \sqrt{5}$$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=2$$

007 ③ ③

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-14=0 \text{에서}$$

$$\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-14=0$$

$$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-14=0$$

$$x^2+2x=t \text{로 놓으면}$$

$$(t-3)(t-8)-14=0, t^2-11t+10=0$$

$$(t-1)(t-10)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=10$$

(i) $t=1$ 일 때

$$x^2+2x=1 \text{에서 } x^2+2x-1=0$$

이차방정식 $x^2+2x-1=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -1 이다.

(ii) $t=10$ 일 때

$$x^2+2x=10 \text{에서 } x^2+2x-10=0$$

이차방정식 $x^2+2x-10=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -10 이다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 근의 곱은

$$-1 \times (-10) = 10$$

008 ① ①

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2+3t-18=0, (t+6)(t-3)=0$$

$$\therefore t=-6 \text{ 또는 } t=3$$

즉, $x^2=-6$ 또는 $x^2=3$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{6}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{3}$$

따라서 방정식의 모든 실근의 곱은

$$-\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$$

009 답 ②

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $t^2-10t+9=0, (t-1)(t-9)=0$
 $\therefore t=1$ 또는 $t=9$
 즉, $x^2=1$ 또는 $x^2=9$ 이므로
 $x=\pm 1$ 또는 $x=\pm 3$
 따라서 $\alpha=-3, \beta=-1, \gamma=1, \delta=3$ 이므로
 $\alpha\beta+\gamma\delta=-3\times(-1)+1\times 3=6$

010 답 ③

$x^4-3x^2+1=0$ 에서 $(x^4-2x^2+1)-x^2=0$
 $(x^2-1)^2-x^2=0, (x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$
 $\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
 따라서 방정식의 모든 양의 근의 합은
 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

011 답 ①

$x^4+2x^2+9=0$ 에서 $(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$
 $(x^2+3)^2-(2x)^2=0, (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$
 이때 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근을 α, β , 이차방정식
 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 γ, δ 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3, \gamma+\delta=2, \gamma\delta=3$
 $\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$
 $=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0$

012 답 ②

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$
 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $t^2+5t+4=0$
 $(t+4)(t+1)=0 \therefore t=-4$ 또는 $t=-1$
 (i) $t=-4$ 일 때
 $x+\frac{1}{x}=-4$ 에서 $x^2+4x+1=0$
 $\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$
 (ii) $t=-1$ 일 때
 $x+\frac{1}{x}=-1$ 에서 $x^2+x+1=0$
 $\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
 (i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은
 $(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-4$

013 답 ②

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$
 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면
 $t^2-3t-4=0, (t+1)(t-4)=0$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$
 (i) $t=-1$ 일 때
 $x+\frac{1}{x}=-1$ 에서 $x^2+x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라고 하면
 $D_1=1^2-4\times 1\times 1=-3<0$
 즉, 방정식 $x^2+x+1=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
 (ii) $t=4$ 일 때
 $x+\frac{1}{x}=4$ 에서 $x^2-4x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라고 하면
 $\frac{D_2}{4}=(-2)^2-1\times 1=3>0$
 즉, 방정식 $x^2-4x+1=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 (i), (ii)에 의하여 α 는 방정식 $x^2-4x+1=0$ 의 근이므로
 $\alpha^2-4\alpha+1=0$
 $\alpha \neq 0$ 이므로 양변을 α 로 나누면
 $\alpha-4+\frac{1}{\alpha}=0 \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=4$

014 답 ④

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면
 $1+k+3+1=0 \therefore k=-5$
 이를 주어진 방정식에 대입하면
 $x^3-5x^2+3x+1=0$
 $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$ 이라고 할 때,
 $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여
 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x)=(x-1)(x^2-4x-1)$
 즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-4x-1)=0$
 이때 1이 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-4x-1=0$ 의 근이므로
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 4이다.

015 답 1

주어진 방정식의 두 근이 $-2, 3$ 이므로 $x=-2, x=3$ 을 각각 대
 입하면
 $-8+4a-2(2a-b)+6b=0, 27+9a+3(2a-b)+6b=0$
 $\therefore b=1, 5a+b=-9$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1$
 이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3-2x^2-5x+6=0$

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+6 \text{이라고 할 때, } f(-2)=0, f(3)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ & & 3 & -3 & \\ & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x-3)(x-1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+2)(x-3)(x-1)=0$$

따라서 방정식의 나머지 한 근은 1이다.

016 답 ①

주어진 방정식의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 $x=-1, x=2$ 를 각각 대입하면

$$2+a+b-3+a+4=0, 32-8a+4b+6+a+4=0$$

$$\therefore 2a+b=-3, 7a-4b=42$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-7$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$2x^4-2x^3-7x^2+3x+6=0$$

$$f(x)=2x^4-2x^3-7x^2+3x+6 \text{이라고 할 때, } f(-1)=0, f(2)=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -2 & -7 & 3 & 6 \\ & & -2 & 4 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -4 & -3 & 6 & 0 \\ & & 4 & 0 & -6 & \\ & 2 & 0 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(2x^2-3)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $2x^2-3=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

017 답 ④

$-1, 1$ 이 주어진 방정식의 근이므로 $x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면

$$1-a-7-1+b=0, 1+a-7+1+b=0$$

$$\therefore a-b=-7, a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=6$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$$

$$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6 \text{이라고 할 때, } f(1)=0, f(-1)=0 \text{이}$$

므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$$

$$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)=0$$

이때 $-1, 1$ 이 아닌 나머지 두 근은 $-2, 3$ 이므로 $\alpha\beta=-6$

$$\therefore \frac{\alpha\beta}{ab}=\frac{-6}{-1 \times 6}=1$$

018 답 ③

1이 주어진 방정식의 근이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k+2+k^2-4-5=0$$

$$k^2+k-6=0, (k+3)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=2$$

(i) $k=-3$ 일 때

주어진 방정식에 대입하면 $x^3-x^2+5x-5=0$

$$f(x)=x^3-x^2+5x-5 \text{라고 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 5 & -5 \\ & & 1 & 0 & 5 \\ & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2+5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}i$$

따라서 실근 1개와 허근 2개를 가지므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $k=2$ 일 때

주어진 방정식에 대입하면 $x^3+4x^2-5=0$

$$g(x)=x^3+4x^2-5 \text{라고 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -5 \\ & & 1 & 5 & 5 \\ & 1 & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$g(x)=(x-1)(x^2+5x+5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5x+5)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서 세 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여

$$k=2, \alpha+\beta=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}+\frac{-5+\sqrt{5}}{2}=-5$$

$$\therefore 2k+\alpha+\beta=4+(-5)=-1$$

019 답 ①

$$f(x)=x^3-x^2-(k+2)x+2k \text{라 고 할 때, } f(2)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -k-2 & 2k \\ & & 2 & 2 & -2k \\ & 1 & 1 & -k & 0 \end{array}$$

하면

$$f(x)=(x-2)(x^2+x-k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+x-k)=0$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x-k=0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D=1^2-4 \times 1 \times (-k)=1+4k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{1}{4}$$

020 ①

$f(x)=x^3+(k+1)x^2+2kx+k^2$ 이라고 할 때, $f(-k)=0$ 이므로
조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x+k)(x^2+x+k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+k)(x^2+x+k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+k=0$ 이 중근을 갖거나 $x=-k$ 를 근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+x+k=0$ 이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D=1^2-4 \times 1 \times k=1-4k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$$

(ii) 방정식 $x^2+x+k=0$ 이 $x=-k$ 를 근으로 가질 때

$$k^2-k+k=0, k^2=0 \quad \therefore k=0$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은

$$\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

021 ⑤

$f(x)=x^3-4x^2+(4-k)x+2k$ 라고 할 때, $f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x-k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-2x-k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1 \times (-k)=1+k \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -1 이다.

022 ②

$f(x)=x^3-(k+1)x+k$ 라고 할 때, $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2+x-k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x-k)=0$

이 방정식의 서로 다른 실근이 한 개가 되려면 이차방정식 $x^2+x-k=0$ 이 허근을 갖거나 $x=1$ 을 중근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+x-k=0$ 이 허근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D=1^2-4 \times 1 \times (-k)=1+4k < 0 \quad \therefore k < -\frac{1}{4}$$

(ii) 방정식 $x^2+x-k=0$ 이 $x=1$ 을 중근으로 가질 때

$$1+1-k=0 \quad \therefore k=2$$

즉, $x^2+x-2=0$ 이므로

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 중근으로 갖는다는 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $k < -\frac{1}{4}$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

023 ①

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=-4$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= (-2)^2 - 2 \times 3 = -2 \end{aligned}$$

024 ②

-3 이 주어진 방정식의 근이므로 $x=-3$ 을 대입하면

$$-27+3a+6=0 \quad \therefore a=7$$

따라서 $x^3-7x+6=0$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3 \times \alpha \times \beta = -6 \quad \therefore \alpha\beta=2$$

025 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6, \alpha\beta\gamma=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} &= \frac{-\alpha}{\alpha^2} + \frac{-\beta}{\beta^2} + \frac{-\gamma}{\gamma^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \\ &= -\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= -\frac{-6}{-3} = -2 \end{aligned}$$

026 ③

이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 α, β 가 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx+2=0$ 의 근이므로 나머지 한 근을 γ 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b, \alpha\beta\gamma=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\alpha+\beta+\gamma=2+\gamma=3 \quad \therefore \gamma=1$$

$$\alpha\beta\gamma=a\gamma=-2 \quad \therefore a=-2$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=a+2=b \quad \therefore b=0$$

$$\therefore a-b=-2$$

027 ③

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$ 이라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=6 \quad \therefore \alpha=2$$

따라서 세 근이 $1, 2, 3$ 이므로

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = a, 1 \times 2 \times 3 = -b$$

$$\therefore a=11, b=-6$$

$$\therefore a+b=5$$

028 답 ①

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 3 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

따라서 세 근이 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = a, \quad \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{2} = -b$$

$$\therefore a = \frac{11}{4}, \quad b = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore a + b = 2$$

029 답 $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \quad \alpha\beta\gamma = 1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ 이므로

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma\alpha + \gamma\alpha \times \alpha\beta = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ = 1 \times 1 = 1$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma \times \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^2 = 1^2 = 1$$

따라서 구하는 방정식은

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

030 답 ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4, \quad \alpha\beta\gamma = 2$$

$$\therefore \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta^2\gamma + \beta\gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2\beta) \\ = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ = (-4)^2 - 2 \times 2 \times 3 = 4$$

따라서 구하는 일차항의 계수는 4이다.

031 답 ①

삼차방정식 $x^3 - 7x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7, \quad \alpha\beta\gamma = -3$$

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + 9 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + (\gamma + 1) = -\frac{b}{a} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1) + (\gamma + 1)(\alpha + 1) = \frac{c}{a} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = -\frac{9}{a} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1 = -\frac{9}{a}$$

$$-3 + (-7) + 1 = -\frac{9}{a} \quad \therefore a = 1$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } (\alpha + \beta + \gamma) + 3 = -\frac{b}{a}$$

$$3 = -b \quad \therefore b = -3$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3 = \frac{c}{a}$$

$$-7 + 3 = c \quad \therefore c = -4$$

$$\therefore a + b + c = -6$$

032 답 ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다. 나머지 한 근을 α 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = a + 2$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})\alpha + \alpha(1 + \sqrt{2}) = b$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})\alpha = -4$$

세 식을 연립하여 풀면 $\alpha = 4, a = 4, b = 7$

$$\therefore a + b = 11$$

033 답 ①

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 $1 - 2i$ 도 근이다. 나머지 한 근을 α 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = -10 \quad \therefore \alpha = -2$$

따라서 구하는 실근은 -2 이다.

034 답 ③

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $3 + \sqrt{3}$ 이면 $3 - \sqrt{3}$ 도 근이다.

따라서 세 근이 $1, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + (3 + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) = -a$$

$$1 \times (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3}) \times (3 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) \times 1 = b$$

$$1 \times (3 + \sqrt{3}) \times (3 - \sqrt{3}) = -c$$

$$\therefore a = -7, b = 12, c = -6$$

$$\therefore \frac{ab}{c} = \frac{-7 \times 12}{-6} = 14$$

035 답 -21

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $-1 + \sqrt{3}i$ 이면 $-1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 나머지 한 근이 c 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1 + \sqrt{3}i) + (-1 - \sqrt{3}i) + c = 3$$

$$(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i) + (-1 - \sqrt{3}i)c + c(-1 + \sqrt{3}i) = a$$

$$(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)c = -b$$

세 식을 연립하여 풀면 $a = -6, b = -20, c = 5$

$$\therefore a + b + c = -21$$

036 답 ②

$$x^3 + 1 = 0 \text{에서 } (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\omega^3 = -1, \quad \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$\therefore \omega^{1000} + \frac{1}{\omega^{1000}} = (\omega^3)^{333} \times \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{333} \times \omega}$$

$$= -\omega - \frac{1}{\omega} = -\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$$

$$= -\frac{\omega^2 + 1}{\omega} = -\frac{\omega}{\omega} = -1$$

037 답 ①

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\text{따라서 } \omega + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2+1}{\omega} = \frac{-\omega}{\omega} = -1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^4 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^3 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \omega + \frac{1}{\omega} \\ = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

038 답 1

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$$

$$\begin{aligned} \therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{120} \\ = (1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{117}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{120} \\ = 0+0+\cdots+(\omega^3)^{40} \\ = 1 \end{aligned}$$

039 답 ②

$$x^3+1=0 \text{에서 } (x+1)(x^2-x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\bar{\omega}-1} &= \frac{\bar{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\bar{\omega}-1)} = \frac{(\omega+\bar{\omega})-2}{\omega\bar{\omega}-(\omega+\bar{\omega})+1} \\ &= \frac{1-2}{1-1+1} = -1 \end{aligned}$$

040 답 ②

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

또 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 $\bar{\omega}$ 이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\neg. \omega\bar{\omega}=1 \text{ (참)}$$

$$\neg. \omega^2+\omega+1=0 \text{에서 } \omega^2=-\omega-1$$

$$\omega+\bar{\omega}=-1 \text{에서 } \bar{\omega}=-\omega-1$$

$$\therefore \omega^2=\bar{\omega} \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{1}{\omega+1} + \frac{1}{\omega^2+1} + \frac{1}{\omega^3+1} &= \frac{1}{-\omega^2} + \frac{1}{-\omega} + \frac{1}{1+1} \\ &= -\frac{1+\omega}{\omega^2} + \frac{1}{2} = -\frac{-\omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

041 답 64

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라고 하면

$$(x-1)(x+2)^2=108$$

$$x^3+3x^2-112=0$$

$$f(x)=x^3+3x^2-112 \text{라고 할 때,}$$

$$f(4)=0 \text{이므로 조립제법을 이용}$$

하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-4)(x^2+7x+28)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-4)(x^2+7x+28)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=\frac{-7 \pm 3\sqrt{7}i}{2}$$

그런데 $x>1$ 이므로 $x=4$

따라서 처음 정육면체의 부피는

$$4^3=64$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 3 & 0 & -112 \\ & & 4 & 28 & 112 \\ \hline & 1 & 7 & 28 & 0 \end{array}$$

042 답 ③

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라고 하면

$$4(a+b+c)=32 \quad \therefore a+b+c=8$$

$$2(ab+bc+ca)=34 \quad \therefore ab+bc+ca=17$$

$$abc=10$$

이때 a, b, c 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은

$$x^3-8x^2+17x-10=0$$

$$f(x)=x^3-8x^2+17x-10 \text{이라고 할 때,}$$

$$f(1)=0 \text{이므로 조립제법을 이}$$

용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2-7x+10)$$

$$=(x-1)(x-2)(x-5)$$

즉, $(x-1)(x-2)(x-5)=0$ 이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 세 모서리의 길이는 1 cm, 2 cm, 5 cm이므로 가장 긴 모서리의 길이와 가장 짧은 모서리의 길이의 차는

$$5-1=4 \text{ (cm)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 17 & -10 \\ & & 1 & -7 & 10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

043 답 ②

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x 라고 하면 원기둥의 높이는

$$4-x \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2(4-x) = \frac{40\pi}{3}$$

$$x^3-12x^2+40=0$$

$$f(x)=x^3-12x^2+40 \text{이라고 할 때,}$$

$$f(2)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하}$$

여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-10x-20)$$

즉, $(x-2)(x^2-10x-20)=0$ 이므로

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=5 \pm 3\sqrt{5}$$

그런데 $0 < x < 4$ 이므로 $x=2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 2이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -12 & 0 & 40 \\ & & 2 & -20 & -40 \\ \hline & 1 & -10 & -20 & 0 \end{array}$$

유형12 답 ②

$$x-y=1 \text{에서 } y=x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+y^2=25$ 에 대입하면

$$x^2+(x-1)^2=25, x^2-x-12=0$$

$$(x+3)(x-4)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-3, y=-4 \text{ 또는 } x=4, y=3$$

따라서 $\alpha=-3, \beta=-4$ 또는 $\alpha=4, \beta=3$ 이므로

$$\alpha\beta=12$$

유형13 답 ④

$$2x^2-3xy+y^2=0 \text{에서}$$

$$(x-y)(2x-y)=0 \quad \therefore y=x \text{ 또는 } y=2x$$

(i) $y=x$ 를 $5x^2-y^2=9$ 에 대입하면

$$5x^2-x^2=9, 4x^2=9$$

$$\therefore x=\pm\frac{3}{2}$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2} \text{일 때 } y=-\frac{3}{2}, x=\frac{3}{2} \text{일 때 } y=\frac{3}{2}$$

(ii) $y=2x$ 를 $5x^2-y^2=9$ 에 대입하면

$$5x^2-4x^2=9, x^2=9$$

$$\therefore x=\pm 3$$

$$\therefore x=-3 \text{일 때 } y=-6, x=3 \text{일 때 } y=6$$

(i), (ii)에 의하여 자연수 x, y 는 $x=3, y=6$ 이므로

$$x+y=9$$

유형14 답 ④

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ xy=3 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=10 & \dots\dots \textcircled{1} \\ v=3 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$u^2-6=10, u^2=16 \quad \therefore u=\pm 4$$

(i) $u=-4, v=3$, 즉 $x+y=-4, xy=3$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2+4t+3=0, (t+3)(t+1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=-1$$

$$\therefore x=-3, y=-1 \text{ 또는 } x=-1, y=-3$$

(ii) $u=4, v=3$, 즉 $x+y=4, xy=3$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-4t+3=0, (t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore x=1, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=1$$

(i), (ii)에 의하여 $2x+y$ 의 최댓값은

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

유형15 답 5

$2x-y=a$ 에서 $y=2x-a$ 이므로 이를 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2+(2x-a)^2=5, 5x^2-4ax+a^2-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5 \times (a^2-5)=-a^2+25=0$$

$$a^2=25 \quad \therefore a=\pm 5$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=5$

유형16 답 18

처음 땅의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y 라고 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=(3\sqrt{5})^2 & \dots\dots \textcircled{1} \\ (x-1)(y+1)=xy+2 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②에서 $xy+x-y-1=xy+2$

$$\therefore y=x-3$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2+(x-3)^2=45, x^2-3x-18=0$$

$$(x+3)(x-6)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=6$$

그런데 $1<x<3\sqrt{5}$ 이므로 $x=6, y=3$

따라서 처음 땅의 넓이는 $6 \times 3 = 18$

유형17 답 $(-2, 2), (2, -2), (4, 8), (8, 4)$

$$xy-3x-3y+4=0 \text{에서}$$

$$x(y-3)-3(y-3)-5=0$$

$$\therefore (x-3)(y-3)=5$$

(i) $x-3=-5, y-3=-1$ 일 때, $x=-2, y=2$

(ii) $x-3=-1, y-3=-5$ 일 때, $x=2, y=-2$

(iii) $x-3=1, y-3=5$ 일 때, $x=4, y=8$

(iv) $x-3=5, y-3=1$ 일 때, $x=8, y=4$

따라서 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(-2, 2), (2, -2),$

$(4, 8), (8, 4)$ 이다.

유형18 답 ②

[방법 1] $x^2+y^2-4x-2y+5=0$ 에서

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=0$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=0$$

x, y 가 실수이므로

$$x-2=0, y-1=0 \quad \therefore x=2, y=1$$

$$\therefore xy=2$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-4x+y^2-2y+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1 \times (y^2-2y+5)=-y^2+2y-1 \geq 0$$

$$\therefore (y-1)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{도 실수이므로 } y-1=0 \quad \therefore y=1$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2-4x+4=0, (x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$$

$$\therefore xy=2$$

044 답 ②

$$2x+y=1 \text{에서 } y=-2x+1 \quad \dots\dots ㉠$$

이를 $x^2+y^2=13$ 에 대입하면

$$x^2+(-2x+1)^2=13, 5x^2-4x-12=0$$

$$(5x+6)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{6}{5} \text{ 또는 } x=2$$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-\frac{6}{5}, y=\frac{17}{5} \text{ 또는 } x=2, y=-3$$

따라서 $\alpha=2, \beta=-3$ 이므로 $\alpha+\beta=-1$

045 답 3

$$x+2y=5 \text{에서 } x=-2y+5 \quad \dots\dots ㉠$$

이를 $2x^2+y^2=19$ 에 대입하면

$$2(-2y+5)^2+y^2=19, 9y^2-40y+31=0$$

$$(y-1)(9y-31)=0 \quad \therefore y=1 \text{ 또는 } y=\frac{31}{9}$$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=3, y=1 \text{ 또는 } x=-\frac{17}{9}, y=\frac{31}{9}$$

그런데 $\alpha\beta>0$ 이므로 $\alpha=3, \beta=1$

$$\therefore \alpha\beta=3$$

046 답 $2\sqrt{2}$

$$x-y=2 \text{에서 } y=x-2 \quad \dots\dots ㉠$$

이를 $x^2+4xy+y^2=10$ 에 대입하면

$$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=10$$

$$x^2-2x-1=0 \quad \therefore x=1\pm\sqrt{2}$$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=1-\sqrt{2}, y=-1-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=1+\sqrt{2}, y=-1+\sqrt{2}$$

$$\therefore |x+y|=2\sqrt{2}$$

047 답 ④

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2-y^2=-45 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$$2x+y=3 \text{에서 } y=-2x+3 \quad \dots\dots ㉠$$

이를 $x^2-y^2=-45$ 에 대입하면

$$x^2-(-2x+3)^2=-45, x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

이를 각각 ㉠에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$$x=-2, y=7 \text{ 또는 } x=6, y=-9$$

(i) $x=-2, y=7$ 을 $ax^2-y^2=-1, x+y=b$ 에 각각 대입하면

$$4a-49=-1, -2+7=b \quad \therefore a=12, b=5$$

(ii) $x=6, y=-9$ 를 $ax^2-y^2=-1, x+y=b$ 에 각각 대입하면

$$36a-81=-1, 6-9=b \quad \therefore a=\frac{20}{9}, b=-3$$

(i), (ii)에 의하여 $a=12, b=5$ 이므로 $a+b=17$

048 답 -8

$$x^2+xy-2y^2=0 \text{에서}$$

$$(x+2y)(x-y)=0 \quad \therefore x=-2y \text{ 또는 } x=y$$

(i) $x=-2y$ 를 $x^2+y^2=20$ 에 대입하면

$$4y^2+y^2=20, y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$$

$$\therefore y=-2 \text{일 때 } x=4, y=2 \text{일 때 } x=-4$$

(ii) $x=y$ 를 $x^2+y^2=20$ 에 대입하면

$$y^2+y^2=20, y^2=10 \quad \therefore y=\pm\sqrt{10}$$

$$\therefore y=-\sqrt{10} \text{일 때 } x=-\sqrt{10}, y=\sqrt{10} \text{일 때 } x=\sqrt{10}$$

(i), (ii)에 의하여 정수 x, y 는 $x=4, y=-2$ 또는 $x=-4, y=2$

이므로

$$xy=-8$$

049 답 ③

$$x^2-y^2=0 \text{에서}$$

$$(x+y)(x-y)=0 \quad \therefore y=-x \text{ 또는 } y=x$$

(i) $y=-x$ 를 $x^2-xy+y^2=12$ 에 대입하면

$$x^2+x^2+x^2=12, x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$$

$$\therefore x=-2 \text{일 때 } y=2, x=2 \text{일 때 } y=-2$$

(ii) $y=x$ 를 $x^2-xy+y^2=12$ 에 대입하면

$$x^2-x^2+x^2=12, x^2=12 \quad \therefore x=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x=-2\sqrt{3} \text{일 때 } y=-2\sqrt{3}, x=2\sqrt{3} \text{일 때 } y=2\sqrt{3}$$

(i), (ii)에 의하여 α 의 최댓값은 $2\sqrt{3}$ 이므로 그때의 β 의 값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

050 답 ③

$$x^2-xy-2y^2=0 \text{에서}$$

$$(x+y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=-y \text{ 또는 } x=2y$$

이때 x, y 가 모두 양수이려면 $x=2y$

이를 $x^2+2xy-y^2=28$ 에 대입하면

$$4y^2+4y^2-y^2=28, y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$$

그런데 x, y 는 양수이므로 $x=4, y=2$

$$\therefore x+y=6$$

051 답 $(-2, 2), (2, -2)$

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=8 \\ xy=-4 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=8 & \dots\dots ㉠ \\ v=-4 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } u^2+8=8, u^2=0 \quad \therefore u=0$$

즉, $x+y=0, xy=-4$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한

이차방정식은

$$t^2-4=0, t^2=4 \quad \therefore t=\pm 2$$

$$\therefore x=-2, y=2 \text{ 또는 } x=2, y=-2$$

따라서 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(-2, 2), (2, -2)$ 이다.

052 답 11

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} xy+(x+y)=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+v=11 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ uv=30 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $v=-u+11$ 을 ②에 대입하면

$$u(-u+11)=30, u^2-11u+30=0$$

$$(u-5)(u-6)=0 \quad \therefore u=5 \text{ 또는 } u=6$$

이를 각각 ①에 대입하면 $u=5$, $v=6$ 또는 $u=6$, $v=5$

(i) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$ 일 때

x , y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-5t+6=0, (t-2)(t-3)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore x=2, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=2$$

(ii) $u=6$, $v=5$, 즉 $x+y=6$, $xy=5$ 일 때

x , y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-6t+5=0, (t-1)(t-5)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

$$\therefore x=1, y=5 \text{ 또는 } x=5, y=1$$

(i), (ii)에 의하여 $x+2y$ 의 최댓값은 $1+2 \times 5=11$

053 답 3

$x+y=a$ 에서 $y=-x+a$ 이므로 이를 $x^2-2xy=-3$ 에 대입하면

$$x^2-2x(-x+a)=-3, 3x^2-2ax+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3 \times 3=a^2-9=0$$

$$a^2=9 \quad \therefore a=\pm 3$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

054 답 1

$x-y=2a$ 에서 $y=x-2a$ 이므로 이를 $2x^2-xy=-a^2-a+1$ 에 대입하면

$$2x^2-x(x-2a)=-a^2-a+1$$

$$x^2+2ax+a^2+a-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-1 \times (a^2+a-1)=-a+1 \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

따라서 자연수 a 의 값은 1이다.

055 답 ③

주어진 연립방정식에서 $x+y=3$, $xy=a-3$ 이므로 x , y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-3t+a-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D=(-3)^2-4 \times 1 \times (a-3)=-4a+21 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{21}{4}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 5이다.

056 답 ④

연립방정식을 세우면

$$\begin{cases} 2a^2+b^2=102 \\ 8a+4b=64 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} 2a^2+b^2=102 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2a+b=16 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②에서 $b=-2a+16$ 을 ①에 대입하면

$$2a^2+(-2a+16)^2=102, 3a^2-32a+77=0$$

$$(3a-11)(a-7)=0 \quad \therefore a=\frac{11}{3} \text{ 또는 } a=7$$

이를 각각 ②에 대입하여 풀면 연립방정식의 해는

$$a=\frac{11}{3}, b=\frac{26}{3} \text{ 또는 } a=7, b=2$$

그런데 $a>b$ 이므로 $a=7$, $b=2$

$$\therefore a+b=9$$

057 답 ③

두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1 , r_2 라고 하면

$$\begin{cases} 2\pi r_1+2\pi r_2=12\pi \\ \pi r_1^2+\pi r_2^2=26\pi \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} r_1+r_2=6 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ r_1^2+r_2^2=26 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $r_2=-r_1+6$ 을 ②에 대입하면

$$r_1^2+(-r_1+6)^2=26, r_1^2-6r_1+5=0$$

$$(r_1-1)(r_1-5)=0 \quad \therefore r_1=1 \text{ 또는 } r_1=5$$

이를 각각 ①에 대입하여 풀면 연립방정식의 해는

$$r_1=1, r_2=5 \text{ 또는 } r_1=5, r_2=1$$

따라서 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 5이다.

058 답 ②

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라고 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ \frac{1}{2}xy=24 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$$

이 연립방정식을 변형하면 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=100 \\ xy=48 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=100 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ v=48 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 ①에 대입하면

$$u^2-96=100, u^2=196 \quad \therefore u=\pm 14$$

이때 $x+y>0$ 이므로 $u=14$

따라서 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은 14 cm이다.

059 답 ④

$xy-x-y-1=0$ 에서

$$x(y-1)-(y-1)-2=0 \quad \therefore (x-1)(y-1)=2$$

(i) $x-1=-2$, $y-1=-1$ 일 때, $x=-1$, $y=0$

(ii) $x-1=-1$, $y-1=-2$ 일 때, $x=0$, $y=-1$

(iii) $x-1=1$, $y-1=2$ 일 때, $x=2$, $y=3$

(iv) $x-1=2$, $y-1=1$ 일 때, $x=3$, $y=2$

따라서 xy 의 최댓값은 $2 \times 3=6$

060 답 ②

$x^2 - xy + y + 3 = 0$ 에서 $xy - y - x^2 - 3 = 0$
 $y(x-1) - (x-1)(x+1) = 4 \quad \therefore (x-1)(y-x-1) = 4$
 x, y 가 자연수이므로 $x-1 \geq 0$
 (i) $x-1=1, y-x-1=4$ 일 때, $x=2, y=7$
 (ii) $x-1=2, y-x-1=2$ 일 때, $x=3, y=6$
 (iii) $x-1=4, y-x-1=1$ 일 때, $x=5, y=7$
 따라서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 7), (3, 6), (5, 7)$ 의 3개이다.

061 답 ④

이차방정식 $x^2 - 2mx + 2m + 4 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha \geq \beta)$ 라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 2m \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad \alpha\beta = 2m + 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $\alpha\beta = \alpha + \beta + 4, \alpha\beta - \alpha - \beta - 4 = 0$
 $\alpha(\beta - 1) - (\beta - 1) - 5 = 0 \quad \therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$
 (i) $\alpha - 1 = -1, \beta - 1 = -5$ 일 때, $\alpha = 0, \beta = -4$
 $\therefore m = \frac{\alpha + \beta}{2} = -2$
 (ii) $\alpha - 1 = 5, \beta - 1 = 1$ 일 때, $\alpha = 6, \beta = 2$
 $\therefore m = \frac{\alpha + \beta}{2} = 4$
 (i), (ii)에 의하여 자연수 m 의 값은 4이다.

062 답 ①

[방법 1] $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$ 에서
 $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 0, (x+1)^2 + (y+3)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로
 $x+1=0, y+3=0 \quad \therefore x=-1, y=-3$
 $\therefore x+y=-4$
 [방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $x^2 + 2x + y^2 + 6y + 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \times (y^2 + 6y + 10) = -y^2 - 6y - 9 \geq 0$
 $\therefore (y+3)^2 \leq 0$
 이때 y 도 실수이므로 $y+3=0 \quad \therefore y=-3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0 \quad \therefore x=-1$
 $\therefore x+y=-4$

063 답 ③

$5x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서
 $(4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) = 0, (2x-y)^2 + (x-1)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로
 $2x-y=0, x-1=0 \quad \therefore x=1, y=2$
 $\therefore x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5$

1 답 ①

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ 라고 할 때,
 $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여
 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x) = (x-1)(x^2 - 4)$
 $= (x-1)(x+2)(x-2)$
 즉, 주어진 방정식은
 $(x+2)(x-1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$
 따라서 모든 양의 근의 합은 $1 + 2 = 3$

2 답 $-2 + 3\sqrt{2}$

유형 02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이

$(x-3)(x-1)(x+5)(x+7) + 63 = 0$ 에서
 $\{(x-3)(x+7)\} \{(x-1)(x+5)\} + 63 = 0$
 $(x^2 + 4x - 21)(x^2 + 4x - 5) + 63 = 0$
 $x^2 + 4x = t$ 로 놓으면
 $(t-21)(t-5) + 63 = 0, t^2 - 26t + 168 = 0$
 $(t-12)(t-14) = 0 \quad \therefore t = 12$ 또는 $t = 14$
 (i) $t = 12$ 일 때
 $x^2 + 4x = 12$ 에서 $x^2 + 4x - 12 = 0$
 $(x+6)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -6$ 또는 $x = 2$
 (ii) $t = 14$ 일 때
 $x^2 + 4x = 14$ 에서 $x^2 + 4x - 14 = 0 \quad \therefore x = -2 \pm 3\sqrt{2}$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 가장 큰 근은 $-2 + 3\sqrt{2}$ 이다.

3 답 ①

유형 03 $x^4 + ax^2 + b = 0$ 꼴의 방정식의 풀이

$x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ 에서 $(x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = 0$
 $(x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = 0, (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
 $\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

4 답 ②

유형 04 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 꼴의 방정식의 풀이

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
 $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$
 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$
 $x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $t^2 + 5t - 6 = 0$
 $(t+6)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -6$ 또는 $t = 1$
 (i) $t = -6$ 일 때
 $x + \frac{1}{x} = -6$ 에서 $x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \therefore x = -3 \pm 2\sqrt{2}$

(ii) $t=1$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{에서 } x^2 - x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$$(-3-2\sqrt{2}) + (-3+2\sqrt{2}) = -6$$

5 답 ③

유형 05 근이 주어진 방정식

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k+k-2+1=0 \quad \therefore k=0$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

$f(x) = x^3 - 2x + 1$ 이라고 할 때,

$f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2+x-1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서 나머지 두 근은 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 이다.

6 답 ④

유형 06 근에 대한 조건이 주어진 삼차방정식

$$f(x) = x^3 - 2kx^2 + (k^2+2)x - 2k \quad k \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & k^2+2 & -2k \\ & k & -k^2 & 2k \\ 1 & -k & 2 & 0 \end{array} \right.$$

라고 할 때, $f(k)=0$ 이므로 조립제

법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-k)(x^2-kx+2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-k)(x^2-kx+2)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 중근을 갖거나 $x=k$ 를 근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times 2 = k^2 - 8 = 0$$

$$k^2 = 8 \quad \therefore k = \pm 2\sqrt{2}$$

(ii) 방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 $x=k$ 를 근으로 가질 때

$$k^2 - k^2 + 2 \neq 0 \text{이므로 조건을 만족하지 않는다.}$$

(i), (ii)에 의하여 양수 k 의 값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

7 답 ④

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -1$$

$$\therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

$$= (-2 - \gamma)(-2 - \alpha)(-2 - \beta)$$

$$= (-2)^3 - (\alpha + \beta + \gamma) \times (-2)^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \times (-2)$$

$$- \alpha\beta\gamma$$

$$= -8 - (-2) \times 4 + (-3) \times (-2) - (-1)$$

$$= 7$$

8 답 ②

유형 08 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = 1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{1} = 1$$

따라서 구하는 방정식은

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

9 답 ③

유형 09 삼차방정식의 결례근

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 이면

$1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 나머지 한 근을 a 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + a = -\frac{a}{3}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i)a + a(1 + \sqrt{3}i) = \frac{b}{3}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)a = -4$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=2, a=-12, b=6$

$$\therefore a+b=-6$$

10 답 4

유형 09 삼차방정식의 결례근

(가)에서 $f(2)=0$ 이므로 $x=2$ 는 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 근이다.

삼차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 실수이고 (나)에서 한 근이 $-4i$ 이므로 $4i$ 도 근이다.

즉, $f(x) = (x-2)(x+4i)(x-4i)$ 이므로 $f(2x)=0$ 에서

$$(2x-2)(2x+4i)(2x-4i)=0$$

$$8(x-1)(x+2i)(x-2i)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-2i \text{ 또는 } x=2i$$

따라서 구하는 세 근의 곱은

$$1 \times (-2i) \times 2i = 4$$

11 답 ④

유형 10 방정식 $x^3=1, x^3=-1$ 의 하근의 성질

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

이때 ω 는 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이고 $\bar{\omega}$ 도 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0, \bar{\omega}^3=1, \bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$\therefore \frac{\bar{\omega}^2}{1+\omega} + \frac{\omega^2}{1+\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}^2}{-\omega^2} + \frac{\omega^2}{-\bar{\omega}^2}$$

$$= -\frac{\bar{\omega}^4 + \omega^4}{\omega^2 \bar{\omega}^2} = -\frac{\bar{\omega} + \omega}{(\omega\bar{\omega})^2}$$

$$= -\frac{-1}{1} = 1$$

12 답 4

유형 11 삼차방정식과 사차방정식의 활용

상자 밑면의 가로 길이가 $(20-2x)$ cm, 세로 길이가 $(10-2x)$ cm이므로

$$(20-2x)(10-2x)x=96, x^3-15x^2+50x-24=0$$

$$f(x)=x^3-15x^2+50x-24 \text{ 라고 할 때, } f(4)=0 \text{ 이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{ 를 인수분해하면}$$

4	1	-15	50	-24
		4	-44	24
	1	-11	6	0

$$f(x)=(x-4)(x^2-11x+6)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-4)(x^2-11x+6)=0$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=\frac{11 \pm \sqrt{97}}{2}$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=4$

13 답 3

유형 12 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

$$3x-y=10 \text{ 에서 } y=3x-10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 $x^2-2y=12$ 에 대입하면

$$x^2-2(3x-10)=12, x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=2, y=-4 \text{ 또는 } x=4, y=2$$

따라서 $a=4, \beta=2$ 이므로 $a+\beta=6$

14 답 4

유형 13 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

$$2x^2+xy-y^2=0 \text{ 에서}$$

$$(x+y)(2x-y)=0 \quad \therefore y=-x \text{ 또는 } y=2x$$

이때 x, y 가 모두 음의 정수이려면 $y=2x$

이를 $x^2-2xy+2y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2-4x^2+8x^2=5, x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$$

x, y 는 음의 정수이므로 $x=-1, y=-2$

$$\therefore x+y=-3$$

15 답 2

유형 14 대칭형의 연립이차방정식의 풀이

$$\text{주어진 연립방정식을 변형하면 } \begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ u^2-v=1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $v=u^2-1$ 을 ②에 대입하면

$$u^2+u-2(u^2-1)=2, u^2-u=0$$

$$u(u-1)=0 \quad \therefore u=0 \text{ 또는 } u=1$$

이를 각각 ②에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$$u=0, v=-1 \text{ 또는 } u=1, v=0$$

(i) $u=0, v=-1$, 즉 $x+y=0, xy=-1$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-1=0 \quad \therefore t=\pm 1$$

$$\therefore x=-1, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-1$$

(ii) $u=1, v=0$, 즉 $x+y=1, xy=0$ 일 때

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-t=0, t(t-1)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore x=0, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=0$$

(i), (ii)에 의하여 $x+2y$ 의 최댓값은 $0+2 \times 1=2$

16 답 5

유형 15 해에 대한 조건이 주어진 연립이차방정식

$2x+y=a$ 에서 $y=-2x+a$ 이므로 이를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2+(-2x+a)^2=4, 5x^2-4ax+a^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5 \times (a^2-4)=-a^2+20=0$$

$$a^2=20 \quad \therefore a=\pm 2\sqrt{5}$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=2\sqrt{5}$

17 답 4

유형 16 연립이차방정식의 활용

직사각형의 가로 길이를 x cm, 세로 길이를 y cm라고 하면

$$\begin{cases} 2x+2y=34 \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases} \text{ 즉 } \begin{cases} x+y=17 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=169 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y=-x+17$ 을 ②에 대입하면

$$x^2+(-x+17)^2=169, x^2-17x+60=0$$

$$(x-5)(x-12)=0 \quad \therefore x=5 \text{ 또는 } x=12$$

이를 각각 ①에 대입하여 풀면 연립방정식의 해는

$$x=5, y=12 \text{ 또는 } x=12, y=5$$

따라서 직사각형의 넓이는 $5 \times 12=60$ (cm²)

18 답 5

유형 17 정수 조건의 부정방정식

$$x^2-xy-2x+2y-3=0 \text{ 에서}$$

$$x(x-y)-2(x-y)-3=0 \quad \therefore (x-2)(x-y)=3$$

(i) $x-2=-3, x-y=-1$ 일 때, $x=-1, y=0$

(ii) $x-2=-1, x-y=-3$ 일 때, $x=1, y=4$

(iii) $x-2=1, x-y=3$ 일 때, $x=3, y=0$

(iv) $x-2=3, x-y=1$ 일 때, $x=5, y=4$

따라서 xy 의 최댓값은 $5 \times 4=20$

19 답 1

유형 18 실수 조건의 부정방정식

방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-2(y-1)x+2y^2+2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(y-1)^2-1 \times (2y^2+2)=-y^2-2y-1 \geq 0$$

$$\therefore (y+1)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{도 실수이므로 } y+1=0 \quad \therefore y=-1$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$$

$$\therefore x+y=-3$$

07 일차부등식

핵심
유형

유형01 $\neg, \cup$ 유형02 $x < \frac{4}{3}$

유형03 $x \leq -\frac{3}{2}$

유형04 ④

유형05 12

유형06 ⑤

유형07 $a > 1$

유형08 $-4 < a \leq -1$

유형09 ③

유형10 ④

유형11 1

유형12 ①

핵심
유형

완성하기

001 ④

002 ②

003 ④

004 $x > 3$

005 ①

006 ①

007 ⑤

008 ①

009 ⑤

010 -3

011 ③

012 해는 없다.

013 $x = 3$

014 $2 < x \leq 10$

015 ②

016 ①

017 3

018 ①

019 4

020 0

021 $a \leq \frac{15}{2}$

022 ⑤

023 ②

024 $6 < a \leq \frac{25}{3}$

025 $4 \leq a < 5$

026 -9

027 17

028 14

029 $1 \leq x \leq 7$

030 50 g

031 125

032 ①

033 ⑤

034 ③

035 ①

036 ③

037 ③

038 ②

039 ③

040 ④

핵심
유형

최종 점검하기

1 ②

2 ①

3 ①

4 $x = -6$

5 $\neg, \cup$

6 해는 없다.

7 ④

8 ①

9 ④

10 $-4 \leq x < 2$

11 ②

12 ⑤

13 ②

14 ③

15 ①

16 ③

17 ⑤

18 ③

19 ③

핵심 유형 114~116쪽

유형01 답 $\neg, \cup$

$\neg$. $a > b, c > d$ 에서 $a - b > 0, c - d > 0$ 이므로

$$(a - d) - (b - c) = (a - b) + (c - d) > 0$$

$$\therefore a - d > b - c$$

$\cup$. $c > d$ 이고 $a > 0$ 이므로 $ac > ad$ ㉠

$a > b$ 이고 $d > 0$ 이므로 $ad > bd$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $ac > bd$

$\cap$. $0 < d < c$ 이므로 $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$

$$b > 0 \text{이므로 } \frac{b}{c} < \frac{b}{d}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

유형02 답 $x < \frac{4}{3}$

부등식 $ax + b < 0$, 즉 $ax < -b$ 의 해가 $x > 2$ 이므로 $a < 0$

즉, 부등식 $ax + b < 0$ 의 해는 $x > -\frac{b}{a}$ 이므로 $-\frac{b}{a} = 2 \therefore b = -2a$

이때 부등식 $(a - b)x + (2a + 3b) > 0$ 에서 $b = -2a$ 이므로

$$3ax - 4a > 0, 3ax > 4a$$

그런데 $a < 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 $x < \frac{4}{3}$

유형03 답 $x \leq -\frac{3}{2}$

$3x + 2 \leq x - 1$ 에서

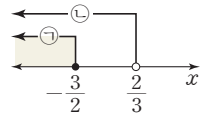
$$x \leq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$x + 1 > 2(2x - 1) + 1$ 에서 $x + 1 > 4x - 1$

$$\therefore x < \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x \leq -\frac{3}{2}$$



유형04 답 ④

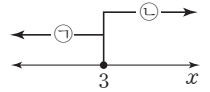
① $4x - 7 \leq 5$ 에서 $4x \leq 12$

$$\therefore x \leq 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x \geq 3 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x = 3$$



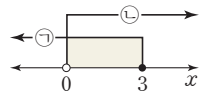
② $15x - 24 \leq 5x + 6$ 에서 $10x \leq 30$

$$\therefore x \leq 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x > 0 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$0 < x \leq 3$$



③ $3x > -x + 12$ 에서 $4x > 12$

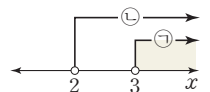
$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$5x - 4 > 6$ 에서 $5x > 10$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x > 3$$



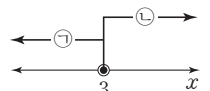
④ $2(x - 1) \leq 4$ 에서 $2x \leq 6$

$$\therefore x \leq 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$x + 1 > 4$ 에서

$$x > 3 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $3x - 1 \leq x + 3$ 에서 $2x \leq 4$

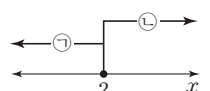
$$\therefore x \leq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$2x + 3 \leq 3x + 1$ 에서 $-x \leq -2$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x = 2$$



따라서 해가 없는 것은 ④이다.

유형05 답 12

$$2x-30 < 5x-3 \text{에서 } -3x < 27 \quad \therefore x > -9 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

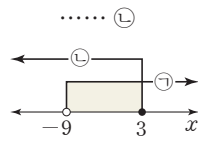
$$5x-3 \leq 6(5-x) \text{에서 } 5x-3 \leq 30-6x$$

$$11x \leq 33 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

즉, 주어진 부등식의 해는 $-9 < x \leq 3$

따라서 정수 x 는

$-8, -7, -6, \dots, 3$ 의 12개이다.



유형06 답 ⑤

$$2x+5 \leq 3(x+1) \text{에서 } 2x+5 \leq 3x+3 \quad \therefore x \geq 2$$

$$4x \leq 2x+a+1 \text{에서 } 2x \leq a+1 \quad \therefore x \leq \frac{a+1}{2}$$

이때 연립부등식의 해는 $2 \leq x \leq 4$ 이므로 $\frac{a+1}{2} = 4$

$$\therefore a = 7$$

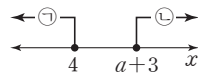
유형07 답 $a > 1$

$$3x-7 \leq 5 \text{에서 } 3x \leq 12 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x-3 \geq a \text{에서 } x \geq a+3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$$4 < a+3 \quad \therefore a > 1$$



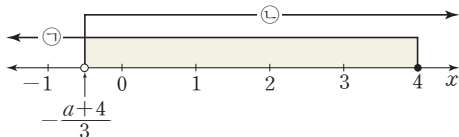
유형08 답 $-4 < a \leq -1$

$$1-x \geq -3 \text{에서 } -x \geq -4 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$5x+a > 2(x-2) \text{에서 } 5x+a > 2x-4$$

$$3x > -a-4 \quad \therefore x > -\frac{a+4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 5개이므로 다음 그림에서



$$-1 \leq -\frac{a+4}{3} < 0, -3 \leq -a-4 < 0$$

$$-1 \leq -a < 4 \quad \therefore -4 < a \leq -1$$

유형09 답 ③

의자의 개수를 x 라고 하면 학생 수는 $(3x+15)$ 이므로

$$5(x-2)+1 \leq 3x+15 \leq 5(x-2)+5 \text{에서}$$

$$5x-9 \leq 3x+15 \leq 5x-5$$

$$5x-9 \leq 3x+15 \text{에서 } 2x \leq 24 \quad \therefore x \leq 12$$

$$3x+15 \leq 5x-5 \text{에서 } -2x \leq -20 \quad \therefore x \geq 10$$

따라서 부등식의 해는 $10 \leq x \leq 12$ 이므로 의자의 최대 개수는 12이다.

유형10 답 ④

$$|2x-3| < 7 \text{에서 } -7 < 2x-3 < 7, -4 < 2x < 10 \quad \therefore -2 < x < 5$$

따라서 $a = -2, b = 5$ 이므로 $a+b = 3$

유형11 답 1

$x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때

$$2x - \frac{1}{2} > -(x-1), 2x - \frac{1}{2} > -x+1 \quad \therefore x > \frac{1}{2}$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $\frac{1}{2} < x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$2x - \frac{1}{2} > x-1 \quad \therefore x > -\frac{1}{2}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x \geq 1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x > \frac{1}{2}$

따라서 구하는 자연수 x 의 최솟값은 1이다.

유형12 답 ①

$x+2=0, x-2=0$, 즉 $x=-2, x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -2$ 일 때

$$-(x-2)-(x+2) < 6, -2x < 6 \quad \therefore x > -3$$

그런데 $x < -2$ 이므로 $-3 < x < -2$

(ii) $-2 \leq x < 2$ 일 때

$$-(x-2)+(x+2) < 6 \text{에서 } 0 \cdot x < 2 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $-2 \leq x < 2$ 이므로 $-2 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x-2)+(x+2) < 6, 2x < 6 \quad \therefore x < 3$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-3 < x < 3$

따라서 $a = -3, b = 3$ 이므로 $ab = -9$

핵심 유형 완성하기 117~122쪽

001 답 ④

ㄱ. $a < b, c < d$ 에서 $a-b < 0, c-d < 0$ 이므로

$$(a-d)-(b-c) = (a-b) + (c-d) < 0$$

$$\therefore a-d < b-c$$

ㄴ. $a < b$ 이고 $c > 0$ 이므로 $ac < bc$ ㉠

$c < d$ 이고 $b > 0$ 이므로 $bc < bd$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $ac < bd$

ㄷ. $0 < b < d$ 이므로 $\frac{1}{b} > \frac{1}{d}$

$$a < 0 \text{이므로 } \frac{a}{b} < \frac{a}{d}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

002 답 ②

② $a > b$ 이므로 양변에 -1 을 곱하면

$$-a < -b \quad \therefore 3-a < 3-b$$

003 답 ④

① $b > a$ 이므로 $b-a > 0$

② $a < 0$ 이므로 $b > a$ 의 양변을 a 로 나누면 $\frac{b}{a} < 1$

③ $b < 0$ 이므로 $a < b$ 의 양변을 b 로 나누면 $\frac{a}{b} > 1$

양변에 -1 을 곱하면 $-\frac{a}{b} < -1$

④ $a < b < 0$ 이므로 $|a| > |b| \quad \therefore a^2 > b^2$

⑤ $\frac{b}{a} < 1, \frac{a}{b} > 1$ 이므로 $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$

따라서 항상 성립하는 것은 ④이다.

004 답 $x > 3$

부등식 $ax + b > 0$, 즉 $ax > -b$ 의 해가 $x < 1$ 이므로 $a < 0$

즉, 부등식 $ax + b > 0$ 의 해는 $x < -\frac{b}{a}$ 이므로 $-\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b = -a$

한편 부등식 $ax + b - 2a < 0$ 에서 $b = -a$ 이므로

$ax - 3a < 0, ax < 3a \quad \therefore x > 3 (\because a < 0)$

005 답 ①

$a < 7$, 즉 $a - 7 < 0$ 이므로 $(a - 7)x > a - 7$ 의 양변을 $a - 7$ 로 나누면 $x < 1$

006 답 ①

$(a^2 - 2a)x - a > -x, (a^2 - 2a + 1)x > a, (a - 1)^2 x > a$

이 부등식의 해가 없으므로 $a - 1 = 0, a \geq 0 \quad \therefore a = 1$

007 답 ⑤

$3(x - 1) < 2x + 3$ 에서 $3x - 3 < 2x + 3 \quad \therefore x < 6 \quad \dots\dots ㉠$

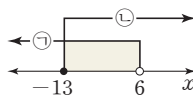
$2 + 2(x - 2) \leq 3x + 11$ 에서

$2x - 2 \leq 3x + 11 \quad \therefore x \geq -13 \quad \dots\dots ㉡$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-13 \leq x < 6$

따라서 $a = -13, b = 6$ 이므로

$b - a = 19$



008 답 ①

$4x - (3x - 5) < 2x$ 에서 $x + 5 < 2x$

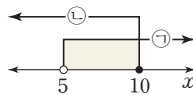
$\therefore x > 5 \quad \dots\dots ㉠$

$3.8 - 0.1x \geq 0.2(x + 4)$ 에서 $38 - x \geq 2(x + 4)$

$-3x \geq -30$

$\therefore x \leq 10 \quad \dots\dots ㉡$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $5 < x \leq 10$



009 답 ⑤

$5(x + 1) \geq 2(x - 4)$ 에서 $3x \geq -13 \quad \therefore x \geq -\frac{13}{3} \quad \dots\dots ㉠$

$\frac{x + 1}{2} < \frac{3 - x}{3}$ 에서 $3(x + 1) < 2(3 - x)$

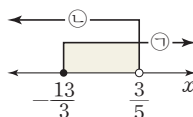
$5x < 3 \quad \therefore x < \frac{3}{5} \quad \dots\dots ㉡$

즉, 주어진 연립부등식의 해는

$-\frac{13}{3} \leq x < \frac{3}{5}$

따라서 정수 x 의 값은

$-4, -3, -2, -1, 0$ 이므로 합은 -10 이다.



010 답 -3

$3 + 2x < -2x - 5$ 에서 $4x < -8$

$\therefore x < -2 \quad \dots\dots ㉠$

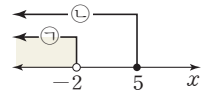
$\frac{x + 3}{4} \geq x + \frac{1 - 2x}{3}$ 에서 $3(x + 3) \geq 12x + 4(1 - 2x)$

$3x + 9 \geq 4x + 4, -x \geq -5$

$\therefore x \leq 5 \quad \dots\dots ㉡$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x < -2$

이므로 정수 x 의 최댓값은 -3 이다.



011 답 ③

① $3x - 1 \geq 2(x - 1)$ 에서 $3x - 1 \geq 2x - 2$

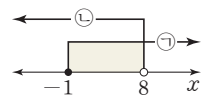
$\therefore x \geq -1 \quad \dots\dots ㉠$

$0.2x + 0.5 > 0.3x - 0.3$ 에서 $2x + 5 > 3x - 3$

$\therefore x < 8 \quad \dots\dots ㉡$

즉, 연립부등식의 해는

$-1 \leq x < 8$



② $2 - \frac{2 - x}{2} \leq \frac{3x - 1}{3}$ 에서 $12 - 3(2 - x) \leq 2(3x - 1)$

$3x + 6 \leq 6x - 2, -3x \leq -8$

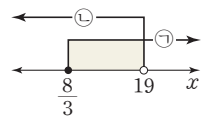
$\therefore x \geq \frac{8}{3} \quad \dots\dots ㉠$

$\frac{x - 4}{3} < \frac{6 + x}{5}$ 에서 $5(x - 4) < 3(6 + x)$

$5x - 20 < 18 + 3x, 2x < 38$

$\therefore x < 19 \quad \dots\dots ㉡$

즉, 연립부등식의 해는 $\frac{8}{3} \leq x < 19$



③ $\frac{x + 1}{4} - 1 \geq \frac{x + 2}{3}$ 에서 $3(x + 1) - 12 \geq 4(x + 2)$

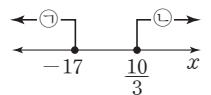
$3x - 9 \geq 4x + 8, -x \geq 17$

$\therefore x \leq -17 \quad \dots\dots ㉠$

$x - 2 \geq 0.1x + 1$ 에서 $10x - 20 \geq x + 10$

$9x \geq 30 \quad \therefore x \geq \frac{10}{3} \quad \dots\dots ㉡$

즉, 연립부등식의 해는 없다.



④ $4x + 10 \leq -2(x + 1)$ 에서 $4x + 10 \leq -2x - 2$

$6x \leq -12$

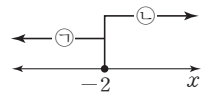
$\therefore x \leq -2 \quad \dots\dots ㉠$

$0.5x - 0.6 \geq 0.4x - 0.8$ 에서

$5x - 6 \geq 4x - 8$

$\therefore x \geq -2 \quad \dots\dots ㉡$

즉, 연립부등식의 해는 $x = -2$



⑤ $\frac{2x + 5}{4} + \frac{x - 3}{2} > -1$ 에서 $2x + 5 + 2(x - 3) > -4$

$4x - 1 > -4, 4x > -3$

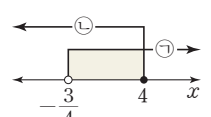
$\therefore x > -\frac{3}{4} \quad \dots\dots ㉠$

$2x - 2 \leq 10 - x$ 에서 $3x \leq 12$

$\therefore x \leq 4 \quad \dots\dots ㉡$

즉, 연립부등식의 해는 $-\frac{3}{4} < x \leq 4$

따라서 해가 없는 것은 ③이다.



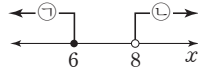
012 답 해는 없다.

$$0.2(x-1) \leq 1 \text{에서 } 2(x-1) \leq 10$$

$$2x \leq 12 \quad \therefore x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2x-12 > x-4 \text{에서 } x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



013 답 $x=3$

$$\frac{x+1}{4} - \frac{x+2}{5} \geq 0 \text{에서 } 5(x+1) - 4(x+2) \geq 0$$

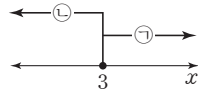
$$x-3 \geq 0 \quad \therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{-3x+5}{2} + x \geq 1 \text{에서 } -3x+5+2x \geq 2$$

$$-x \geq -3 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x=3$$



014 답 $2 < x \leq 10$

$$2(x+1) < 4x-2 \text{에서}$$

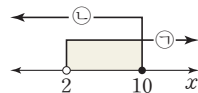
$$2x+2 < 4x-2 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$4x-2 \leq 3(x+2)+2 \text{에서}$$

$$4x-2 \leq 3x+8 \quad \therefore x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$2 < x \leq 10$$



015 답 ②

$$0.4x-0.6 < -\frac{1}{2}x+0.3 \text{에서 } 4x-6 < -5x+3$$

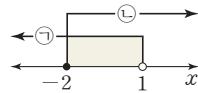
$$9x < 9 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$-\frac{1}{2}x+0.3 \leq \frac{3}{10}x+1.9 \text{에서 } -5x+3 \leq 3x+19$$

$$-8x \leq 16 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

즉, 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x < 1$

따라서 $a=-2$, $b=1$ 이므로 $ab=-2$



016 답 ①

$$\frac{1+2x}{3} < \frac{3x+5}{4} \text{에서 } 4(1+2x) < 3(3x+5)$$

$$8x+4 < 9x+15, -x < 11 \quad \therefore x > -11 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

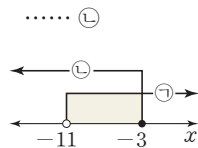
$$\frac{3x+5}{4} \leq \frac{x+1}{2} \text{에서 } 3x+5 \leq 2(x+1)$$

$$3x+5 \leq 2x+2 \quad \therefore x \leq -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

즉, 주어진 부등식의 해는

$$-11 < x \leq -3$$

따라서 구하는 최댓값은 -3 이다.



017 답 3

$$2x-1 \leq 5 \text{에서 } 2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$$

$$3x+2a+2 > 5 \text{에서 } 3x > -2a+3 \quad \therefore x > \frac{-2a+3}{3}$$

이때 연립부등식의 해가 $-1 < x \leq 3$ 이므로

$$\frac{-2a+3}{3} = -1, -2a = -6 \quad \therefore a = 3$$

018 답 ①

$$5x-a \leq 4x \text{에서 } x \leq a$$

$$x+1 < 2x+2 \text{에서 } x > -1$$

이때 연립부등식의 해는 $b < x \leq 2$ 이므로

$$a=2, b=-1 \quad \therefore ab=-2$$

019 답 4

$$2x+b \geq x-1+a \text{에서 } x \geq a-b-1$$

$$3x-a \leq 5+b \text{에서 } x \leq \frac{a+b+5}{3}$$

이때 연립부등식의 해가 $x=-4$ 이므로

$$a-b-1=-4, \frac{a+b+5}{3}=-4 \text{에서 } a-b=-3, a+b=-17$$

따라서 $a=-10$, $b=-7$ 이므로 $a-2b=4$

020 답 0

$$3x-a \leq 2x \text{에서 } x \leq a$$

$$2x < 4x-b \text{에서 } 2x > b \quad \therefore x > \frac{b}{2}$$

이때 부등식의 해는 $-1 < x \leq 2$ 이므로 $a=2$

$$\frac{b}{2} = -1 \text{에서 } b = -2 \quad \therefore a+b=0$$

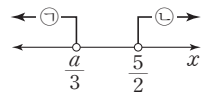
021 답 $a \leq \frac{15}{2}$

$$3x-2a < -a \text{에서 } 3x < a \quad \therefore x < \frac{a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$-2x+5 < 0 \text{에서 } -2x < -5 \quad \therefore x > \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽
그림과 같아야 한다.

$$\frac{a}{3} \leq \frac{5}{2} \quad \therefore a \leq \frac{15}{2}$$



022 답 ⑤

$$\frac{3-2x}{2} - a \leq 0 \text{에서 } 3-2x \leq 2a$$

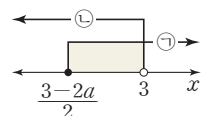
$$-2x \leq 2a-3 \quad \therefore x \geq \frac{3-2a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3x-4 > 5x-10 \text{에서 } -2x > -6 \quad \therefore x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽
그림과 같아야 하므로

$$\frac{3-2a}{2} < 3, 3-2a < 6 \quad \therefore a > -\frac{3}{2}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -1 이다.



023 답 ②

$$2x+a-6 \leq 3x-4 \text{에서}$$

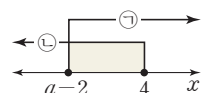
$$-x \leq -a+2 \quad \therefore x \geq a-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3x-4 \leq 12-x \text{에서 } 4x \leq 16 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림
과 같아야 하므로

$$a-2 \leq 4 \quad \therefore a \leq 6$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 6 이다.

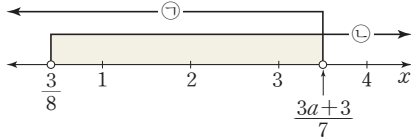


024 답 $6 < a \leq \frac{25}{3}$

$$2x - a < \frac{3-x}{3} \text{에서 } 6x - 3a < 3 - x \quad \therefore x < \frac{3a+3}{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{3-x}{3} < \frac{2x+1}{2} \text{에서 } 6-2x < 6x+3 \quad \therefore x > \frac{3}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$3 < \frac{3a+3}{7} \leq 4, 21 < 3a+3 \leq 28$$

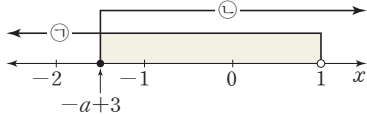
$$\therefore 6 < a \leq \frac{25}{3}$$

025 답 $4 \leq a < 5$

$$3x+1 < 2(3-x) \text{에서 } 3x+1 < 6-2x \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x-a \leq 2x-3 \text{에서 } -x \leq a-3 \quad \therefore x \geq -a+3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 -1 과 0 이므로 다음 그림에서



$$-2 < -a+3 \leq -1, -5 < -a \leq -4$$

$$\therefore 4 \leq a < 5$$

026 답 -9

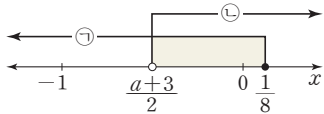
$$\frac{3(2x+5)}{10} \geq \frac{7(x+1)}{5} \text{에서 } 6x+15 \geq 14x+14$$

$$-8x \geq -1 \quad \therefore x \leq \frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x-5 > a-2 \text{에서 } 2x > a+3$$

$$\therefore x > \frac{a+3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 1개뿐이므로 다음 그림에서



$$-1 \leq \frac{a+3}{2} < 0, -2 \leq a+3 < 0$$

$$\therefore -5 \leq a < -3$$

따라서 정수 a 의 값은 $-5, -4$ 이므로 합은 -9 이다.

027 답 17

텐트의 개수를 x 라고 하면 학생 수는 $(3x+5)$ 이므로

$$4(x-4)+1 \leq 3x+5 \leq 4(x-4)+4$$

$$4(x-4)+1 \leq 3x+5 \text{에서 } x \leq 20$$

$$3x+5 \leq 4(x-4)+4 \text{에서 } x \geq 17$$

따라서 부등식의 해는 $17 \leq x \leq 20$ 이므로 텐트의 최소 개수는 17이다.

028 답 14

회원 수를 x 라고 하면 셔플콕의 개수는 $(6x+2)$ 이므로

$$80 \leq 6x+2 \leq 90, 78 \leq 6x \leq 88 \quad \therefore 13 \leq x \leq \frac{44}{3}$$

따라서 최대 회원 수는 14이다.

029 답 $1 \leq x \leq 7$

색연필을 x 자루 사면 연필은 $(13-x)$ 자루 살 수 있으므로 전체 금액은

$$500x+300(13-x)=200x+3900 \text{ (원)}$$

전체 금액이 4100원 이상 5300원 이하가 되어야 하므로

$$4100 \leq 200x+3900 \leq 5300, 200 \leq 200x \leq 1400$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 7$$

030 답 50 g

두 과자 A, B의 섭취량이 각각 1 g일 때 얻을 수 있는 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다.

과자	열량 (kcal)	단백질 (g)
A	1.2	0.07
B	3	0.05

과자 A의 섭취량을 x g이라고 하면 과자 B의 섭취량은 $(200-x)$ g이므로

$$\begin{cases} 1.2x+3(200-x) \geq 350 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 0.07x+0.05(200-x) \geq 11 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서

$$12x+6000-30x \geq 3500, 18x \leq 2500 \quad \therefore x \leq \frac{1250}{9}$$

②에서

$$7x+1000-5x \geq 1100, 2x \geq 100 \quad \therefore x \geq 50$$

$$\text{즉, 부등식의 해는 } 50 \leq x \leq \frac{1250}{9}$$

따라서 과자 A의 최소 섭취량은 50 g이다.

031 답 125

5 %의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은

$$200 \times \frac{5}{100} = 10 \text{ (g)}$$

넣어야 하는 소금의 양을 x g이라고 하면

$$\frac{20}{100} \times (200+x) \leq 10+x \leq \frac{24}{100} \times (200+x)$$

$$\frac{20}{100} \times (200+x) \leq 10+x \text{에서}$$

$$200+x \leq 50+5x, 4x \geq 150 \quad \therefore x \geq \frac{75}{2}$$

$$10+x \leq \frac{24}{100} \times (200+x) \text{에서}$$

$$1000+100x \leq 4800+24x, 76x \leq 3800 \quad \therefore x \leq 50$$

$$\text{즉, 부등식의 해는 } \frac{75}{2} \leq x \leq 50$$

따라서 넣어야 하는 소금의 양은 $\frac{75}{2}$ g 이상 50 g 이하이므로

$$a = \frac{75}{2}, b = 50 \text{이다.}$$

$$\therefore 2a+b=125$$

032 답 ①

$$\frac{1}{2}|2x+3| \geq 1 \text{에서 } |2x+3| \geq 2$$

$$2x+3 \leq -2 \text{ 또는 } 2x+3 \geq 2$$

$$\therefore x \leq -\frac{5}{2} \text{ 또는 } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{이므로 } a+b = -3$$

033 답 ⑤

$$|x-5| \leq 9 \text{에서 } -9 \leq x-5 \leq 9 \quad \therefore -4 \leq x \leq 14$$

따라서 구하는 정수 x 는 $-4, -3, -2, \dots, 14$ 의 19개이다.

034 답 ③

$$\left|x - \frac{1}{2}a\right| < b \text{에서 } -b < x - \frac{1}{2}a < b$$

$$\therefore \frac{1}{2}a - b < x < \frac{1}{2}a + b$$

이때 부등식의 해가 $-4 < x < 6$ 이므로

$$\frac{1}{2}a - b = -4, \frac{1}{2}a + b = 6$$

$$\therefore a - 2b = -8, a + 2b = 12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=5$

$$\therefore b-a=3$$

035 답 ①

$x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-1) < 4x-1, -x+1 < 4x-1$$

$$-5x < -2 \quad \therefore x > \frac{2}{5}$$

$$\text{그런데 } x < 1 \text{이므로 } \frac{2}{5} < x < 1$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x-1 < 4x-1, -3x < 0 \quad \therefore x > 0$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } x \geq 1$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x > \frac{2}{5}$

따라서 a 의 값은 $\frac{2}{5}$ 이다.

036 답 ③

$3-x=0$, 즉 $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 3$ 일 때

$$3-x \leq 10-x \text{에서 } 0 \cdot x \leq 7 \text{이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } x < 3 \text{이므로 } x < 3$$

(ii) $x \geq 3$ 일 때

$$-(3-x) \leq 10-x, x-3 \leq 10-x$$

$$2x \leq 13 \quad \therefore x \leq \frac{13}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq 3 \text{이므로 } 3 \leq x \leq \frac{13}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x \leq \frac{13}{2}$

따라서 구하는 자연수 x 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

037 답 ③

$x-2=0$, 즉 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 2$ 일 때

$$-2(x-2)+2x \geq 7 \text{에서 } 0 \cdot x \geq 3 \text{이므로 해는 없다.}$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$2(x-2)+2x \geq 7, 4x \geq 11 \quad \therefore x \geq \frac{11}{4}$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } x \geq \frac{11}{4}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$x \geq \frac{11}{4}$$

따라서 구하는 정수 x 의 최솟값은 3이다.

038 답 ②

$x+1=0, x-1=0$, 즉 $x=-1, x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때

$$-(x+1) \geq -2(x-1), -x-1 \geq -2x+2 \quad \therefore x \geq 3$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때

$$x+1 \geq -2(x-1), x+1 \geq -2x+2$$

$$3x \geq 1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x < 1 \text{이므로 } \frac{1}{3} \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$x+1 \geq 2(x-1), x+1 \geq 2x-2 \quad \therefore x \leq 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

따라서 a 의 값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

039 답 ③

$x+1=0, x-3=0$, 즉 $x=-1, x=3$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때

$$-(x-3)-2(x+1) \geq 5, -x+3-2x-2 \geq 5$$

$$-3x \geq 4 \quad \therefore x \leq -\frac{4}{3}$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } x \leq -\frac{4}{3}$$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$-(x-3)+2(x+1) \geq 5, -x+3+2x+2 \geq 5 \quad \therefore x \geq 0$$

그런데 $-1 \leq x < 3$ 이므로 $0 \leq x < 3$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$x-3+2(x+1) \geq 5, x-3+2x+2 \geq 5$$

$$3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $x \geq 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$x \leq -\frac{4}{3} \text{ 또는 } x \geq 0$$

040 ④

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$ 이므로 주어진 부등식은

$$|x-2|+|x-1|<4$$

$x-1=0$, $x-2=0$, 즉 $x=1$, $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<1$ 일 때

$$-(x-2)-(x-1)<4, -x+2-x+1<4 \quad \therefore x>-\frac{1}{2}$$

그런데 $x<1$ 이므로 $-\frac{1}{2}<x<1$

(ii) $1\leq x<2$ 일 때

$$-(x-2)+(x-1)<4 \text{에서 } 0\cdot x<3 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $1\leq x<2$ 이므로 $1\leq x<2$

(iii) $x\geq 2$ 일 때

$$(x-2)+(x-1)<4, 2x<7 \quad \therefore x<\frac{7}{2}$$

그런데 $x\geq 2$ 이므로 $2\leq x<\frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

핵심 유형 최종 점검하기

123~125쪽

1 답 ②

유형 01 부등식의 기본 성질

① $a<b$ 이므로 $a+6<b+6$

② $a<b$ 이므로 $-a>-b \quad \therefore 5-a>5-b$

③ $a>0$ 이면 $a^2<ab$, $a<0$ 이면 $a^2>ab$

④ $a<b$ 이므로 $2a-1<2b-1$

⑤ $a<b$ 이므로 $\frac{a}{-3}>\frac{b}{-3} \quad \therefore -\frac{a}{3}-1>-\frac{b}{3}-1$

따라서 항상 성립하는 것은 ②이다.

2 답 ①

유형 02 부등식 $ax>b$ 의 풀이

$$a(ax+1)\leq 4x+1, (a^2-4)x\leq 1-a$$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로 $a^2-4=0$, $1-a\geq 0$

$$a^2-4=0, a^2=4 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$1-a\geq 0 \text{에서 } a\leq 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 a 의 값은 -2이다.

3 답 ①

유형 03 연립일차부등식의 풀이

$$3x-6\leq 4-x \text{에서 } 4x\leq 10 \quad \therefore x\leq \frac{5}{2}$$

$$3x+1>2x-3 \text{에서 } x>-4$$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-4<x\leq \frac{5}{2}$

따라서 $a=-4$, $b=\frac{5}{2}$ 이므로 $a+b=-\frac{3}{2}$

4 답 $x=-6$

유형 04 해가 특수한 연립일차부등식

$$\frac{x-2}{3}\leq \frac{x}{4}-\frac{7}{6} \text{에서 } 4(x-2)\leq 3x-14$$

$$4x-8\leq 3x-14 \quad \therefore x\leq -6$$

$$0.5x-0.2\geq 0.4x-0.8 \text{에서 } 5x-2\geq 4x-8 \quad \therefore x\geq -6$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x=-6$ 이다.

5 답 ㄱ, ㄴ

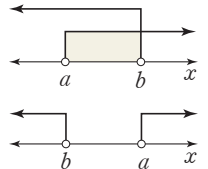
유형 04 해가 특수한 연립일차부등식

ㄱ, ㄴ. $a<b$ 이면 연립부등식의 해는

$$a<x<b \text{이다.}$$

ㄷ, ㄹ. $a>b$ 이면 연립부등식의 해는 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



6 답 해는 없다.

유형 05 $A<B<C$ 꼴의 부등식

$$x+3<5x-1 \text{에서 } -4x<-4 \quad \therefore x>1$$

$$5x-1<4x-3 \text{에서 } x<-2$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

7 답 ④

유형 05 $A<B<C$ 꼴의 부등식

$$0.2x-1<0.4x+\frac{3}{5} \text{에서 } 2x-10<4x+6 \quad \therefore x>-8$$

$$0.4x+\frac{3}{5}<2+0.2x \text{에서 } 4x+6<20+2x \quad \therefore x<7$$

즉, 주어진 부등식의 해는 $-8<x<7$

따라서 정수 x 의 최댓값은 6이다.

8 답 ①

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

$$-3x-7<2 \text{에서 } -3x<9 \quad \therefore x>-3$$

$$4x+2(x-3)<a \text{에서 } 6x<a+6 \quad \therefore x<\frac{a+6}{6}$$

이때 연립부등식의 해는 $b<x<2$ 이므로 $b=-3$

$$\frac{a+6}{6}=2 \text{에서 } a=6 \quad \therefore ab=-18$$

9 답 ④

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

$$3-5x\leq x+a \text{에서 } -6x\leq a-3 \quad \therefore x\geq \frac{-a+3}{6}$$

$$3x+1\geq 4x+3 \text{에서 } x\leq -2$$

이때 연립부등식의 해가 $x=b$ 이므로 $b=-2$

$$\frac{-a+3}{6}=-2 \text{에서 } a=15 \quad \therefore a+b=13$$

10 답 $-4\leq x<2$

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

$$2x-a<x+a \text{에서 } x<2a$$

$$2x-a\leq 3x-b \text{에서 } x\geq b-a$$

이때 연립부등식의 해가 $-10\leq x<2$ 이므로

$$b-a=-10, 2a=2 \quad \therefore a=1, b=-9$$

즉, 처음 부등식은 $2x-1 < x+1 \leq 3x+9$ 이므로
 $2x-1 < x+1$ 에서 $x < 2$
 $x+1 \leq 3x+9$ 에서 $-2x \leq 8 \quad \therefore x \geq -4$
 따라서 처음 부등식의 해는 $-4 \leq x < 2$ 이다.

11 답 ②

유형 07 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식

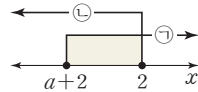
$$x+2 \leq 2x-a \text{에서 } -x \leq -a-2 \quad \therefore x \geq a+2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$3x-2 \leq 12-4x \text{에서 } 7x \leq 14 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽
 그림과 같아야 하므로

$$a+2 \leq 2 \quad \therefore a \leq 0$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 0이다.



12 답 ⑤

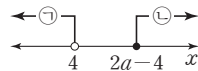
유형 07 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식

$$0.5x-2 < 0, 1x-\frac{2}{5} \text{에서 } 5x-20 < x-4 \quad \therefore x < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$3x+4 \geq 2x+2a \text{에서 } x \geq 2a-4 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽
 그림과 같아야 한다.

$$2a-4 \geq 4 \quad \therefore a \geq 4$$



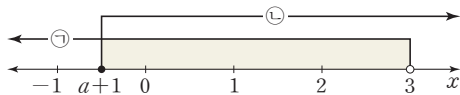
13 답 ②

유형 08 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식

$$3x-2 < x+4 \text{에서 } 2x < 6 \quad \therefore x < 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2x-1 \geq x+a \text{에서 } x \geq a+1 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$-1 < a+1 \leq 0 \quad \therefore -2 < a \leq -1$$

따라서 정수 a 의 값은 -1이다.

14 답 ③

유형 09 연립일차부등식의 활용

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라고 하면

$$93 < (x-2) + x + (x+2) < 102, 93 < 3x < 102 \quad \therefore 31 < x < 34$$

이때 x 는 홀수이므로 $x=33$

따라서 연속하는 세 홀수는 31, 33, 35이므로 가장 큰 수는 35이다.

15 답 ①

유형 09 연립일차부등식의 활용

상자의 개수를 x 라고 하면 사과의 개수는 $(12x+5)$ 이므로

$$15(x-3)+1 \leq 12x+5 \leq 15(x-3)+15$$

$$15(x-3)+1 \leq 12x+5 \text{에서 } 3x \leq 49 \quad \therefore x \leq \frac{49}{3}$$

$$12x+5 \leq 15(x-3)+15 \text{에서 } -3x \leq -35 \quad \therefore x \geq \frac{35}{3}$$

$$\therefore \frac{35}{3} \leq x \leq \frac{49}{3}$$

따라서 상자의 개수가 될 수 있는 것은 12, 13, 14, 15, 16이다.

16 답 ③

유형 10 부등식 $|ax+b| < c$ 의 풀이

$$|x-a| \geq 2 \text{에서 } x-a \leq -2 \text{ 또는 } x-a \geq 2$$

$$\therefore x \leq a-2 \text{ 또는 } x \geq a+2$$

이때 부등식의 해가 $x \leq b$ 또는 $x \geq 3$ 이므로

$$a-2=b, a+2=3 \quad \therefore a=1, b=-1$$

$$\therefore ab=-1$$

17 답 ⑤

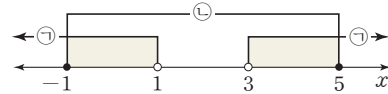
유형 10 부등식 $|ax+b| < c$ 의 풀이

$$1 < |x-2| \text{에서 } x-2 < -1 \text{ 또는 } x-2 > 1$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$|x-2| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x-2 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots ㉡$$



즉, 주어진 부등식의 해는 $-1 \leq x < 1$ 또는 $3 < x \leq 5$

따라서 구하는 정수 x 는 -1, 0, 4, 5이므로 합은 8이다.

18 답 ③

유형 11 부등식 $|ax+b| < cx+d$ 의 풀이

$5-x=0$, 즉 $x=5$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 5$ 일 때

$5-x \leq 9-x$ 에서 $0 \cdot x \leq 4$ 이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $x < 5$ 이므로 $x < 5$

(ii) $x \geq 5$ 일 때

$$-(5-x) \leq 9-x, 2x \leq 14 \quad \therefore x \leq 7$$

그런데 $x \geq 5$ 이므로 $5 \leq x \leq 7$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x \leq 7$

따라서 정수 x 의 최댓값은 7이다.

19 답 ③

유형 12 절댓값 기호가 두 개인 부등식의 풀이

$x+4=0, x=0$, 즉 $x=-4, x=0$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -4$ 일 때

$$-x-(x+4) < 5, -2x < 9 \quad \therefore x > -\frac{9}{2}$$

그런데 $x < -4$ 이므로 $-\frac{9}{2} < x < -4$

(ii) $-4 \leq x < 0$ 일 때

$-x+(x+4) < 5$ 에서 $0 \cdot x < 1$ 이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-4 \leq x < 0$ 이므로 $-4 \leq x < 0$

(iii) $x \geq 0$ 일 때

$$x+(x+4) < 5, 2x < 1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x < \frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$

따라서 정수 x 의 최솟값은 -4이다.

08 이차부등식

핵심
유형

유형01	$\frac{4}{5} < x < \frac{5}{2}$	유형02	①
유형03	-8	유형04	$-1 \leq x \leq 0$
유형05	3		
유형06	2	유형07	②
유형08	①		
유형09	$-6 < k < -2$	유형10	$a < -2$ 또는 $a > 1$
유형11	7	유형12	$0 < a < 8$
유형13	4		
유형14	4	유형15	④
유형16	5		
유형17	$4 < a \leq 5$	유형18	5, 6, 7
유형19	5	유형20	③
유형21	①		

핵심
유형

완성하기

001	$x \leq \frac{3}{2}$ 또는 $x \geq \frac{7}{2}$	002	②
003	$-3 < x < -2$ 또는 $1 < x < 2$	004	①
005	③		
006	④	007	$x \neq -4$ 인 모든 실수
008	$1 \leq x \leq 5$	009	①
010	③		
011	-14	012	④
013	$-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$		
014	$x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$	015	③
016	2	017	④
018	6	019	①
020	⑤	021	①
022	②		
023	②	024	③
025	⑤	026	②
027	③		
028	④	029	④
030	①	031	②
032	$k \leq -2$	033	④
034	②	035	②
036	④	037	⑤
038	③	039	①
040	①		
041	②	042	①
043	①	044	④
045	$\frac{2}{5} \leq t \leq 1$	046	4
047	①	048	4
049	①	050	$-3 < x < 4$
051	④		
052	$-4 \leq p \leq 3$	053	③
054	1		
055	$3 \leq a < 4$	056	①
057	⑤	058	⑤
059	$1 \leq x \leq 2$	060	$3 \leq x \leq 4$ 또는 $6 \leq x \leq 7$
061	$a \leq -5$ 또는 $a \geq 5$	062	2
063	③		
064	1, 2, 3, 4	065	$k < -1$ 또는 $0 < k < 1$
066	②	067	①
068	$2 < k < \frac{11}{5}$		

핵심
유형

최종 점검하기

1	③	2	ㄷ, ㄹ	3	$x < -3$ 또는 $x > 5$	4	②
5	$x < -2$ 또는 $x > 0$	6	③	7	2	8	⑤
9	$-3 < k < -1$	10	⑤	11	⑤	12	-5
13	②	14	②	15	③	16	①
17	⑤						
18	⑤	19	$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$	20	②	21	6
22	①						

핵심 유형 128~130쪽

유형01 답 $\frac{4}{5} < x < \frac{5}{2}$

부등식 $f(x) < g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{4}{5} < x < \frac{5}{2}$$

유형02 답 ①

$$x^2 - 3x - 3 \geq 1 \text{에서 } x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

$$(x+1)(x-4) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

따라서 $a = -1$, $b = 4$ 이므로

$$a - b = -5$$

유형03 답 -8

$ax^2 - 2x + b > 0$ 의 해가 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 이므로

$$a > 0$$

이때 해가 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 이고 x^2 의 계수가 a 인 이차부등식은

$$a(x+2)(x-4) > 0, a(x^2 - 2x - 8) > 0$$

$$\therefore ax^2 - 2ax - 8a > 0$$

이 부등식이 $ax^2 - 2x + b > 0$ 이므로

$$-2a = -2, -8a = b \quad \therefore a = 1, b = -8$$

$$\therefore ab = -8$$

유형04 답 $-1 \leq x \leq 0$

이차부등식 $f(x) > 0$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이므로

$f(x) = a(x-1)(x-3)$ ($a < 0$)이라고 하면

$$f(2x+3) = a(2x+3-1)(2x+3-3) = 4ax(x+1)$$

$f(2x+3) \geq 0$ 에서 $4ax(x+1) \geq 0$ ($a < 0$)이므로

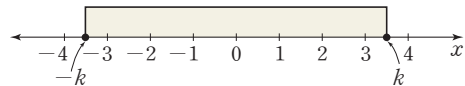
$$x(x+1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 0$$

유형05 답 3

$$x^2 - k^2 \leq 0 \text{에서 } (x+k)(x-k) \leq 0$$

$$\therefore -k \leq x \leq k$$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 가 7개이므로 다음 그림에서



$$3 \leq k < 4$$

따라서 자연수 k 의 값은 3이다.

유형06 답 2

이차방정식 $2x^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 2a = 0, -2a + 4 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

유형07 답 ②

이차부등식 $ax^2+2ax-4>0$ 에서

(i) $a>0$ 일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$ 일 때

이차방정식 $ax^2+2ax-4=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D>0$

이어야 하므로 $\frac{D}{4}=a^2-a \times (-4)>0$

$a(a+4)>0 \quad \therefore a<-4$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$ 이므로 $a<-4$

(i), (ii)에 의하여 실수 a 의 값의 범위는 $a<-4$ 또는 $a>0$

따라서 실수 a 의 값이 아닌 것은 ② -4 이다.

유형08 답 ①

이차부등식 $ax^2+6x+a-8<0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하려면 $a<0$ 이어야 한다. 또 이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$ 의

판별식을 D 라고 할 때 $D<0$ 이어야 하므로 $\frac{D}{4}=3^2-a(a-8)<0$

$a^2-8a-9>0, (a+1)(a-9)>0 \quad \therefore a<-1$ 또는 $a>9$

그런데 $a<0$ 이므로 $a<-1$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

유형09 답 $-6<k<-2$

이차부등식 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)\leq 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)>0$ 이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)=0$ 의 판별식을 D 라고

할 때 $D<0$ 이어야 하므로 $\frac{D}{4}=(k+2)^2+4(k+2)\leq 0$

$k^2+8k+12<0, (k+6)(k+2)<0 \quad \therefore -6<k<-2$

참고 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

(1) $ax^2+bx+c>0$ 이 해를 갖지 않을 조건 $\Rightarrow a<0, D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 이 해를 갖지 않을 조건 $\Rightarrow a<0, D<0$

(3) $ax^2+bx+c<0$ 이 해를 갖지 않을 조건 $\Rightarrow a>0, D\leq 0$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 이 해를 갖지 않을 조건 $\Rightarrow a>0, D<0$

유형10 답 $a<-2$ 또는 $a>1$

$f(x)=x^2-4x+a^2+a+2$ 라고 하면 $f(x)=(x-2)^2+a^2+a-2$

$0\leq x\leq 4$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이므로 $f(x)>0$ 이라면

$f(2)>0$ 이어야 한다.

$a^2+a-2>0, (a+2)(a-1)>0 \quad \therefore a<-2$ 또는 $a>1$

유형11 답 7

$x^2-ax+7>2x-2$ 에서 $x^2-(a+2)x+9>0 \quad \dots\dots ㉠$

이때 해가 $x<3$ 또는 $x>b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-b)>0 \quad \therefore x^2-(3+b)x+3b>0 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡에서 $a+2=3+b, 9=3b \quad \therefore a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$

유형12 답 $0<a<8$

이차함수 $y=2x^2+4x-1$ 의 그래프가 직선 $y=ax-3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $2x^2+4x-1>ax-3$, 즉 $2x^2+(4-a)x+2>0$ 이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $2x^2+(4-a)x+2=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D<0$ 이어야 하므로

$D=(4-a)^2-4\times 2\times 2<0$

$a^2-8a<0, a(a-8)<0 \quad \therefore 0<a<8$

유형13 답 4

주어진 식 $x^2+2x+y^2-15=0$ 을 x 에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 x 가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 $D\geq 0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-(y^2-15)\geq 0$

$y^2-16\leq 0, (y+4)(y-4)\leq 0 \quad \therefore -4\leq y\leq 4$

따라서 y 의 최댓값은 4이다.

유형14 답 4

가로의 길이를 x 라고 하면 세로의 길이는 $(10-x)$ 이므로 직사각형의 넓이는

$x(10-x)=-x^2+10x$

즉, $-x^2+10x\geq 24$ 에서 $x^2-10x+24\leq 0$

$(x-4)(x-6)\leq 0 \quad \therefore 4\leq x\leq 6$

그런데 $0<x<10$ 이므로 가로의 길이의 최솟값은 4이다.

핵심 유형 완성하기 131~137쪽

001 답 $x\leq \frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{7}{2}$

부등식 $f(x)\geq g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$x\leq \frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{7}{2}$

002 답 ②

이차부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$ 에서 $ax^2+bx+c>mx+n$

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다

위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

003 답 $-3<x<-2$ 또는 $1<x<2$

$f(x)g(x)>0$ 에서

$f(x)>0, g(x)>0$ 또는 $f(x)<0, g(x)<0$

(i) $f(x)>0, g(x)>0$ 일 때, $-3<x<-2$

(ii) $f(x)<0, g(x)<0$ 일 때, $1<x<2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$-3<x<-2$ 또는 $1<x<2$

004 답 ①

$x^2+3x-13>x+2$ 에서 $x^2+2x-15>0$
 $(x+5)(x-3)>0 \quad \therefore x<-5$ 또는 $x>3$
 따라서 $a=-5, b=3$ 이므로 $a-b=-8$

005 답 ③

$x^2+2x-2\leq 1$ 에서 $x^2+2x-3\leq 0$
 $(x+3)(x-1)\leq 0 \quad \therefore -3\leq x\leq 1$
 따라서 구하는 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이므로 합은 -5 이다.

006 답 ④

① $-x^2+10x-25\geq 0$ 에서 $x^2-10x+25\leq 0$
 $(x-5)^2\leq 0 \quad \therefore x=5$
 ② $-x^2+x+12<0$ 에서 $x^2-x-12>0$
 $(x+3)(x-4)>0 \quad \therefore x<-3$ 또는 $x>4$
 ③ $x^2-4x+2\leq 0$ 에서 $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})\leq 0$
 $\therefore 2-\sqrt{2}\leq x\leq 2+\sqrt{2}$
 ④ 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times 3=-2<0$ 이므로 해는 없다.
 ⑤ 이차방정식 $2x^2-3x+2=0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $D=(-3)^2-4\times 2\times 2=-7<0$ 이므로 해는 모든 실수이다.
 따라서 해가 없는 것은 ④이다.

007 답 $x\neq -4$ 인 모든 실수

$3(x^2+4)>2x^2-8x-4$ 에서 $x^2+8x+16>0, (x+4)^2>0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 $x\neq -4$ 인 모든 실수이다.

008 답 $1\leq x\leq 5$

$x+1=0$, 즉 $x=-1$ 을 기준으로 구간을 나누면
 (i) $x<-1$ 일 때
 $x^2-3x-4\leq -(x+1), x^2-2x-3\leq 0$
 $(x+1)(x-3)\leq 0 \quad \therefore -1\leq x\leq 3$
 그런데 $x<-1$ 이므로 해는 없다.
 (ii) $x\geq 1$ 일 때
 $x^2-3x-4\leq x+1, x^2-4x-5\leq 0$
 $(x+1)(x-5)\leq 0 \quad \therefore -1\leq x\leq 5$
 그런데 $x\geq 1$ 이므로 $1\leq x\leq 5$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1\leq x\leq 5$

009 답 ①

$|x^2+x-1|\leq 5$ 에서 $-5\leq x^2+x-1\leq 5$
 $-5\leq x^2+x-1$ 에서 $x^2+x+4>0$
 이차방정식 $x^2+x+4=0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $D=1^2-4\times 1\times 4=-15<0$ 이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.
 또 $x^2+x-1\leq 5$ 에서 $x^2+x-6\leq 0$
 $(x+3)(x-2)\leq 0 \quad \therefore -3\leq x\leq 2$
 즉, 주어진 부등식의 해는 $-3\leq x\leq 2$
 따라서 $a=-3, b=2$ 이므로 $ab=-6$ 이다.

010 답 ③

이차부등식 $ax^2+3x+b>0$ 의 해가 $-\frac{1}{2}<x<2$ 이므로 $a<0$
 이때 해가 $-\frac{1}{2}<x<2$ 이고 x^2 의 계수가 a 인 이차부등식은
 $a\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)>0, a\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)>0$
 $\therefore ax^2-\frac{3}{2}ax-a>0$
 이 부등식이 $ax^2+3x+b>0$ 이므로
 $-\frac{3}{2}a=3, -a=b \quad \therefore a=-2, b=2$
 $\therefore a+b=0$

011 답 -14

해가 $-8<x<b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+8)(x-b)<0 \quad \therefore x^2+(8-b)x-8b<0$
 이 부등식이 $x^2+6x+a<0$ 이므로
 $8-b=6, a=-8b \quad \therefore a=-16, b=2$
 $\therefore a+b=-14$

012 답 ④

해가 $x=-2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+2)^2\leq 0 \quad \therefore x^2+4x+4\leq 0$
 이 부등식이 $x^2+ax+b\leq 0$ 이므로
 $a=4, b=4$
 즉, 이차부등식 $4x^2-4x-24<0$ 에서
 $x^2-x-6<0, (x+2)(x-3)<0$
 $\therefore -2<x<3$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

013 답 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ 의 해가 $x<-3$ 또는 $x>4$ 이므로
 $a<0$
 이때 해가 $x<-3$ 또는 $x>4$ 이고 x^2 의 계수가 a 인 이차부등식은
 $a(x+3)(x-4)<0, a(x^2-x-12)<0$
 $\therefore ax^2-ax-12a<0$
 이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$ 이므로
 $b=-a, c=-12a$
 즉, 부등식 $-12ax^2+ax+a<0$ 에서
 $-a(12x^2-x-1)<0, 12x^2-x-1<0 (\because a<0)$
 $(4x+1)(3x-1)<0 \quad \therefore -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$

014 답 $x\leq 1$ 또는 $x\geq 2$

이차부등식 $f(x)>0$ 의 해가 $1<x<3$ 이므로
 $f(x)=a(x-1)(x-3) (a<0)$ 이라고 하면
 $f(2x-1)=a(2x-1-1)(2x-1-3)$
 $=4a(x-1)(x-2)$
 $f(2x-1)\leq 0$ 에서 $4a(x-1)(x-2)\leq 0 (a<0)$ 이므로
 $(x-1)(x-2)\geq 0 \quad \therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 2$

015 답 ③

이차부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해가 $-5 \leq x \leq -3$ 이므로

$f(x) = a(x+3)(x+5)$ ($a > 0$)라고 하면

$$\begin{aligned} f(10-2x) &= a(10-2x+3)(10-2x+5) \\ &= a(2x-13)(2x-15) \end{aligned}$$

$f(10-2x) > 0$ 에서 $a(2x-13)(2x-15) > 0$ ($a > 0$)이므로

$$(2x-13)(2x-15) > 0 \quad \therefore x < \frac{13}{2} \text{ 또는 } x > \frac{15}{2}$$

따라서 해가 아닌 것은 ③ 7이다.

016 답 2

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $x < -2$ 또는 $x > 3$ 이므로

$f(x) = a(x+2)(x-3)$ ($a < 0$)이라고 하면

$$f(-x) = a(-x+2)(-x-3) = a(x-2)(x+3)$$

$f(-x) \geq 0$ 에서 $a(x-2)(x+3) \geq 0$ ($a < 0$)이므로

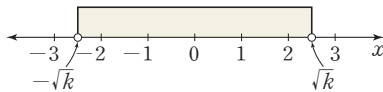
$$(x-2)(x+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 2$$

따라서 자연수 x 는 1, 2의 2개이다.

017 답 ④

$$x^2 - k < 0 \text{에서 } (x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 가 5개이므로



$$2 < \sqrt{k} \leq 3 \quad \therefore 4 < k \leq 9$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$$M=9, m=5 \quad \therefore M+m=14$$

018 답 6

$$x^2 - (k+1)x + k \leq 0 \text{에서 } (x-1)(x-k) \leq 0$$

(i) $k=1$ 일 때

$$(x-1)^2 \leq 0$$

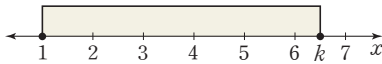
주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 는 1의 한 개뿐이므로

주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $k > 1$ 일 때

$$1 \leq x \leq k$$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 가 6개이므로



$$6 \leq k < 7$$

(i), (ii)에 의하여 자연수 k 의 값은 6이다.

019 답 ①

$$x^2 + (k+1)x - k - 2 \leq 0 \text{에서 } (x-1)(x+k+2) \leq 0$$

(i) $-k-2=1$, 즉 $k=-3$ 일 때

$$(x-1)^2 \leq 0$$

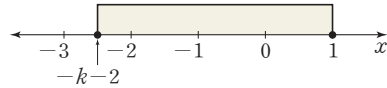
주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 는 1뿐이므로 주어진 조

건을 만족하지 않는다.

(ii) $-k-2 < 1$, 즉 $k > -3$ 일 때

$$-k-2 \leq x \leq 1$$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 가 4개이므로



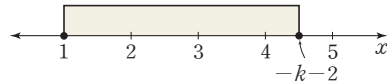
$$-3 < -k-2 \leq -2, \quad -1 < -k \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k < 1$$

(iii) $-k-2 > 1$, 즉 $k < -3$ 일 때

$$1 \leq x \leq -k-2$$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 가 4개이므로



$$4 \leq -k-2 < 5, \quad 6 \leq -k < 7$$

$$\therefore -7 < k \leq -6$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 정수 k 의 값은 0, -6이므로 합은 -6이다.

020 답 ⑤

이차방정식 $2x^2 - (k+3)x + 2k = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

$D=0$ 이어야 하므로

$$D = (k+3)^2 - 4 \times 2 \times 2k = 0$$

$$k^2 - 10k + 9 = 0, \quad (k-1)(k-9) = 0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=9$$

따라서 k 의 값의 합은 10이다.

021 답 ①

이차부등식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x + 2 \leq 0$ 의 해가 1개이므로

$$k+1 > 0 \quad \therefore k > -1$$

또 이차방정식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x + 2 = 0$ ($k \neq -1$)의 판별식

을 D 라고 할 때 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - 2(k+1) = 0$$

$$k^2 - 1 = 0, \quad k^2 = 1 \quad \therefore k = \pm 1$$

그런데 $k > -1$ 이므로 $k=1$ 이다.

022 답 ②

이차부등식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 > 0$ 을 만족하지 않는 x 의

값이 오직 한 개이면 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 \leq 0$ 의 해가 1개이

므로

$$2-a > 0 \quad \therefore a < 2$$

또 이차방정식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 = 0$ ($a \neq 2$)의 판별식을

D 라고 할 때 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 3(2-a) = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0, \quad (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a < 2$ 이므로 $a = -1$ 이다.

023 답 ②

이차부등식 $ax^2-2ax-6>0$ 에서

(i) $a>0$ 일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$ 일 때

이차방정식 $ax^2-2ax-6=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-a \times (-6)>0, a^2+6a>0$$

$$a(a+6)>0 \quad \therefore a<-6 \text{ 또는 } a>0$$

그런데 $a<0$ 이므로 $a<-6$

(i), (ii)에 의하여 a 의 값의 범위는 $a<-6$ 또는 $a>0$

따라서 실수 a 의 값이 아닌 것은 ② -4 이다.

024 답 ③

이차부등식 $3x^2-2x-a<0$ 이 해를 가지려면 이차방정식

$3x^2-2x-a=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=1-3 \times (-a)>0, 3a+1>0 \quad \therefore a>-\frac{1}{3}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 0이다.

025 답 ⑤

이차부등식 $ax^2-4x+a>0$ 에서

(i) $a>0$ 일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$ 일 때

이차방정식 $ax^2-4x+a=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a^2>0, (a+2)(a-2)<0 \quad \therefore -2<a<2$$

그런데 $a<0$ 이므로 $-2<a<0$

(i), (ii)에 의하여 a 의 값의 범위는 $-2<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 음의 정수 a 의 값은 -1 이다.

026 답 ②

이차부등식 $ax^2-4x+a-3\leq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하려면 $a<0$ 이어야 한다.

또 이차방정식 $ax^2-4x+a-3=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D\leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a-3)\leq 0, a^2-3a-4\geq 0$$

$$(a+1)(a-4)\geq 0 \quad \therefore a\leq -1 \text{ 또는 } a\geq 4$$

그런데 $a<0$ 이므로 $a\leq -1$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

027 답 ③

이차방정식 $x^2-3ax+9=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D\leq 0$ 이어야 하므로 $D=(-3a)^2-4\times 9\leq 0$

$$(a+2)(a-2)\leq 0 \quad \therefore -2\leq a\leq 2$$

028 답 ④

부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2>0$ 에서

(i) $a=1$ 일 때

x 의 값에 관계없이 부등식이 항상 성립한다.

(ii) $a\neq 1$ 일 때

$a-1>0$ 에서 $a>1$

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-1)(4a+2)<0, -3a^2+3<0$$

$$(a+1)(a-1)>0 \quad \therefore a<-1 \text{ 또는 } a>1$$

그런데 $a>1$ 이므로 $a>1$

(i), (ii)에 의하여 a 의 값의 범위는 $a\geq 1$

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

029 답 ④

$ax^2-2x>-ax+2$ 에서 $ax^2+(a-2)x-2>0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2+(a-2)x-2\leq 0$ 이 성립해야 하므로 $a<0$ 이어야 한다.

또 이차방정식 $ax^2+(a-2)x-2=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

$D\leq 0$ 이어야 하므로 $D=(a-2)^2-4\times a\times (-2)\leq 0$

$$a^2+4a+4\leq 0, (a+2)^2\leq 0 \quad \therefore a=-2$$

그런데 $a<0$ 이므로 구하는 실수 a 의 값은 -2 이다.

030 답 ①

이차부등식 $x^2-4(a+2)x-a-2<0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-4(a+2)x-a-2\geq 0$ 이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-4(a+2)x-a-2=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D\leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=4(a+2)^2+(a+2)\leq 0, 4a^2+17a+18\leq 0$$

$$(4a+9)(a+2)\leq 0 \quad \therefore -\frac{9}{4}\leq a\leq -2$$

따라서 정수 a 의 값은 -2 이다.

031 답 ②

이차부등식 $x^2-2(a+2)x-a-2\leq 0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2(a+2)x-a-2>0$ 이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2(a+2)x-(a+2)=0$ 의 판별식을 D 라고

할 때 $D<0$ 이어야 하므로 $\frac{D}{4}=(a+2)^2+(a+2)<0$

$$a^2+5a+6<0, (a+3)(a+2)<0 \quad \therefore -3<a<-2$$

따라서 $\alpha=-3, \beta=-2$ 이므로 $\alpha-\beta=-1$

032 답 $k\leq -2$

$f(x)=x^2-6x+5-2k$ 라고 하면 $f(x)=(x-3)^2-2k-4$

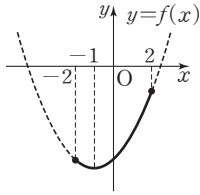
$1\leq x\leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이므로 $f(x)\geq 0$ 이어려면

$f(3)\geq 0$ 이어야 한다.

$$-2k-4\geq 0, 2k\leq -4 \quad \therefore k\leq -2$$

033 답 ④

$f(x)=2x^2+4x+a^2+3a-20$ 이라고 하면
 $f(x)=2(x+1)^2+a^2+3a-22$
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대
 이므로 $f(x) < 0$ 이라면 $f(2) < 0$ 이어야 한다.
 $18+a^2+3a-22 < 0, a^2+3a-4 < 0$
 $(a+4)(a-1) < 0 \quad \therefore -4 < a < 1$
 따라서 정수 a 의 최댓값은 0이다.



034 답 ②

$x^2+ax-3 > x-11$ 에서 $x^2+(a-1)x+8 > 0$ ㉠
 이때 해가 $x < 2$ 또는 $x > b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-2)(x-b) > 0 \quad \therefore x^2-(b+2)x+2b > 0$ ㉡
 ㉠, ㉡에서
 $a-1 = -b-2, 8=2b \quad \therefore a=-5, b=4$
 $\therefore b-a=9$

035 답 ②

$x^2-x+4 < 2x+14$ 에서 $x^2-3x-10 < 0$
 $(x+2)(x-5) < 0 \quad \therefore -2 < x < 5$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

036 답 ④

$x^2-ax-2 < b$ 에서 $x^2-ax-b-2 < 0$ ㉠
 이때 해가 $1 < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-1)(x-4) < 0 \quad \therefore x^2-5x+4 < 0$ ㉡
 ㉠, ㉡에서
 $-a=-5, -b-2=4 \quad \therefore a=5, b=-6$
 $\therefore a-b=11$

037 답 ⑤

$2x^2-3x+a > x^2+bx-1$ 에서 $x^2-(b+3)x+a+1 > 0$ ㉠
 이때 해가 $x < -1$ 또는 $x > 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+1)(x-2) > 0 \quad \therefore x^2-x-2 > 0$ ㉡
 ㉠, ㉡에서
 $-b-3=-1, a+1=-2 \quad \therefore a=-3, b=-2$
 $\therefore ab=6$

038 답 ③

이차함수 $y=x^2+(k+2)x+2$ 의 그래프가 직선 $y=x+1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여
 $x^2+(k+2)x+2 > x+1$, 즉 $x^2+(k+1)x+1 > 0$ 이 성립해야 한다.
 즉, 이차방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때
 $D < 0$ 이어야 하므로
 $D=(k+1)^2-4 < 0, k^2+2k-3 < 0$
 $(k+3)(k-1) < 0 \quad \therefore -3 < k < 1$
 따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

039 답 ①

이차함수 $y=x^2+kx-k$ 의 그래프와 x 축이 만나지 않으려면 이차함수의 그래프가 x 축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.
 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+kx-k > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+kx-k=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.
 $D=k^2-4 \times (-k) < 0, k^2+4k < 0$
 $k(k+4) < 0 \quad \therefore -4 < k < 0$
 따라서 $a=-4, b=0$ 이므로
 $a-b=-4$

040 답 ①

이차함수 $y=-x^2+(k+1)x-5$ 의 그래프가 직선 $y=x-1$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여
 $-x^2+(k+1)x-5 < x-1$, 즉 $x^2-kx+4 > 0$ 이 성립해야 한다.
 즉, 이차방정식 $x^2-kx+4=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D < 0$ 이어야 하므로
 $D=k^2-16 < 0, (k+4)(k-4) < 0$
 $\therefore -4 < k < 4$

041 답 ②

함수 $y=ax^2-6x+6$ 의 그래프가 이차함수 $y=-3x^2+2ax-2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여
 $ax^2-6x+6 > -3x^2+2ax-2$, 즉 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8 > 0$ 이 성립해야 한다.
 (i) $a=-3$ 일 때
 부등식은 항상 성립한다.
 (ii) $a > -3$ 일 때
 이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=(a+3)^2-8(a+3) < 0, a^2-2a-15 < 0$
 $(a+3)(a-5) < 0 \quad \therefore -3 < a < 5$
 (i), (ii)에 의하여 a 의 값의 범위는
 $-3 \leq a < 5$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 -3 이다.

042 답 ①

주어진 식을 y 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $-y^2+4xy-x^2+2x-1=0, y^2-4xy+x^2-2x+1=0$
 이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 y 가 존재해야 한다.
 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때 $D \geq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=4x^2-(x^2-2x+1) \geq 0, 3x^2+2x-1 \geq 0$
 $(x+1)(3x-1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq \frac{1}{3}$
 따라서 자연수 x 의 최솟값은 1이다.

043 답 ①

$x+y=k$ 라고 하면 $y=-x+k$

이것을 $2x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$2x^2+(-x+k)^2=1 \quad \therefore 3x^2-2kx+k^2-1=0$$

이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 x 가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-3(k^2-1) \geq 0, \left(k+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(k-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.

044 답 ④

$\overline{AB}=x$ 라고 하면 $\overline{AD}=22-x$

직사각형 ABCD의 넓이는 $x(22-x)=-x^2+22x$

즉, $-x^2+22x \geq 96$ 에서 $x^2-22x+96 \leq 0$

$$(x-6)(x-16) \leq 0 \quad \therefore 6 \leq x \leq 16$$

그런데 $0 < x < 22$ 이므로 변 AB의 길이의 최댓값은 16이다.

045 답 $\frac{2}{5} \leq t \leq 1$

공의 높이가 지면으로부터 3m 이상이라면

$$-5t^2+7t+1 \geq 3 \text{에서 } 5t^2-7t+2 \leq 0$$

$$(t-1)(5t-2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{5} \leq t \leq 1$$

046 답 4

가격을 x 천 원 인상한다고 하면 양말 1켤레의 가격은 $(3+x)$ 천 원,

하루 판매량은 $(50-5x)$ 켤레가 된다.

이때 하루 판매액이 21만 원 이상이라면

$$(3+x)(50-5x) \geq 210, -5x^2+35x-60 \geq 0$$

$$x^2-7x+12 \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 4$$

따라서 x 의 최댓값은 4이다.

핵심 유형 138~139쪽

유형15 답 ④

$$3x^2-8x-16 < 0 \text{에서 } (3x+4)(x-4) < 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} < x < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2-x-12 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 } -\frac{4}{3} < x < 4$$

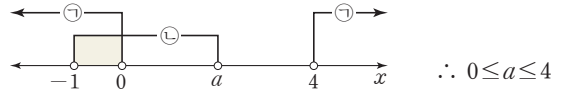
따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

유형16 답 5

$$x^2-4x > 0 \text{에서 } x(x-4) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2+(1-a)x-a < 0 \text{에서 } (x-a)(x+1) < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분이 $-1 < x < 0$ 이 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



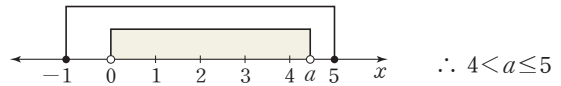
따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

유형17 답 $4 < a \leq 5$

$$x^2-4x-5 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 5$$

$$x^2-ax < 0 \text{에서 } x(x-a) < 0$$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 4개이려면 다음 그림과 같아야 한다.



유형18 답 5, 6, 7

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+2$ 이므로

$$x+2 < x+(x-2) \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$$(x+2)^2 > x^2+(x-2)^2, x^2+4x+4 > x^2+x^2-4x+4$$

$$x^2-8x < 0, x(x-8) < 0 \quad \therefore 0 < x < 8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $4 < x < 8$ 이므로 자연수 x 의 값은 5, 6, 7이다.

유형19 답 5

이차방정식 $x^2+ax+\left(a+\frac{5}{4}\right)=0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D < 0$

$$\text{이어야 하므로 } D=a^2-4\left(a+\frac{5}{4}\right) < 0, a^2-4a-5 < 0$$

$$(a+1)(a-5) < 0 \quad \therefore -1 < a < 5$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

유형20 답 ③

이차방정식 $x^2-2kx+2k^2-1=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라고 하면 두 근이 모두 양수이므로

$$(i) \frac{D}{4}=k^2-(2k^2-1) \geq 0, (k+1)(k-1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 1$$

$$(ii) \alpha+\beta=2k > 0 \text{에서 } k > 0$$

$$(iii) \alpha\beta=2k^2-1 > 0 \text{에서 } \left(k+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } k > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 실수 } k \text{의 값의 범위는 } \frac{\sqrt{2}}{2} < k \leq 1$$

유형21 답 ①

$f(x)=x^2-2kx+9$ 라고 하면

$$(i) \text{ 이차방정식 } f(x)=0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 할 때 } \frac{D}{4}=k^2-9 \geq 0$$

$$(k+3)(k-3) \geq 0 \quad \therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 3$$

$$(ii) f(2) > 0 \text{이므로 } 4-4k+9 > 0, 4k < 13 \quad \therefore k < \frac{13}{4}$$

$$(iii) \text{ 이차함수 } y=f(x) \text{의 그래프의 축의 방정식이 } x=k \text{이므로 } k < 2$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 } k \text{의 값의 범위는 } k \leq -3$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

047 답 ①

$x^2+6x-7 \leq 0$ 에서 $(x+7)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -7 \leq x \leq 1$ ㉠
 $x^2+3x-10 > 0$ 에서 $(x+5)(x-2) > 0$
 $\therefore x < -5$ 또는 $x > 2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-7 \leq x < -5$
 따라서 $a = -7$, $b = -5$ 이므로 $a-b = -2$

048 답 4

$3(x-2) \leq 5x-2$ 에서 $3x-6 \leq 5x-2$
 $\therefore x \geq -2$ ㉠
 $4x^2-7x-15 < 0$ 에서 $(4x+5)(x-3) < 0$
 $\therefore -\frac{5}{4} < x < 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{5}{4} < x < 3$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

049 답 ①

$5x \leq 2x^2+2$ 에서 $2x^2-5x+2 \geq 0$
 $(2x-1)(x-2) \geq 0 \therefore x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $x \geq 2$ ㉠
 $2x^2+2 < 2x+6$ 에서 $x^2-x-2 < 0$
 $(x+1)(x-2) < 0 \therefore -1 < x < 2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$
 따라서 x 의 값이 아닌 것은 ① -1 이다.

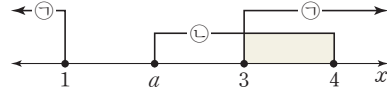
050 답 $-3 < x < 4$

$x^2-2x-15 < 0$ 에서
 $(x+3)(x-5) < 0 \therefore -3 < x < 5$ ㉠
 $x^2-3|x|-4 < 0$ 에서
 (i) $x < 0$ 일 때
 $x^2+3x-4 < 0, (x+4)(x-1) < 0 \therefore -4 < x < 1$
 그런데 $x < 0$ 이므로 $-4 < x < 0$
 (ii) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2-3x-4 < 0, (x+1)(x-4) < 0 \therefore -1 < x < 4$
 그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x < 4$
 (i), (ii)에 의하여 $x^2-3|x|-4 < 0$ 의 해는
 $-4 < x < 4$ ㉡
 따라서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3 < x < 4$

다른 풀이 $x^2-3|x|-4 < 0$ 에서
 $x^2 = |x|^2$ 이므로 $|x|^2-3|x|-4 < 0$
 $(|x|+1)(|x|-4) < 0 \therefore -1 < |x| < 4$
 그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $0 \leq |x| < 4$
 즉, $|x| < 4$ 에서 $-4 < x < 4$

051 답 ④

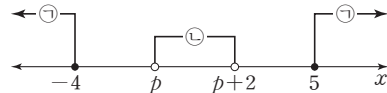
$x^2-7x+12 \leq 0$ 의 해를 구하면
 $(x-3)(x-4) \leq 0 \therefore 3 \leq x \leq 4$
 $x^2-4x+3 \geq 0$ 에서 $(x-1)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$ ㉠
 주어진 연립부등식에서 $(x-4)(x-a) \leq 0$ ㉡
 이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 $3 \leq x \leq 4$ 이라면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore 1 < a \leq 3$
 따라서 상수 a 의 최댓값은 3이다.

052 답 $-4 \leq p \leq 3$

$x^2-x-20 \geq 0$ 에서 $(x+4)(x-5) \geq 0$
 $\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 5$ ㉠
 $x^2-2(p+1)x+p^2+2p < 0$ 에서 $(x-p)(x-p-2) < 0$
 $\therefore p < x < p+2$ ㉡
 이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 다음 그림과 같아야 한다.



$p \geq -4$ 이고 $p+2 \leq 5 \therefore -4 \leq p \leq 3$

053 답 ③

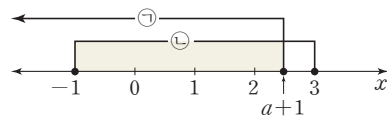
연립부등식의 해가 $-2 < x \leq 0$ 또는 $2 \leq x < 3$ 이라면 다음 그림과 같이 부등식 $x^2-x-p < 0$ 의 해는 $-2 < x < 3$ 이고, 부등식 $x^2-2x+q \geq 0$ 의 해는 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$ 이어야 한다.



즉, $(x+2)(x-3) < 0$ 에서 $x^2-x-6 < 0$ 이므로 $p=6$
 또 $x(x-2) \geq 0$ 에서 $x^2-2x \geq 0$ 이므로 $q=0$
 $\therefore p-q=6$

054 답 1

$x-a \leq 1$ 에서 $x \leq a+1$ ㉠
 $x^2-2x \leq 3$ 에서 $x^2-2x-3 \leq 0$
 $(x+1)(x-3) \leq 0 \therefore -1 \leq x \leq 3$ ㉡
 이때 ㉠, ㉡의 공통부분에 포함되는 모든 정수 x 의 값의 합이 2가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



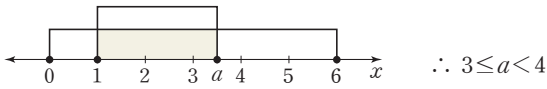
$2 \leq a+1 < 3 \therefore 1 \leq a < 2$
 따라서 정수 a 의 값은 1이다.

055 답 $3 \leq a < 4$

$$x^2 - 6x \leq 0 \text{에서 } x(x-6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 6$$

$$x^2 - (a+1)x + a \leq 0 \text{에서 } (x-a)(x-1) \leq 0$$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이려면 다음 그림과 같아야 한다.

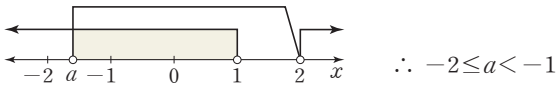


056 답 ①

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) > 0 \quad \therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-2) < 0$$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x 의 값이 -1과 0뿐이려면 다음 그림과 같아야 한다.

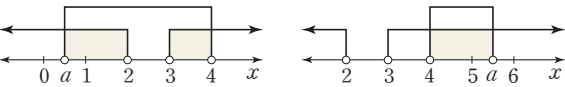


057 답 ⑤

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{에서 } (x-2)(x-3) > 0 \quad \therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 3$$

$$x^2 - (a+4)x + 4a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-4) < 0$$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 오직 한 개뿐이려면 다음 그림과 같은 2가지 경우이어야 한다.



$$\therefore 0 \leq a < 1 \text{ 또는 } 5 < a \leq 6$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 6이다.

058 답 ⑤

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+3$ 이므로

$$x+3 < x+(x-3) \quad \therefore x > 6 \quad \dots\dots ㉠$$

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$$(x+3)^2 < x^2 + (x-3)^2, \quad x^2 + 6x + 9 < x^2 + x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 12x > 0, \quad x(x-12) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 12 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $x > 12$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 13이다.

059 답 $1 \leq x \leq 2$

보행자 통로의 넓이는

$$(2x+30)(2x+20) - 30 \times 20 = 4x^2 + 100x \text{ (m}^2\text{)}$$

이 통로의 넓이가 104 m^2 이상 216 m^2 이하이므로

$$104 \leq 4x^2 + 100x \leq 216 \quad \therefore 26 \leq x^2 + 25x \leq 54$$

$$26 \leq x^2 + 25x \text{에서 } x^2 + 25x - 26 \geq 0$$

$$(x+26)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -26 \text{ 또는 } x \geq 1$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 1 \quad \dots\dots ㉠$

$$x^2 + 25x \leq 54 \text{에서 } x^2 + 25x - 54 \leq 0$$

$$(x+27)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -27 \leq x \leq 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 2 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 구하는 x 의 값의 범위는 $1 \leq x \leq 2$

060 답 $3 \leq x \leq 4$ 또는 $6 \leq x \leq 7$

직사각형의 가로 길이가 x 이므로 세로 길이는 $(10-x)$ 이다.

이때 이 직사각형의 넓이가 21 이상 24 이하이므로

$$21 \leq x(10-x) \leq 24 \quad \therefore 21 \leq -x^2 + 10x \leq 24$$

$$21 \leq -x^2 + 10x \text{에서 } x^2 - 10x + 21 \leq 0$$

$$(x-3)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-x^2 + 10x \leq 24 \text{에서 } x^2 - 10x + 24 \geq 0$$

$$(x-4)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 x 의 값의 범위는

$$3 \leq x \leq 4 \text{ 또는 } 6 \leq x \leq 7$$

061 답 $a \leq -5$ 또는 $a \geq 5$

이차방정식 $x^2 + 4ax + 3a^2 + 25 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2a)^2 - (3a^2 + 25) \geq 0, \quad (a+5)(a-5) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -5 \text{ 또는 } a \geq 5$$

062 답 2

이차방정식 $x^2 - (a-2)x - a + \frac{5}{4} = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1 = (a-2)^2 - 4\left(-a + \frac{5}{4}\right) > 0$$

$$(a+1)(a-1) > 0 \quad \therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 2a + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$D_2 = (a+2)^2 - 4(2a+1) < 0$$

$$a^2 - 4a < 0, \quad a(a-4) < 0 \quad \therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $1 < a < 4$ 이므로 정수 a 는 2, 3의 2개이다.

063 답 ③

이차방정식 $x^2 - ax + a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$D_1 = (-a)^2 - 4a \geq 0$$

$$a^2 - 4a \geq 0, \quad a(a-4) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 - 2x - a^2 + 5 = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-1)^2 - (-a^2 + 5) \geq 0$$

$$(a+2)(a-2) \geq 0 \quad \therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 가지려면

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 2$$

따라서 정수 a 의 값이 아닌 것은 ③ 1이다.

064 답 1, 2, 3, 4

이차방정식 $x^2 + 2(k+1)x - k + 5 = 0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α , β 라고 하면 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = (k+1)^2 - (-k+5) \geq 0, \quad k^2 + 3k - 4 \geq 0$$

$$(k+4)(k-1) \geq 0 \quad \therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 1$$

$$(ii) \alpha + \beta = -2(k+1) < 0 \quad \therefore k > -1$$

$$(iii) \alpha\beta = -k+5 > 0 \quad \therefore k < 5$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 k 의 값의 범위는 $1 \leq k < 5$

따라서 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4이다.

065 답 $k < -1$ 또는 $0 < k < 1$

이차방정식 $x^2 - k(k+1)x + k - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 하면
두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = k - 1 < 0 \quad \therefore k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$$\alpha + \beta = k(k+1) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 실수 k 의 값의 범위는

$$k < -1 \text{ 또는 } 0 < k < 1$$

066 답 ②

$f(x) = x^2 - 2kx + 4$ 라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

$$\frac{D}{4} = k^2 - 4 \geq 0$$

$$(k+2)(k-2) \geq 0 \quad \therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 2$$

(ii) $f(1) > 0$ 이므로 $1 - 2k + 4 > 0$

$$2k < 5 \quad \therefore k < \frac{5}{2}$$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로

$$k > 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k < \frac{5}{2}$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 2이다.

067 답 ①

$f(x) = x^2 - 5x + 2k^2$ 이라고 하면 $f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$f(1) = 1 - 5 + 2k^2 < 0$$

$$(k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

따라서 $\alpha = -\sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = -2$$

068 답 $2 < k < \frac{11}{5}$

$f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$ 라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때 이차방정식이
서로 다른 두 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+2) > 0$$

$$k^2 - k - 2 > 0, (k+1)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(0) > 0$ 이므로 $k + 2 > 0 \quad \therefore k > -2$

(iii) $f(3) > 0$ 이므로

$$9 - 6k + k + 2 > 0, 5k < 11 \quad \therefore k < \frac{11}{5}$$

(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로

$$0 < k < 3$$

(i)~(iv)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는

$$2 < k < \frac{11}{5}$$

1 답 ③

유형 01 그래프를 이용한 부등식의 풀이

부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해는 $-3 \leq x \leq 2$

부등식 $g(x) \geq 0$ 의 해는 $-2 \leq x \leq 4$

따라서 부등식 $f(x) \leq 0 \leq g(x)$ 의 해는 $-2 \leq x \leq 2$ 이다.

2 답 ㄷ, ㄹ

유형 02 이차부등식의 풀이

ㄱ. $3x^2 - x + 1 \geq 0$ 에서 이차방정식 $3x^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식을 D
라고 하면 $D = -11 < 0$ 이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2 - 8x + 16 \leq 0$ 에서 $(x-4)^2 \leq 0 \quad \therefore x = 4$

ㄷ. 이차방정식 $2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$D = -23 < 0 \text{이므로 부등식의 해는 없다.}$$

ㄹ. $4x^2 - 12x + 9 < 0$ 에서 이차방정식 $4x^2 - 12x + 9 = 0$ 의 판별식

$$\text{을 } D \text{라고 하면 } \frac{D}{4} = 0 \text{이므로 부등식의 해는 없다.}$$

따라서 부등식의 해가 없는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

3 답 $x < -3$ 또는 $x > 5$

유형 02 이차부등식의 풀이

$x - 1 = 0$, 즉 $x = 1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 > -3(x-1), x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x+3)(x-2) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

$$\text{그런데 } x < 1 \text{이므로 } x < -3$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 > 3(x-1), x^2 - 5x > 0$$

$$x(x-5) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 5$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } x > 5$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 5$

4 답 ②

유형 03 해가 주어진 이차부등식

해가 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-3) \geq 0 \text{에서 } x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

이 부등식이 $x^2 + 2ax - b \geq 0$ 이므로

$$2a = -2, -b = -3 \quad \therefore a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

5 답 $x < -2$ 또는 $x > 0$

유형 04 부등식 $f(x) < 0$ 과 부등식 $f(ax+b) < 0$ 사이의 관계

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 1$ 이므로

$$f(x) = a(x+3)(x-1) \quad (a < 0) \text{이라고 하면}$$

$$f(2x+1) = a(2x+1+3)(2x+1-1) = 4ax(x+2)$$

$$f(2x+1) < f(1) \text{에서 } f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$4ax(x+2) < 0, x(x+2) > 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 0$$

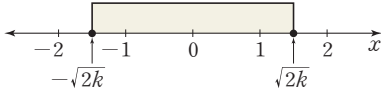
6 답 ③

유형 05 정수인 해의 조건이 주어진 이차부등식

$$x^2 \leq 2k \text{에서 } x^2 - 2k \leq 0, (x + \sqrt{2k})(x - \sqrt{2k}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{2k} \leq x \leq \sqrt{2k}$$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이므로



$$1 \leq \sqrt{2k} < 2, 1 \leq 2k < 4 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq k < 2$$

따라서 정수 k 의 값은 1이다.

7 답 2

유형 06 이차부등식의 해가 한 개일 조건

$$\text{이차부등식 } (k-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 \leq 0 \text{의 해가 1개이므로}$$

$$k-1 > 0 \quad \therefore k > 1$$

또 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 = 0$ ($k \neq 1$)의 판별식을 D 라고 할 때 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k-1) = 0, k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \therefore k=1 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $k > 1$ 이므로 k 의 값은 2이다.

8 답 ⑤

유형 07 이차부등식이 해를 가질 조건

$$\text{이차부등식 } kx^2 - 6x + k - 8 > 0 \text{에서}$$

(i) $k > 0$ 일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k < 0$ 일 때

이차방정식 $kx^2 - 6x + k - 8 = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - k(k-8) > 0, k^2 - 8k - 9 < 0 \quad \therefore -1 < k < 9$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-1 < k < 0$

(i), (ii)에 의하여 실수 k 의 값의 범위는 $-1 < k < 0$ 또는 $k > 0$

9 답 $-3 < k < -1$

유형 08 이차부등식이 항상 성립할 조건

$$\text{이차방정식 } x^2 - 2(k+1)x - 2k - 2 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라고 할 때}$$

$$D < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 + 2k + 2 < 0, k^2 + 4k + 3 < 0$$

$$(k+3)(k+1) < 0 \quad \therefore -3 < k < -1$$

10 답 ⑤

유형 09 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 없으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라고 할 때 } D \leq 0 \text{이어야 하므로 } \frac{D}{4} = a^2 - 9a \leq 0$$

$$a(a-9) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 9$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 9의 10개이다.

11 답 ⑤

유형 10 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건

$$x^2 - 4x < 2x^2 + a^2 - 3a \text{에서}$$

$$x^2 + 4x + a^2 - 3a > 0$$

$$f(x) = x^2 + 4x + a^2 - 3a \text{라고 하면}$$

$$f(x) = (x+2)^2 + a^2 - 3a - 4$$

$-4 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최소이므로 $f(x) > 0$ 이려면

$$f(-2) > 0 \text{이어야 한다.}$$

$$a^2 - 3a - 4 > 0, (a+1)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다.

12 답 -5

유형 11 만나는 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식

$$x^2 - 4x - 5 < a \text{에서}$$

$$x^2 - 4x - a - 5 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 해가 $b < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-b)(x-4) < 0$$

$$\therefore x^2 - (b+4)x + 4b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$-4 = -b - 4, -a - 5 = 4b \quad \therefore a = -5, b = 0$$

$$\therefore a + b = -5$$

13 답 ②

유형 12 만나지 않는 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식

두 이차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 이차함수

$$y = x^2 - 6x + 4 \text{의 그래프가 이차함수 } y = -x^2 + 2kx + 2 \text{의 그래프}$$

보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 - 6x + 4 > -x^2 + 2kx + 2, \text{ 즉 } x^2 - (k+3)x + 1 > 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

즉, 이차방정식 $x^2 - (k+3)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

$$D < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$D = (k+3)^2 - 4 < 0, k^2 + 6k + 5 < 0$$

$$(k+5)(k+1) < 0 \quad \therefore -5 < k < -1$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -4이다.

14 답 ②

유형 13 이차식을 만족하는 실수의 최댓값과 최솟값

$$2x - y = k \text{라고 하면 } y = 2x - k$$

$$\text{이것을 } 4x^2 + y^2 = 4 \text{에 대입하면}$$

$$4x^2 + (2x - k)^2 = 4 \quad \therefore 8x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$$

이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 x 가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 8(k^2 - 4) \geq 0, (k + 2\sqrt{2})(k - 2\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 $2x - y$ 의 최솟값은 $-2\sqrt{2}$ 이다.

15 답 ③

유형 14 이차부등식의 활용

이 물체의 높이가 지면으로부터 15 m 이상이라면

$$50 - 5t^2 \geq 15, 5t^2 \leq 35$$

$$(t + \sqrt{7})(t - \sqrt{7}) \leq 0 \quad \therefore -\sqrt{7} \leq t \leq \sqrt{7}$$

그런데 $t \geq 0$ 이므로 $0 \leq t \leq \sqrt{7}$

따라서 $\sqrt{7}$ 초 동안 지면으로부터 15 m 이상의 높이에 있다.

16 답 ①

유형 15 연립이차부등식의 풀이

$$x^2 + 3x + 1 \leq 2x^2 - 2x - 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 5x - 6 \geq 0, (x+1)(x-6) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$2x^2 - 2x - 5 \leq 3x - 2 \text{에서}$$

$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0, (2x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \quad \cdots \cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 부등식의 해는 없다.

17 답 ⑤

유형 16 해가 주어진 연립이차부등식

$$x^2 + 3x - 4 < 0 \text{에서 } (x+4)(x-1) < 0$$

$$\therefore -4 < x < 1$$

$$x^2 - a > 0 \text{에서 } (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) > 0$$

$$\therefore x < -\sqrt{a} \text{ 또는 } x > \sqrt{a}$$

$$\text{연립부등식 } \begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ x^2 - a > 0 \end{cases} \text{의 해가 } -4 < x < -2 \text{이라면 } x = -2$$

는 이차방정식 $x^2 - a = 0$ 의 해이어야 하므로

$$4 - a = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{또 } x^2 - 10x + 21 \leq 0 \text{에서 } (x-3)(x-7) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 7$$

$$\text{연립부등식 } \begin{cases} x^2 - 8x + b \leq 0 \\ x^2 - 10x + 21 \leq 0 \end{cases} \text{의 해가 } 3 \leq x \leq 6 \text{이라면 } x = 6 \text{은 이}$$

차방정식 $x^2 - 8x + b = 0$ 의 해이어야 하므로

$$36 - 48 + b = 0 \quad \therefore b = 12$$

$$\therefore a + b = 16$$

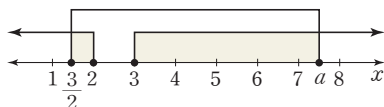
18 답 ⑤

유형 17 정수인 해의 조건이 주어진 연립이차부등식

$$(x-2)(x-3) \geq 0 \text{에서 } x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 3$$

$$(2x-3)(x-a) \leq 0 \text{에서 } \frac{3}{2} \leq x \leq a$$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x 가 6개이라면 다음 그림과 같아야 한다.



$$\therefore 7 \leq a < 8$$

19 답 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

유형 18 연립이차부등식의 활용

$$\text{길의 넓이는 } (2x+20)(2x+15) - 20 \times 15 = 4x^2 + 70x \text{ (m}^2\text{)}$$

길의 넓이가 36 m^2 이상 200 m^2 이하이므로

$$36 \leq 4x^2 + 70x \leq 200 \quad \therefore 18 \leq 2x^2 + 35x \leq 100$$

$$18 \leq 2x^2 + 35x \text{에서 } 2x^2 + 35x - 18 \geq 0$$

$$(x+18)(2x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -18 \text{ 또는 } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x \geq \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$2x^2 + 35x \leq 100 \text{에서 } 2x^2 + 35x - 100 \leq 0$$

$$(x+20)(2x-5) \leq 0 \quad \therefore -20 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } 0 < x \leq \frac{5}{2} \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 구하는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

20 답 ②

유형 19 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 6 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라고 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - a - 6 < 0$$

$$(a+2)(a-3) < 0 \quad \therefore -2 < a < 3 \quad \cdots \cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D_2 라고 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 4 < 0, (a+2)(a-2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 2 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 두 이차방정식 중 적어도 하나가 허근을 가지려면 $-2 < a < 3$

따라서 정수 a 의 최댓값은 2이다.

21 답 6

유형 20 이차방정식의 근의 부호

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha\beta = k^2 - 3k - 4 < 0, (k+1)(k-4) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 4$$

따라서 정수 k 의 값은 0, 1, 2, 3이므로 합은 6이다.

22 답 ①

유형 21 이차방정식의 근의 분리

$$f(x) = x^2 - 6ax + 9 \text{라고 하면}$$

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 9 \geq 0, (a+1)(a-1) \geq 0 \quad \therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

$$\text{(ii) } f(-2) > 0 \text{이므로 } 4 + 12a + 9 > 0 \quad \therefore a > -\frac{13}{12}$$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = 3a$ 이므로

$$-2 < 3a \quad \therefore a > -\frac{2}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 a 의 값의 범위는 $a \geq 1$

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

09 평면좌표

핵심
유형

유형01 3	유형02 ③	유형03 ②
유형04 13	유형05 ④	유형06 풀이 참고
유형07 (-11, 10)	유형08 2	유형09 4
유형10 ⑤	유형11 ②	유형12 $y = -2x + \frac{3}{2}$

핵심
유형

완성하기

001 ④	002 ⑤	003 ④	004 $10\sqrt{2}$
005 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	006 4	007 4	008 ③
009 ④	010 9	011 $5\sqrt{2}$	012 ③
013 ③	014 P(2, 6)	015 20	
016 (가) a (나) b (다) $y-b$ (라) y			
017 (가) D (나) $-2c$ (다) $a^2+b^2+2c^2$	018 ⑤		
019 ⑤	020 ⑤	021 ④	022 ⑤
023 ②	024 ①	025 $\frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$	026 ③
027 ⑤	028 ③	029 ③	030 C(-4, 6), D(-2, -1)
031 ④	032 ②	033 $D(-1, \frac{1}{3})$	034 ④
035 ①	036 ⑤	037 ①	038 $y = x + 1$

핵심
유형

최종 점검하기

1 ③	2 ②	3 ③	4 ②	5 ⑤
6 ②	7 ③	8 (가) $2a$ (나) $2\sqrt{3}a$ (다) 정삼각형		
9 ③	10 ④	11 ①	12 3	13 $\sqrt{53}$
14 ②	15 ④	16 ③	17 ⑤	18 ①

핵심 유형 148~150쪽

유형01 답 3

$\overline{AB} = 6$ 이므로

$$\sqrt{(a-3)^2 + (-1-a-2)^2} = 6$$

$$\sqrt{2a^2 + 18} = 6$$

양변을 제곱하면

$$2a^2 + 18 = 36, a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

유형02 답 ③

P($p, 0$)이라고 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(p-1)^2 + (0-2)^2 = (p-5)^2 + (0-6)^2, 8p = 56 \quad \therefore p = 7$$

$$\therefore P(7, 0)$$

Q($0, q$)라고 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(0-1)^2 + (q-2)^2 = (0-5)^2 + (q-6)^2, 8q = 56 \quad \therefore q = 7$$

$$\therefore Q(0, 7)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

유형03 답 ②

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5+1)^2 + (6-4)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(3-5)^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{에서 } \overline{AB} = \overline{CA} \text{이고 } \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

유형04 답 13

A(1, -1), B(6, 11), P(a, b)라고 하면

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a-6)^2 + (b-11)^2}$$

$$= \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB} = \sqrt{(6-1)^2 + (11+1)^2} = 13$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

유형05 답 ④

P($a, 0$)이라고 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a+2)^2 + (-5)^2 + (a-4)^2 + (-1)^2$$

$$= 2a^2 - 4a + 46$$

$$= 2(a-1)^2 + 44$$

따라서 $a=1$ 일 때 최솟값은 44이다.

유형06 풀이 참고

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 선분

BC의 수직이등분선을 y 축으로 하는 좌표

평면을 잡으면 점 M은 원점이다.

A(a, b), C($c, 0$)이라고 하면

B($-c, 0$)이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (-c-a)^2 + (-b)^2 + (c-a)^2 + (-b)^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

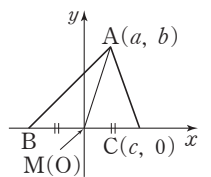
유형07 답 (-11, 10)

$$P\left(\frac{3 \times (-3) + 2 \times 7}{3+2}, \frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}\right) \quad \therefore P(1, 4)$$

$$Q\left(\frac{3 \times (-3) - 2 \times 7}{3-2}, \frac{3 \times 6 - 2 \times 1}{3-2}\right) \quad \therefore Q(-23, 16)$$

따라서 구하는 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-23)}{2}, \frac{4+16}{2}\right) \quad \therefore (-11, 10)$$



유형08 답 2

$\overline{AB}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{6m-3n}{m+n}, \frac{-m+5n}{m+n} \right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로

$$\frac{6m-3n}{m+n}=0, n=2m \quad \therefore \frac{n}{m}=2$$

유형09 답 4

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a-2b+4}{3}, \frac{3+b+a-1}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2b+2}{3}, \frac{a+b+2}{3} \right)$$

이 점이 점 $(-2, 2)$ 이므로

$$\frac{a-2b+2}{3}=-2, \frac{a+b+2}{3}=2$$

$$a-2b=-8, a+b=4 \quad \therefore a=0, b=4$$

$$\therefore b-a=4$$

유형10 답 ⑤

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+4}{2}, \frac{8-1}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

D(a, b)라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{5+b}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②이 일치하므로

$$\frac{11}{2}=\frac{a}{2}, \frac{7}{2}=\frac{5+b}{2} \quad \therefore a=11, b=2$$

$$\therefore D(11, 2)$$

유형11 답 ②

$$\overline{AB}=\sqrt{(-7-5)^2+(-4-1)^2}=13$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(2-5)^2+(5-1)^2}=5$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13:5로 내분하는 점이다.

$$D\left(\frac{13 \times 2 + 5 \times (-7)}{13+5}, \frac{13 \times 5 + 5 \times (-4)}{13+5} \right) \quad \therefore D\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\text{따라서 } a=-\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2} \text{이므로 } a+b=2$$

유형12 답 $y=-2x+\frac{3}{2}$

P(a, b)라고 하면 점 P가 직선 $y=-2x+1$ 위의 점이므로

$$b=-2a+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 Q는 $\overline{AP}$ 의 중점이므로

$$Q\left(\frac{a}{2}, \frac{b+2}{2} \right)$$

$$Q(x, y) \text{라고 하면 } x=\frac{a}{2}, y=\frac{b+2}{2} \text{이므로}$$

$$a=2x, b=2y-2$$

이것을 ①에 대입하면

$$2y-2=-2 \times 2x+1 \quad \therefore y=-2x+\frac{3}{2}$$

핵심 유형 완성하기

151~156쪽

001 답 ④

$$\overline{AB}=\sqrt{26} \text{이므로 } \sqrt{(3-a)^2+(2-a-a+1)^2}=\sqrt{26}$$

$$\sqrt{5a^2-18a+18}=\sqrt{26}$$

양변을 제곱하면

$$5a^2-18a+18=26, 5a^2-18a-8=0$$

$$(5a+2)(a-4)=0 \quad \therefore a=-\frac{2}{5} \text{ 또는 } a=4$$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

002 답 ⑤

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(a+1)^2}=\sqrt{2a^2+2}$$

$$\overline{CD}=\sqrt{2^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{AB}=2\overline{CD} \text{이므로 } \sqrt{2a^2+2}=4\sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2+2=32, a^2=15 \quad \therefore a=\pm\sqrt{15}$$

따라서 양수 a의 값은 $\sqrt{15}$ 이다.

003 답 ④

$$\overline{AB}=4 \text{이므로 } \sqrt{(b+2-a)^2+(b-a-2)^2}=4$$

$$\sqrt{2(a-b)^2+8}=4$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2(a-b)^2+8=16, (a-b)^2=4$$

따라서 두 점 (a, b)와 (b, a) 사이의 거리는

$$\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2(a-b)^2}=2\sqrt{2}$$

004 답 $10\sqrt{2}$

$$P(p, 0) \text{이라고 하면 } \overline{AP}=\overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2=\overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(p-2)^2+(-4)^2=(p-6)^2+(-8)^2, 8p=80 \quad \therefore p=10$$

$$\therefore P(10, 0)$$

$$Q(0, q) \text{라고 하면 } \overline{AQ}=\overline{BQ} \text{에서 } \overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2 \text{이므로}$$

$$(-2)^2+(q-4)^2=(-6)^2+(q-8)^2, 8q=80 \quad \therefore q=10$$

$$\therefore Q(0, 10)$$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-10)^2+10^2}=10\sqrt{2}$$

005 답 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

$$P(a, a+1) \text{이라고 하면 } \overline{AP}=\overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2=\overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a+2)^2+(a+1-2)^2=(a-3)^2+(a+1-1)^2$$

$$8a=4 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 점 P의 좌표는 } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \text{이다.}$$

006 답 4

$$\text{점 P가 삼각형 ABC의 외심이므로 } \overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$$\overline{AP}=\overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2=\overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1)^2+(b-2)^2=a^2+(b+1)^2 \quad \therefore a+3b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BP}=\overline{CP} \text{에서 } \overline{BP}^2=\overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2+(b+1)^2=(a-4)^2+(b-3)^2 \quad \therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a-b=4$$

007 답 4

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-7)^2 \quad \therefore a+3b=14$
 이때 $a+3b=14$ 를 만족하는 자연수 a, b 의 순서쌍은
 $(2, 4), (5, 3), (8, 2), (11, 1)$
 따라서 구하는 점 P의 개수는 4이다.

008 답 ③

$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$
 $\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$
 $\overline{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5}$
 따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

009 답 ④

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로
 $(1+1)^2 + (-1-1)^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2$
 $\therefore a^2 + b^2 - 2a + 2b - 6 = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 또 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (b+1)^2 = (-1-a)^2 + (1-b)^2 \quad \therefore a=b \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = -\sqrt{3}, b = -\sqrt{3}$ 또는 $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3} \quad \therefore ab=3$

010 답 9

삼각형 ABP가 $\overline{AB}$ 가 빗변인 직각삼각형이 되려면
 $\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 이어야 하므로
 $(7-2)^2 + (1-5)^2 = (p-2)^2 + (-5)^2 + (p-7)^2 + (-1)^2$
 $\therefore p^2 - 9p + 19 = 0$
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 p 의 값의 합은 9이다.

011 답 $5\sqrt{2}$

$A(-1, -3), B(4, 2), P(a, b)$ 라고 하면
 $\sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2} + \sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2}$
 $= \overline{AP} + \overline{BP}$
 $\geq \overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2 + (2+3)^2} = 5\sqrt{2}$
 따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

012 답 ③

$O(0, 0), A(-3, 4), P(x, y)$ 라고 하면
 $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \overline{OP} + \overline{AP}$
 $\geq \overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
 따라서 구하는 최솟값은 5이다.

013 답 ③

$Q(0, a)$ 라고 하면
 $\overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 = 1^2 + (a-2)^2 + (-3)^2 + (a+1)^2$
 $= 2a^2 - 2a + 15 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$
 따라서 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

014 답 P(2, 6)

$P(a, a+4)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$
 $= (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2$
 $= 4a^2 - 16a + 18$
 $= 4(a-2)^2 + 2$
 따라서 $a=2$ 일 때 최솟값은 2이므로 P(2, 6)이다.

015 답 20

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
 $= (a-1)^2 + (b-2)^2 + (a-2)^2 + (b-5)^2 + (a-3)^2 + (b+1)^2$
 $= 3a^2 - 12a + 3b^2 - 12b + 44$
 $= 3(a-2)^2 + 3(b-2)^2 + 20$
 따라서 $a=2, b=2$ 일 때 최솟값은 20이다.

016 답 (가) a (나) b (다) $y-b$ (라) y

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.
 $A(0, b), C(a, 0), D(a, b), P(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\}$
 $\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 = (x^2 + y^2) + \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}$
 $= \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\}$
 $\therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$

017 답 (가) D (나) $-2c$ (다) $a^2 + b^2 + 2c^2$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.
 $A(a, b), C(c, 0)$ 이라고 하면
 $B(-2c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = \{(-2c-a)^2 + (-b)^2\} + 2\{(c-a)^2 + (-b)^2\}$
 $= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2$
 $= 3(a^2 + b^2 + 2c^2)$
 $\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 = \{(-a)^2 + (-b)^2\} + 2(-c)^2$
 $= a^2 + b^2 + 2c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2)$

018 답 ⑤

$P\left(\frac{2 \times (-5) + 3 \times 5}{2+3}, \frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{2+3}\right) \quad \therefore P(1, 0)$
 $Q\left(\frac{2 \times (-5) - 3 \times 5}{2-3}, \frac{2 \times 3 - 3 \times (-2)}{2-3}\right) \quad \therefore Q(25, -12)$
 따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{1+25}{2}, \frac{0+(-12)}{2}\right) \quad \therefore (13, -6)$

019 답 ⑤

$$\frac{2 \times (-2) - 1 \times a}{2-1} = -8, \frac{2 \times b - 1 \times (-1)}{2-1} = 11 \text{이므로}$$

$$-4 - a = -8, 2b + 1 = 11 \quad \therefore a = 4, b = 5$$

$$\therefore a + b = 9$$

020 답 ⑤

점 C(a, b)는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times (-3)}{1+2}\right) \quad \therefore C\left(\frac{7}{3}, 0\right)$$

점 D(c, d)는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2+1}\right) \quad \therefore D\left(\frac{8}{3}, 3\right)$$

따라서 $a = \frac{7}{3}, b = 0, c = \frac{8}{3}, d = 3$ 이므로

$$ab + cd = 8$$

021 답 ④

$S_1 : S_2 = 9 : 4$, 즉 $\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 = 9 : 4$ 이므로 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$

따라서 점 P는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로

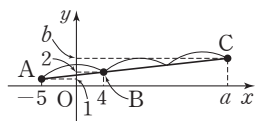
$$P\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}, \frac{3 \times 8 + 2 \times (-2)}{3+2}\right) \quad \therefore P(4, 4)$$

022 답 ⑤

$2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$

이때 $a > 0$ 이므로 오른쪽 그림과 같

이 점 C는 $\overline{AB}$ 를 3 : 2로 외분하는 점이다.



$$C\left(\frac{3 \times 4 - 2 \times (-5)}{3-2}, \frac{3 \times 2 - 2 \times 1}{3-2}\right)$$

$$\therefore C(22, 4)$$

따라서 $a = 22, b = 4$ 이므로 $a + b = 26$

다른 풀이 점 B는 $\overline{AC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\frac{1 \times a + 2 \times (-5)}{1+2} = 4, \frac{1 \times b + 2 \times 1}{1+2} = 2 \quad \therefore a = 22, b = 4$$

023 답 ②

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3m+n}{m+n}, \frac{-m+2n}{m+n}\right)$$

이 점이 점 (a, 0)이므로

$$\frac{-m+2n}{m+n} = 0 \quad \therefore m = 2n$$

$$\therefore a = \frac{3m+n}{m+n} = \frac{3 \times 2n + n}{2n + n} = \frac{7}{3}$$

024 답 ①

선분 AB를 1 : a로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4-3a}{1+a}, \frac{-2-3a}{1+a}\right)$$

이 점이 직선 $x - y - 2 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{4-3a}{1+a} - \frac{-2-3a}{1+a} - 2 = 0, 6 - 2(1+a) = 0$$

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

025 답 $\frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$

선분 AB를 $a : (1-a)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a \times 5 + (1-a) \times (-2)}{a + (1-a)}, \frac{a \times (-1) + (1-a) \times 5}{a + (1-a)}\right)$$

$$\therefore (7a-2, 5-6a)$$

이 점이 제1사분면 위의 점이므로

$$7a-2 > 0 \text{에서 } a > \frac{2}{7}, 5-6a > 0 \text{에서 } a < \frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$$

026 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+a-1-2b}{3}, \frac{4+b+1+a}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2b-4}{3}, \frac{a+b+5}{3}\right)$$

이 점이 점 (-3, 3)이므로

$$\frac{a-2b-4}{3} = -3, \frac{a+b+5}{3} = 3$$

$$a-2b = -5, a+b = 4 \quad \therefore a = 1, b = 3$$

$$\therefore ab = 3$$

027 답 ⑤

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+3+b}{3}, \frac{4+a+c}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{b+5}{3}, \frac{a+c+4}{3}\right)$$

이 점이 원점이므로

$$\frac{b+5}{3} = 0, \frac{a+c+4}{3} = 0 \quad \therefore a+c = -4, b = -5$$

$$\therefore a+b+c = -4-5 = -9$$

028 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+4+3}{3}\right) \quad \therefore (1, 3) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+3+5}{3}, \frac{-1+2+b}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+1}{3}\right) \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

⑦, ⑪이 일치하므로

$$\frac{a+8}{3} = 1, \frac{b+1}{3} = 3 \quad \therefore a = -5, b = 8$$

$$\therefore a+b = 3$$

029 답 ③

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-3}{2}\right) \quad \therefore \left(3, \frac{3}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

D(a, b)라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

⑦, ⑪이 일치하므로

$$3 = \frac{-1+a}{2}, \frac{3}{2} = \frac{3+b}{2} \quad \therefore a = 7, b = 0$$

$$\therefore D(7, 0)$$

030 ④ C(-4, 6), D(-2, -1)

C(a, b)라고 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

이 점이 점 (0, 3)이므로

$$\frac{4+a}{2}=0, \frac{b}{2}=3 \quad \therefore a=-4, b=6$$

D(c, d)라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{c+2}{2}, \frac{d+7}{2}\right)$

이 점이 점 (0, 3)이므로

$$\frac{c+2}{2}=0, \frac{d+7}{2}=3 \quad \therefore c=-2, d=-1$$

$\therefore C(-4, 6), D(-2, -1)$

031 ④

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$, 즉 $\left(4, \frac{-2+b}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{7+1}{2}, \frac{a+2}{2}\right)$, 즉 $\left(4, \frac{a+2}{2}\right)$

이 두 점이 일치하므로 $\frac{-2+b}{2}=\frac{a+2}{2} \quad \therefore b=a+4$

사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$ 이다.

$$(7-3)^2+(a+2)^2=(1-3)^2+(2+2)^2$$

$$a^2+4a=0, a(a+4)=0 \quad \therefore a=-4 \text{ 또는 } a=0$$

따라서 $a=-4, b=0$ 또는 $a=0, b=4$ 이므로 $|a+b|=4$

032 ②

주어진 평행사변형의 네 꼭짓점을 A, B, C, D라고 하면

(i) A(a, b), C(-3, -1)일 때

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1-1}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (0, 4)$

이 두 점이 일치하므로 $a=3, b=9 \quad \therefore ab=27$

(ii) A(a, b), C(-1, 5)일 때

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1-3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore (-1, 1)$

이 두 점이 일치하므로 $a=-1, b=-3 \quad \therefore ab=3$

(iii) A(a, b), C(1, 3)일 때

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) \quad \therefore (-2, 2)$

이 두 점이 일치하므로 $a=-5, b=1 \quad \therefore ab=-5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 ab의 값의 합은 $27+3-5=25$

033 ④ D(-1, $\frac{1}{3}$)

$$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(-1+5)^2}=5, \overline{AC}=\sqrt{(-7+1)^2+(3+5)^2}=10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 1:2로 내분하는 점이다.

$$D\left(\frac{1 \times (-7) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-1)}{1+2}\right) \quad \therefore D\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

034 ④

$$\overline{AB}=\sqrt{(14-2)^2+(8-3)^2}=13$$

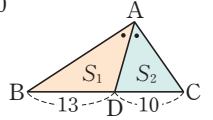
$$\overline{AC}=\sqrt{(-4-2)^2+(-5-3)^2}=10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}, \text{ 즉 } \overline{BD}:\overline{CD}=13:10$$

따라서 $S_1:S_2=\overline{BD}:\overline{CD}$ 에서

$$S_1:S_2=13:10 \text{ 이므로 } \frac{S_1}{S_2}=\frac{13}{10}$$



035 ①

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-5)^2}=5$$

$\overline{AC}=t$ ($t>0$)라고 하면 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 5:t로 내분하는 점이다.

$$D\left(\frac{5 \times 7 + t \times (-2)}{5+t}, \frac{5 \times a + t \times 1}{5+t}\right) \quad \therefore D\left(\frac{35-2t}{5+t}, \frac{5a+t}{5+t}\right)$$

이때 D(1, b)이므로 $\frac{35-2t}{5+t}=1, \frac{5a+t}{5+t}=b$

$$\frac{35-2t}{5+t}=1 \text{ 에서 } 35-2t=5+t \quad \therefore t=10$$

즉, $\overline{AC}=t=10$ 이므로 $\sqrt{(7-1)^2+(a-5)^2}=10$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-10a-39=0$

$$(a+3)(a-13)=0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=13$$

그런데 $a<0$ 이므로 $a=-3$

이때 $\frac{5a+t}{5+t}=b$ 에서 $a=-3, t=10$ 이므로

$$\frac{5 \times (-3) + 10}{5+10}=b \quad \therefore b=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab=-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)=1$$

036 ⑤

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-3)^2+(-8)^2}=10, \overline{AC}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 외각의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 2:1로 외분하는 점이다.

$$D\left(\frac{2 \times 0 - 1 \times (-3)}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times (-8)}{2-1}\right) \quad \therefore D(3, 16)$$

따라서 $a=3, b=16$ 이므로 $a+b=19$

037 ①

P(a, b)라고 하면 점 P가 직선 $y=-4x+2$ 위의 점이므로

$$b=-4a+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 Q는 $\overline{OP}$ 를 1:2로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{1 \times a + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2}\right) \quad \therefore Q\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

Q(x, y)라고 하면 $x=\frac{a}{3}, y=\frac{b}{3}$ 이므로 $a=3x, b=3y$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3y=-4 \times 3x+2, y=-4x+\frac{2}{3}$$

따라서 $m=-4, n=\frac{2}{3}$ 이므로 $m+n=-\frac{10}{3}$

038 답 $y=x+1$

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 P(x, y)라고 하면
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(x-1)^2+(y-4)^2=(x-3)^2+(y-2)^2$
 $x^2-2x+y^2-8y+17=x^2-6x+y^2-4y+13$
 $\therefore y=x+1$

핵심 유형 최종 점검하기 •

157~159쪽

1 답 ③

유형 01 두 점 사이의 거리

$\overline{AB}=\overline{BC}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로
 $(a-1-1)^2+(1-3)^2=(3-a+1)^2+(-3-1)^2$
 $a^2-4a+8=a^2-8a+32 \quad \therefore a=6$

2 답 ②

유형 02 같은 거리에 있는 점

P(p, 0)이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $p^2+2^2=(p+4)^2+(-2)^2, 8p=-16 \quad \therefore p=-2$
 $\therefore P(-2, 0)$
Q(0, q)라고 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$ 이므로
 $(q+2)^2=4^2+(q-2)^2, 8q=16 \quad \therefore q=2$
 $\therefore Q(0, 2)$
따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는 (-1, 1)이다.

3 답 ③

유형 02 같은 거리에 있는 점

P(a, a-2)라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+4)^2+(a-2)^2=(a-6)^2+(a-2+2)^2$
 $2a^2+4a+20=2a^2-12a+36, 16a=16 \quad \therefore a=1$
따라서 점 P의 좌표는 (1, -1)이다.

4 답 ②

유형 03 삼각형의 모양

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$
 $\overline{BC}=\sqrt{(-4)^2+(-3+1)^2}=2\sqrt{5}$
 $\overline{CA}=\sqrt{2^2+(1+3)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

5 답 ⑤

유형 03 삼각형의 모양

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$ 이므로
 $(3+1)^2+(-2-2)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$
 $\therefore (a+1)^2+(b-2)^2=32 \quad \dots\dots ㉠$
또 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 이므로
 $(a-3)^2+(b+2)^2=(-1-a)^2+(2-b)^2$
 $\therefore b=a-1 \quad \dots\dots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2-2a-11=0 \quad \therefore a=1\pm 2\sqrt{3}$
이때 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0, b>0$
따라서 $a=1+2\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}$ 이므로
 $a+b=1+4\sqrt{3}$

6 답 ②

유형 04 두 점 사이의 거리를 이용하여 식의 최솟값 구하기

A(1, -2), B(5, 2), P(a, b)라고 하면
 $\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}+\sqrt{(a-5)^2+(b-2)^2}$
 $=\overline{AP}+\overline{BP}$
 $\geq \overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$
따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

7 답 ③

유형 05 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$
 $=a^2+(b-1)^2+(a-1)^2+(b-2)^2+(a-2)^2+b^2$
 $=3a^2-6a+3b^2-6b+10$
 $=3(a-1)^2+3(b-1)^2+4$
따라서 $a=1, b=1$ 일 때 최솟값은 4이다.

8 답 (가) $2a$ (나) $2\sqrt{3}a$ (다) 정삼각형

유형 06 좌표를 이용한 도형의 성질

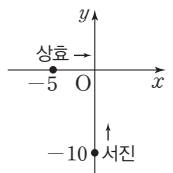
점 B(6a, 0)이라고 하면 C(2a, 0), D(4a, 0)이고 점 E의 y좌표는 정삼각형 ADE의 높이이므로
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4a=2\sqrt{3}a \quad \therefore E(2a, 2\sqrt{3}a)$
또 점 F의 y좌표는 정삼각형 DBF의 높이이므로
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a=\sqrt{3}a \quad \therefore F(5a, \sqrt{3}a)$
이때 $\overline{EC}, \overline{CF}, \overline{FE}$ 의 길이를 각각 구하면
 $\overline{EC}=2\sqrt{3}a$
 $\overline{CF}=\sqrt{(5a-2a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=2\sqrt{3}a$
 $\overline{FE}=\sqrt{(2a-5a)^2+(2\sqrt{3}a-\sqrt{3}a)^2}=2\sqrt{3}a$
따라서 삼각형 ECF는 정삼각형이다.

9 답 ③

유형 06 좌표를 이용한 도형의 성질

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 도로를 각각 x축, y축으로, 지점 O를 원점으로 잡으면 t시간 후 상효의 위치는 $(-5+4t, 0)$, 서진이의 위치는 $(0, -10+3t)$ 이다.
즉, 두 사람 사이의 거리는
 $\sqrt{(5-4t)^2+(-10+3t)^2}=\sqrt{25t^2-100t+125}$
 $=\sqrt{25(t-2)^2+25} \text{ (km)}$

두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 $t=2$ 일 때, 즉 2시간 후이고 그때의 거리는 5 km이다.
따라서 $a=2, d=5$ 이므로 $a+d=7$



10 답 ④

유형 07 선분의 내분점과 외분점

$$P\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}\right) \quad \therefore P(1, 3)$$

$$Q\left(\frac{2 \times (-1) - 1 \times 5}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2-1}\right) \quad \therefore Q(-7, 7)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(-7-1)^2 + (7-3)^2} = 4\sqrt{5}$$

11 답 ①

유형 08 선분의 내분점과 외분점의 활용

선분 AB를 3 : b로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-12) + b \times 4}{3+b}, \frac{3 \times a + b \times (-8)}{3+b}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{-36+4b}{3+b}, \frac{3a-8b}{3+b}\right)$$

이 점이 점 (-2, 1)이므로

$$\frac{-36+4b}{3+b} = -2, \quad \frac{3a-8b}{3+b} = 1 \quad \therefore a=16, b=5$$

$$\therefore a+b=21$$

12 답 3

유형 08 선분의 내분점과 외분점의 활용

선분 AB를 a : (a+1)로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a \times (-1) - (a+1) \times 2}{a-(a+1)}, \frac{a \times 4 - (a+1) \times 3}{a-(a+1)}\right)$$

$$\therefore (3a+2, -a+3)$$

이 점이 x축 위의 점이므로

$$-a+3=0 \quad \therefore a=3$$

13 답 $\sqrt{53}$

유형 08 선분의 내분점과 외분점의 활용

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때 점 P는 $\overline{AB}$ 위의 점이다.

이때 점 $Q\left(\frac{3a+1}{4}, \frac{3b+1}{4}\right)$ 는 선분 AP를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 P가 점 B의 위치에 있을 때 선분 OQ의 길이는 최대가 된다.

즉, P(9, -3)일 때 a=9, b=-3이고 Q(7, -2)이므로

$$OQ = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$$

14 답 ②

유형 09 삼각형의 무게중심

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+a+1}{3}, \frac{0+b+3}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+3}{3}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 OCD의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+(-3)+6}{3}, \frac{0+(-1)+4}{3}\right)$$

$$\therefore (1, 1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②이 일치하므로

$$\frac{a+1}{3} = 1, \quad \frac{b+3}{3} = 1 \quad \therefore a=2, b=0$$

$$\therefore a+b=2$$

15 답 ④

유형 10 평행사변형의 성질의 활용

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) \quad \therefore (2, 2)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$

이 두 점이 일치하므로

$$2 = \frac{2+a}{2}, \quad 2 = \frac{-3+b}{2} \quad \therefore a=2, b=7$$

$$\therefore ab=14$$

16 답 ③

유형 10 평행사변형의 성질의 활용

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+4}{2}, 2\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+b}{2}, \frac{5-1}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{b+1}{2}, 2\right)$

이 두 점이 일치하므로

$$\frac{a+4}{2} = \frac{1+b}{2} \quad \therefore b=a+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이다.

$$(1-4)^2 + (5-2)^2 = (a-1)^2 + (2-5)^2$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0, \quad (a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 4$$

그런데 a=4이면 점 A와 점 C가 일치하므로 a=-2

a=-2를 ①에 대입하면 b=1

$$\therefore a+2b=0$$

17 답 ⑤

유형 11 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-7-1)^2} = 10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$$D\left(\frac{1 \times (-3) + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-7) + 2 \times (-3)}{1+2}\right)$$

$$\therefore D\left(-1, -\frac{13}{3}\right)$$

따라서 a=-1, b=- $\frac{13}{3}$ 이므로 a+b=- $\frac{16}{3}$

18 답 ①

유형 12 점이 나타내는 도형의 방정식

P(a, b)라고 하면 점 P가 직선 y=-2x+3 위의 점이므로

$$b = -2a + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 Q는 $\overline{AP}$ 를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$$\left(\frac{3 \times a - 2 \times (-1)}{3-2}, \frac{3 \times b - 2 \times 0}{3-2}\right) \quad \therefore (3a+2, 3b)$$

Q(x, y)라고 하면 x=3a+2, y=3b이므로

$$a = \frac{x-2}{3}, \quad b = \frac{y}{3}$$

이것을 ①에 대입하면

$$\frac{y}{3} = -2 \times \frac{x-2}{3} + 3 \quad \therefore y = -2x + 13$$

따라서 m=-2, n=13이므로 m+n=11

10 직선의 방정식

핵심
유형

유형01 ③	유형02 ①	유형03 ①
유형04 ④	유형05 ③	유형06 ③
유형07 ④	유형08 ②	유형09 ①
유형10 ④	유형11 ⑤	유형12 3
유형13 $\frac{7}{2}$	유형14 4	유형15 ②
유형16 ④	유형17 $x+3y-2=0$ 또는 $3x-y+4=0$	

핵심
유형

완성하기

001 ⑤	002 ④	003 ⑤	004 ①	005 ②
006 $y=2x-8$	007 2	008 -12	009 ⑤	
010 $\frac{x}{2}+y=1$	011 8	012 ③	013 ⑤	
014 ②	015 ③	016 ④	017 ③	018 -3
019 ④	020 ②	021 ④	022 ⑤	023 ⑤
024 ②	025 ⑤	026 $\frac{1}{4} < m < 2$	027 ④	
028 4	029 $-3 < m < -\frac{1}{2}$	030 ②	031 ①	
032 ④	033 ⑤	034 ④	035 ⑤	036 ⑤
037 ④	038 ③	039 ⑤	040 ④	041 ①
042 ①	043 ①	044 ②	045 ③	046 3
047 ②	048 2	049 ②	050 ①	051 ④
052 ②	053 ①	054 ①	055 ④	056 ③
057 ④	058 ③	059 ③	060 6	061 7
062 ①	063 ③	064 $5x+y-9=0$		

핵심
유형

최종 점검하기

1 ①	2 ①	3 ②	4 ⑤
5 $y=3x+5$	6 6	7 $y=2x-1$	
8 ③	9 ③	10 ②	11 $x-5y+9=0$
12 ②	13 $x+4y-5=0$	14 ①	15 0
16 ②	17 ⑤	18 2	19 ①
20 ①			
21 ⑤			

핵심 유형 162~164쪽

유형01 답 ③

두 점 $(-1, 3)$, $(5, -1)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \therefore (2, 1)$$

따라서 점 $(2, 1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-1=-(x-2) \therefore y=-x+3$$

유형02 답 ①

두 점 $(3, -2)$, $(1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{-1+2}{1-3}(x-3) \therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

또 직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 이 점 $(b, \frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2} \therefore b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

유형03 답 ①

x 절편이 3이고 y 절편이 -6 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1 \therefore \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=1$$

이 직선이 점 $(a, -4)$ 를 지나므로

$$\frac{a}{3}-\frac{-4}{6}=1, \frac{a}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$\therefore a=1$$

유형04 답 ④

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

$$\frac{-k+1}{2-1}=\frac{-9+1}{(k-2)-1}, -k+1=\frac{-8}{k-3}$$

$$k^2-4k-5=0, (k+1)(k-5)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 모든 k 의 값의 합은 $-1+5=4$

유형05 답 ③

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$ 의

중점을 지나야 하므로 $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표를 구하면

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) \therefore (3, -3)$$

따라서 점 A(2, 2)와 점 $(3, -3)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-3-2}{3-2}=-5$$

유형06 답 ③

$ab>0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \dots\dots ㉠$$

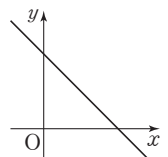
$ab>0$ 에서 $-\frac{a}{b}<0$ 이므로 직선 ㉠의 기울기는 음수이다.

또 $bc<0$ 에서 $-\frac{c}{b}>0$ 이므로 직선 ㉠의 y 절편

은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽

그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



유형07 답 ④

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(3x+y+6)+k(x+y-2)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$$3x+y+6=0, x+y-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4, y=6$

따라서 항상 점 $(-4, 6)$ 을 지나므로

$$a=-4, b=6$$

$$\therefore a^2+b^2=16+36=52$$

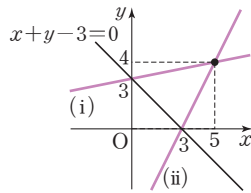
유형08 답 ②

$mx-y-5m+4=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-5)-(y-4)=0 \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 4)$ 를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때

$$-5m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{5}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$-2m+4=0 \quad \therefore m=2$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m 의 값의 범위는

$$\frac{1}{5} < m < 2$$

$$\text{따라서 } \alpha=\frac{1}{5}, \beta=2 \text{이므로 } \alpha\beta=\frac{2}{5}$$

유형09 답 ①

두 직선 $x+2y+4=0, 2x-3y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x+2y+4+k(2x-3y-5)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$8-4k=0 \quad \therefore k=2$$

$k=2$ 를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$5x-4y-6=0$$

따라서 $a=5, b=-4$ 이므로 $a+b=1$

핵심 유형 완성하기 165~169쪽

001 답 ⑤

선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times 7 + 1 \times 3}{3+1} \right) \quad \therefore (-2, 6)$$

점 $(-2, 6)$ 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y-6=-2(x+2) \quad \therefore y=-2x+2$$

따라서 이 직선의 y 절편은 2이다.

002 답 ④

구하는 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

따라서 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 점 $(2, -\sqrt{3})$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-2) \quad \therefore y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$

003 답 ⑤

$$2x-3y+5=0 \text{에서 } y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

즉, 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이고 점 $(-3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2}{3}(x+3) \quad \therefore 2x-3y+12=0$$

따라서 $a=2, b=-3$ 이므로 $a-b=5$

004 답 ①

두 점 $(-3, 5), (1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-3-5}{1+3}(x+3) \quad \therefore y=-2x-1$$

직선 $y=-2x-1$ 이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1=-2a-1 \quad \therefore a=-1$$

또 직선 $y=-2x-1$ 이 점 $(-2, b)$ 를 지나므로

$$b=4-1=3$$

$$\therefore ab=-3$$

005 답 ②

두 점 $(1, -3), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{1+3}{2-1}(x-1) \quad \therefore y=4x-7$$

따라서 $a=4, b=-7$ 이므로 $a-b=11$

006 답 $y=2x-8$

선분 AB를 3:2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 - 2 \times (-1)}{3-2}, \frac{3 \times 6 - 2 \times 2}{3-2} \right) \quad \therefore (11, 14)$$

따라서 두 점 $(11, 14), (1, -6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-14=\frac{-6-14}{1-11}(x-11) \quad \therefore y=2x-8$$

007 답 2

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+2+4}{3}, \frac{-2+4+7}{3} \right) \quad \therefore (1, 3)$$

두 점 $(1, 3), (-2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-3}{-2-1}(x-1) \quad \therefore y=x+2$$

따라서 이 직선의 y 절편은 2이다.

008 답 -12

x 절편이 -2 이고 y 절편이 -4 인 직선의 방정식은

$$-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$$

이 직선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$-\frac{4}{2}-\frac{a}{4}=1 \quad \therefore a=-12$$

009 답 ⑤

직선 $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ 의 x 절편이 3이므로 A(3, 0)

직선 $-\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ 의 y 절편이 4이므로 B(0, 4)

따라서 직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

010 답 $\frac{x}{2} + y = 1$

y 절편을 a 라고 하면 x 절편은 $2a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} = 1$$

이 직선이 점 (4, -1)을 지나므로

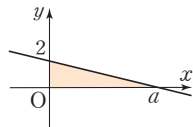
$$\frac{4}{2a} + \frac{-1}{a} = 1 \quad \therefore a = 1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2} + y = 1$

011 답 8

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1$ 의 x 절편은 a 이고 y 절편은 2이다. 이때 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times 2 = 8 \quad \therefore a = 8$$



012 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AC의 기울기) = (직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$$\frac{1+k}{2-1} = \frac{1-3}{2-(2k+1)}, k+1 = \frac{2}{2k-1}$$

$$2k^2 + k - 3 = 0, (2k+3)(k-1) = 0 \quad \therefore k = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 k 의 값의 합은 $-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$

013 답 ⑤

세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(k+1, 2k-1)이 한 직선 위에 있으므로

(직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기)

$$\frac{4-1}{2-1} = \frac{(2k-1)-4}{(k+1)-2}, 3 = \frac{2k-5}{k-1} \quad \therefore k = -2$$

따라서 C(-1, -5)이므로 두 점 A, C 사이의 거리는

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

014 답 ②

세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 하므로

(직선 AC의 기울기) = (직선 BC의 기울기)

$$\frac{-2+6}{3-(k-4)} = \frac{-2+k}{3-2}, \frac{4}{-k+7} = k-2$$

$$k^2 - 9k + 18 = 0, (k-3)(k-6) = 0$$

$$\therefore k = 3 \text{ 또는 } k = 6$$

그런데 $k=6$ 이면 두 점 A, B가 일치하므로 $k=3$

015 답 ③

구하는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 하므로 $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표를

$$\text{구하면 } \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-5-3}{2} \right) \quad \therefore (2, -4)$$

따라서 점 A(3, 3)과 점 (2, -4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-4-3}{2-3}(x-3) \quad \therefore y = 7x - 18$$

016 답 ④

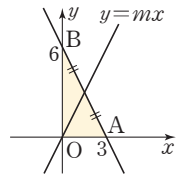
직선 $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ 의 x 절편은 3이고 y 절편은 6이

다. 오른쪽 그림과 같이 A(3, 0), B(0, 6)이

라고 하면 직선 $y = mx$ 는 $\overline{AB}$ 의 중점 $\left(\frac{3}{2}, 3 \right)$

을 지나므로

$$3 = m \times \frac{3}{2} \quad \therefore m = 2$$



017 답 ③

주어진 마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점 (3, 2)를 지난다.

두 점 (0, -2), (3, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2 = \frac{2+2}{3-0}x \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - 2$$

이때 $y=0$ 을 대입하면 $x = \frac{3}{2}$

따라서 구하는 x 절편은 $\frac{3}{2}$ 이다.

018 답 -3

두 사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

직사각형 OCBA의 두 대각선의 교점은 두 점 O(0, 0), B(-2, 6)

을 이은 선분의 중점이므로 $\left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2} \right) \quad \therefore (-1, 3)$

또 정사각형 OFED의 두 대각선의 교점은 두 점 O(0, 0), E(4, 4)

를 이은 선분의 중점이므로 $\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2} \right) \quad \therefore (2, 2)$

따라서 두 점 (-1, 3), (2, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{2-3}{2+1}(x+1) \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

따라서 $m = -\frac{1}{3}, n = \frac{8}{3}$ 이므로 $m-n = -3$

019 답 ④

$\frac{b}{a} < 0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로 주어진 식을 변형하면

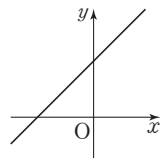
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \dots\dots ㉠$$

$\frac{b}{a} < 0$ 에서 $-\frac{a}{b} > 0$ 이므로 직선 ㉠의 기울기는 양수이다.

또 $\frac{c}{b} < 0$ 에서 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선 ㉠의 y 절편

은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

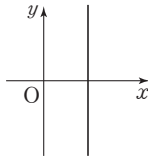


020 답 ②

$ab=0$, $ac<0$ 에서 $b=0$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$x = -\frac{c}{a}$$

$ac<0$ 에서 $-\frac{c}{a}>0$ 이므로 이 직선은 오른쪽 그림과 같이 y 축에 평행한 직선이고, 제1, 4사분면을 지난다.



021 답 ④

$ab>0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \dots\dots ①$$

$ab>0$ 에서 $-\frac{a}{b}<0$ 이므로 직선 ①의 기울기는 음수이다.

또 $bc>0$ 에서 $-\frac{c}{b}<0$ 이므로 직선 ①의 y 절편은 음수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 ④이다.

022 답 ⑤

주어진 그림에서 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

주어진 직선의 기울기가 음수이고 y 절편이 양수이므로

$$-\frac{a}{b}<0, -\frac{c}{b}>0$$

$$\therefore ab>0, bc<0$$

즉, $a>0, b>0, c<0$ 또는 $a<0, b<0, c>0$ 이므로 $ac<0$ 한편 $cx+ay+b=0$ 에서

$$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a} \quad \dots\dots ②$$

$ac<0$ 에서 $-\frac{c}{a}>0$ 이므로 직선 ②의 기울기는 양수이다.

또 $ab>0$ 에서 $-\frac{b}{a}<0$ 이므로 직선 ②의 y 절편은 음수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$ 의 개형은 ⑤이다.

023 답 ⑤

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(3x-y-5)+k(x+2y-11)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$$3x-y-5=0, x+2y-11=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=4$

따라서 항상 점 $(3, 4)$ 를 지나므로 $a=3, b=4$

$$\therefore a+b=7$$

024 답 ②

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-y+a)+k(x+2y+3)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$$x-y+a=0, x+2y+3=0$$

이때 점 $(3, b)$ 는 이 두 직선의 교점이므로

$$3-b+a=0, 3+2b+3=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-6, b=-3$$

$$\therefore a+b=-9$$

025 답 ⑤

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-y+4)+k(x+3y-4)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$$x-y+4=0, x+3y-4=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2, y=2$

$$\therefore P(-2, 2)$$

따라서 점 $P(-2, 2)$ 와 점 $(0, 8)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{8-2}{2}(x+2) \quad \therefore y=3x+8$$

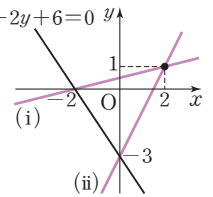
026 답 $\frac{1}{4}<m<2$

$mx-y-2m+1=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-2)-(y-1)=0 \quad \dots\dots ①$$

이므로 직선 ①은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제3사분면에서 만나도록 직선 ①을 움직여 보면



(i) 직선 ①이 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때

$$-4m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$$

(ii) 직선 ①이 점 $(0, -3)$ 을 지날 때

$$-2m+4=0 \quad \therefore m=2$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4}<m<2$$

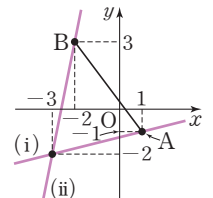
027 답 ④

$kx-y+3k-2=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+3)-(y+2)=0 \quad \dots\dots ①$$

이므로 직선 ①은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -2)$ 를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ①이 선분 AB와 한 점에서 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ①이 점 $A(1, -1)$ 을 지날 때

$$4k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$$

(ii) 직선 ①이 점 $B(-2, 3)$ 을 지날 때

$$k-5=0 \quad \therefore k=5$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq k \leq 5$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

028 답 4

$y=kx+2k-2$ 를 k 에 대하여 정리하면

$$y=k(x+2)-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -2)$ 를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 이 주어진

정사각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지날 때

$$4=2k-2 \quad \therefore k=3$$

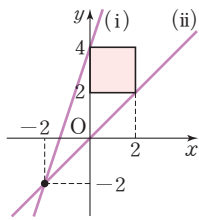
(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 2)$ 를 지날 때

$$2=4k-2 \quad \therefore k=1$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는 $1 \leq k \leq 3$

따라서 $M=3, m=1$ 이므로

$$M+m=4$$



029 답 $-3 < m < -\frac{1}{2}$

$mx-y-3m+2=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-3)-(y-2)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 2)$ 를 지난다.

이때 직선 $\textcircled{1}$ 이 삼각형 ABC와 만나

지 않으려면 직선 $\textcircled{1}$ 은 오른쪽 그림의
색칠한 부분에 있어야 하므로

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 A(1, 3)을 지날 때

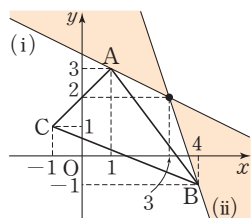
$$-2m-1=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 B(4, -1)을 지날 때

$$m+3=0 \quad \therefore m=-3$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m 의 값의 범위는

$$-3 < m < -\frac{1}{2}$$



030 답 ②

두 직선 $3x-2y-2=0, x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 직선의
방정식은

$$3x-2y-2+k(x-y+1)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$3+3k=0 \quad \therefore k=-1$$

$k=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $2x-y-3=0$

이때 $x=0$ 을 대입하면 $y=-3$

따라서 구하는 y 절편은 -3 이다.

031 답 ①

두 직선 $2x-y+4=0, x+4y-3=0$ 의 교점을 지나는 직선의
방정식은

$$2x-y+4+k(x+4y-3)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$8+8k=0 \quad \therefore k=-1$$

$k=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $x-5y+7=0$

따라서 이 직선 위의 점은 ① $(-2, 1)$ 이다.

032 답 ④

직선 $3x-y+3=0$ 의 x 절편은 -1 이므로 A(-1, 0)

직선 $x+y-7=0$ 의 x 절편은 7이므로 B(7, 0)

두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{0}{2}\right) \quad \therefore (3, 0)$$

이때 점 C를 지나는 직선의 방정식은

$$3x-y+3+k(x+y-7)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 $\overline{AB}$ 의 중점 (3, 0)을 지날 때, 삼각형 ABC의 넓이를

이등분하므로 $12-4k=0 \quad \therefore k=3$

$k=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $3x+y-9=0$

따라서 $a=3, b=1$ 이므로 $a^2+b^2=9+1=10$

핵심 유형 170~171쪽

유형10 답 ④

두 직선이 평행하려면

$$\frac{k-1}{k}=\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{3}, \quad -k+1=2k$$

$$\therefore k=\frac{1}{3} \quad \therefore p=\frac{1}{3}$$

또 두 직선이 수직이 되려면

$$k(k-1)+2 \times (-1)=0, \quad k^2-k-2=0$$

$$(k+1)(k-2)=0 \quad \therefore k=-1 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $q>0$ 이므로 $q=2$

$$\therefore p+q=\frac{7}{3}$$

유형11 답 ⑤

두 점 $(-1, 3), (3, 6)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{6-3}{3+1}=\frac{3}{4}$

이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.

즉, 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 이고 점 $(3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{4}{3}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{4}{3}x+6$$

따라서 이 직선 위의 점은 ⑤ $(6, -2)$ 이다.

유형12 답 3

두 점 A(2, 1), B(4, -3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-3-1}{4-2}=-2 \text{이므로 } \overline{AB} \text{를 수직이등분하는 직선의 기울기는}$$

$$\frac{1}{2} \text{이다.}$$

또 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-3}{2}\right) \quad \therefore (3, -1)$$

즉, 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore x-2y-5=0$$

따라서 $a=-2, b=-5$ 이므로 $a-b=-2+5=3$

유형 13 답 7/2

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x+y=0$, $ax+y+2=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1} \neq \frac{0}{2} \quad \therefore a=1$$

(ii) 두 직선 $x-2y+3=0$, $ax+y+2=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{2} \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

$$x+y=0, x-2y+3=0 \text{을 연립하여 풀면 } x=-1, y=1$$

직선 $ax+y+2=0$ 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$-a+1+2=0 \quad \therefore a=3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{7}{2}$$

유형 14 답 4

점 $(3, 2)$ 와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4 \times 3 - 3 \times 2 + k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2, \quad \frac{|k+6|}{5} = 2$$

$$|k+6| = 10, \quad k+6 = \pm 10$$

$$\therefore k = -16 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k=4$

유형 15 답 2

두 직선 $x+2y+3=0$, $x+2y-7=0$ 이 평행하므로 두 직선 사이

의 거리는 직선 $x+2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$ 과 직선

$x+2y-7=0$ 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \frac{|-3-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5}$$

유형 16 답 4

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{2}{3-1}(x-1) \quad \therefore x-y-1=0$$

점 C(2, 5)와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|2-5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

유형 17 답 $x+3y-2=0$ 또는 $3x-y+4=0$

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+y+1=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x-2y+3| = |2x+y+1|, \quad x-2y+3 = \pm(2x+y+1)$$

$$\therefore x+3y-2=0 \text{ 또는 } 3x-y+4=0$$

033 답 5

두 직선이 평행하려면

$$\frac{3}{2} = \frac{k+3}{k-4} \neq \frac{-5}{1}, \quad 3k-12=2k+6$$

$$\therefore k=18 \quad \therefore a=18$$

또 두 직선이 수직이 되려면

$$3 \times 2 + (k+3)(k-4) = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0, \quad (k+2)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta = 3$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{18}{3} = 6$$

034 답 4

직선 $y=ax+4$ 가 직선 $y=\frac{1}{3}x-2$ 와 수직이므로

$$a \times \frac{1}{3} = -1 \quad \therefore a = -3$$

또 직선 $y=ax+4$ 가 직선 $y=(4-b)x-2$ 와 평행하므로

$$a=4-b, \quad -3=4-b \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=4$$

035 답 5

두 직선의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선이 평행해야 하므로

$$\frac{k}{3} = \frac{2}{k-1} \neq \frac{-3}{1}, \quad k(k-1)=6, \quad k \neq -9, \quad k \neq \frac{1}{3}$$

$$k(k-1)=6 \text{에서 } k^2-k-6=0, \quad (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-2+3=1$

036 답 5

직선 $ax-2y+1=0$ 이 직선 $bx-3y+2=0$ 과 수직이므로

$$ab + (-2) \times (-3) = 0 \quad \therefore ab = -6$$

또 직선 $ax-2y+1=0$ 이 직선 $(b+2)x+2y+4=0$ 과 평행하므로

$$\frac{a}{b+2} = \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{4}$$

$$a = -b-2 \quad \therefore a+b = -2$$

$$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4 + 12 = 16$$

037 답 4

두 직선이 수직이므로

$$a+a(a+1)=0, \quad a^2+2a=0$$

$$a(a+2)=0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a = -2$

따라서 두 직선은 $x-y+2=0$, $-2x-2y+b=0$ 이고, 두 직선의

교점의 좌표가 $(1, c)$ 이므로

$$1-c+2=0, \quad -2-2c+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $b=8$, $c=3$

$$\therefore a+b+c=9$$

038 답 ③

두 점 A(1, 2), B(4, 8)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{8-2}{4-1}=2$

이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 8 + 1 \times 2}{2+1}\right) \quad \therefore (3, 6)$$

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 (3, 6)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$$

이때 $y=0$ 을 대입하면 $x=15$

따라서 구하는 x 절편은 15이다.

039 답 ⑤

두 점 (-2, -3), (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{1+3}{2+2}(x+2) \quad \therefore y=x-1$$

이 직선에 평행한 직선의 기울기는 1이므로 기울기가 1이고 점 (-3, 0)을 지나는 직선의 방정식은 $y=x+3$

이 직선이 점 (2, k)를 지나므로

$$k=2+3=5$$

040 답 ④

두 직선 $2x+3y+1=0$, $x+5y-7=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x+3y+1+k(x+5y-7)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수})$$

$$\therefore (k+2)x+(5k+3)y-7k+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①과 직선 $2x-y+3=0$ 이 수직이므로

$$2 \times (k+2) + (-1) \times (5k+3) = 0$$

$$-3k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

$k=\frac{1}{3}$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{7}{3}x+\frac{14}{3}y-\frac{4}{3}=0 \quad \therefore 7x+14y-4=0$$

041 답 ①

원점에서 직선 $y=2x+4$ 에 내린 수선의 발은 원점을 지나고 직선 $y=2x+4$ 에 수직인 직선과 직선 $y=2x+4$ 의 교점과 같다.

직선 $y=2x+4$ 의 기울기는 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x$

직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 와 직선 $y=2x+4$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$-\frac{1}{2}x=2x+4, \frac{5}{2}x=-4 \quad \therefore x=-\frac{8}{5}, y=\frac{4}{5}$$

따라서 수선의 발의 좌표는 $(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$ 이므로

$$a=-\frac{8}{5}, b=\frac{4}{5} \quad \therefore a+b=-\frac{4}{5}$$

042 답 ①

두 점 A(-1, 2), B(5, 4)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-2}{5+1}=\frac{1}{3}$$

이므로 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하는 직선의 기울기는 -3이다.

또 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore (2, 3)$$

즉, 기울기가 -3이고 점 (2, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-3(x-2) \quad \therefore y=-3x+9$$

따라서 이 직선이 점 (a, 6)을 지나므로

$$6=-3a+9 \quad \therefore a=1$$

043 답 ①

$2x+y-4=0$ 에서 $y=-2x+4$ 이므로 구하는 수직이등분선의

기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또 직선 $2x+y-4=0$ 이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각 A(2, 0), B(0, 4)이므로 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) \quad \therefore (1, 2)$$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 (1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore x-2y+3=0$$

044 답 ②

직선 AB와 직선 $y=-2x+b$ 가 수직이므로

$$\frac{a-3}{5-1} \times (-2) = -1, a-3=2 \quad \therefore a=5$$

이때 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (3, 4)$$

따라서 직선 $y=-2x+b$ 는 점 (3, 4)를 지나므로

$$4=-6+b \quad \therefore b=10$$

$$\therefore a+b=15$$

045 답 ③

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $2x-y=0$, $ax-y+4=0$ 이 평행할 때

$$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{4} \quad \therefore a=2$$

(ii) 두 직선 $x+y-2=0$, $ax-y+4=0$ 이 평행할 때

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{4} \quad \therefore a=-1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

$$2x-y=0, x+y-2=0 \text{을 연립하여 풀면 } x=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}$$

직선 $ax-y+4=0$ 이 점 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 를 지나야 하므로

$$\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}+4=0 \quad \therefore a=-4$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2+(-1)+(-4)=-3$$

046 답 3

$2x+y+5=0$, $x-y+4=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=1$$

따라서 직선 $kx+2y+7=0$ 이 두 직선 $2x+y+5=0$,

$x-y+4=0$ 의 교점 $(-3, 1)$ 을 지나야 하므로

$$-3k+2+7=0 \quad \therefore k=3$$

047 답 ②

주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $3x+y-6=0$, $ax+2y+1=0$ 이 평행할 때

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{2} \neq \frac{-6}{1} \quad \therefore a=6$$

(ii) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax+2y+1=0$ 이 평행할 때

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{1} \quad \therefore a=-4$$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은

$$6+(-4)=2$$

048 답 2

$$3x+2y=0 \text{에서 } y=-\frac{3}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x+2y-4=0 \text{에서 } y=-\frac{1}{2}x+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$ax-y+2=0 \text{에서 } y=ax+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

이때 직선 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기가 각각 $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, a 이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직일 때

$$-\frac{3}{2} \times a = -1 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직일 때

$$-\frac{1}{2} \times a = -1 \quad \therefore a = 2$$

(i), (ii)에 의하여 정수 a 의 값은 2이다.

049 답 ②

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $8x+6y-k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|-16+18-k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=1, \frac{|2-k|}{10}=1$$

$$|k-2|=10, k-2=\pm 10$$

$$\therefore k=-8 \text{ 또는 } k=12$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-8+12=4$

050 답 ①

두 점 $(1, -1)$, $(3, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{5+1}{3-1}(x-1) \quad \therefore 3x-y-4=0$$

따라서 점 $(2, 3)$ 과 직선 $3x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-3-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

051 답 ④

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-2y+3)+k(x+2y)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-2y+3=0, x+2y=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-1, y=\frac{1}{2} \quad \therefore P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 점 $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 과 직선 $3x+4y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3+2-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

052 답 ②

$P(a, 0)$ 이라고 하면 점 P 에서 두 직선

$2x-y+3=0$, $x-2y-6=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2a+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$|2a+3|=|a-6|, 2a+3=\pm(a-6)$$

$$\therefore a=-9 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(-9, 0)$ 또는 $(1, 0)$ 이다.

053 답 ①

$$4x-2y+7=0 \text{에서 } y=2x+\frac{7}{2}$$

이 직선에 평행한 직선의 방정식을

$$y=2x+k \left(k \neq \frac{7}{2}\right)$$

라고 하면 원점과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$|k|=5 \quad \therefore k=\pm 5$$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$$2x-y+5=0 \text{ 또는 } 2x-y-5=0$$

따라서 $a=-1$, $b=-5$ 이므로 $a+b=-6$

054 답 ①

$$f(k)=\frac{|2k+6-2k-4|}{\sqrt{k^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{k^2+4}}$$

따라서 $\sqrt{k^2+4}$ 가 최소일 때, $f(k)$ 의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(0)=1$

055 답 ④

두 직선이 평행하므로

$$\frac{k}{2}=\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{3} \quad \therefore k=2$$

즉, 두 직선의 방정식은

$$2x+y-2=0, 2x+y+3=0$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-2=0$ 위의 한 점

$(1, 0)$ 과 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

056 답 ③

두 직선 $7x+y=0$, $7x+y+a=0$ 이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $7x+y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$ 과 직선 $7x+y+a=0$ 사이의 거리와 같고, 이 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{7^2+1^2}}=3\sqrt{2}, \frac{|a|}{5\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$$|a|=30 \quad \therefore a=-30 \text{ 또는 } a=30$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=30$

057 답 ④

두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{1} \neq \frac{4}{-2} \quad \therefore k=1$$

즉, 두 직선의 방정식은

$$x+y+4=0, x+y-2=0$$

이때 정사각형의 한 변의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같고, 이는 직선 $x+y-2=0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 과 직선 $x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$$(3\sqrt{2})^2=18$$

058 답 ③

직선 $x+2y-4=0$ 의 x 절편은 4이고, y 절편은 2이므로

$$A(4, 0), B(0, 2)$$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

점 $C(3, 4)$ 와 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|3+8-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = 7$$

059 답 ③

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \quad \therefore x+y-2=0$$

점 $C(3, a)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|3+a-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$

$$=|a+1|=6$$

$$a+1=\pm 6$$

$$\therefore a=-7 \text{ 또는 } a=5$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=5$

060 답 6

직선 OA와 직선 $2x-3y+12=0$ 은 기울기가 $\frac{2}{3}$ 로 평행하므로 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$ 를 밑변으로 하면 원점과 직선 $2x-3y+12=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$$\overline{OA}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

원점과 직선 $2x-3y+12=0$ 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{12}{\sqrt{13}} = 6$$

061 답 7

세 직선의 기울기가 모두 다르고 한 점에서 만나지 않으므로

세 직선으로 둘러싸인 도형은 삼각형이다.

두 직선 $x-2y=0$, $2x+3y-21=0$ 의 교점을 A라고 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=6, y=3 \quad \therefore A(6, 3)$$

두 직선 $2x+3y-21=0$, $4x-y-7=0$ 의 교점을 B라고 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=5 \quad \therefore B(3, 5)$$

두 직선 $x-2y=0$, $4x-y-7=0$ 의 교점을 C라고 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1 \quad \therefore C(2, 1)$$

즉, 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는 A(6, 3), B(3, 5), C(2, 1)

$$\overline{AC}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$$

점 B(3, 5)와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|3-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = 7$$

062 답 ①

두 직선 $x+3y+2=0$, $3x+y-2=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3x+y-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$|x+3y+2|=|3x+y-2|, x+3y+2=\pm(3x+y-2)$$

$$\therefore x-y-2=0 \text{ 또는 } x+y=0$$

따라서 y 절편이 음수인 직선의 방정식은 $x-y-2=0$

063 답 ③

$P(x, y)$ 라고 하면 점 P에서 두 직선 $3x+2y+1=0$,

$2x-3y-5=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

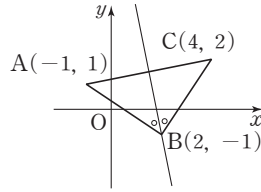
$$\frac{|3x+2y+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$|3x+2y+1|=|2x-3y-5|, 3x+2y+1=\pm(2x-3y-5)$$

$$\therefore x+5y+6=0 \text{ 또는 } 5x-y-4=0$$

064 답 ⑤ $5x+y-9=0$

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 B와 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 $\angle B$ 의 이등분선과 같다.



직선 AB의 방정식을 구하면

$$y-1=\frac{-1-1}{2+1}(x+1)$$

$$\therefore 2x+3y-1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

직선 BC의 방정식을 구하면

$$y+1=\frac{2+1}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore 3x-2y-8=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$ 라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|3x-2y-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$|2x+3y-1|=|3x-2y-8|$$

$$2x+3y-1=\pm(3x-2y-8)$$

$$\therefore x-5y-7=0 \text{ 또는 } 5x+y-9=0$$

그런데 $\angle B$ 의 이등분선의 y 절편은 양수이어야 하므로 구하는

직선의 방정식은

$$5x+y-9=0$$

핵심 유형 최종 점검하기

177~179쪽

1 답 ①

유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

구하는 직선의 방정식은

$$y-4=3(x-2) \quad \therefore y=3x-2$$

따라서 $m=3$, $n=-2$ 이므로

$$m+n=1$$

2 답 ①

유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

두 점 $(3, -k)$, $(k-3, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{k}{(k-3)-3}=2, k=2k-12$$

$$\therefore k=12$$

기울기가 2이고 점 $(3, -12)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+12=2(x-3) \quad \therefore y=2x-18$$

따라서 이 직선의 y 절편은 -18 이다.

다른 풀이 $k=12$ 이므로 두 점 $(3, -12)$, $(9, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+12=\frac{12}{9-3}(x-3) \quad \therefore y=2x-18$$

3 답 ②

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식

$\triangle PAB : \triangle PBC = 3 : 2$ 이므로

$$\overline{PA} : \overline{PC} = 3 : 2$$

즉, 점 P는 $\overline{AC}$ 를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}, \frac{3 \times 8 + 2 \times 3}{3+2}\right)$$

$$\therefore P(4, 6)$$

두 점 B, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{4-5}(x-5)$$

$$\therefore y=-2x+14$$

따라서 이 직선의 x 절편은 7이다.

4 답 ⑤

유형 03 x 절편과 y 절편이 주어진 직선의 방정식

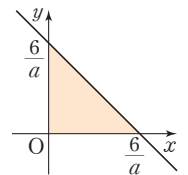
직선 $\frac{ax}{6} + \frac{ay}{6} = 1$ 의 x 절편은 $\frac{6}{a}$, y 절편은 $\frac{6}{a}$

이고, 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 3이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{a} \times \frac{6}{a} = 3$$

$$a^2=6 \quad \therefore a=\pm\sqrt{6}$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=\sqrt{6}$



5 답 $y=3x+5$

유형 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

$$\frac{8+1}{k+2}=\frac{(5k+6)+1}{2+2}, \frac{9}{k+2}=\frac{5k+7}{4}$$

$$5k^2+17k-22=0, (5k+22)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-\frac{22}{5} \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=1$

따라서 직선 l 은 기울기가 $\frac{9}{k+2}=3$ 이고 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로

$$y+1=3(x+2)$$

$$\therefore y=3x+5$$

6 답 6

유형 05 도형의 넓이를 이등분하는 직선

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

두 점 $(2, 3)$, $(6, 5)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (4, 4)$$

두 점 $(1, -2)$, $(4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{4+2}{4-1}(x-1)$$

$$\therefore y=2x-4$$

따라서 $a=2$, $b=-4$ 이므로

$$a-b=6$$

7 답 $y=2x-1$

유형 05 도형의 넓이를 이등분하는 직선

BC의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \therefore M(4, 2)$$

두 점 A(2, 3), M(4, 2)를 지나는 직선 l의 기울기는

$$\frac{2-3}{4-2} = -\frac{1}{2}$$

이때 구하는 직선은 직선 l에 수직이므로 기울기가 2이고 점 A(2, 3)을 지난다.

$$y-3=2(x-2) \therefore y=2x-1$$

8 답 ③

유형 06 직선의 개형

주어진 그림에서 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로

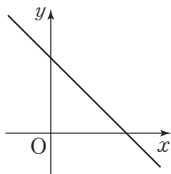
$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0 \dots\dots ㉠$$

한편 $cx+by+a=0$ 에서

$$y = -\frac{c}{b}x - \frac{a}{b} \dots\dots ㉡$$

㉠에 의하여 직선 ㉡의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 직선 $cx+by+a=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



9 답 ③

유형 07 점점을 지나는 직선

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(x-2y-5)+k(4x+y-2)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-2y-5=0, 4x+y-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=-2$

$$\text{따라서 } P(1, -2) \text{이므로 } \overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

10 답 ②

유형 08 점점을 지나는 직선의 활용

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$y=k(x-1)+2 \dots\dots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 (1, 2)를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 주어진 삼각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 (5, 0)을 지날 때

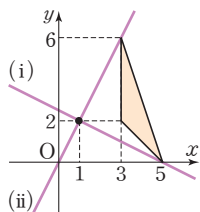
$$0=4k+2 \therefore k=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 (3, 6)을 지날 때

$$6=2k+2 \therefore k=2$$

(i), (ii)에 의하여 k의 값의 범위는 $-\frac{1}{2} \leq k \leq 2$

따라서 $M=2, m=-\frac{1}{2}$ 이므로 $Mm=-1$



11 답 $x-5y+9=0$

유형 09 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $3x-4y+1=0, 2x+y-8=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$3x-4y+1+k(2x+y-8)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)} \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠이 점 (1, 2)를 지나므로

$$-4-4k=0 \therefore k=-1$$

$k=-1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x-5y+9=0$$

12 답 ②

유형 10 두 직선의 위치 관계

두 직선이 평행하려면

$$\frac{k+3}{k} = \frac{2}{-2} \neq \frac{-4}{3}, k+3=-k$$

$$\therefore k=-\frac{3}{2} \therefore a=-\frac{3}{2}$$

또 두 직선이 수직이 되려면

$$k(k+3)+2 \times (-2)=0$$

$$k^2+3k-4=0$$

$$(k+4)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta=1$

$$\therefore a+\beta = -\frac{1}{2}$$

13 답 $x+4y-5=0$

유형 11 평행 또는 수직 조건이 주어진 직선의 방정식

두 직선 $x-3y+4=0, 2x+y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-3y+4+k(2x+y-1)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

$$\therefore (2k+1)x+(k-3)y-k+4=0 \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠과 직선 $x+4y+7=0$ 이 평행하므로

$$\frac{2k+1}{1} = \frac{k-3}{4} \neq \frac{-k+4}{7}$$

$$4(2k+1)=k-3 \therefore k=-1$$

$k=-1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x+4y-5=0$$

14 답 ①

유형 12 선분의 수직이등분선의 방정식

직선 $2x+y-1=0$, 즉 $y=-2x+1$ 이 직선 AB와 수직이므로

$$(-2) \times \frac{b-4}{a-1} = -1$$

$$\therefore a-2b=-7 \dots\dots ㉠$$

또 직선 $2x+y-1=0$ 은 AB의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ 를 지나므로

$$2 \times \frac{a+1}{2} + \frac{b+4}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 2a+b=-4 \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=2$

$$\therefore a-b=-5$$

15 답 0

유형 13 세 직선의 위치 관계

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax-y-3=0$, $2x+y+5=0$ 이 평행할 때

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{5} \quad \therefore a = -2$$

(ii) 두 직선 $4x+by-5=0$, $2x+y+5=0$ 이 평행할 때

$$\frac{4}{2} = \frac{b}{1} \neq \frac{-5}{5} \quad \therefore b = 2$$

(i), (ii)에 의하여 $a = -2$, $b = 2 \quad \therefore a + b = 0$

16 답 ②

유형 14 점과 직선 사이의 거리

$x-y+2=0$, $2x+y-8=0$ 을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

즉, 점 $(2, 4)$ 와 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|2+12+k|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \sqrt{10}, \quad |k+14| = 10$$

$$k+14 = \pm 10 \quad \therefore k = -24 \text{ 또는 } k = -4$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $-24 + (-4) = -28$

17 답 ⑤

유형 14 점과 직선 사이의 거리

점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을

$$y-3=m(x-1), \text{ 즉 } mx-y-m+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라고 하면 원점과 직선 ① 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 3, \quad |-m+3| = 3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $m^2-6m+9=9m^2+9$

$$4m^2+3m=0, \quad m(4m+3)=0 \quad \therefore m=0 \text{ 또는 } m=-\frac{3}{4}$$

그런데 직선이 좌표축과 평행하지 않으므로 $m=-\frac{3}{4}$

$$m=-\frac{3}{4} \text{ 을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 정리하면 } 3x+4y-15=0$$

이때 $y=0$ 을 대입하면 $x=5$

따라서 구하는 x 절편은 5이다.

18 답 2

유형 14 점과 직선 사이의 거리

두 점 $A(0, 2)$, $B(1, 0)$ 에 대하여 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-2}{1} = -2$$

이때 직선 AB와 직선 CD는 평행하므로 직선 CD의 기울기는 -2이다.

$$\text{한편 } \overline{AB} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } \overline{BC} = \overline{AB} = \sqrt{5}$$

직선 CD의 방정식을

$$y = -2x + \beta, \text{ 즉 } 2x + y - \beta = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라고 하면 점 $B(1, 0)$ 과 직선 ① 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}, \quad |\beta-2| = 5$$

$$\beta-2 = \pm 5 \quad \therefore \beta = -3 \text{ 또는 } \beta = 7$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta = 7$

따라서 $2x+y-7=0$ 에 $y=0$ 을 대입하면 $x=\frac{7}{2}$ 이므로 $a=\frac{7}{2}$

$$\therefore \frac{\beta}{a} = 2$$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x

축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y 축에 내린 수선의 발을 F라고 하면

$\triangle AOB \cong \triangle BEC$ (RHA 합동)이므로

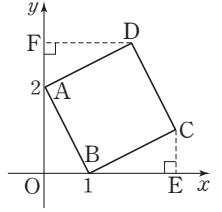
$$\overline{BE} = \overline{AO} = 2, \quad \overline{CE} = \overline{BO} = 1 \quad \therefore C(3, 1)$$

또 $\triangle AOB \cong \triangle DFA$ (RHA 합동)이므로

$$\overline{DF} = \overline{AO} = 2, \quad \overline{AF} = \overline{BO} = 1 \quad \therefore D(2, 3)$$

즉, 직선 CD의 방정식은

$$y-1 = \frac{3-1}{2-3}(x-3) \quad \therefore 2x+y-7=0$$



19 답 ①

유형 15 평행한 두 직선 사이의 거리

두 직선 $3x+4y+4=0$, $3x+4y-6=0$ 이 평행하므로 두 직선

사이의 거리는 직선 $3x+4y+4=0$ 위의 한 점 $(0, -1)$ 과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \frac{|-4-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

20 답 ①

유형 16 삼각형의 넓이

직선 $2x+y-12=0$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$2x+x-12=0 \quad \therefore x=4, \text{ 즉 } A(4, 4)$$

직선 $2x+y-12=0$ 과 직선 $y=2x$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$2x+2x-12=0 \quad \therefore x=3, \text{ 즉 } B(3, 6)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$

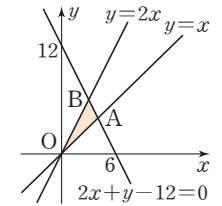
원점 O와 직선 $2x+y-12=0$ 사이의 거리

d 는

$$d = \frac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = 6$$



21 답 ⑤

유형 17 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식

두 직선 $x+2y+1=0$, $2x+y+3=0$ 이 이루는 각의 이등분선

위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x+y+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x+2y+1| = |2x+y+3|, \quad x+2y+1 = \pm(2x+y+3)$$

$$\therefore x-y+2=0 \text{ 또는 } 3x+3y+4=0$$

이 두 직선이 점 $(3, a)$ 를 지나므로

$$3-a+2=0 \text{ 또는 } 9+3a+4=0 \quad \therefore a=5 \text{ 또는 } a=-\frac{13}{3}$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=5$

11 원의 방정식

핵심
유형

유형01 ⑤	유형02 ①	유형03 ③
유형04 ①	유형05 ④	유형06 ⑤
유형07 ①	유형08 1	유형09 ⑤
유형10 ①	유형11 ④	유형12 ③
유형13 $4\sqrt{2}$	유형14 $2-\sqrt{2}$	유형15 ⑤
유형16 ①	유형17 ②	

핵심
유형

완성하기

001 $(x+1)^2+y^2=18$	002 ①	003 ④
004 $x^2+(y-1)^2=2$	005 ④	006 ②
007 ③	008 ⑤	009 ②
010 ③	011 ③	012 ②
013 $(x+3)^2+(y+5)^2=25$	014 π	
015 $4\sqrt{2}$	016 ③	017 ③
018 8π	019 6π	020 ⑤
021 $k < -1$ 또는 $k > 2$	022 ①	023 ⑤
024 ②	025 ②	026 ③
027 $x^2+y^2-x+5y-6=0$	028 ③	029 ⑤
030 ②	031 ④	032 ④
033 ③	034 $x^2+y^2-y-6=0$	035 ③
036 ②	037 ③	038 ①
039 ⑤	040 8	041 $2\sqrt{21}$
042 ⑤	043 ④	044 ②
045 $\sqrt{2}$	046 ⑤	047 ⑤
048 ④	049 ③	050 ④
051 49	052 ⑤	053 ②
054 ③	055 ④	056 ①
057 ①	058 ③	059 ④
060 16	061 ②	062 ①
063 ①	064 ⑤	

핵심
유형

최종 점검하기

1 $(x-2)^2+y^2=20$	2 $(x+3)^2+(y-1)^2=2$
3 ⑤	4 ③
5 $12\sqrt{2}$	6 ③
7 ④	8 ①
9 ⑤	10 ④
11 ⑤	12 $k < -\frac{\sqrt{21}}{2}$ 또는 $k > \frac{\sqrt{21}}{2}$
13 $\frac{1}{6}$	14 ③
15 ⑤	16 ③
17 ⑤	18 10
19 $y=3x-9$ 또는 $y=3x+11$	20 ⑤
21 ①	22 ④

핵심 유형 182~184쪽

유형01 답 ⑤

$\overline{AB}$ 를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times (-4) + 2 \times 5}{1+2} \right) \therefore (3, 2)$$

이때 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 점 B(1, -4)를 지나므로

$$(1-3)^2+(-4-2)^2=r^2 \therefore r^2=40$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=40$$

따라서 $a=3, b=2, c=40$ 이므로 $a+b+c=45$

유형02 답 ①

원의 중심을 C라고 하면 점 C는 $\overline{OA}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{2}{2}, \frac{-4}{2}\right) \therefore C(1, -2)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{OC}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

즉, 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

이 원이 점 (3, k)를 지나므로

$$(3-1)^2+(k+2)^2=5, k^2+4k+3=0$$

$$(k+3)(k+1)=0 \therefore k=-3 \text{ 또는 } k=-1$$

따라서 모든 k 의 값의 합은 $-3+(-1)=-4$

유형03 답 ③

원의 중심의 좌표를 (0, a), 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-a)^2=r^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 (4, 0)을 지나므로

$$4^2+(0-a)^2=r^2, a^2+16=r^2 \dots\dots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 (3, 7)을 지나므로

$$3^2+(7-a)^2=r^2, a^2-14a+58=r^2 \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-3)^2=25$$

유형04 답 ①

원의 중심의 좌표를 (a, $a+3$)이라고 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$$

이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1-a)^2+(2-a-3)^2=(a+3)^2$$

$$a^2-6a-7=0, (a+1)(a-7)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 2^2 + \pi \times 10^2 = 104\pi$$

유형05 답 ④

원의 중심이 제1사분면 위에 있어야 하므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2, r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \quad \therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 둘레의 길이의 합은

$$2\pi \times 1 + 2\pi \times 5 = 12\pi$$

유형06 답 ⑤

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \text{에서 } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, -1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

유형07 답 ①

원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C = 0$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16 + 4B = 0 \quad \therefore B = -4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(3, -3)$ 을 지나므로

$$9 + 9 + 3A - 3B = 0, A - B = -6 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{C}$ 에 대입하여 정리하면 $A = -10$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0$

유형08 답 1

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 + k(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2) = 0 \text{ (단, } k \neq -1) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-2 + 2k = 0 \quad \therefore k = 1$$

$k = 1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - x + 2y = 0$$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로 $a + b = 1$

유형09 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + x - 5y + 1 - (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4) = 0$$

$$\therefore y = 3x + 5$$

따라서 구하는 직선의 기울기는 3이다.

유형10 답 ①

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2 \text{이므로}$$

$$3\overline{BP} = 2\overline{AP} \quad \therefore 9\overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$$

따라서 $P(x, y)$ 라고 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$9\{(x-2)^2 + y^2\} = 4\{(x+3)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x = 0$$

핵심 유형 완성하기

185~189쪽

001 답 $(x+1)^2 + y^2 = 18$

$\overline{AB}$ 를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 1 - 2 \times 2}{3 - 2}, \frac{3 \times (-2) - 2 \times (-3)}{3 - 2} \right) \quad \therefore (-1, 0)$$

이때 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 $A(2, -3)$ 을 지나므로

$$(2+1)^2 + (-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 18$$

$$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 18$$

002 답 ①

중심의 좌표가 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3이므로 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

이 원이 점 $(a, 5)$ 를 지나므로

$$(a+1)^2 + (5-2)^2 = 9$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0, (a+1)^2 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

003 답 ④

중심의 좌표가 $(-2, 3)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$2^2 + (1-3)^2 = r^2, r^2 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \text{ 또는 } r = -2\sqrt{2}$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r = 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

004 답 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

삼각형 ABC 의 무게중심 G 는

$$G\left(\frac{1+3+4}{3}, \frac{2+6+5}{3}\right) \quad \therefore G(0, 1)$$

$$\therefore \overline{AG} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 중심의 좌표가 $(0, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의

$$\text{방정식은 } x^2 + (y-1)^2 = 2$$

005 답 ④

원의 중심을 C 라고 하면 점 C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \quad \therefore C(4, -1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

즉, 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$$

따라서 $a = 4, b = -1, c = 5$ 이므로

$$a + b + c = 8$$

006 ②

$\overline{BC}$ 의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-5}{2}\right) \quad \therefore M(1, -1)$$

구하는 원의 중심을 D라고 하면 점 D는 $\overline{AM}$ 의 중점이므로

$$D\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore D(1, 1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AD} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

007 ③

원점에서 출발한 지 t 초 후의 점 P, Q의 좌표는 각각

$$P(3t, 0), Q(0, 4t)$$

이때 두 점 P, Q를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = \frac{5}{2}t$$

이 원의 반지름의 길이가 10이므로

$$\frac{5}{2}t = 10 \quad \therefore t = 4$$

008 ⑤

원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + 1 = r^2, \quad a^2 - 6a + 10 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로

$$(-1-a)^2 + 25 = r^2, \quad a^2 + 2a + 26 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면 $a = -2, r^2 = 26$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + y^2 = 26$$

009 ②

원의 중심의 좌표를 (k, k) 라고 하면 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 방정식은

$$(x-k)^2 + (y-k)^2 = 2$$

이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$k^2 + k^2 = 2, \quad k^2 = 1 \quad \therefore k = \pm 1$$

(i) $k=1$ 일 때, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

(ii) $k=-1$ 일 때, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

(i), (ii)에 의하여 $a=1, b=1, c=2$ 또는 $a=-1, b=-1, c=2$

$$\therefore abc = 2$$

010 ③

원의 중심의 좌표를 $(k, 2k-1)$, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-k)^2 + (y-2k+1)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$(3-k)^2 + (2-2k+1)^2 = r^2$$

$$5k^2 - 18k + 18 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(5, -2)$ 를 지나므로

$$(5-k)^2 + (-2-2k+1)^2 = r^2$$

$$5k^2 - 6k + 26 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } 5k^2 - 18k + 18 = 5k^2 - 6k + 26$$

$$-12k = 8 \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ 이므로

$$a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{7}{3} \quad \therefore a+b = -3$$

011 ③

원의 중심의 좌표를 $(a, -a-1)$ 이라고 하면 y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y+a+1)^2 = a^2$$

이 원이 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2 + (3+a+1)^2 = a^2$$

$$a^2 + 12a + 20 = 0, \quad (a+10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -10 \text{ 또는 } a = -2$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$|-10| + |-2| = 10 + 2 = 12$$

012 ②

원이 x 축에 접하므로 $\sqrt{a^2+b+2} = |a|$

양변을 제곱하면

$$a^2 + b + 2 = a^2 \quad \therefore b = -2$$

이때 원 $(x-2)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$(2-2)^2 + (6-a)^2 = a^2, \quad -12a + 36 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

013 ④ $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$

원의 넓이가 25π 이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

또 이 원이 점 $(-3, 0)$ 에서 x 축에 접하고, 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, -5)$ 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$$

014 ④ π

원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 하면 y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$a^2 + (2-b)^2 = a^2 \quad \therefore b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (3-b)^2 = a^2, \quad b^2 - 6b - 2a + 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하여 풀면 $a=1$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 1^2 = \pi$$

015 답 $4\sqrt{2}$

원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$$

$$r^2-6r+5=0, (r-1)(r-5)=0$$

$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$ 또는 $(-5, 5)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

016 답 ③

중심의 좌표가 $(3, -3)$ 이고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9$$

이 원이 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$(k-3)^2+(-2+3)^2=9$$

$$k^2-6k+1=0 \quad \therefore k=3\pm 2\sqrt{2}$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$$

017 답 ③

원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

이때 원의 중심이 직선 $3x+y-4=0$ 위에 있으므로

$$3r-r-4=0 \quad \therefore r=2$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 2^2=4\pi$$

018 답 8π

x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3$, $y=x$ 의 교점인 경우

$$2x-3=x \text{에서 } x=3$$

$$\therefore y=3$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(3, 3)$ 이고, 원의 반지름의 길이는 3이므로 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3=6\pi$$

(ii) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3$, $y=-x$ 의 교점인 경우

$$2x-3=-x \text{에서 } x=1$$

$$\therefore y=-1$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$ 이고, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 1=2\pi$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 두 원의 둘레의 길이의 합은

$$6\pi+2\pi=8\pi$$

019 답 6π

$$x^2+y^2-4x+6y+4=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y+3)^2=9$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, -3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3=6\pi$$

020 답 ⑤

주어진 식을 변형하면

$$\textcircled{1} (x+1)^2+y^2=1$$

$$\textcircled{2} x^2+(y-3)^2=2$$

$$\textcircled{3} (x-1)^2+(y-1)^2=1$$

$$\textcircled{4} (x+2)^2+(y+1)^2=4$$

$$\textcircled{5} (x+2)^2+(y+2)^2=0$$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ⑤이다.

021 답 $k < -1$ 또는 $k > 2$

$$x^2+y^2+4kx-2y+4k+9=0 \text{에서}$$

$$(x+2k)^2+(y-1)^2=4k^2-4k-8$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$4k^2-4k-8 > 0, k^2-k-2 > 0$$

$$(k+1)(k-2) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

022 답 ①

$$x^2+y^2-6kx+2ky+9k^2+k+2=0 \text{에서}$$

$$(x-3k)^2+(y+k)^2=k^2-k-2$$

이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3k, -k)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k^2-k-2}$ 인 원이다.

이때 이 원의 넓이가 4π 이므로

$$k^2-k-2=4, k^2-k-6=0$$

$$(k+2)(k-3)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k=3$

023 답 ⑤

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 ①이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$1+4+A+2B=0, A+2B=-5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

원 ①이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$1+9-A+3B=0, A-3B=10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면 } A=1, B=-3$$

즉, 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+x-3y=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

따라서 이 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{2}\pi$$

024 답 ②

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(-2, 4)$ 를 지나므로

$$4+16-2A+4B=0, A-2B=10 \quad \dots\dots ㉡$$

원 ㉠이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$4+36+2A+6B=0, A+3B=-20 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=-2, B=-6$

$$\therefore x^2+y^2-2x-6y=0$$

이 원이 점 $(p, 2)$ 를 지나므로

$$p^2+4-2p-12=0, p^2-2p-8=0$$

$$(p+2)(p-4)=0 \quad \therefore p=-2 \text{ 또는 } p=4$$

그런데 $p>0$ 이므로 $p=4$

025 답 ②

$$x+3y=0 \quad \dots\dots ㉠, 2x+y=0 \quad \dots\dots ㉡, x-2y+5=0 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(0, 0)$, ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(-3, 1)$,

㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

구하는 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots ㉣$$

원 ㉣이 점 $(-3, 1)$ 을 지나므로

$$9+1-3A+B=0, 3A-B=10 \quad \dots\dots ㉤$$

원 ㉣이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$1+4-A+2B=0, A-2B=5 \quad \dots\dots ㉥$$

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $A=3, B=-1$

따라서 구하는 외접원의 방정식은 $x^2+y^2+3x-y=0$

026 답 ③

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4x+2y-3+k(x^2+y^2-2y-5)=0 \text{ (단, } k \neq -1) \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로 $1-k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-2x-4=0 \quad \therefore (x-1)^2+y^2=5$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{5})^2=5\pi$

027 답 $x^2+y^2-x+5y-6=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2ax-5+k(x^2+y^2-6x+10y-7)=0 \text{ (단, } k \neq -1) \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-4+4k=0 \quad \therefore k=1$$

$k=1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-(a+3)x+5y-6=0 \quad \dots\dots ㉡$$

원 ㉡이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $-a-2=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$ 를 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2+y^2-x+5y-6=0$

028 답 ③

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x+6y+7)=0 \quad \therefore 2x-6y-11=0$$

따라서 $a=-6, b=-11$ 이므로 $a-b=5$

029 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+6x-y+4-(x^2+y^2+ax-2y+1)=0$$

$$(6-a)x+y+3=0 \quad \therefore y=(a-6)x-3$$

이 직선의 기울기가 -2 이므로 $a-6=-2 \quad \therefore a=4$

030 답 ②

$$(x-2)^2+(y+1)^2=13 \text{에서 } x^2+y^2-4x+2y-8=0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x+2y-8)=0 \quad \therefore y=2x-4$$

이 직선의 x 절편은 $2, y$ 절편은 -4 이므로 $A(2, 0), B(0, -4)$

따라서 삼각형 OAB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4=4$

031 답 ④

두 원 C_1, C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+6x-4y+9-(x^2+y^2+4x-6y+a)=0$$

$$\therefore 2x+2y+9-a=0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 C_1 을 변형하면 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

이때 직선 ㉠이 원 C_1 의 넓이를 이등분하려면 원 C_1 의 중심

$(-3, 2)$ 를 지나야 하므로

$$-6+4+9-a=0 \quad \therefore a=7$$

032 답 ④

$$\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1 \text{이므로 } 2\overline{BP}=\overline{AP} \quad \therefore 4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$$

$P(x, y)$ 라고 하면 $4\{(x-2)^2+y^2\}=(x+1)^2+y^2$

$$x^2+y^2-6x+5=0 \quad \therefore (x-3)^2+y^2=4$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 0)$ 이고 반지

름의 길이가 2 인 원이므로 구하는 넓이는 $\pi \times 2^2=4\pi$

033 답 ③

$$P(x, y) \text{라고 하면 } (x+1)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=26$$

$$x^2+y^2-2x-8=0 \quad \therefore (x-1)^2+y^2=9$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 0)$ 이고 반지

름의 길이가 3 인 원이므로 구하는 둘레의 길이는 $2\pi \times 3=6\pi$

034 답 $x^2+y^2-y-6=0$

$$P(a, b) \text{라고 하면 } a^2+b^2+4a-6b-12=0 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $\overline{AP}$ 의 중점을 $Q(x, y)$ 라고 하면

$$x=\frac{a+2}{2}, y=\frac{b-2}{2} \quad \therefore a=2x-2, b=2y+2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 점 Q 가 나타내는 도형의 방정식은

$$(2x-2)^2+(2y+2)^2+4(2x-2)-6(2y+2)-12=0$$

$$\therefore x^2+y^2-y-6=0$$

유형11 답 ④

원의 중심 (2, 0)과 직선 $y=x+n$, 즉 $x-y+n=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|n+2|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|n+2|}{\sqrt{2}} > 3\sqrt{2}, |n+2| > 6$$

$$n+2 < -6 \text{ 또는 } n+2 > 6$$

$$\therefore n < -8 \text{ 또는 } n > 4$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

다른 풀이 $y=x+n$ 을 $(x-2)^2+y^2=18$ 에 대입하면

$$(x-2)^2+(x+n)^2=18$$

$$\therefore 2x^2+2(n-2)x+n^2-14=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$$\frac{D}{4} = (n-2)^2 - 2(n^2-14) < 0$$

$$n^2+4n-32 > 0, (n+8)(n-4) > 0$$

$$\therefore n < -8 \text{ 또는 } n > 4$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

유형12 답 ③

$$x^2+y^2+2x-4y-4=0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-1, 2)$

라 하고, 점 C 에서 직선 $3x+4y+5=0$ 에

내린 수선의 발을 H 라고 하면

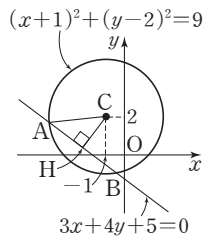
$$\overline{CH} = \frac{|-3+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

직각삼각형 CAH 에서 $\overline{CA}$ 의 길이는 원의

반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{5}$$



유형13 답 $4\sqrt{2}$

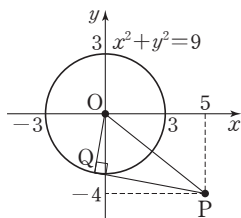
점 $P(5, -4)$ 와 원 $x^2+y^2=9$ 의 중심

$O(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2+(-4)^2} = \sqrt{41}$$

직각삼각형 OPQ 에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{41})^2 - 3^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



유형14 답 $2-\sqrt{2}$

원의 중심 (3, -1)과 직선 $4x+3y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12-3+1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 구하는 최솟값은 $2-\sqrt{2}$

유형15 답 ⑤

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이

고 원 $x^2+y^2=9$ 의 반지름의 길이는 3이므로 접선의 방정식은

$$y=2x \pm 3\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y=2x \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 $m=2$, $n=\pm 3\sqrt{5}$ 이므로

$$m^2+n^2=4+45=49$$

유형16 답 ①

원 $x^2+y^2=17$ 위의 점 (4, 1)에서의 접선의 방정식은

$$4x+y=17 \quad \therefore y=-4x+17$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 -4이다.

유형17 답 ②

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 점선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5$$

이 직선이 점 (3, -1)을 지나므로

$$3x_1-y_1=5$$

$$\therefore y_1=3x_1-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$x_1^2+(3x_1-5)^2=5, x_1^2-3x_1+2=0$$

$$(x_1-1)(x_1-2)=0$$

$$\therefore x_1=1 \text{ 또는 } x_1=2$$

이를 ①에 대입하면

$$x_1=1, y_1=-2 \text{ 또는 } x_1=2, y_1=1$$

즉, 점선의 방정식은

$$x-2y=5 \text{ 또는 } 2x+y=5$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \text{ 또는 } y=-2x+5$$

따라서 두 점선의 기울기의 합은

$$\frac{1}{2} + (-2) = -\frac{3}{2}$$

다른 풀이 점 (3, -1)을 지나는 점선의 기울기를 m 이라고 하면

점선의 방정식은

$$y+1=m(x-3)$$

$$\therefore mx-y-3m-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원의 중심의 좌표가 (0, 0)이므로 원과 직선 ①이 접하려면

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|3m+1| = \sqrt{5} \times \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$(3m+1)^2 = 5(m^2+1)$$

$$2m^2+3m-2=0$$

$$(m+2)(2m-1)=0$$

$$\therefore m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 두 점선의 기울기의 합은

$$-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

035 답 ③

원의 중심 (1, 2)와 직선 $x-2y+n=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-4+n|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|n-3|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|n-3|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}, |n-3| < 5$$

$$-5 < n-3 < 5 \quad \therefore -2 < n < 8$$

따라서 구하는 정수 n 은 $-1, 0, 1, \dots, 7$ 의 9개이다.

036 답 ②

원의 중심의 좌표는 (0, 0)이고 반지름의 길이는 2이므로

① 점 (0, 0)과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 0 < 2$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 점 (0, 0)과 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 2$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

③ 점 (0, 0)과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} < 2$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

④ 점 (0, 0)과 직선 $y=3x+5$, 즉 $3x-y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} < 2$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

⑤ 점 (0, 0)과 직선 $y=4x-1$, 즉 $4x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} < 2$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

037 답 ③

$y=mx+2$ 를 $x^2+y^2=2$ 에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2=2 \quad \therefore (m^2+1)x^2+4mx+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 원과 직선이 만나므로

$$\frac{D}{4} = (2m)^2 - 2(m^2+1) \geq 0$$

$$2m^2-2 \geq 0, m^2 \geq 1$$

$$\therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 1$$

따라서 $\alpha = -1, \beta = 1$ 이므로 $\alpha + \beta = 0$

038 답 ①

원의 중심 (2, -1)과 직선 $x+ky-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-k-5|}{\sqrt{1^2+k^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 넓이가 5π 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이고 원과 직선이

$$\text{접하므로 } \frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5}, |k+3| = \sqrt{5}\sqrt{k^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } (k+3)^2 = 5(k^2+1)$$

$$2k^2-3k-2=0, (2k+1)(k-2)=0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k=2$$

$$\text{따라서 모든 상수 } k \text{의 값의 곱은 } -\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

039 답 ⑤

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=8$ 의 중심의 좌표는 (1, 3)이고 반지름의

길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 직선 $x-y+n=0$ 과 만나지 않으려면

$$\frac{|1-3+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} > 2\sqrt{2}, |n-2| > 4$$

$$n-2 < -4 \text{ 또는 } n-2 > 4$$

$$\therefore n < -2 \text{ 또는 } n > 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

원 $x^2+y^2-8x-6y+7=0$, 즉 $(x-4)^2+(y-3)^2=18$ 의 중심의

좌표는 (4, 3)이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이므로 직선 $x-y+n=0$

과 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|4-3+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < 3\sqrt{2}, |n+1| < 6$$

$$-6 < n+1 < 6 \quad \therefore -7 < n < 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

⑦, ①에 의하여 구하는 n 의 값의 범위는 $-7 < n < -2$

따라서 정수 n 의 최솟값은 -6 이다.

040 답 8

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, 2)

라 하고, 점 C에서 직선 $4x+3y-3=0$

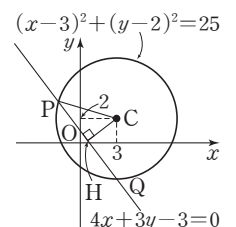
에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{CH} = \frac{|12+6-3|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 3$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 8$$



041 답 $2\sqrt{21}$

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심

C(3, -2)에서 직선 $3x+4y+9=0$ 에

내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{CH} = \frac{|9-8+9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

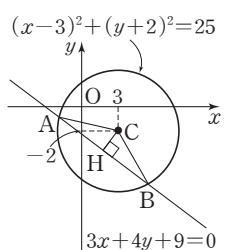
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{21}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{21} \times 2 = 2\sqrt{21}$$



042 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나
는 두 점을 A, B라 하고 원의 중심
O(0, 0)에서 직선 $x-3y+k=0$ 에 내
린 수선의 발을 H라고 하면 주어진 원
과 직선이 만나서 생기는 현의 길이가
4이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

직각삼각형 OAH에서

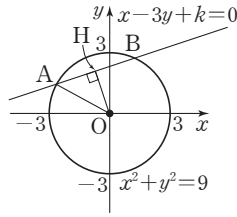
$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

즉, 점 O(0, 0)과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{5}, \quad |k| = 5\sqrt{2}$$

$$\therefore k = \pm 5\sqrt{2}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 5\sqrt{2}$



043 답 ④

오른쪽 그림과 같이 두 원의 두 교
점을 A, B라고 하면 두 원의 공통
인 현은 $\overline{AB}$ 이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정
식은

$$x^2 + y^2 - 16$$

$$- (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 6) = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

이때 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 중심 O에서 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 에 내린
수선의 발을 H라고 하면

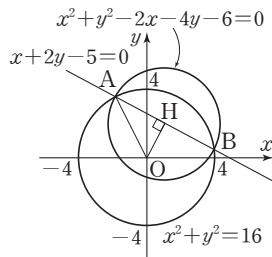
$$\overline{OH} = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{11}$$



044 답 ②

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 11 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

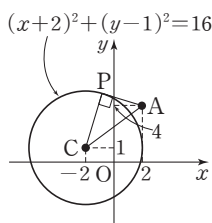
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C(-2, 1)이라고 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

직각삼각형 CAP에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \end{aligned}$$



045 답 $\sqrt{2}$

직각삼각형 OPQ에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{OQ} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

046 답 ⑤

C(-1, 1)이므로

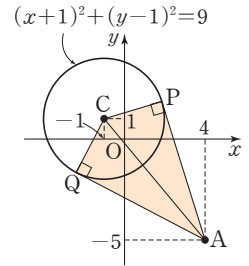
$$\overline{AC} = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 APC
에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{61})^2 - 3^2} \\ &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

따라서 사각형 APCQ의 넓이는

$$\begin{aligned} 2\triangle APC &= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{CP} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 3 \\ &= 6\sqrt{13} \end{aligned}$$



047 답 ⑤

원의 중심 (1, -3)과 직선 $2x + y + 11 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 - 3 + 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 최댓값은

$$2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

048 답 ④

원의 중심 (0, 0)과 점 A(3, -4) 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$ 이므로

$$M = 5 + \sqrt{6}, \quad m = 5 - \sqrt{6}$$

$$\therefore Mm = 25 - 6 = 19$$

049 답 ③

$$x^2 + y^2 - 10y = 0 \text{에서 } x^2 + (y-5)^2 = 25$$

원의 중심 (0, 5)와 직선 $3x - 4y - 15 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-20 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 7$$

원의 반지름의 길이는 5이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의
최댓값은 $7 + 5 = 12$, 최솟값은 $7 - 5 = 2$ 이다.

이때 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중 자연수인 것은 2, 3, 4,
..., 12의 11개이고 거리가 2, 12일 때만 점이 1개이고 나머지 거
리일 때는 점이 2개씩 있으므로 구하는 점의 개수는

$$11 \times 2 - 2 = 20$$

050 ④

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(3, 1)$ 이라고 하고, 점 C에서 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{CH} = \frac{|6-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

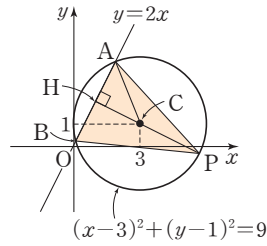
$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 4$$

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되려면 $\overline{PH}$ 의 길이가 최대이어야 하고, 이때 $\overline{PH}$ 는 점 C를 지나므로 $\overline{PH} = \overline{PC} + \overline{CH} = 3 + \sqrt{5}$

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 4 \times (3 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}$$

따라서 $a=6$, $b=2$ 이므로 $a+b=8$



051 ④ 49

직선 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -3 이고 원 $x^2 + y^2 = 4$

의 반지름의 길이는 2이므로 접선의 방정식은

$$y = -3x \pm 2\sqrt{(-3)^2 + 1} \quad \therefore y = -3x \pm 2\sqrt{10}$$

따라서 $m = -3$, $n = \pm 2\sqrt{10}$ 이므로 $m^2 + n^2 = 9 + 40 = 49$

052 ⑤

주어진 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{5} \times \sqrt{2^2 + 1} \quad \therefore y = 2x \pm 10$$

$y = 2x + 10$ 일 때, $A(-5, 0)$, $B(0, 10)$

$y = 2x - 10$ 일 때, $A(5, 0)$, $B(0, -10)$

$$\therefore \overline{OA} = 5, \overline{OB} = 10$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$

053 ②

직선의 기울기를 m 이라고 하면 원 $x^2 + y^2 = 2$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{2} \times \sqrt{m^2 + 1} \quad \therefore y = mx \pm \sqrt{2(m^2 + 1)}$$

그런데 이 직선의 y 절편이 4이므로 $y = mx + \sqrt{2(m^2 + 1)}$ 이고 $\sqrt{2(m^2 + 1)} = 4$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2(m^2 + 1) = 16, m^2 = 7 \quad \therefore m = \pm\sqrt{7}$$

그런데 $m > 0$ 이므로 $m = \sqrt{7}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{7}x + \sqrt{2(7+1)} \quad \therefore y = \sqrt{7}x + 4$$

054 ③

기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x + k, \text{ 즉 } x - y + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 이 직선과 원이 접하므로 원의 중심 $(1, -2)$ 와 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 와 같아야 한다.

$$\frac{|1+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}, |k+3| = 4$$

$$k+3 = \pm 4 \quad \therefore k = -7 \text{ 또는 } k = 1$$

즉, 두 직선 $y = x - 7$, $y = x + 1$ 이므로 x 절편은 각각 7, -1 이다.

따라서 구하는 x 절편의 차는 $7 - (-1) = 8$

055 ④

직선 $x + 2y + 3 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는

2이다. 기울기가 2인 접선의 방정식은

$$y = 2x + k, \text{ 즉 } 2x - y + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 이 직선과 원이 접하므로 원 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 즉

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리는 원의

반지름의 길이 1과 같아야 한다.

$$\frac{|2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 1, |k+2| = \sqrt{5}$$

$$k+2 = \pm\sqrt{5} \quad \therefore k = -2 \pm \sqrt{5}$$

따라서 $A(0, -2 - \sqrt{5})$, $B(0, -2 + \sqrt{5})$ 또는 $A(0, -2 + \sqrt{5})$,

$B(0, -2 - \sqrt{5})$ 이므로

$$\overline{AB} = |-2 + \sqrt{5} - (-2 - \sqrt{5})| = 2\sqrt{5}$$

056 ①

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(2, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 4y = 20 \quad \therefore x - 2y = 10$$

이때 $y = 0$ 을 대입하면 $x = 10$

따라서 구하는 직선의 x 절편은 10이다.

057 ①

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 10 \quad \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{10}{b}$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a}{b} = 3 \quad \therefore a = -3b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 점 (a, b) 는 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위에 있으므로

$$a^2 + b^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 1 \text{ 또는 } a = 3, b = -1$$

$$\therefore ab = -3$$

058 ③

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(1, 2)$

라고 하면 직선 CP와 직선 $y = mx + n$ 이

수직이므로

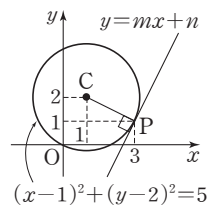
$$\frac{1-2}{3-1} \times m = -1 \quad \therefore m = 2$$

$$\therefore y = 2x + n$$

이 직선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = 6 + n \quad \therefore n = -5$$

$$\therefore m + n = -3$$



059 답 ④

원의 중심을 C(-1, 2)라고 하면 직선

AC의 기울기는

$$\frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

따라서 점 A에서의 접선은 기울기가 3이

고 점 A를 지나므로 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-2)$$

$$\therefore y=3x-5$$

..... ㉠

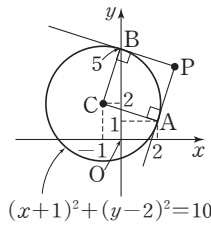
또 직선 BC의 기울기는 $\frac{2-5}{-1-1}=3$

따라서 점 B에서의 접선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 점 B를 지나므로

접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+5$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3, y=4$

즉, P(3, 4)이므로 $a=3, b=4 \therefore a+b=7$



060 답 16

P(x_1, y_1)이라고 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=16 \therefore y_1^2=16-x_1^2$$

한편 점 P에서의 원의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=16, y=\frac{-x_1x+16}{y_1} \therefore f(x)=\frac{-x_1x+16}{y_1}$$

$$\therefore f(-4)f(4)=\frac{4x_1+16}{y_1} \times \frac{-4x_1+16}{y_1} = \frac{(16+4x_1)(16-4x_1)}{y_1^2} \\ = \frac{16^2-16x_1^2}{y_1^2} = \frac{16(16-x_1^2)}{16-x_1^2} = 16$$

061 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4$$

이 직선이 점 (4, -2)를 지나므로

$$4x_1-2y_1=4 \therefore y_1=2x_1-2 \text{ ㉠}$$

한편 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=4 \text{ ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2+(2x_1-2)^2=4, 5x_1^2-8x_1=0$$

$$x_1(5x_1-8)=0 \therefore x_1=0 \text{ 또는 } x_1=\frac{8}{5}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x_1=0, y_1=-2 \text{ 또는 } x_1=\frac{8}{5}, y_1=\frac{6}{5}$$

즉, 접선의 방정식은 $-2y=4$ 또는 $\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y=4$

$$\therefore y+2=0 \text{ 또는 } 4x+3y-10=0$$

$$\therefore a=0, b=-5 \text{ 또는 } a=4, b=3$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a=4, b=3 \therefore a+b=7$

062 답 ①

점 (-2, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m 이라고 하면 접선의

방정식은 $y-1=m(x+2)$

$$\therefore mx-y+2m+1=0 \text{ ㉠}$$

원의 중심의 좌표가 (2, -1)이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|2m+1+2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$|4m+2|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$(4m+2)^2=2(m^2+1)$$

$$7m^2+8m+1=0, (m+1)(7m+1)=0$$

$$\therefore m=-1 \text{ 또는 } m=-\frac{1}{7}$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$x+y+1=0 \text{ 또는 } x+7y-5=0$$

따라서 $a=1, b=1, c=7, d=-5$ 또는 $a=7, b=-5, c=1,$

$d=1$ 이므로 $abcd=-35$

063 답 ①

원점을 지나는 접선의 기울기를 m 이라고 하면 접선의 방정식은

$$y=mx \therefore mx-y=0 \text{ ㉠}$$

$$x^2+y^2-2x-6y+8=0 \text{ 에서}$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=2$$

원의 중심의 좌표가 (1, 3)이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$|m-3|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $(m-3)^2=2(m^2+1)$

$$m^2+6m-7=0, (m+7)(m-1)=0$$

$$\therefore m=-7 \text{ 또는 } m=1$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은

$$-7 \times 1 = -7$$

064 답 ⑤

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=6$$

이 직선이 점 P(0, 6)을 지나므로

$$6y_1=6 \therefore y_1=1$$

한편 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=6$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=6, x_1^2+1^2=6$$

$$x_1^2=5 \therefore x_1=\pm\sqrt{5}$$

즉, 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식은

$$\sqrt{5}x+y=6 \text{ 또는 } \sqrt{5}x-y=6$$

$$\text{따라서 } A\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right), B\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right) \text{ 또는 } A\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right),$$

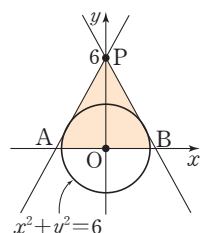
$$B\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right) \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} = \left| \frac{6\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) \right| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 O(0, 0)이라고 하면 삼각형 PAB

의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OP} = \frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} \times 6 \\ = \frac{36\sqrt{5}}{5}$$



1 답 $(x-2)^2+y^2=20$

유형 01 원의 방정식 구하기

직선 $y=-2x+4$ 가 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(0, 4)$

중심의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2=r^2$$

이 원이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$(-2)^2+4^2=r^2 \quad \therefore r^2=20$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2=20$$

2 답 $(x+3)^2+(y-1)^2=2$

유형 02 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{2-10}{2}, \frac{-4+8}{2}\right) \quad \therefore M(-4, 2)$$

$\overline{AB}$ 를 1:2로 내분하는 점을 N이라고 하면

$$N\left(\frac{1 \times (-10) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 8 + 2 \times (-4)}{1+2}\right) \quad \therefore N(-2, 0)$$

이때 원의 중심을 C라고 하면 점 C는 $\overline{MN}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{2}{2}\right) \quad \therefore C(-3, 1)$$

즉, 원의 반지름의 길이는

$$\overline{NC} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-1)^2=2$$

3 답 ⑤

유형 03 중심이 직선 위에 있는 원의 방정식

원의 중심의 좌표를 $(a, a-2)$, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 ①이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2+(2-a+2)^2=r^2$$

$$2a^2-10a+17=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

원 ①이 점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$(3-a)^2+(-2-a+2)^2=r^2$$

$$2a^2-6a+9=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=5$ 이고 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

4 답 ③

유형 04 x 축 또는 y 축에 접하는 원의 방정식

$x^2+y^2-8x+ky+9=0$ 에서

$$(x-4)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+7$$

이 원의 중심 $\left(4, -\frac{k}{2}\right)$ 가 제4사분면 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2} < 0 \quad \therefore k > 0$$

또 이 원이 y 축에 접하므로

$$\sqrt{\frac{k^2}{4}+7}=4$$

양변을 제곱하면

$$\frac{k^2}{4}+7=16, \quad k^2=36$$

$$\therefore k=\pm 6$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=6$

5 답 $12\sqrt{2}$

유형 04 x 축 또는 y 축에 접하는 원의 방정식

원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$ 이라고 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$$

이 원이 점 $(5, 3)$ 을 지나므로

$$(5-a)^2+(3-a-1)^2=(a+1)^2$$

$$a^2-16a+28=0$$

$$(a-2)(a-14)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=14$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 3)$, $(14, 15)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}$$

6 답 ③

유형 06 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 이 나타내는 도형

$x^2+y^2-4x+4ky+5k^2-5k+4=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+2k)^2=-k^2+5k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2+5k > 0, \quad k^2-5k < 0$$

$$k(k-5) < 0 \quad \therefore 0 < k < 5$$

따라서 구하는 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

7 답 ④

유형 07 원점과 두 점을 지나는 원의 방정식

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 ①이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16+4B=0 \quad \therefore B=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

원 ①이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$4+4+2A+2B=0, \quad A+B=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②을 ③에 대입하여 정리하면 $A=0$

즉, 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4y=0 \quad \therefore x^2+(y-2)^2=4$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi \times 2=4\pi$

8 답 ①

유형 08 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ 과 x 축, 즉 직선 $y=0$ 의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 + ky = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$9 + 16 + 12 - 8 - 5 + 4k = 0 \quad \therefore k = -6$$

$k = -6$ 을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 - 6y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-2, 4)$ 이다.

9 답 ⑤

유형 09 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

원 C 의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 - r^2 = 0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 - r^2 - (x^2 + y^2 - 10) = 0$$

$$\therefore 2x + 6y + r^2 - 20 = 0$$

이 직선이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$r^2 = 20 \quad \therefore r = \pm 2\sqrt{5}$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r = 2\sqrt{5}$

10 답 ④

유형 10 조건을 만족하는 점이 나타내는 도형의 방정식

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1 \text{ 이므로}$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP} \quad \therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$P(x, y)$ 라고 하면

$$4\{(x-6)^2 + (y+1)^2\} = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 4y + 45 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + (y+2)^2 = 8$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

11 답 ⑤

유형 11 원과 직선의 위치 관계

원의 중심 $(1, 3)$ 과 직선 $y = -3x + k$, 즉 $3x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 + 3 - k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|k - 6|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k - 6|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, |k - 6| = 10$$

$$k - 6 = \pm 10 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 16$$

따라서 구하는 모든 상수 k 의 값의 합은 $-4 + 16 = 12$

12 답 $k < -\frac{\sqrt{21}}{2}$ 또는 $k > \frac{\sqrt{21}}{2}$

유형 11 원과 직선의 위치 관계

$$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \text{에서 } x^2 + (y+1)^2 = 4$$

원의 중심 $(0, -1)$ 과 직선 $kx - y + 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1 + 4|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}} < 2, \sqrt{k^2 + 1} > \frac{5}{2}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 1 > \frac{25}{4}, k^2 > \frac{21}{4}$$

$$\therefore k < -\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ 또는 } k > \frac{\sqrt{21}}{2}$$

13 답 $\frac{1}{6}$

유형 11 원과 직선의 위치 관계

원의 중심이 제1사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이다.

이때 원과 직선 $3x - 4y + 1 = 0$ 이 접하므로

$$\frac{|3r - 4r + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = r$$

$$|r - 1| = 5r, r - 1 = \pm 5r$$

$$\therefore r = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } r = \frac{1}{6}$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r = \frac{1}{6}$

14 답 ③

유형 12 현의 길이

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

$C(-2, 1)$ 이라고 하고, 점 C 에서 직선

$4x - 3y + 1 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H

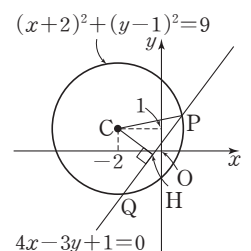
라고 하면

$$\overline{CH} = \frac{|-8 - 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$$

직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2\sqrt{5}$$



15 답 ⑤

유형 13 접선의 길이

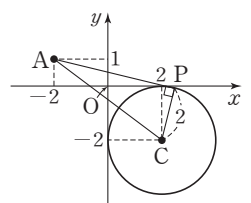
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

$C(2, -2)$ 라고 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

직각삼각형 CAP 에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$



16 답 ③

유형 14 원 위의 점과 직선 사이의 거리

점 A(3, 4)를 지나는 직선 중 원점 O와 거리가 최대인 직선은 직선 OA와 수직인 직선이므로 직선 l의 방정식은

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$

$$\therefore 3x+4y-25=0$$

원의 중심 (5, 7)과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|15+28-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$$

원의 반지름의 길이는 1이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{18}{5}-1=\frac{13}{5}$$

17 답 ⑤

유형 14 원 위의 점과 직선 사이의 거리

$$x^2+y^2-2x-4y-11=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=16$$

원의 중심 (1, 2)와 점 A(4, -2) 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

원의 반지름의 길이는 4이므로 AP의 최댓값은 5+4=9, AP의 최솟값은 5-4=1이다.

따라서 $1 \leq l \leq 9$ 이므로 l의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.

18 답 10

유형 15 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

직선 $y=2x-7$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=5$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=2x \pm \sqrt{5} \times \sqrt{2^2+1}$$

$$\therefore y=2x \pm 5$$

따라서 P(0, -5), Q(0, 5) 또는 P(0, 5), Q(0, -5)이므로

$$PQ=|5-(-5)|=10$$

19 답 $y=3x-9$ 또는 $y=3x+11$

유형 15 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

기울기가 3인 접선의 방정식을

$$y=3x+k, \text{ 즉 } 3x-y+k=0 \quad \dots\dots ㉠$$

으로 놓으면 이 직선과 원이 접하므로 원 $x^2+y^2-2x-8y+7=0$, 즉 $(x-1)^2+(y-4)^2=10$ 의 중심 (1, 4)와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같아야 한다.

$$\frac{|3-4+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$$|k-1|=10$$

$$k-1=\pm 10$$

$$\therefore k=-9 \text{ 또는 } k=11$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=3x-9 \text{ 또는 } y=3x+11$$

20 답 ⑤

유형 16 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x+y=4$$

$$\therefore \sqrt{3}x+y-4=0 \quad \dots\dots ㉠$$

이 직선이 원 $x^2+(y-a)^2=9$ 와 접하므로 원의 중심 (0, a)와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같아야 한다.

$$\frac{|a-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3, |a-4|=6$$

$$a-4=\pm 6 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=10$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=10$

21 답 ①

유형 16 원 위의 점에서의 접선의 방정식

$$x^2+y^2-8x+4y+10=0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2+(y+2)^2=10$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C(4, -2)라고 하면 직선 CP의 기울기는

$$\frac{1+2}{3-4}=-3$$

이때 원의 접선은 직선 CP와 수직이므로

기울기가 $\frac{1}{3}$ 이다.

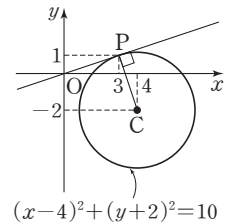
따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이고 점 P(3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{3}(x-3)$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x$$

이 직선이 점 (a, 2)를 지나므로

$$2=\frac{1}{3}a \quad \therefore a=6$$



22 답 ④

유형 17 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=9$$

이 직선이 점 (6, 0)을 지나므로

$$6x_1=9 \quad \therefore x_1=\frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

한편 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{9}{4}+y_1^2=9, y_1^2=\frac{27}{4}$$

$$\therefore y_1=\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$$x+\sqrt{3}y=6 \text{ 또는 } x-\sqrt{3}y=6$$

$$\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3} \text{ 또는 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$$

따라서 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}, n=2\sqrt{3}$ 또는 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}, n=-2\sqrt{3}$ 이므로

$$mn=-2$$

12 도형의 이동

핵심
유형

유형01 ①	유형02 ④	유형03 ①
유형04 ②	유형05 ③	유형06 -5
유형07 0	유형08 ①	유형09 $3\sqrt{5}$
유형10 ④		

핵심
유형

완성하기

001 ⑤	002 ③	003 P(4, -3)
004 (5, -7)	005 ④	006 ②
007 ③	008 ④	009 ②
010 ②	011 ⑤	012 ⑤
013 0	014 -6	015 $\sqrt{26}$
016 17	017 ⑤	018 ②
019 ①	020 ④	021 제3사분면
022 8	023 ④	024 ②
025 ④	026 ②	027 ⑤
028 ①	029 -2	030 ①
031 7	032 ⑤	033 ③
034 ④	035 ④	036 ⑤
037 ④	038 ④	039 ①
040 ⑤	041 ①	042 ③
043 ②	044 ④	045 ⑤
046 $2\sqrt{10}$	047 8	048 ⑤
049 ④	050 ③	051 ③

핵심
유형

최종 점검하기

1 ⑤	2 1	3 ③	4 (3, -5)
5 (0, 8)	6 $y = -x - 4$	7 ③	8 ㄱ, ㄴ
9 14	10 ③	11 ①	12 ①
13 $4\sqrt{2}$	14 ⑤		

핵심 유형 202~204쪽

유형01 답 1

점 (a, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는 (a+2, 3-1) $\therefore$ (a+2, 2)

이 점이 직선 $y=2x-4$ 위에 있으므로 $2=2(a+2)-4, 2a=2 \therefore a=1$

유형02 답 ④

직선 $y=3x+n-1$ 을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3=3(x+1)+n-1 \therefore y=3x+n+5$

이 직선이 직선 $y=3x+9$ 와 일치하므로 $n+5=9 \therefore n=4$

유형03 답 ①

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-3)^2+(y-b-1)^2=9 \dots\dots ㉠$$

한편 $x^2+y^2-4y+c=0$ 에서

$$x^2+(y-2)^2=4-c \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a-3=0, -b-1=-2, 9=4-c$$

$$\therefore a=-3, b=1, c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-7$$

유형04 답 ②

A(1, -2), B(-1, 2)이므로

$$AB=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

유형05 답 ③

직선 $y=ax+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=-ax+1 \therefore y=ax-1$$

이 직선이 점 (1, 2)를 지나므로

$$2=a-1 \therefore a=3$$

유형06 답 -5

원 $x^2+y^2-2ax+6y+a^2=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+x^2-2ay+6x+a^2=0$$

$$\therefore (x+3)^2+(y-a)^2=9$$

이 원의 중심 (-3, a)가 직선 $2x-y+1=0$ 위에 있으므로

$$-6-a+1=0 \therefore a=-5$$

유형07 답 0

두 점 (a, 2), (4, b)를 이은 선분의 중점의 좌표가 (1, 2)이므로

$$\frac{a+4}{2}=1, \frac{2+b}{2}=2 \therefore a=-2, b=2$$

$$\therefore a+b=0$$

유형08 답 ①

두 점 (0, 4), (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=-2x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{b+4}{2}=-2 \times \frac{a}{2}-1$$

$$\therefore 2a+b=-6 \dots\dots ㉠$$

두 점 (0, 4), (a, b)를 지나는 직선과 직선 $y=-2x-1$ 이 수직이므로

$$\frac{b-4}{a} \times (-2)=-1$$

$$\therefore a-2b=-8 \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=2$

$$\therefore ab=-8$$

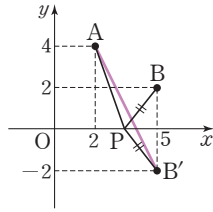
유형09 답 $3\sqrt{5}$

점 B(5, 2)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면

$$B'(5, -2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{5}$ 이다.



유형10 답 ④

방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 구하는 도형은 ④이다.

핵심 유형 완성하기 205~212쪽

001 답 ⑤

점 (2, k)가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$$(2-4, k+3) \quad \therefore (-2, k+3)$$

이 점이 직선 $y = -x + 6$ 위에 있으므로

$$k+3 = 2+6 \quad \therefore k=5$$

002 답 ③

점 (3, 1)을 x 축의 방향으로 a만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(3+a, 1+4) \quad \therefore (a+3, 5)$$

이 점이 점 (6, b)와 일치하므로

$$a+3=6, 5=b \quad \therefore a=3, b=5 \quad \therefore ab=15$$

003 답 P(4, -3)

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 P를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a-3, b+2)$$

이 점이 점 (1, -1)과 일치하므로

$$a-3=1, b+2=-1 \quad \therefore a=4, b=-3$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (4, -3)이다.

004 답 (5, -7)

점 (-1, 2)를 x 축의 방향으로 m만큼, y 축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 (3, -4)라고 하면

$$-1+m=3, 2+n=-4 \quad \therefore m=4, n=-6$$

따라서 점 (1, -1)을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로

-6만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(1+4, -1-6) \quad \therefore (5, -7)$$

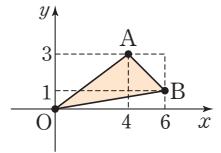
005 답 ④

점 A(4, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$$B(4+2, 3-2) \quad \therefore B(6, 1)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\begin{aligned} 6 \times 3 - \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \\ = 7 \end{aligned}$$



006 답 ②

직선 $y = -2x + k$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3 = -2(x-2) + k \quad \therefore y = -2x + k + 1$$

이 직선이 직선 $y = -2x$ 와 일치하므로

$$k+1=0 \quad \therefore k=-1$$

007 답 ③

직선 $y = 2x + 1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-1 = 2(x+2) + 1 \quad \therefore y = 2x + 6$$

따라서 이 직선의 y 절편은 6이다.

008 답 ④

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 p만큼, y 축의 방향으로 -p만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선 $y = 4x + 2$ 가 옮겨진 직선의 방정식은

$$y+p = 4(x-p) + 2 \quad \therefore y = 4x - 5p + 2$$

이 직선이 직선 $y = 4x - 8$ 과 일치하므로

$$-5p+2 = -8 \quad \therefore p=2$$

009 답 ②

직선 $2x + y - 1 = 0$ 이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 직선의 방정식은

$$2(x+1) + (y-4) - 1 = 0 \quad \therefore 2x + y - 3 = 0$$

따라서 $a=1, b=-3$ 이므로 $ab=-3$

010 답 ②

직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+2 = 2(x-1) + 3 \quad \therefore y = 2x - 1$$

이 직선이 주어진 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 (m, -3)을 지나야 하므로

$$-3 = 2m - 1 \quad \therefore m = -1$$

011 답 ⑤

원 $(x-1)^2 + (y+b)^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 a만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-1)^2 + (y-2+b)^2 = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $x^2 + y^2 + 2x + c - 1 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + y^2 = 2 - c \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a-1=1, -2+b=0, 4=2-c$$

$$\therefore a=-2, b=2, c=-2 \quad \therefore abc=8$$

012 답 ⑤

포물선 $y=x^2+1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y-2=(x+1)^2+1 \quad \therefore y=x^2+2x+4$
 이 포물선이 점 $(3, p)$ 를 지나므로
 $p=9+6+4=19$

013 답 0

$x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 에서 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$
 이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-a-2)^2+(y-b-1)^2=9$
 이 원의 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 이므로
 $-a-2=0, -b-1=0, 9=r^2$
 $\therefore a=-2, b=-1, r=3 (\because r>0)$
 $\therefore a+b+r=0$

다른 풀이 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 이 점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는
 $(2+a, 1+b)$
 이 점이 원점이므로
 $2+a=0, 1+b=0$
 $\therefore a=-2, b=-1$
 한편 원의 반지름의 길이는 평행이동하여도 변하지 않으므로
 $r=3$
 $\therefore a+b+r=0$

014 답 -6

점 $(1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(1+m, 3+n)$
 이 점이 점 $(-1, 2)$ 와 일치하므로
 $1+m=-1, 3+n=2$
 $\therefore m=-2, n=-1$
 즉, 포물선 $y=x^2+2x-1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y+1=(x+2)^2+2(x+2)-1$
 $y=x^2+6x+6 \quad \therefore y=(x+3)^2-3$
 따라서 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -3)$ 이므로
 $a=-3, b=-3$
 $\therefore a+b=-6$

다른 풀이 포물선 $y=x^2+2x-1$, 즉 $y=(x+1)^2-2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -2)$
 이 점을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(-1-2, -2-1) \quad \therefore (-3, -3)$
 따라서 $a=-3, b=-3$ 이므로
 $a+b=-6$

015 답 $\sqrt{26}$

$x^2+y^2-2x+6y+3=0$ 에서
 $(x-1)^2+(y+3)^2=7$
 이 원을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-m-1)^2+(y-n+3)^2=7$
 이 원과 원 $x^2+y^2=7$ 이 일치하므로
 $-m-1=0, -n+3=0$
 $\therefore m=-1, n=3$
 원 $x^2+y^2-4y-9=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=13$ 의 중심의 좌표는 $(0, 2)$ 이므로 이 점을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(0-1, 2+3) \quad \therefore (-1, 5)$
 따라서 $C(-1, 5)$ 이므로
 $OC=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

016 답 17

원 $(x-1)^2+y^2=10$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-1-1)^2+(y-n)^2=10$
 $\therefore (x-2)^2+(y-n)^2=10$
 이 원이 직선 $y=3x+1$ 에 접하려면 원의 중심 $(2, n)$ 과 직선 $3x-y+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같아야 하므로
 $\frac{|6-n+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, |n-7|=10$
 $n-7=\pm 10 \quad \therefore n=-3 \text{ 또는 } n=17$
 그런데 $n>0$ 이므로 $n=17$

017 답 ⑤

$P(3, -4), Q(4, 3)$ 이므로
 $PQ=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$

018 답 ②

점 $(-2, 5)$ 를 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5, 2)$
 따라서 점 $(-5, 2)$ 와 직선 $3x-4y+3=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|-15-8+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$

019 답 ①

점 $(a+3, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a-3, 4)$
 이 점을 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a+3, -4)$
 이 점과 점 $(4, b)$ 가 일치하므로
 $a+3=4, -4=b \quad \therefore a=1, b=-4$
 $\therefore ab=-4$

020 답 ④

점 $(a-2, -a)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a-2-1, -a+2) \quad \therefore (a-3, -a+2)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a+3, a-2)$$

이 점이 직선 $2x-y+4=0$ 위에 있으므로

$$2(-a+3)-(a-2)+4=0 \quad \therefore a=4$$

021 답 제3사분면

점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a, -b)$$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$$a < 0, -b < 0 \quad \therefore a < 0, b > 0$$

점 $(a-b, ab)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(ab, a-b)$$

이때 $ab < 0, a-b < 0$ 이므로 이 점은 제3사분면 위에 있다.

022 답 8

$B(a, -b), C(-a, b)$ 이고 삼각형

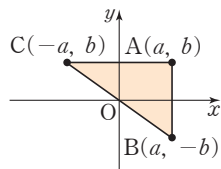
ABC 의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times 2|a| \times 2|b| = 6$$

$$2|ab| = 6 \quad \therefore |ab| = 3$$

따라서 점 A 가 될 수 있는 점의 좌표는

$(1, 3), (-1, 3), (1, -3), (-1, -3), (3, 1), (-3, 1), (3, -1), (-3, -1)$ 의 8개이다.



023 답 ④

직선 $ax+(2a-1)y+7=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-ax-(2a-1)y+7=0$$

$$\therefore ax+(2a-1)y-7=0$$

이 직선이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$-a+3(2a-1)-7=0$$

$$-a+6a-3-7=0 \quad \therefore a=2$$

024 답 ⑤

직선 $2x-y+5=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$2x+y+5=0$$

이 직선과 점 $(3, 4)$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+4+5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

025 답 ④

직선 $x+3y-5=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-x+3y-5=0$$

이 직선을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y-3x-5=0 \quad \therefore 3x-y+5=0$$

026 답 ②

직선 $y=2x+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=2x+1 \quad \therefore y=-2x-1$$

이 직선을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-a=-2(x-3)-1$$

$$\therefore y=-2x+a+5$$

이 직선을 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y=2x+a+5$$

이 직선과 직선 $y=2x+1$ 이 일치하므로

$$a+5=1 \quad \therefore a=-4$$

027 답 ⑤

직선 $3x-2y+p=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$3y-2x+p=0 \quad \therefore 2x-3y-p=0$$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=13$ 에 접하므로 원의 중심

$(1, -3)$ 과 직선 $2x-3y-p=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의

길이 $\sqrt{13}$ 과 같아야 한다.

$$\frac{|2+9-p|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}, |p-11|=13$$

$$p-11=\pm 13 \quad \therefore p=-2 \text{ 또는 } p=24$$

그런데 $p > 0$ 이므로 $p=24$

028 답 ①

직선 $l: y=4x+2$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 각각

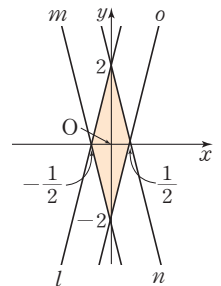
$$m: y=-4x-2$$

$$n: y=-4x+2$$

$$o: y=4x-2$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 네 직선 l, m, n, o 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$$



029 답 -2

원 $x^2+y^2-2x+2ay-6=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+x^2-2y+2ax-6=0$$

$$\therefore (x+a)^2+(y-1)^2=a^2+7$$

이 원의 중심의 좌표는

$$(-a, 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

한편 $y=x^2-4x+5$ 에서

$$y=(x-2)^2+1$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$(2, 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a=2 \quad \therefore a=-2$$

030 ①

포물선 $y=x^2+3x-2$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=x^2-3x-2$$

이 포물선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a=1-3-2=-4$$

031 ⑦

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(-y+1)^2=9$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=9$$

이 원을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+4-2)^2+(y-3-1)^2=9$$

$$\therefore x^2+y^2+4x-8y+11=0$$

따라서 $a=4, b=-8, c=11$ 이므로

$$a+b+c=7$$

032 ⑤

포물선 $y=x^2-2x-6$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2+2x-6$$

$$\therefore y=-x^2-2x+6$$

이 포물선을 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-x^2+2x+6$$

$$\therefore y=-(x-1)^2+7$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점 $(1, 7)$ 이 직선 $y=4x+a$ 위에 있으므로

$$7=4+a \quad \therefore a=3$$

033 ③

원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+x^2+2y-4x-4=0$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

따라서 직선 $y=-3x+k$ 가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2, -1)$ 을 지나야 하므로

$$-1=-6+k$$

$$\therefore k=5$$

034 ④

두 점 $(2a-1, -4), (3, b+1)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(4, -5)$ 이므로

$$\frac{2a-1+3}{2}=4, \frac{-4+b+1}{2}=-5$$

$$\therefore a=3, b=-7$$

$$\therefore a+b=-4$$

035 ④

$$x^2+y^2-4x-6y+4=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-3)^2=9$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, 3)$

$$x^2+y^2+8x+14y+56=0 \text{에서 } (x+4)^2+(y+7)^2=9$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-4, -7)$

따라서 점 (a, b) 는 두 점 $(2, 3), (-4, -7)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$a=\frac{2-4}{2}=-1, b=\frac{3-7}{2}=-2 \quad \therefore a-b=1$$

036 ⑤

원 $x^2+(y-2)^2=1$ 의 중심 $(0, 2)$ 를 점 $(3, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q) 라고 하면 두 점 $(0, 2), (p, q)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3, 1)$ 이므로

$$\frac{p}{2}=3, \frac{2+q}{2}=1$$

$$\therefore p=6, q=0$$

중심의 좌표가 $(6, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식은

$$(x-6)^2+y^2=1$$

$$\therefore x^2+y^2-12x+35=0$$

따라서 $a=-12, b=0, c=35$ 이므로

$$a+b+c=23$$

037 ④

직선 $y=2x+3$ 위의 점 (x, y) 를 점 $(-2, 4)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y') 이라고 하면 두 점 $(x, y), (x', y')$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2, 4)$ 이므로

$$\frac{x+x'}{2}=-2, \frac{y+y'}{2}=4$$

$$\therefore x=-x'-4, y=-y'+8$$

이를 $y=2x+3$ 에 대입하면

$$-y'+8=2(-x'-4)+3$$

$$\therefore y'=2x'+13$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x+13$$

038 ④

포물선 $y=x^2-2x+3$ 위의 점 (x, y) 를 점 $(1, 6)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y') 이라고 하면 두 점 $(x, y), (x', y')$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, 6)$ 이므로

$$\frac{x+x'}{2}=1, \frac{y+y'}{2}=6$$

$$\therefore x=-x'+2, y=-y'+12$$

이를 $y=x^2-2x+3$ 에 대입하면

$$-y'+12=(-x'+2)^2-2(-x'+2)+3$$

$$\therefore y'=-(x')^2+2x'+9$$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$$y=-x^2+2x+9$$

따라서 이 포물선이 y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 9)$ 이다.

039 답 ①

두 점 $(-3, 1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$
 이 점이 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로
 $\frac{a-3}{2} - \frac{b+1}{2} - 2 = 0 \quad \therefore a-b=8 \quad \dots\dots ㉠$
 두 점 $(-3, 1)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $x-y-2=0$, 즉 $y=x-2$ 가 수직이므로
 $\frac{b-1}{a+3} \times 1 = -1 \quad \therefore a+b=-2 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-5$
 $\therefore ab=-15$

040 답 ⑤

두 점 $(-4, 2)$, $(b, 4)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{b-4}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \therefore \left(\frac{b-4}{2}, 3\right)$
 이 점이 직선 $y=-3x+a$ 위에 있으므로
 $3 = -3 \times \frac{b-4}{2} + a \quad \therefore 2a-3b=-6 \quad \dots\dots ㉠$
 두 점 $(-4, 2)$, $(b, 4)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=-3x+a$ 가 수직이므로
 $\frac{2}{b+4} \times (-3) = -1 \quad \therefore b=2 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a=0$
 $\therefore a+b=2$

041 답 ①

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 의 중심 (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
 이 점이 직선 $y=2x+5$ 위에 있으므로
 $\frac{b}{2} = 2 \times \frac{a}{2} + 5 \quad \therefore 2a-b=-10 \quad \dots\dots ㉠$
 두 점 $(0, 0)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $y=2x+5$ 가 수직이므로
 $\frac{b}{a} \times 2 = -1 \quad \therefore a=-2b \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=2$
 한편 원의 반지름의 길이는 대칭이동하여도 변하지 않으므로
 $c=4$
 $\therefore a+b+c=2$

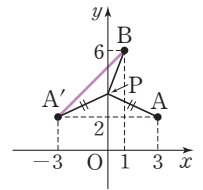
042 답 ③

$x^2+y^2-2x+6y+9=0$ 에서
 $(x-1)^2+(y+3)^2=1$
 이 원의 중심의 좌표는 $(1, -3)$
 $x^2+y^2-8x+15=0$ 에서
 $(x-4)^2+y^2=1$
 이 원의 중심의 좌표는 $(4, 0)$

두 점 $(1, -3)$, $(4, 0)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) \therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
 이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로
 $-\frac{3}{2} = m \times \frac{5}{2} + n \quad \therefore 5m+2n=-3 \quad \dots\dots ㉠$
 두 점 $(1, -3)$, $(4, 0)$ 을 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$ 이 수직이므로
 $\frac{3}{4-1} \times m = -1 \quad \therefore m=-1 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $n=1$
 $\therefore m+n=0$

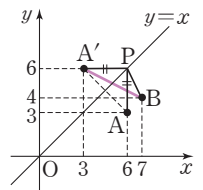
043 답 ②

점 A(3, 2)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 A'(-3, 2)
 $\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$
 $\geq \overline{A'B}$
 $= \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$
 따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.



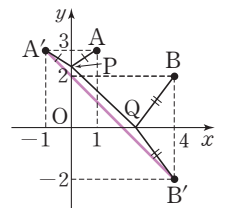
044 답 ④

점 A(6, 3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 A'(3, 6)
 $\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$
 $\geq \overline{A'B}$
 $= \sqrt{4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$
 따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.



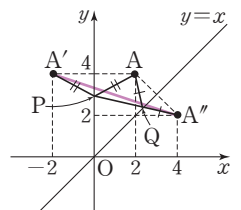
045 답 ⑤

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 A'(-1, 3)
 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 B'(4, -2)
 $\therefore \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$
 $\geq \overline{A'B'}$
 $= \sqrt{5^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$
 따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.



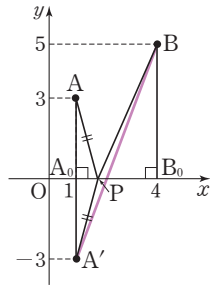
046 답 $2\sqrt{10}$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 A'(-2, 4)
 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라고 하면 A''(4, 2)
 삼각형 APQ의 둘레의 길이는
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''}$
 $\geq \overline{A'A''}$
 $= \sqrt{6^2+(-2)^2} = 2\sqrt{10}$
 따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.



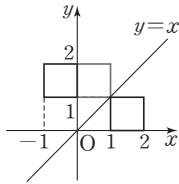
047 답 8

점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라고 하면
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$
 즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 될 때, 점 P는 $\overline{A'B}$ 위에 있으므로
 $\triangle A'PA_0 \sim \triangle BPB_0$
 $\overline{A_0P} : \overline{B_0P} = \overline{A'A_0} : \overline{BB_0} = 3 : 5$
 따라서 $m=3, n=5$ 이므로 $m+n=8$



048 답 ⑤

방정식 $f(y, -x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 구하는 도형은 ⑤이다.

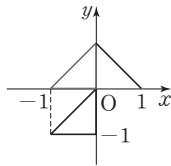


049 답 ④

방정식 $f(x+2, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ④이다.

050 답 ③

방정식 $f(-x, y+1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ③이다.



051 답 ③

- ㄱ. 방정식 $f(x-1, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.
- ㄴ. 방정식 $f(-x+1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.
- ㄷ. 방정식 $f(y+1, x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같지 않다.
- 따라서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

1 답 ⑤

유형 01 점의 평행이동

점 $(3, -2)$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(3-1, -2+a) \therefore (2, a-2)$

이 점이 점 $(b, 2)$ 와 일치하므로

$$2=b, a-2=2 \therefore a=4, b=2 \therefore a+b=6$$

2 답 1

유형 01 점의 평행이동

점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+4, b+3) \dots\dots ㉠$$

점 (c, d) 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(c-1, d-3) \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$a+4=c-1, b+3=d-3 \therefore a-c=-5, b-d=-6$$

$$\therefore a-b-c+d=(a-c)-(b-d)=-5-(-6)=1$$

3 답 ③

유형 02 직선의 평행이동

직선 $2x-y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-m)-(y-1)+1=0 \therefore 2x-y-2m+2=0$$

이 직선이 원 $x^2+(y+1)^2=5$ 에 접하려면 원의 중심 $(0, -1)$ 과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|1-2m+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, |2m-3|=5$$

$$2m-3=\pm 5 \therefore m=-1 \text{ 또는 } m=4$$

그런데 $m>0$ 이므로 $m=4$

4 답 $(3, -5)$

유형 03 원과 포물선의 평행이동

$$x^2+y^2-2x+4y+4=0 \text{에서 } (x-1)^2+(y+2)^2=1$$

이때 원점을 점 $(2, -3)$ 으로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-2-1)^2+(y+3+2)^2=1 \therefore (x-3)^2+(y+5)^2=1$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3, -5)$ 이다.

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 의 중심의 좌표는 $(1, -2)$

이 점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표가 구하는 원의 중심의 좌표이므로

$$(1+2, -2-3) \therefore (3, -5)$$

5 답 $(0, 8)$

유형 03 원과 포물선의 평행이동

$$y=x^2+2x+6a \text{에서 } y=(x+1)^2+6a-1$$

이 포물선을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-3=(x-a+1)^2+6a-1 \therefore y=(x-a+1)^2+6a+2$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a-1, 6a+2)$ 이고 이 점이 y 축 위에 있으므로 $a-1=0 \therefore a=1$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(0, 8)$ 이다.

다른 풀이 포물선 $y=(x+1)^2+6a-1$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(-1, 6a-1)$$

이 점을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-1+a, 6a-1+3) \quad \therefore (a-1, 6a+2)$$

$$\text{이 점이 } y\text{축 위에 있으므로 } a-1=0 \quad \therefore a=1$$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(0, 8)$ 이다.

6 답 y=-x-4

유형 04 점의 대칭이동

$P(-1, -3), Q(-3, -1)$ 이므로 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{-1+3}{-3+1}(x+1) \quad \therefore y=-x-4$$

7 답 ③

유형 05 직선의 대칭이동

직선 $x+3y-1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x-3y-1=0$

이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y-3x-1=0 \quad \therefore y=3x+1$$

이 직선이 점 $(2, p)$ 를 지나므로 $p=6+1=7$

8 답 ㄱ, ㄴ

유형 06 원과 포물선의 대칭이동

ㄱ. 직선 $y=-x$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=x \quad \therefore y=-x$$

ㄴ. 포물선 $y=x^2+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2+1 \quad \therefore y=-x^2-1$$

ㄷ. 원 $x^2+y^2+4x=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x=0$

ㄹ. 도형 $|x+y|=4$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $|-x-y|=4 \quad \therefore |x+y|=4$

따라서 처음의 식과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

9 답 14

유형 06 원과 포물선의 대칭이동

포물선 $y=x^2-4x+2$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+9=(x-1)^2-4(x-1)+2 \quad \therefore y=x^2-6x-2$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=x^2+6x-2$$

이 포물선이 점 $(2, a)$ 을 지나므로 $a=4+12-2=14$

10 답 ③

유형 07 점에 대한 대칭이동

PQ 의 중점의 좌표가 $(3, -2)$ 이므로

$$\frac{2+b}{2}=3, \frac{a-3}{2}=-2 \quad \therefore a=-1, b=4$$

따라서 $P(2, -1), Q(4, -3)$ 이므로

$$PQ=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

11 답 ①

유형 07 점에 대한 대칭이동

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심 $(1, 2)$ 를 점 $(-1, 5)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라고 하면 두 점 $(1, 2), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-1, 5)$ 이므로

$$\frac{1+a}{2}=-1, \frac{2+b}{2}=5$$

$$\therefore a=-3, b=8$$

원의 중심의 좌표가 $(-3, 8)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-8)^2=4$$

따라서 이 원 위에 있는 점은 ① $(-3, 6)$ 이다.

12 답 ①

유형 08 직선에 대한 대칭이동

두 점 $(-4, 2), (12, -2)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+12}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \quad \therefore (4, 0)$$

이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로

$$0=4m+n \quad \therefore n=-4m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 점 $(-4, 2), (12, -2)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$ 이 수직이므로

$$\frac{-2-2}{12+4} \times m = -1 \quad \therefore m=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면 $n=-16$

$$\therefore m+n=-12$$

13 답 $4\sqrt{2}$

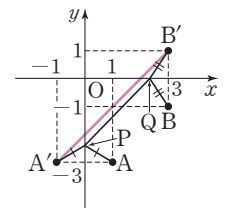
유형 09 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값

점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라고 하면 $A'(-1, -3)$

점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면 $B'(3, 1)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.



14 답 ⑤

유형 10 그래프로 주어진 도형의 평행이동과 대칭이동

방정식 $f(y, x-1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ⑤이다.

