정답과 해설

Ⅰ 통계

1. 대푯값과 산포도_ **2**

Ⅱ 피타고라스 정리

1. 피타고라스 정리_ **11**
2. 피타고라스 정리의 활용_ **20**

Ⅲ 삼각비

1. 삼각비_ **33**
2. 삼각비의 활용_ **40**

Ⅳ 원의 성질

1. 원과 직선_ **51**
2. 원주각_ **58**

Ⅰ 통계

1 대푯값과 산포도

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.10~13

1-1 $\frac{15}{2}$ **1-2** 5 **1-3** 10개 **1-4** $x>8$
1-5 $79\le A\le 80$ **2-1** ③ **2-2** 6 **2-3** ①
2-4 102π **2-5** $\frac{7}{2}$ **3-1** $\sqrt{105}$분 **3-2** $\frac{16}{3}$
4-1 ② **4-2** ② **4-3** ④ **4-4** ②
5-1 (1) 33 (2) 100 (3) 10 **5-2** 45분

1-1 평균이 7이므로

$\frac{7+a+2+10+b+1+9+12}{8}=7$에서 $a+b=15$

a, b를 제외한 모든 자료의 도수가 1이므로 최빈값이 7이 되려면 a, b 중 적어도 하나는 7이어야 한다.

$\therefore a=7,\ b=8\ (\because a<b)$

따라서 중앙값은 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 4번째와 5번째 자료의 값의 평균이므로

(중앙값)$=\frac{7+8}{2}=\frac{15}{2}$

1-2 도수의 총합이 25명이므로

$3+8+x+5+2=25 \quad \therefore x=7$(명)

따라서 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 13번째 자료의 값이 속하는 계급은 55 kg 이상 60 kg 미만이므로 중앙값은 57.5 kg이다.

$\therefore a=57.5$(kg)

도수가 가장 큰 계급은 50 kg 이상 55 kg 미만이므로 최빈값은 52.5 kg이다.

$\therefore b=52.5$(kg)

$\therefore a-b=57.5-52.5=5$

1-3 중앙값이 15회이므로 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 9, 14, 16, x이어야 한다.

$\therefore x\ge 16 \quad \cdots$ ㉠

평균이 16회 이하이므로 $\frac{14+16+x+9}{4}\le 16$

$39+x\le 64 \quad \therefore x\le 25 \quad \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의해 $16\le x\le 25$이므로 자연수 x의 값의 개수는 10개이다.

1-4 (i) $x\le 4$일 때, $A=4,\ B=5,\ C=5$
(ii) $4<x\le 5$일 때, $A=x,\ B=5,\ C=5$
(iii) $5<x\le 6$일 때, $A=x,\ B=x,\ C=x$
(iv) $6<x\le 7$일 때, $A=6,\ B=x,\ C=x$
(v) $7<x\le 8$일 때, $A=6,\ B=x,\ C=x$
(vi) $8<x\le 9$일 때, $A=6,\ B=8,\ C=x$
(vii) $x>9$일 때, $A=6,\ B=8,\ C=9$
따라서 $A<B<C$를 만족하는 x의 값의 범위는 $x>8$

1-5 처음 15명의 영어 점수를 작은 값에서부터 순서대로 나열하면 8번째 자료의 값이 중앙값이므로 79점은 8번째 자료의 값이다.

이때 $83\times 15-82\times 15=15$(점)이므로

민석이의 점수는 지형이의 점수보다 15점 더 높다.

즉, 지형이의 점수는 $80-15=65$(점)이므로 민석이가 전학을 오기 전의 9번째 자료의 값을 a점이라 하면

(i) $79\le a<80$일 때, (중앙값)$=a$(점)

(ii) $a\ge 80$일 때, (중앙값)$=80$(점)

따라서 (i), (ii)에 의해 A의 값의 범위는 $79\le A\le 80$

2-1 ① 편차의 합은 항상 0이므로

$2+0+(-3)+x+2+1=0 \quad \therefore x=-2$(점)

② 학생 E의 점수는 알 수 없다.

③ 학생 B의 편차가 0점이므로 점수는 평균과 같다.

④ 학생 A와 C의 점수 차는 $2-(-3)=5$(점)이다.

⑤ 평균보다 점수가 낮은 학생은 편차가 음수인 학생 C, D의 2명이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

2-2 학생 E의 편차를 x시간이라 하면

편차의 합은 항상 0이므로

$-4+(-1)+3+0+x=0 \quad \therefore x=2$(시간)

$\therefore$ (분산)$=\frac{(-4)^2+(-1)^2+3^2+0^2+2^2}{5}=\frac{30}{5}=6$

2-3 평균이 6이므로

$\frac{4+10+x+y+5}{5}=6$에서 $x+y=11$

분산이 4.4이므로

$\frac{(-2)^2+4^2+(x-6)^2+(y-6)^2+(-1)^2}{5}=4.4$

$(x-6)^2+(y-6)^2=1$

$x^2-12x+36+y^2-12y+36=1$

즉, $x^2+y^2=12(x+y)-71=12\times 11-71=61$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$11^2=61+2xy,\ 2xy=60$

$\therefore xy=30$

2-4 100개의 원의 반지름의 길이를 각각 x_1, x_2, $\cdots$, x_{100}이라 하면 평균이 10이므로

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{100}}{100}=10$에서

$x_1+x_2+\cdots+x_{100}=1000$

표준편차가 $\sqrt{2}$, 즉 분산이 2이므로

$\frac{(x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\cdots+(x_{100}-10)^2}{100}=2$

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2)-20(x_1+x_2+\cdots+x_{100})+100\times 100=200$

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2)-20\times 1000+100\times 100=200$

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2=10200$

따라서 100개의 원의 넓이의 평균은
$\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{100}^2)\times\pi}{100}=102\pi$

[다른 풀이]
반지름의 길이의 평균은 10, 분산은 2이므로
$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2}{100}-10^2=2$
$\therefore \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2}{100}=102$
따라서 100개의 원의 넓이의 평균은
$\frac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2)\times\pi}{100}=102\pi$

2-5 두 변량을 $+1$, -1만큼 잘못 봤으므로 전체 변량의 합에는 변화가 없다.
따라서 자료의 평균은 7이다.
잘못 본 두 변량을 제외한 2개의 변량의 편차의 제곱의 합을 A라 하면 분산이 2이므로
$\frac{(-2)^2+0^2+A}{4}=2$
$\therefore A=4$
즉, 나머지 2개의 변량의 편차의 제곱의 합이 4이다.
$\therefore$ (분산)$=\frac{(-3)^2+1^2+4}{4}=\frac{7}{2}$

3-1 도수의 총합이 20이므로
$3+8+x+2+y=20$에서 $x+y=7$ …㉠
평균이 25분이므로
$\frac{10\times3+20\times8+30\times x+40\times2+50\times y}{20}=25$에서
$3x+5y=23$ …㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=6,\ y=1$
$\therefore$ (분산)
$=\frac{(-15)^2\times3+(-5)^2\times8+5^2\times6+15^2\times2+25^2\times1}{20}$
$=\frac{2100}{20}=105$
$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{105}$(분)

3-2 편차의 합은 항상 0이므로
$(-4)\times1+(-2)\times x+0\times4+2\times3+4\times2=0$
$\therefore x=5$(명)
$\therefore$ (분산)
$=\frac{(-4)^2\times1+(-2)^2\times5+0^2\times4+2^2\times3+4^2\times2}{1+5+4+3+2}$
$=\frac{80}{15}=\frac{16}{3}$

4-1 ㄱ. 자료의 개수가 짝수이면 중앙값은 가운데 위치한 두 값의 평균이므로 주어진 자료의 값 중에 존재하지 않을 수도 있다.
ㄷ. 편차의 절댓값이 클수록 그 자료의 값은 평균에서 멀리 떨어져 있다.
ㄹ. 분산은 편차의 제곱의 평균이다.
따라서 옳지 않은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

4-2 ② A반의 분산이 B반의 분산보다 작으므로 A반이 B반보다 학생들간의 성적 차가 심하지 않다고 할 수 있다.

4-3 ㄱ. 중앙값은 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 10번째와 11번째 자료의 값의 평균이므로
(남학생의 중앙값)$=3$(권),
(여학생의 중앙값)$=4$(권)
ㄴ. 남학생은 2권의 도수가 9명으로 가장 크므로
(남학생의 최빈값)$=2$(권)
여학생은 3권의 도수가 6명으로 가장 크므로
(여학생의 최빈값)$=3$(권)
ㄷ. (여학생의 평균)$=\frac{2\times2+3\times6+4\times5+5\times4+6\times3}{2+6+5+4+3}$
$=4$(권)
이므로 중앙값과 같다.
ㄹ. (여학생의 분산)
$=\frac{(-2)^2\times2+(-1)^2\times6+0^2\times5+1^2\times4+2^2\times3}{20}$
$=\frac{3}{2}$
(남학생의 평균)$=\frac{2\times9+3\times5+4\times4+5\times1+6\times1}{9+5+4+1+1}$
$=3$(권)
(남학생의 분산)
$=\frac{(-1)^2\times9+0^2\times5+1^2\times4+2^2\times1+3^2\times1}{20}=\frac{13}{10}$
여학생의 분산이 더 크므로 평균을 중심으로 더 많이 흩어져 있다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

4-4 A, B, C 모두 변량의 개수는 100개이다.
이때 A, B는 모두 1만큼의 간격을 두고 떨어져 있으므로 A, B의 표준편차는 같고, C는 2만큼의 간격을 두고 떨어져 있으므로 A, B보다 표준편차가 크다.
$\therefore a=b<c$

5-1 (1) $a,\ b,\ c,\ d$의 평균이 7이므로
$\frac{a+b+c+d}{4}=7$에서 $a+b+c+d=28$
(평균)$=\frac{(5a-2)+(5b-2)+(5c-2)+(5d-2)}{4}$
$=\frac{5(a+b+c+d)-8}{4}=33$
(2) $a,\ b,\ c,\ d$의 표준편차가 2, 즉 분산이 4이므로
$\frac{(a-7)^2+(b-7)^2+(c-7)^2+(d-7)^2}{4}=4$

(분산)

$=\frac{(5a-2-33)^2+(5b-2-33)^2+(5c-2-33)^2+(5d-2-33)^2}{4}$

$=\frac{25\{(a-7)^2+(b-7)^2+(c-7)^2+(d-7)^2\}}{4}$

$=25\times4=100$

(3) (표준편차)$=\sqrt{100}=10$

[다른 풀이]

(1) (평균)$=5\times$(a, b, c, d의 평균)-2

$=5\times7-2=33$

(2) (분산)$=5^2\times$(a, b, c, d의 분산)

$=5^2\times4=100$

(3) (표준편차)$=5\times$(a, b, c, d의 표준편차)

$=5\times2=10$

5-2 처음 공부 시간의 평균이 120분이고, a배하고 b분을 더한 후 공부 시간의 평균이 170분이므로

$120a+b=170$ … ㉠

처음 공부 시간의 표준편차가 4분이고, a배하고 b분을 더한 후 공부 시간의 표준편차는 5분이므로

$4a=5$ $\therefore a=\frac{5}{4}$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$120\times\frac{5}{4}+b=170$ $\therefore b=20$

따라서 원래 하루에 100분 동안 공부를 하는 학생의 공부 시간은 $100\times\frac{5}{4}+20=145$(분)이므로 공부 시간은

$145-100=45$(분)만큼 증가한다.

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.14~16

01 2 **02** $\frac{23}{8}$ **03** 6, 16 **04** 25 **05** 309

06 480 **07** 40 **08** $\frac{1}{3}\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}$

09 $\frac{2}{3}$ **10** 1 : 1 **11** 10 **12** $\frac{29}{2}$, $\frac{431}{2}$

13 ㄱ, ㄴ **14** ④ **15** 21

01 주사위의 각 눈이 나온 횟수가 모두 다르므로 15를 0 이상의 서로 다른 6개의 정수의 합으로 나타내면

$15=0+1+2+3+4+5$

따라서 주사위의 각 눈이 나온 횟수는 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 주사위 눈의 수의 평균이 최대 또는 최소가 되는 경우는 다음 표와 같다.

주사위 눈의 수	1	2	3	4	5	6
평균이 최대인 경우	0	1	2	3	4	5
평균이 최소인 경우	5	4	3	2	1	0

(평균의 최댓값)

$=\frac{1\times0+2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5}{15}$

$=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}$

(평균의 최솟값)

$=\frac{1\times5+2\times4+3\times3+4\times2+5\times1+6\times0}{15}$

$=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$

따라서 평균의 최댓값은 최솟값의 2배이다.

$\therefore k=2$

02 $x_1+3x_2+5x_3+7x_4+\cdots+(2k-1)x_k=kx_{k+1}$ … ㉠

$x_1+3x_2+5x_3+7x_4+\cdots+(2k-1)x_k+(2k+1)x_{k+1}$

$=(k+1)x_{k+2}$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$kx_{k+1}+(2k+1)x_{k+1}=(k+1)x_{k+2}$

$(3k+1)x_{k+1}=(k+1)x_{k+2}$

이 식에 $k=15$를 대입하면 $46x_{16}=16x_{17}$

$\therefore \frac{x_{17}}{x_{16}}=\frac{46}{16}=\frac{23}{8}$

03 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

$x\le4$일 때, x, 2, 4, 8, 10 또는 2, x, 4, 8, 10이므로 중앙값은 4이다.

$4<x<8$일 때, 2, 4, x, 8, 10이므로 중앙값은 x이다.

$x\ge8$일 때, 2, 4, 8, x, 10 또는 2, 4, 8, 10, x이므로 중앙값은 8이다.

즉, 중앙값은 4 또는 x 또는 8이다.

이때 (평균)$=\frac{2+4+x+8+10}{5}=\frac{24+x}{5}$이므로

(i) $\frac{24+x}{5}=4$일 때, $24+x=20$

$\therefore x=-4$

(ii) $\frac{24+x}{5}=x$일 때, $24+x=5x$, $4x=24$

$\therefore x=6$

(iii) $\frac{24+x}{5}=8$일 때, $24+x=40$

$\therefore x=16$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 x의 값은 6, 16이다.

04 중앙값이 19이므로 5번째 자료의 값은 19이고, 최빈값이 17과 22이므로 17과 22는 각각 2개 또는 3개이다.

17과 22가 각각 3개인 경우 평균이 19이므로

$\frac{14+17+17+17+19+22+22+22+x}{9}=19$에서

$x=21$

그런데 x의 값이 가장 큰 값이므로 17과 22는 각각 2개이다.

9개의 자료의 값 중 14, 17, 17, 19, 22, 22, x를 제외한 나머지 2개의 자료의 값을 각각 a, $b(a<19<b)$라 하자.
평균이 19이므로

$$\frac{14+17+17+19+22+22+x+a+b}{9}=19$$

$\therefore\ x+a+b=60$
이때 x의 값이 최대가 되려면 a, b의 값은 최소가 되어야 하고, a, b는 17과 22가 아닌 서로 다른 수 이어야 한다.
$\therefore\ a=15,\ b=20$
$\therefore\ x=25$

05 x를 제외한 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면
2, 4, 5, 6, 12, 13, 18, 24
x의 범위를 나누어 생각하면
(i) $x\le 6$일 때, $f(x)=6$
(ii) $6<x<12$일 때, $f(x)=x$
(iii) $x\ge 12$일 때, $f(x)=12$
$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$
$=6\times 6+7+8+9+10+11+12\times 19$
$=309$

06 편차의 합은 항상 0이므로
$4+(-8)+d+e+0=0$에서 $d+e=4$ … ㉠
학생 C의 키와 학생 D의 키 차가 2cm이므로
$e-d=2$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=1$(cm), $e=3$(cm)
즉, 학생 C의 키와 편차에서
(평균)$=161-1=160$(cm)이므로
$a=160+4=164$(cm), $b=160-8=152$(cm),
$c=160$(cm)
$\therefore\ a+b+c+d+e=164+152+160+1+3=480$

07 평균이 11이므로

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=11$$

에서 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=110$
표준편차가 $\sqrt{39}$, 즉 분산이 39이므로

$$\frac{(x_1-11)^2+(x_2-11)^2+\cdots+(x_{10}-11)^2}{10}=39$$

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-22(x_1+x_2+\cdots+x_{10})+10\times 121=390$
$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-22\times 110+1210=390$
$\therefore\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=1600$
이때 큰 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면
$a^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=1600$
따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{1600}=40$
[다른 풀이]
x_1, x_2, …, x_{10}의 평균이 11, 분산이 39이므로

$$39=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2}{10}-11^2$$

$\therefore\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=1600$

08 세 수 x_1, x_2, x_3의 평균을 m이라 하면

$$m=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$s^2=\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2}{3}$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2-2m(x_1+x_2+x_3)+3m^2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{9}(2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1)$$

$$=\frac{1}{9}\{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\}$$

$$=\frac{1}{9}(d_1^2+d_2^2+d_3^2)$$

$$\therefore\ s=\frac{1}{3}\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}$$

[다른 풀이]
$s^2=$(제곱의 평균)$-$(평균의 제곱)

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2$$

09 $a+b$, $b+c$, $c+a$의 평균이 6이므로

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}=6$$

에서 $a+b+c=9$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$81=29+2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=26$
따라서 세 수 $a+b$, $b+c$, $c+a$의 분산은

$$\frac{\{(a+b)-6\}^2+\{(b+c)-6\}^2+\{(c+a)-6\}^2}{3}$$

$$=\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-12(2a+2b+2c)+3\times 36}{3}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)-24(a+b+c)+108}{3}$$

$$=\frac{2\times 29+2\times 26-24\times 9+108}{3}$$

$$=\frac{2}{3}$$

[다른 풀이]
(분산)$=$(제곱의 평균)$-$(평균의 제곱)이므로

$$\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{3}-6^2$$

$$=\frac{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}{3}-36$$

$$=\frac{110}{3}-36$$

$$=\frac{2}{3}$$

10 넓이가 14인 직사각형을 넓이가 각각 a, $14-a$인 두 개의 직사각형으로 나누면 6개의 직사각형의 넓이는 각각 4, 5, 6, 13, a, $14-a$이므로

$$(\text{평균})=\frac{4+5+6+13+a+(14-a)}{6}=\frac{42}{6}=7$$

(분산)

$=\dfrac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+6^2+(a-7)^2+(7-a)^2}{6}$

$=\dfrac{2a^2-28a+148}{6}$

$=\dfrac{a^2-14a+74}{3}$

$=\dfrac{(a-7)^2+25}{3}$

즉, $a=7$일 때 표준편차가 최소가 되므로 넓이가 14인 직사각형을 넓이가 7인 두 개의 직사각형으로 나누어야 한다.
따라서 나누어지는 두 직사각형의 넓이의 비는 1 : 1이다.

11 $f_1+f_2+\cdots+f_{10}=20$, $x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_{10}f_{10}=80$, $x_1^2f_1+x_2^2f_2+\cdots+x_{10}^2f_{10}=520$이므로

(평균)$=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_{10}f_{10}}{f_1+f_2+\cdots+f_{10}}=\dfrac{80}{20}=4$

(분산)

$=\dfrac{(x_1-4)^2f_1+(x_2-4)^2f_2+\cdots+(x_{10}-4)^2f_{10}}{f_1+f_2+\cdots+f_{10}}$

$=\dfrac{(x_1^2f_1+\cdots+x_{10}^2f_{10})-8(x_1f_1+\cdots+x_{10}f_{10})+16(f_1+\cdots+f_{10})}{20}$

$=\dfrac{520-8\times80+16\times20}{20}$

$=\dfrac{200}{20}=10$

[다른 풀이]

(평균)$=\dfrac{80}{20}=4$, (제곱의 평균)$=\dfrac{520}{20}=26$이므로

(분산)$=26-4^2=10$

12 8개의 양수를 x_1, x_2, …, x_8이라 하고 최솟값을 x_1, 최댓값을 x_8이라 하자.
최솟값을 제외한 나머지 7개의 수의 평균이 15이므로

$\dfrac{x_2+x_3+\cdots+x_8}{7}=15$

$\therefore\ x_2+x_3+\cdots+x_8=105$ … ㉠

최댓값을 제외한 나머지 7개의 수의 평균이 13이므로

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_7}{7}=13$

$\therefore\ x_1+x_2+\cdots+x_7=91$ … ㉡

㉠−㉡을 하면 $x_8-x_1=14$이고, $x_1+x_8=22$이므로
$x_1=4$, $x_8=18$
㉠에서 $x_2+x_3+\cdots+x_7=87$이므로 최솟값과 최댓값을 제외한 나머지 6개의 수의 평균은

$\dfrac{x_2+x_3+\cdots+x_7}{6}=\dfrac{87}{6}=\dfrac{29}{2}$

또 최솟값을 제외한 나머지 7개의 수의 분산이 6이므로

$\dfrac{(x_2-15)^2+(x_3-15)^2+\cdots+(x_8-15)^2}{7}=6$

$(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_8^2)-30(x_2+x_3+\cdots+x_8)+7\times15^2=42$

$(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_8^2)-30\times105+1575=42$

$\therefore\ x_2^2+x_3^2+\cdots+x_8^2=1617$

이때 $x_8=18$이므로

$x_2^2+x_3^2+\cdots+x_7^2=1617-18^2=1293$

따라서 최솟값과 최댓값을 제외한 나머지 6개의 수의 제곱의 평균은 $\dfrac{1293}{6}=\dfrac{431}{2}$

13 ㄱ. 주어진 그림에서 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도는 A 반이 가장 크고 C 반이 가장 작으므로 $c<b<a$이다.
ㄴ. 편차의 합은 항상 0이다.
ㄷ. 모든 학생의 점수가 10점씩 오르면 평균은 10점 오르지만 표준편차는 변하지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 처음 변량 a, b, c, d의 평균을 m, 표준편차를 s라 하면

$m=\dfrac{3a+4b+5c+3d}{15}$

$s^2=\dfrac{3(a-m)^2+4(b-m)^2+5(c-m)^2+3(d-m)^2}{15}$

변화된 변량은 각각 $1.16a$, $1.16b$, $1.16c$, $1.16d$이므로 평균, 분산, 표준편차를 각각 구하면

(평균)$=\dfrac{3\times1.16a+4\times1.16b+5\times1.16c+3\times1.16d}{15}$

$=\dfrac{1.16(3a+4b+5c+3d)}{15}=1.16m$

(분산)

$=\dfrac{3(1.16a-1.16m)^2+4(1.16b-1.16m)^2+5(1.16c-1.16m)^2+3(1.16d-1.16m)^2}{15}$

$=\dfrac{1.16^2\{3(a-m)^2+4(b-m)^2+5(c-m)^2+3(d-m)^2\}}{15}$

$=1.16^2s^2$

(표준편차)$=\sqrt{1.16^2s^2}=1.16s$

따라서 옳은 것은 ④이다.

[다른 풀이]

(평균)$=1.16\times$(처음 평균)$=1.16m$

(분산)$=1.16^2\times$(처음 분산)$=1.16^2s^2$

(표준편차)$=1.16\times$(처음 표준편차)$=1.16s$

15 $f_1+f_2+\cdots+f_n=N$이라 하면

(평균)$=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{N}=15$

(분산)$=\dfrac{(x_1-15)^2f_1+(x_2-15)^2f_2+\cdots+(x_n-15)^2f_n}{N}$

$=9$

이때 $3f_1+3f_2+\cdots+3f_n=3(f_1+f_2+\cdots+f_n)=3N$
이므로 평균 m과 표준편차 s를 각각 구하면

$m=\dfrac{(x_1+3)3f_1+(x_2+3)3f_2+\cdots+(x_n+3)3f_n}{3N}$

$=\dfrac{(x_1+3)f_1+(x_2+3)f_2+\cdots+(x_n+3)f_n}{N}$

$=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{N}+\dfrac{3(f_1+f_2+\cdots+f_n)}{N}$

$=15+3=18$

$$s=\sqrt{\frac{(x_1+3-18)^2 3f_1+(x_2+3-18)^2 3f_2+\cdots+(x_n+3-18)^2 3f_n}{3N}}$$
$$=\sqrt{\frac{(x_1-15)^2 f_1+(x_2-15)^2 f_2+\cdots+(x_n-15)^2 f_n}{N}}$$
$=\sqrt{9}=3$
$\therefore m+s=18+3=21$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.17~18

01 144 **02** 20, 24, 36, 70, 70 **03** 35
04 $\sqrt{5}$ **05** $a=\frac{1699}{190}$, $b=6$

01 $d_1=|y_1-m|$, $d_2=|y_2-m|$, $d_3=|y_3-m|$, $d_4=|y_4-m|$이고,
d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_4^2의 평균이 4이므로
$\frac{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+(y_3-m)^2+(y_4-m)^2}{4}=4$에서
$(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+(y_3-m)^2+(y_4-m)^2=16$
이때 $d_1'=3|y_1-m|$, $d_2'=3|y_2-m|$, $d_3'=3|y_3-m|$, $d_4'=3|y_4-m|$이므로
$d_1'^2+d_2'^2+d_3'^2+d_4'^2$
$=9\{(y_1-m)^2+(y_2-m)^2+(y_3-m)^2+(y_4-m)^2\}$
$=9\times16$
$=144$

02 x를 빼고 $x+20$을 넣으면 자료의 평균이 48이므로
$\frac{44n-x+(x+20)}{n}=48$
$\therefore n=5$
즉, 자료의 개수는 5개이고, 처음 자료에서 가장 작은 수가 20, 중앙값이 x이므로 나머지 3개의 자연수를 a, b, c $(a\le b\le c)$라 하면
$20\le a\le x\le b\le c$
x를 빼고 $x+20$을 넣은 자료의 중앙값이 $x+20$이므로
$20\le a\le x+20\le b\le c$
$\therefore x<b$
x를 빼고 $x-18$을 넣은 자료의 중앙값이 $x-12$이므로
$a=x-12$
이때 처음 자료의 최빈값이 70이므로 $b=c=70$이다.
즉, 처음 자료의 평균이 44이므로
$\frac{20+(x-12)+x+70+70}{5}=44$
$\therefore x=36$
따라서 처음 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 20, 24, 36, 70, 70

03 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, …, $A_nB_nC_nD_n$의 가로와 세로의 길이를 각각 x_1과 y_1, x_2와 y_2, …, x_n과 y_n이라 하면 각 직사각형의 둘레의 길이가 24이므로
$x_1+y_1=12$, $x_2+y_2=12$, …, $x_n+y_n=12$
$\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, …, $\overline{A_nB_n}$의 길이의 평균이 6이므로
$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=6$ … ㉠
표준편차가 1, 즉 분산이 1이므로
$\frac{(y_1-6)^2+(y_2-6)^2+\cdots+(y_n-6)^2}{n}=1$
$\frac{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-12(y_1+y_2+\cdots+y_n)+36n}{n}=1$
$\frac{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-12\times6n+36n}{n}=1$
$\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}{n}-36=1$
$\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}{n}=37$ … ㉡
따라서 n개의 직사각형의 넓이의 평균은
$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{n}$
$=\frac{y_1(12-y_1)+y_2(12-y_2)+\cdots+y_n(12-y_n)}{n}$
$=\frac{12(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n}-\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}{n}$
$=12\times6-37=35$ ($\because$ ㉠, ㉡)

04 영훈이네 집의 위치를 $B(x)$라 하면 유선 케이블의 설치 비용은
$1\times(x-a_1)^2+1\times(x-a_2)^2+\cdots+1\times(x-a_{50})^2$
$=50x^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_{50})x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{50}^2$
$=50\left(x-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{50}}{50}\right)^2-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{50})^2}{50}$
$+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{50}^2$(만 원)
따라서 x가 a_1, a_2, …, a_{50}의 평균일 때 설치 비용은 최소가 된다.
즉, $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{50}^2-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{50})^2}{50}=250$
따라서 a_1, a_2, …, a_{50}의 분산은
$\frac{(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+\cdots+(a_{50}-x)^2}{50}=\frac{250}{50}=5$
이므로 표준편차는 $\sqrt{5}$이다.

05 학생 20명의 처음 점수를 각각 x_1점, x_2점, …, x_{20}점이라 하면 점수를 2배한 후 6점씩 올려주었을 때의 평균이 12점이므로
$\frac{(2x_1+6)+(2x_2+6)+\cdots+(2x_{20}+6)}{20}=12$
$2(x_1+x_2+\cdots+x_{20})+6\times20=240$
$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_{20}=60$
$\therefore \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{20}}{20}=\frac{60}{20}=3$

즉, 학생 20명의 처음 점수의 평균은 3점이고, 분산은 1.1이므로

$\frac{(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+\cdots+(x_{20}-3)^2}{20}=1.1$

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2)-6(x_1+x_2+\cdots+x_{20})+20\times9=22$

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2)-6\times60+180=22$

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2=202$

처음 점수에서 두 명씩의 점수를 곱하여 얻은 점수의 평균은

$\frac{\frac{x_1x_2+\cdots+x_1x_{20}+x_2x_1+\cdots+x_{20}x_{19}}{2}}{\frac{20\times19}{2}}$

$=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_{20})^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2)}{380}$

$=\frac{60^2-202}{380}=\frac{1699}{190}$

$\therefore a=\frac{1699}{190}$(점)

처음 점수에서 두 명씩의 점수를 더하여 얻은 점수의 평균은

$\frac{\frac{(x_1+x_2)+\cdots+(x_1+x_{20})+(x_2+x_1)+\cdots+(x_{20}+x_{19})}{2}}{\frac{20\times19}{2}}$

$=\frac{38(x_1+x_2+\cdots+x_{20})}{380}$

$=\frac{60}{10}=6$

$\therefore b=6$(점)

퍼펙트 단원 마무리 P.19~21

01 7가지 **02** 4, 18 **03** (2, 7), (8, 2) **04** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$점

05 20 **06** 62 **07** 11 **08** 171 **09** 3

10 $x=4$, $y=4$, 표준편차 : $\sqrt{3}$ **11** ③ **12** 52.2

13 $\sqrt{199}$점 **14** $m=21$, $s=6$ **15** 4

01 5명의 점수 중 가장 낮은 점수를 x점이라 하면 가장 높은 점수는 $(x+20)$점이다.

중앙값과 최빈값이 모두 10점이므로 나머지 한 점수를 y점이라 하고, 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

$x, y, 10, 10, x+20$ 또는 $x, 10, 10, y, x+20$

이때 평균이 14점이므로

$\frac{x+y+10+10+(x+20)}{5}=14$ $\therefore 2x+y=30$

(i) $x, y, 10, 10, x+20$인 경우 $(x\le y\le10)$

$2x+y=30$을 만족하는 (x, y)는 $(10, 10)$의 1가지

(ii) $x, 10, 10, y, x+20$인 경우 $(x\le10\le y\le x+20)$

$2x+y=30$을 만족하는 (x, y)는 $(4, 22)$, $(5, 20)$, $(6, 18)$, $(7, 16)$, $(8, 14)$, $(9, 12)$, $(10, 10)$의 7가지

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 7가지이다.

02 (평균)$=\frac{3+6+3+a+3+11+5}{7}=\frac{31+a}{7}$

이때 a의 값에 관계없이 최빈값은 항상 3이고, 평균, 중앙값, 최빈값이 모두 다르므로 중앙값은 a 또는 5이다.

(i) 중앙값이 a, 즉 $3<a<5$일 때,

$3<a<\frac{31+a}{7}$이므로 $a=\frac{1}{2}\left(3+\frac{31+a}{7}\right)$

$\therefore a=4$

(ii) 중앙값이 5, 즉 $a\ge5$일 때,

$3<5<\frac{31+a}{7}$이므로 $5=\frac{1}{2}\left(3+\frac{31+a}{7}\right)$

$\therefore a=18$

(i), (ii)에 의해 a의 값은 4, 18이다.

03 자료 A의 중앙값이 2이므로 $a=2$ 또는 $b=2$이다.

이때 $a=2$, $b=2$이면 전체 자료의 중앙값이 2가 되므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(i) $a=2$인 경우

(전체 자료의 중앙값)$=\frac{3+b}{2}=5$ $\therefore b=7$

(ii) $b=2$인 경우

(전체 자료의 중앙값)$=\frac{2+a}{2}=5$ $\therefore a=8$

따라서 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(2, 7)$, $(8, 2)$이다.

04 용화의 사회 점수를 x점이라 하면

(평균)$=\frac{(x-7)+(x+1)+(x-4)+(x+2)}{4}$

$=x-2$(점)

즉, 각 학생의 편차를 차례로 구하면 -5점, 3점, -2점, 4점이므로

(분산)$=\frac{(-5)^2+3^2+(-2)^2+4^2}{4}=\frac{27}{2}$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$(점)

05 평균이 6이므로

$\frac{a+b+c+d+e}{5}=6$에서 $a+b+c+d+e=30$

표준편차가 2, 즉 분산이 4이므로

$\frac{(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(d-6)^2+(e-6)^2}{5}=4$

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-12(a+b+c+d+e)+5\times36=20$

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-12\times30+5\times36=20$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=200$

$f(x)$

$=(a-x)^2+(b-x)^2+(c-x)^2+(d-x)^2+(e-x)^2$

$=5x^2-2(a+b+c+d+e)x+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$

$=5x^2-60x+200$

$=5(x-6)^2+20$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 20이다.

06 평균이 8이므로

$\frac{4x+4y+4z}{12}=8$에서 $x+y+z=24$

표준편차가 2, 즉 분산이 4이므로

$\frac{4(x-8)^2+4(y-8)^2+4(z-8)^2}{12}=4$

$x^2+y^2+z^2-16(x+y+z)+3\times64=12$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=204$

따라서 6개의 면의 넓이의 평균은

$\frac{2xy+2yz+2zx}{6}=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{6}$

$=\frac{24^2-204}{6}$

$=\frac{372}{6}=62$

07 추가된 변량의 값을 x, 5개의 변량의 평균을 m이라 하면

분산이 5.2이므로

$\frac{(5-m)^2+(8-m)^2+(6-m)^2+(10-m)^2+(x-m)^2}{5}=5.2$

$(5-m)^2+(8-m)^2+(6-m)^2+(10-m)^2+(x-m)^2=26$

$x^2-2mx+5m^2-58m+199=0$ … ㉠

이때 편차의 합은 0이므로

$(5-m)+(8-m)+(6-m)+(10-m)+(x-m)=0$

$x+29-5m=0$ $\therefore\ x=5m-29$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(5m-29)^2-2m(5m-29)+5m^2-58m+199=0$

$2m^2-29m+104=0$, $(2m-13)(m-8)=0$

$\therefore\ m=\frac{13}{2}$ 또는 $m=8$ … ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=11$

그런데 x는 자연수이므로 $x=11$

08 평균이 7이므로

$\frac{x+y+z}{3}=7$에서 $x+y+z=21$

표준편차가 3, 즉 분산이 9이므로

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}-7^2=9$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=174$

$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}$

$=\frac{1}{2}\times(21^2-174)=\frac{267}{2}$

따라서 $3x-2y$, $3y-2z$, $3z-2x$에 대하여

(평균)$=\frac{(3x-2y)+(3y-2z)+(3z-2x)}{3}$

$=\frac{x+y+z}{3}$

$=\frac{21}{3}=7$

(분산)

$=\frac{(3x-2y)^2+(3y-2z)^2+(3z-2x)^2}{3}$

$=\frac{13(x^2+y^2+z^2)-12(xy+yz+zx)}{3}-49$

$=\frac{13\times174-6\times267}{3}-49=171$

09 5장의 카드 중에서 순서에 관계없이 2장의 카드를 뽑는 경우는 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)이다.

즉, X의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	8	9
도수	1	1	2	2	2	1	1

(평균)$=\frac{3+4+5\times2+6\times2+7\times2+8+9}{10}$

$=\frac{60}{10}=6$

(분산)

$=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1^2)\times2+0^2\times2+1^2\times2+2^2+3^2}{10}$

$=\frac{30}{10}=3$

10 평균이 5이므로

$\frac{x+y+4+8}{4}=5$에서 $x+y=8$

표준편차가 최소가 되려면 편차의 제곱의 합이 최소이어야 한다.

(편차의 제곱의 합)$=(x-5)^2+(y-5)^2+(-1)^2+3^2$

$=(x-5)^2+(3-x)^2+10$

$=2x^2-16x+44$

$=2(x-4)^2+12$

이므로 $x=4$, $y=4$일 때 표준편차가 최소이다.

$\therefore$ (분산)$=\frac{12}{4}=3$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{3}$

11 $x^2+2Ax+B=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-2A$, $\alpha\beta=B$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4A^2-2B$

$\therefore$ (평균)$=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-2A}{2}=-A$

$\therefore$ (분산)$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-(-A)^2$

$=\frac{4A^2-2B}{2}-A^2$

$=2A^2-B-A^2$

$=A^2-B$

12 턱걸이 횟수가 12회 이상 18회 미만인 계급의 상대도수를 x라 하면 상대도수의 합은 항상 1이므로

$0.2+0.4+x+0.1+0.1=1$

$\therefore\ x=0.2$

(평균)

$=3\times0.2+9\times0.4+15\times0.2+21\times0.1+27\times0.1$

$=12$(회)

(분산)

$=(-9)^2\times0.2+(-3)^2\times0.4+3^2\times0.2$

$+9^2\times0.1+15^2\times0.1$

$=52.2$

13 A반 10명의 점수를 각각 a_1점, a_2점, …, a_{10}점이라 하면 평균이 60점이므로

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10}=60$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{10}=600$

표준편차가 10점, 즉 분산이 100이므로

$\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2}{10}-60^2=100$

$\therefore\ a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2=37000$

B반 15명의 점수를 각각 b_1점, b_2점, …, b_{15}점이라 하면 평균이 70점이므로

$\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{15}}{15}=70$

$\therefore\ b_1+b_2+\cdots+b_{15}=1050$

표준편차가 15점, 즉 분산이 225이므로

$\dfrac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_{15}^2}{15}-70^2=225$

$\therefore\ b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_{15}^2=76875$

따라서 A반과 B반 전체 학생의 수학 성적의 평균과 표준편차를 각각 구하면

(전체의 평균)

$=\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_{15})}{10+15}$

$=\dfrac{600+1050}{25}$

$=66$(점)

(전체의 표준편차)

$=\sqrt{\dfrac{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2)+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{15}^2)}{10+15}-66^2}$

$=\sqrt{\dfrac{37000+76875}{25}-66^2}$

$=\sqrt{199}$(점)

14 $m=2\times(x_1,\ x_2,\ x_3$의 평균$)+1$

$=2\times10+1=21$

$s=2\times(x_1,\ x_2,\ x_3$의 표준편차$)$

$=2\times3=6$

15 $(\sqrt{2}x_1,\ \sqrt{2}x_2,\ \sqrt{2}x_3,\ \sqrt{2}x_4,\ \sqrt{2}x_5$의 표준편차$)$

$=\sqrt{2}\times(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$의 표준편차$)$

$=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$

$=4$

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.22~23

1 |예시| (i) 평균

평균은 모든 변량의 값을 반영하는 대푯값으로 스포츠 경기에서 각 팀의 전력을 분석할 때 적절하다. 축구 경기의 경우 패스나 슈팅 성공률의 평균을 이용하여 각 팀의 전력을 파악할 수 있다.

(ii) 중앙값

중앙값은 극단적인 값이 있는 자료에 적절하다. 어떤 약품의 임상 실험에서는 실험 결과가 여러 가지 요인과 개인차에 의해 크게 또는 작게 나타나는 경우가 있으므로 임상 실험 결과를 나타낼 때 중앙값을 많이 사용한다.

(iii) 최빈값

최빈값은 옷의 치수, 좋아하는 나라 등과 같이 속성을 나타내는 자료에 적절하다. 어느 반 학생들이 좋아하는 색을 조사한다면 가장 많이 선택한 색, 즉 최빈값을 대푯값으로 사용할 수 있다.

2 |예시| 지반이 안정적이면 지진 횟수가 적으므로 3개 지역의 지진 횟수의 평균을 구하면

(A 지역의 평균)$=\dfrac{3+4+0+1+3+5+6+2+4+2}{10}$

$=\dfrac{30}{10}=3$(회)

(B 지역의 평균)$=\dfrac{5+1+2+4+3+2+2+4+2+5}{10}$

$=\dfrac{30}{10}=3$(회)

(C 지역의 평균)$=\dfrac{5+0+0+4+6+2+1+3+5+4}{10}$

$=\dfrac{30}{10}=3$(회)

3개 지역의 지진 횟수의 평균은 모두 3회로 같으므로 분산을 구하면

(A 지역의 분산)

$=\dfrac{0^2+1^2+(-3)^2+(-2)^2+0^2+2^2+3^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2}{10}$

$=\dfrac{30}{10}=3$

(B 지역의 분산)

$=\dfrac{2^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+0^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2+2^2}{10}$

$=\dfrac{18}{10}=1.8$

(C 지역의 분산)

$=\dfrac{2^2+(-3)^2+(-3)^2+1^2+3^2+(-1)^2+(-2)^2+0^2+2^2+1^2}{10}$

$=\dfrac{42}{10}=4.2$

이때 지진 횟수의 평균이 같다면 산포도가 작은 지역이 지진에 대한 예상이 가능하므로 좀 더 안정적이라고 할 수 있다. 따라서 3개 지역 중 지반이 가장 안정된 지역에 원자력발전소를 건설한다면 분산이 가장 작은 B 지역을 선택해야 한다.

Ⅱ 피타고라스 정리

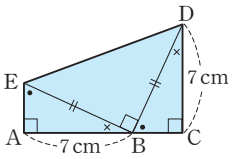
1 피타고라스 정리

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.28~32

1-1 $2\sqrt{6}$ **1-2** $50\,\text{cm}^2$ **1-3** $8+4\sqrt{2}$
1-4 $5\sqrt{13}\,\text{cm}$ **1-5** $\frac{5}{3}$ **1-6** 70 **2-1** 5
2-2 6 cm **2-3** $(9+3\sqrt{5})\,\text{cm}$ **2-4** ② **3-1** $\frac{5}{8}$
3-2 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
3-3 14개 **3-4** ①, ⑤ **4-1** $\frac{84}{25}\,\text{cm}^2$ **4-2** $\frac{45}{4}$
4-3 $2\sqrt{58}$ **5-1** $\sqrt{34}$ **5-2** $4\sqrt{7}\,\text{cm}$ **6-1** 80
6-2 $\frac{3\sqrt{14}}{2}$ **6-3** $\sqrt{5}\,\text{cm}$ **7-1** $24\,\text{cm}^2$ **7-2** 38 **8-1** $\frac{24}{17}\,\text{cm}$
8-2 5 : 3 **8-3** $6\sqrt{13}$

1-1 $\overline{CD}=\overline{AB}=2$이므로 △ACD에서
$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore \overline{CO}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$
따라서 △OCD에서
$\overline{OD}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$
$\therefore \overline{BD}=2\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

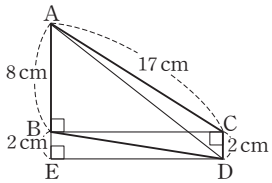
1-2 △ABE≡△CDB이므로
$\overline{BE}=\overline{DB}$, $\angle EBD=90^\circ$
즉, △EBD는 직각이등변삼각형이다.



$\triangle EBD=\frac{1}{2}\overline{BE}^2$이므로
$\frac{1}{2}\overline{BE}^2=29$
$\therefore \overline{BE}=\sqrt{58}$ (cm) ($\because \overline{BE}>0$)
따라서 △ABE에서
$\overline{AE}=\sqrt{(\sqrt{58})^2-7^2}=3$ (cm)
$\therefore \square ACDE=\frac{1}{2}\times(\overline{AE}+\overline{CD})\times\overline{AC}$
$=\frac{1}{2}\times(3+7)\times(7+3)=50\,(\text{cm}^2)$

1-3 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HI}=x$라 하면
$\overline{AC}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$
$\overline{AD}=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+x^2}=\sqrt{3}x$
$\overline{AE}=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+x^2}=2x$
$\overline{AF}=\sqrt{(2x)^2+x^2}=\sqrt{5}x$
$\overline{AG}=\sqrt{(\sqrt{5}x)^2+x^2}=\sqrt{6}x$
$\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{6}x)^2+x^2}=\sqrt{7}x$
$\overline{AI}=\sqrt{(\sqrt{7}x)^2+x^2}=2\sqrt{2}x$
즉, $2\sqrt{2}x=8\sqrt{2}$ $\therefore x=4$
따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}=4$, $\overline{AC}=4\sqrt{2}$이므로
(△ABC의 둘레의 길이)$=4+4+4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$

1-4 다음 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하면



$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=8+2=10$ (cm)
이때 △ABC에서
$\overline{BC}=\sqrt{17^2-8^2}=15$ (cm)이므로
$\overline{ED}=\overline{BC}=15$ cm
따라서 △AED에서
$\overline{AD}=\sqrt{10^2+15^2}=5\sqrt{13}$ (cm)

1-5 △ABC의 둘레의 길이가 20이므로
$x+y+8=20$ $\therefore x+y=12$
$\overline{BH}=a$라 하면 $\overline{HC}=8-a$이므로
△ABH에서 $\overline{AH}^2=x^2-a^2$
△AHC에서 $\overline{AH}^2=y^2-(8-a)^2$
$\therefore x^2-a^2=y^2-(8-a)^2$ …㉠
△DBH에서 $\overline{DH}^2=6^2-a^2$
△DHC에서 $\overline{DH}^2=4^2-(8-a)^2$
$\therefore 6^2-a^2=4^2-(8-a)^2$ …㉡
㉠−㉡을 하면 $x^2-6^2=y^2-4^2$이므로
$x^2-y^2=20$, $(x+y)(x-y)=20$
$12(x-y)=20$
$\therefore x-y=\frac{5}{3}$

1-6 $b-a>0$에서 $b>a$, $c-b>0$에서 $c>b$
따라서 $c>b>a$이므로 가장 긴 변의 길이는 c이다.
이때 $b-a=c-b=d$(일정)라 하면
(i) $a=56$일 때
$b=56+d$, $c=b+d=56+2d\,(d>0)$이므로
$56^2+(56+d)^2=(56+2d)^2$
$3d^2+112d-56^2=0$, $(d+56)(3d-56)=0$
$\therefore d=\frac{56}{3}$ ($\because d>0$)
그런데 b, c가 자연수이어야 하므로 $a\neq 56$
(ii) $b=56$일 때
$a=56-d$, $c=56+d\,(0<d<56)$이므로
$(56-d)^2+56^2=(56+d)^2$
$224d=56^2$, $d=14$
$\therefore c=56+14=70$

(iii) $c=56$일 때

$a=56-2d$, $b=56-d$ $(0<d<28)$이므로

$(56-2d)^2+(56-d)^2=56^2$

$5d^2-336d+56^2=0$, $(5d-56)(d-56)=0$

$\therefore\ d=\dfrac{56}{5}$ $(\because\ 0<d<28)$

그런데 a, b가 자연수이어야 하므로 $c\neq 56$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 가장 긴 변의 길이는 70이다.

2-1 $\overline{AD}=\sqrt{49}=7$, $\overline{EF}=\sqrt{29}$이고,

$\triangle AFE\equiv\triangle DEH$(RHA 합동)

이므로

$\overline{AE}=x$라 하면

$\overline{AF}=\overline{ED}=7-x$

따라서 $\triangle AFE$에서

$x^2+(7-x)^2=(\sqrt{29})^2$, $2x^2-14x+20=0$

$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore\ \overline{AE}=5$ $(\because\ \overline{AE}>\overline{ED})$

2-2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형 ABFG를 그리면

$\triangle ABD=\triangle FBC=\triangle ABF$

$=\dfrac{1}{2}\square ABFG$

이므로

$\square ABFG=2\triangle ABD$

$=2\times 14$

$=28\,(\text{cm}^2)$

$\therefore\ \overline{AB}=2\sqrt{7}\,(\text{cm})$ $(\because\ \overline{AB}>0)$

따라서 $\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{7})^2}=6\,(\text{cm})$

2-3 $\overline{BE}=x\,\text{cm}$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+x^2}=\sqrt{36+x^2}\,(\text{cm})$

$\triangle ABE=\triangle AHD=\triangle BFC=\triangle DGC$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times x=3x\,(\text{cm}^2)$

이므로

$(\sqrt{36+x^2})^2\times\dfrac{2}{3}=3x\times 4$

$(36+x^2)\times\dfrac{2}{3}=12x$, $x^2-18x+36=0$

$\therefore\ x=9+3\sqrt{5}\,(\text{cm})$ $(\because\ x>6)$

$\therefore\ \overline{BE}=(9+3\sqrt{5})\,\text{cm}$

2-4 ㄱ. $\overline{AS}=\overline{DR}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

ㄴ. $\overline{PS}=\overline{SR}=\overline{RQ}=\overline{QP}=2\sqrt{2}-1$이므로

$\square PQRS$는 정사각형이다.

$\therefore\ \overline{PR}=\sqrt{2}\,\overline{PS}=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)=4-\sqrt{2}$

ㄷ. $\square PQRS=\overline{PS}^2=(2\sqrt{2}-1)^2=9-4\sqrt{2}$

ㄹ. $\triangle PRS:\triangle PRD=\overline{RS}:\overline{RD}$이므로

$\triangle PRS=\dfrac{\overline{RS}}{\overline{RD}}\times\triangle PRD$

$=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\times\triangle PRD$

$=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\triangle PRD$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3-1 삼각형을 만들 수 있는 막대의 길이를 순서쌍으로 나타내면

(5, 7, 9), (5, 9, 12), (5, 9, 13), (5, 12, 13),

(7, 9, 12), (7, 9, 13), (7, 12, 13), (9, 12, 13)

의 8가지이다.

이때 둔각삼각형은

(5, 7, 9), (5, 9, 12), (5, 9, 13), (7, 9, 12),

(7, 9, 13)의 5가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5}{8}$이다.

3-2 $(a+b)(a-b)^2=c^2(a-b)$에서

$c^2(a-b)-(a+b)(a-b)^2=0$

$(a-b)\{c^2-(a+b)(a-b)\}=0$

$(a-b)(c^2-a^2+b^2)=0$

$\therefore\ a-b=0$ 또는 $c^2-a^2+b^2=0$

따라서 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

3-3 (i) 가장 긴 변의 길이가 17일 때

$x\leq 17$이고, 삼각형이므로

$17<15+x$, $x>2$

예각삼각형이 되려면 $17^2<15^2+x^2$, $x>8$

따라서 $8<x\leq 17$이므로

$x=9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 x일 때

$x>17$이고, 삼각형이므로

$17-15<x<17+15$, $2<x<32$

예각삼각형이 되려면

$x^2<15^2+17^2$, $x^2<514$, $0<x<\sqrt{514}$

따라서 $17<x<\sqrt{514}$이므로

$x=18, 19, 20, 21, 22$ $(\because\ 22<\sqrt{514}<23)$

따라서 (i), (ii)에서 예각삼각형은 모두 14개이다.

3-4 ① $1<x<\sqrt{7}$이면 $\overline{BC}$가 가장 긴 변이다.

이때 $3^2+x^2<4^2$ $(\because\ 1<x^2<7)$

$\therefore\ \angle A>90^\circ$

② $x=\sqrt{7}$이면 $\overline{BC}$가 가장 긴 변이다.

이때 $3^2+(\sqrt{7})^2=4^2$이므로 $\angle A=90^\circ$

$\therefore\ \angle B+\angle C=90^\circ$

③ $\sqrt{7}<x<4$이면 $\overline{BC}$가 가장 긴 변이다.

이때 $3^2+x^2>4^2$ $(\because\ 7<x^2<16)$

따라서 $\angle A<90^\circ$인 예각삼각형이므로 $\angle C<90^\circ$

④ $x=5$이면 $\overline{CA}$가 가장 긴 변이다.

이때 $3^2+4^2=5^2$이므로 $\angle B=90^\circ$

$\therefore\ \angle B-\angle A=\angle C$

⑤ $5<x<7$이면 $\overline{CA}$가 가장 긴 변이다.
이때 $3^2+4^2<x^2$ ($\because$ $25<x^2<49$)
따라서 $\angle B>90^\circ$이므로 $\angle A+\angle C<90^\circ$
따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

4-1 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,(\text{cm})$

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5\,(\text{cm})$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times8=24(\text{cm}^2)$이므로

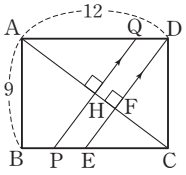
$\frac{1}{2}\times10\times\overline{CH}=24$ $\therefore$ $\overline{CH}=\frac{24}{5}\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle CHM$에서 $\overline{MH}=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}\,(\text{cm})$

$\therefore$ $\triangle CHM=\frac{1}{2}\times\overline{MH}\times\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{24}{5}=\frac{84}{25}\,(\text{cm}^2)$

4-2 오른쪽 그림과 같이 점 D를 지나고 $\overline{PQ}$와 평행한 직선이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 E, F라 하자.



$\triangle ABC$에서
$\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times12\times9=54$이므로

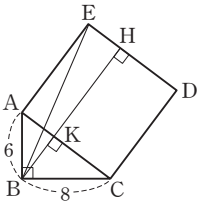
$\frac{1}{2}\times15\times\overline{DF}=54$ $\therefore$ $\overline{DF}=\frac{36}{5}$

$\triangle DEC$에서 $\overline{DC}^2=\overline{DF}\times\overline{DE}$이므로

$9^2=\frac{36}{5}\times\overline{DE}$ $\therefore$ $\overline{DE}=\frac{45}{4}$

따라서 평행사변형의 성질에 의해 $\overline{PQ}=\overline{ED}=\frac{45}{4}$

4-3 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{ED}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}$와 $\overline{AC}$가 만나는 점을 K라 하면



$\triangle ABC$에서
$\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$
$\overline{BC}^2=\overline{CK}\times\overline{CA}$이므로

$8^2=\overline{CK}\times10$ $\therefore$ $\overline{CK}=\frac{32}{5}$

$\therefore$ $\overline{AK}=10-\frac{32}{5}=\frac{18}{5}$

$\overline{BK}^2=\overline{AK}\times\overline{CK}=\frac{18}{5}\times\frac{32}{5}=\left(\frac{24}{5}\right)^2$

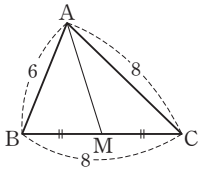
$\therefore$ $\overline{BK}=\frac{24}{5}$ ($\because$ $\overline{BK}>0$)

$\triangle EBH$에서

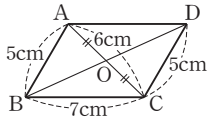
$\overline{BE}=\sqrt{\left(\frac{24}{5}+10\right)^2+\left(\frac{18}{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{74^2}{5^2}+\frac{18^2}{5^2}}=\frac{10\sqrt{58}}{5}=2\sqrt{58}$

5-1 파포스 정리에 의해
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
이므로
$6^2+8^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$
$100=2(\overline{AM}^2+16)$
$\overline{AM}^2=34$
$\therefore$ $\overline{AM}=\sqrt{34}$ ($\because$ $\overline{AM}>0$)



5-2 평행사변형의 성질에 의해
$\overline{AO}=\overline{CO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=3\,(\text{cm})$



$\triangle ABC$에서 파포스 정리에 의해
$5^2+7^2=2(\overline{BO}^2+3^2)$
$25+49=2(\overline{BO}^2+9)$, $\overline{BO}^2+9=37$
$\overline{BO}^2=28$
$\therefore$ $\overline{BO}=2\sqrt{7}\,(\text{cm})$ ($\because$ $\overline{BO}>0$)
$\therefore$ $\overline{BD}=2\overline{BO}=4\sqrt{7}\,(\text{cm})$

6-1 $\overline{AN}=\overline{NC}$, $\overline{BM}=\overline{MC}$이므로
$\overline{AB}=2\overline{MN}=8$
$\therefore$ $\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{AB}^2+\overline{MN}^2=8^2+4^2=80$

6-2 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{5})^2}=3\sqrt{6}$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times3=\frac{9\sqrt{5}}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{6}\times\overline{DE}=\frac{9\sqrt{5}}{2}$ $\therefore$ $\overline{DE}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

$\triangle CDE$에서

$\overline{CE}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore$ $\overline{AE}=3\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

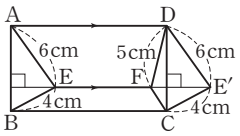
$\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=\overline{BE}^2+\overline{DE}^2$이므로

$\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\overline{BE}^2+\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2$

$\frac{150}{4}+\frac{6}{4}=\overline{BE}^2+\frac{30}{4}$, $\overline{BE}^2=\frac{63}{2}$

$\therefore$ $\overline{BE}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$ ($\because$ $\overline{BE}>0$)

6-3 다음 그림과 같이 $\triangle ABE$를 $\triangle DCE'$이 되도록 이동하면 $\square DFCE'$에서 $\overline{CD}\perp\overline{FE'}$이다.

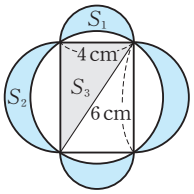


따라서 $\overline{DF}^2+\overline{CE'}^2=\overline{FC}^2+\overline{DE'}^2$이므로
$5^2+4^2=\overline{FC}^2+6^2$, $\overline{FC}^2=5$
$\therefore$ $\overline{FC}=\sqrt{5}\,(\text{cm})$ ($\because$ $\overline{FC}>0$)

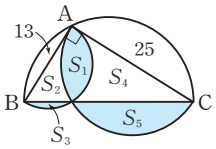
7-1 오른쪽 그림에서 $S_3=S_1+S_2$이므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형의 넓이와 같다.

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=4\times6=24\ (\text{cm}^2)$



7-2



($\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)

$+$($\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)

$=$($\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)

이므로

$(S_1+S_2+S_3)+(S_1+S_4+S_5)=S_1+S_2+S_4+13+25$

$\therefore\ S_1+S_3+S_5=13+25=38$

8-1 $\triangle ABE\equiv\triangle CD'E$(ASA 합동)이므로

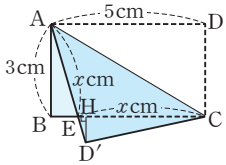
$\overline{AE}=\overline{CE}=x$ cm라 하면

$\overline{BE}=\overline{D'E}=5-x$(cm)

$\triangle ABE$에서 $(5-x)^2+3^2=x^2$

$25-10x+x^2+9=x^2,\ 10x=34$

$\therefore\ x=\frac{17}{5}$(cm)



이때 $\overline{D'E}=5-\frac{17}{5}=\frac{8}{5}$(cm)이므로

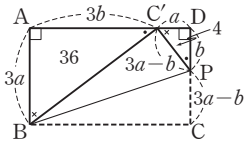
$\triangle CD'E=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}\times3=\frac{12}{5}(\text{cm}^2)$

즉, $\frac{1}{2}\times\frac{17}{5}\times\overline{D'H}=\frac{12}{5}$ $\therefore\ \overline{D'H}=\frac{24}{17}$(cm)

8-2 $\triangle ABC'\sim\triangle DC'P$ (AA 닮음)이고, 넓이의 비가 $36:4=9:1$이므로 닮음비는 $3:1$이다.

따라서 $\overline{AB}=3a$, $\overline{AC'}=3b$, $\overline{C'D}=a$, $\overline{DP}=b$라 하면(단, $a>0$, $b>0$)

$\overline{C'P}=\overline{CP}=3a-b$, $\overline{BC'}=\overline{BC}=a+3b$



$\triangle DC'P$에서 $a^2+b^2=(3a-b)^2$

$a^2+b^2=9a^2-6ab+b^2,\ 8a^2=6ab$ … ㉠

이때 $\triangle DC'P$의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}ab=4$ $\therefore\ ab=8$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$8a^2=48,\ a^2=6$

$\therefore\ a=\sqrt{6},\ b=\frac{4\sqrt{6}}{3}\ (\because a>0)$

따라서 직사각형의

(가로의 길이)$=a+3b=\sqrt{6}+4\sqrt{6}=5\sqrt{6}$,

(세로의 길이)$=3a=3\sqrt{6}$

이므로 가로와 세로의 길이의 비는

$5\sqrt{6}:3\sqrt{6}=5:3$

8-3 $\overline{EB'}=\overline{EB}=18-5=13$이고,

$\triangle AEB'$에서

$\overline{AB'}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$\therefore\ \overline{B'D}=18-12=6$

$\triangle EB'A\sim\triangle B'GD$(AA 닮음)이므로

$\overline{EA}:\overline{B'D}=\overline{AB'}:\overline{DG}$에서

$5:6=12:\overline{DG}$ $\therefore\ \overline{DG}=\frac{72}{5}$

$\overline{EA}:\overline{B'D}=\overline{EB'}:\overline{B'G}$에서

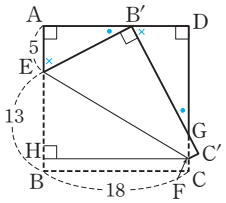
$5:6=13:\overline{B'G}$ $\therefore\ \overline{B'G}=\frac{78}{5}$

또 $\triangle B'DG\sim\triangle FC'G$(AA 닮음)이고

$\overline{GC'}=\overline{B'C'}-\overline{B'G}=18-\frac{78}{5}=\frac{12}{5}$이므로

$\overline{GD}:\overline{GC'}=\overline{B'D}:\overline{FC'}$에서

$\frac{72}{5}:\frac{12}{5}=6:\overline{FC'}$ $\therefore\ \overline{FC'}=1$



위의 그림과 같이 점 F에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HB}=\overline{FC}=\overline{FC'}=1$이므로

$\overline{EH}=13-1=12$

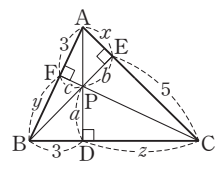
따라서 $\triangle EHF$에서

$\overline{EF}=\sqrt{12^2+18^2}=6\sqrt{13}$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.33~36

01 43	**02** $\sqrt{13}$	**03** $\frac{64}{25}$	**04** 42	**05** $\frac{6}{5}$
06 $4\sqrt{3}-6$		**07** 125	**08** $\frac{7}{8}$	**09** $20+4\sqrt{13}$
10 $\frac{8}{15}$	**11** $\frac{1}{2}ab$	**12** $(8+4\pi)\ \text{cm}^2$		**13** $\frac{4}{5}$
14 150	**15** $\frac{290}{17}$	**16** $4\sqrt{13}$	**17** $\sqrt{57}$	**18** $32\pi\ \text{cm}^2$
19 $10\sqrt{2}$	**20** $\frac{6}{5}$			

01 $\overline{AE}=x$, $\overline{BF}=y$, $\overline{CD}=z$라 하고, $\overline{PD}=a$, $\overline{PE}=b$, $\overline{PF}=c$라 하면



$\triangle PAE$와 $\triangle PAF$에서

$b^2+x^2=c^2+3^2$ … ㉠

$\triangle PBF$와 $\triangle PBD$에서

$c^2+y^2=a^2+3^2$ … ㉡

$\triangle PCD$와 $\triangle PCE$에서

$a^2+z^2=b^2+5^2$ … ㉢

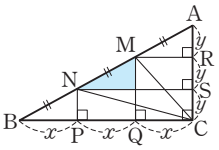
㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$b^2+x^2+c^2+y^2+a^2+z^2=c^2+3^2+a^2+3^2+b^2+5^2$

$x^2+y^2+z^2=3^2+3^2+5^2=43$

$\therefore\ \overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CD}^2=x^2+y^2+z^2=43$

02 점 M, N에서 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$에 수선을 그으면 오른쪽 그림과 같다.



$\triangle NPC$에서 $(2x)^2+y^2=7^2$

$\therefore\ 4x^2+y^2=49 \quad \cdots ㉠$

$\triangle MQC$에서 $x^2+(2y)^2=4^2$

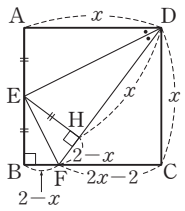
$\therefore\ x^2+4y^2=16 \quad \cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면 $5x^2+5y^2=65$

$\therefore\ x^2+y^2=13$

$\therefore\ \overline{MN}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}$

03 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{DF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle DAE\equiv\triangle DHE$(RHA 합동)

즉, 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 $\overline{HD}=\overline{AD}=x$

또 $\triangle EBF\equiv\triangle EHF$(RHS 합동)

이므로 $\overline{BF}=\overline{HF}=2-x$

$\therefore\ \overline{CF}=x-(2-x)=2x-2$

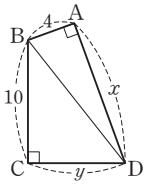
따라서 $\triangle DFC$에서 $2^2=(2x-2)^2+x^2$

$5x^2-8x=0,\ x(5x-8)=0$

$\therefore\ x=\frac{8}{5}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \square ABCD=\frac{8}{5}\times\frac{8}{5}=\frac{64}{25}$

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 긋고, $\overline{AD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면



$\triangle BAD$와 $\triangle BCD$에서

$4^2+x^2=10^2+y^2,\ x^2-y^2=84$

$(x+y)(x-y)=84$

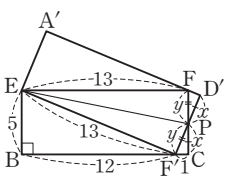
이때 x, y는 자연수이므로 $x+y$, $x-y$는 자연수이다.

즉, $(x+y,\ x-y)$는 $(84,\ 1)$, $(42,\ 2)$, $(28,\ 3)$, $(21,\ 4)$, $(14,\ 6)$, $(12,\ 7)$이고,

$(x,\ y)$는 각각 $\left(\frac{85}{2},\ \frac{83}{2}\right)$, $(22,\ 20)$, $\left(\frac{31}{2},\ \frac{25}{2}\right)$, $\left(\frac{25}{2},\ \frac{17}{2}\right)$, $(10,\ 4)$, $\left(\frac{19}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이다.

따라서 $(x,\ y)$는 $(22,\ 20)$, $(10,\ 4)$이므로 $\overline{AD}+\overline{CD}$의 최댓값은 $22+20=42$

05 $\overline{EF'}=\overline{EF}=13$이므로



$\triangle EBF'$에서

$\overline{BF'}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$\therefore\ \overline{F'C}=13-12=1$

$\overline{PC}=x$, $\overline{PF}=y$라 하면

$x+y=5$

$\therefore\ y=5-x \quad \cdots ㉠$

$\triangle PCF'$에서 $y^2=x^2+1^2 \quad \cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$(5-x)^2=x^2+1,\ 10x=24$

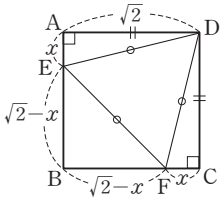
$\therefore\ x=\frac{12}{5},\ y=\frac{13}{5}$

$\overline{FP}=5-\frac{12}{5}=\frac{13}{5}$이므로

$\triangle PCF'\equiv\triangle PD'F$ (RHA 합동)

$\therefore\ \triangle FPD'=\triangle F'PC=\frac{1}{2}\times1\times\frac{12}{5}=\frac{6}{5}$

06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형 ABCD 안에 들어갈 수 있는 가장 큰 정삼각형 DEF를 그리면



$\triangle AED\equiv\triangle CFD$(RHS 합동)

이므로 $\overline{AE}=\overline{CF}$

$\overline{AE}=\overline{CF}=x\ (0<x<\sqrt{2})$라 하면

$\overline{EB}=\overline{BF}=\sqrt{2}-x$

$\triangle AED$에서 $x^2+(\sqrt{2})^2=\overline{ED}^2 \quad \cdots ㉠$

$\triangle EBF$에서 $(\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2}-x)^2=\overline{EF}^2 \quad \cdots ㉡$

$\overline{ED}=\overline{EF}$이므로 ㉠, ㉡에 의해

$x^2+(\sqrt{2})^2=2(\sqrt{2}-x)^2$

$x^2+2=2(2-2\sqrt{2}x+x^2)$

$x^2-4\sqrt{2}x+2=0$

$\therefore\ x=2\sqrt{2}\pm\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-2}=2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$

그런데 $0<x<\sqrt{2}$이므로 $x=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$\therefore\ \triangle DEF=\square ABCD-2\triangle AED-\triangle EBF$

$=(\sqrt{2})^2-2\times\left(\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}-x)^2$

$=2-\sqrt{2}x-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x-1$

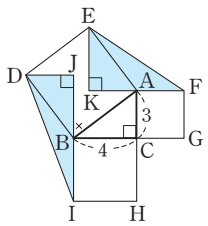
$=-\frac{1}{2}x^2+1$

$=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+1$

$=4\sqrt{3}-6$

07 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BI}$의 연장선 위에 내린 수선의 발을 J라 하면



$\triangle ABC$와 $\triangle DBJ$에서

$\angle ACB=\angle DJB=90^\circ$,

$\overline{AB}=\overline{DB}=5$,

$\angle ABC=90^\circ-\angle JBA=\angle DBJ$

$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle DBJ$(RHA 합동)

$\therefore\ \overline{DJ}=\overline{AC}=3,\ \overline{BJ}=\overline{BC}=4$

따라서 $\triangle DIJ$에서 $\overline{DI}^2=3^2+(4+4)^2=73$

또 점 E에서 $\overline{AF}$의 연장선 위에 내린 수선의 발을 K라 하고, 같은 방법으로 하면

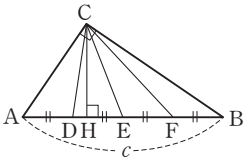
$\triangle ABC\equiv\triangle AEK$(RHA 합동)

$\therefore\ \overline{AK}=\overline{AC}=3,\ \overline{EK}=\overline{BC}=4$

따라서 $\triangle EKF$에서 $\overline{EF}^2=4^2+(3+3)^2=52$

$\therefore\ \overline{DI}^2+\overline{EF}^2=73+52=125$

08 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FB}=\frac{c}{4}$



점 E는 직각삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}=\frac{c}{2}$

위의 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{DH}=x$라 하면

△CDH와 △CEH에서

$\overline{CD}^2-\overline{DH}^2=\overline{CE}^2-\overline{EH}^2$이므로

$\overline{CD}^2-x^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{4}-x\right)^2$

$\therefore\ \overline{CD}^2=\frac{c^2}{4}-\left(\frac{c^2}{16}-\frac{cx}{2}+x^2\right)+x^2$

$=\frac{3c^2}{16}+\frac{cx}{2}$

또 △CFH와 △CEH에서

$\overline{CF}^2-\overline{FH}^2=\overline{CE}^2-\overline{EH}^2$이므로

$\overline{CF}^2-\left(\frac{c}{2}-x\right)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{4}-x\right)^2$

$\therefore\ \overline{CF}^2=\frac{c^2}{4}-\left(\frac{c^2}{16}-\frac{cx}{2}+x^2\right)+\left(\frac{c^2}{4}-cx+x^2\right)$

$=\frac{7c^2}{16}-\frac{cx}{2}$

$\therefore\ s=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2+\overline{CF}^2$

$=\left(\frac{3c^2}{16}+\frac{cx}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{7c^2}{16}-\frac{cx}{2}\right)$

$=\frac{7}{8}c^2$

$\therefore\ \frac{s}{c^2}=\frac{7}{8}$

09 △ABH∽△BCH(AA 닮음)이고 닮음비는 둘레의 길이의 비와 같으므로 두 삼각형의 닮음비는 24 : 16=3 : 2이다.

$x=3k\,(k>0)$라 하면 $w=2k$이므로

△ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(3k)^2+(2k)^2}=\sqrt{13}k$

$\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BH}$이므로

$3k\times2k=\sqrt{13}k\times\overline{BH}$

$\therefore\ \overline{BH}=\frac{6\sqrt{13}}{13}k=z$ … ㉠

△ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{(3k)^2-\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}k\right)^2}$

$=\frac{9\sqrt{13}}{13}k=y$

$x+y+z=24$이므로

$3k+\frac{9\sqrt{13}}{13}k+\frac{6\sqrt{13}}{13}k=24$

$\frac{15\sqrt{13}+39}{13}k=24$

$\therefore\ k=\frac{13\times24}{15\sqrt{13}+39}=\frac{10\sqrt{13}-26}{3}$

㉠에서 $z=\frac{6\sqrt{13}}{13}\times\frac{10\sqrt{13}-26}{3}=20-4\sqrt{13}$

$\therefore\ x+y+z+w+s=24+16-z$

$=40-(20-4\sqrt{13})$

$=20+4\sqrt{13}$

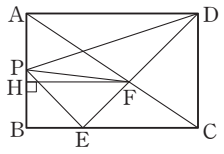
10 $\overline{BE}:\overline{EC}=1:2$이므로

$\overline{EC}:\overline{AD}=2:3$

△CFE∽△AFD(AA 닮음)이므로

$\overline{CF}:\overline{AF}=2:3$,

$\overline{EF}:\overline{DF}=2:3$



$\overline{BE}=a$라 하면 $\overline{BC}=3a$이고, 위의 그림과 같이 점 F에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HF}/\!/\overline{BC}$이므로

$\overline{AF}:\overline{AC}=\overline{HF}:\overline{BC}$에서

$3:5=\overline{HF}:3a$ $\quad\therefore\ \overline{HF}=\frac{9}{5}a$

$\overline{PH}=x$, $\overline{AB}=5b$라 하면 $\overline{AH}=3b$, $\overline{HB}=2b$이므로

$\overline{AP}=3b-x$, $\overline{PB}=2b+x$ … ㉠

△APD에서 $\overline{PD}^2=(3a)^2+(3b-x)^2$

△PBE에서 $\overline{PE}^2=(2b+x)^2+a^2$

△PHF에서 $\overline{PF}^2=x^2+\left(\frac{9}{5}a\right)^2$

$\therefore\ \overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$

$=(3a)^2+(3b-x)^2+(2b+x)^2+a^2+x^2+\left(\frac{9}{5}a\right)^2$

$=3x^2-2bx+13b^2+\frac{331}{25}a^2$

$=3\left(x-\frac{b}{3}\right)^2+\frac{331}{25}a^2+\frac{38}{3}b^2$

따라서 $\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$의 값은 $x=\frac{b}{3}$일 때, 최솟값을 가지므로 ㉠에서

$\overline{AP}=3b-\frac{b}{3}=\frac{8}{3}b$

$\therefore\ \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{8}{3}b}{5b}=\frac{8}{15}$

11 $a^3b-a^2b-a^3-b^3+b=ab-a^2-ab^3+ab^2-a-b^2+1$에서

$a^3(b-1)-a^2(b-1)+ab^2(b-1)-a(b-1)$

$-b^2(b-1)+(b-1)=0$

$(b-1)(a^3-a^2+ab^2-a-b^2+1)=0$

$(b-1)\{a^3-a^2+a(b^2-1)-b^2+1\}=0$

$(b-1)\{a^2(a-1)+(b^2-1)(a-1)\}=0$

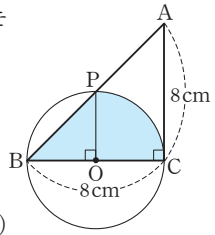
$(b-1)(a-1)(a^2+b^2-1)=0$

그런데 $a\neq1$, $b\neq1$이므로 $a^2+b^2-1=0$이다.

즉, $a^2+b^2=1^2$을 만족하므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 1인 직각삼각형이다.

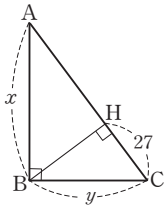
$\therefore$ (삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}ab$

12 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2\le\overline{BC}^2$이므로 $\triangle PBC$는 $\angle P\ge90^\circ$인 삼각형이다.
따라서 점 P가 위치할 수 있는 영역은 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 원에서 색칠한 부분이다.



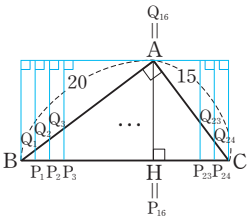
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)
$=\triangle PBO+$(사분원 POC의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{4}\times(\pi\times4^2)$
$=8+4\pi\,(\text{cm}^2)$

13 오른쪽 그림과 같이
$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면
$\overline{BC}^2=\overline{HC}\times\overline{AC}$에서
$y^2=27\times\overline{AC}$
y가 자연수이므로 $27\times\overline{AC}$는 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.



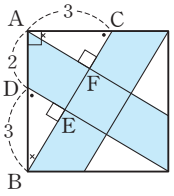
$27\times\overline{AC}=3^3\times\overline{AC}$이므로
$\overline{AC}=3\times n^2$ (n은 자연수)으로 놓으면
$y^2=3^4\times n^2$이므로 $y=3^2n$ $\cdots$ ㉠
또 $\overline{BA}^2=\overline{AH}\times\overline{AC}$에서
$x^2=(\overline{AC}-\overline{CH})\times\overline{AC}$
$=(3n^2-27)\times3n^2$
$=3^2\times n^2\times(n^2-9)$
x가 자연수이므로 $3^2\times n^2\times(n^2-9)$는 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.
따라서 $n^2-9=k^2$(k는 자연수)으로 놓으면
$n^2-k^2=9$, $(n+k)(n-k)=9$
이때 n, k는 모두 자연수이므로
$n+k=9$, $n-k=1$
$\therefore$ $n=5$, $k=4$
$n=5$를 ㉠에 대입하면
$y=3^2\times5=45$ $\therefore$ $\overline{BC}=45$
$\triangle BHC$에서 $\overline{BH}=\sqrt{45^2-27^2}=36$
$\therefore$ $\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5}$

14 $\triangle ABC$에서
$\overline{AB}=\sqrt{15^2+20^2}=25$이므로
$\overline{P_iP_{i+1}}=1$ $(1\le i\le23)$
오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로
$20\times15=25\times\overline{AH}$ $\therefore$ $\overline{AH}=12$
$\triangle ABH$에서 $\overline{BH}=\sqrt{20^2-12^2}=16$
따라서 점 H는 점 P_{16}이고, 점 A는 점 Q_{16}이다.
$\therefore$ $\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$
$=(\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots+\overline{P_{15}Q_{15}})+\overline{P_{16}Q_{16}}$
$+(\overline{P_{17}Q_{17}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}})$
$=\left(15\times12\times\frac{1}{2}\right)+12+\left(8\times12\times\frac{1}{2}\right)$
$=90+12+48$
$=150$

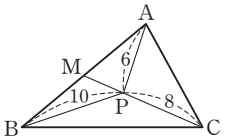
15 $\triangle ABC$에서
$\overline{BC}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times5=\frac{15}{2}$이므로



$\frac{1}{2}\times\sqrt{34}\times\overline{AF}=\frac{15}{2}$
$\therefore$ $\overline{AF}=\frac{15}{\sqrt{34}}$
$\triangle AFC\equiv\triangle BED$(RHA 합동)이므로
$\overline{BE}=\overline{AF}=\frac{15}{\sqrt{34}}$
또 $\overline{AB}^2=\overline{BF}\times\overline{BC}$에서 $\overline{BF}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}}=\frac{25}{\sqrt{34}}$
$\therefore$ $\overline{EF}=\overline{BF}-\overline{BE}$
$=\frac{25}{\sqrt{34}}-\frac{15}{\sqrt{34}}=\frac{10}{\sqrt{34}}$
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)
$=2\times$(평행사변형의 넓이)$-$(작은 정사각형의 넓이)
$=2\times(2\times5)-\left(\frac{10}{\sqrt{34}}\right)^2$
$=20-\frac{100}{34}$
$=\frac{580}{34}=\frac{290}{17}$

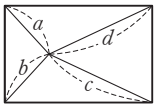
[다른 풀이]
$\overline{AF}=\frac{15}{\sqrt{34}}$이므로
$\triangle AFC$에서 $\overline{CF}=\sqrt{3^2-\left(\frac{15}{\sqrt{34}}\right)^2}=\frac{9}{\sqrt{34}}$
또 4개의 직각삼각형은 모두 합동이므로
(색칠한 부분의 넓이)
$=$(큰 정사각형의 넓이)$-4\times$(직각삼각형의 넓이)
$=5^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{15}{\sqrt{34}}\times\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$
$=25-\frac{135}{17}=\frac{290}{17}$

16 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$에 의해 삼각형의 넓이가 삼등분되므로 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이다.
오른쪽 그림과 같이 $\overline{CP}$의 연장선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{CM}$은 중선이고,



$\overline{CP}:\overline{PM}=2:1$에서
$8:\overline{PM}=2:1$
$\therefore$ $\overline{PM}=4$
따라서 $\triangle ABP$에서 파포스 정리에 의해
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$
$6^2+10^2=2(4^2+\overline{AM}^2)$
$\overline{AM}^2=52$
$\therefore$ $\overline{AM}=2\sqrt{13}$ ($\because$ $\overline{AM}>0$)
$\therefore$ $\overline{AB}=2\overline{AM}=4\sqrt{13}$

17 각 꼭짓점에서 막대까지의 거리를 a, b, c, d라 하면 널빤지를 위에서 바라본 모양은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a^2+c^2=b^2+d^2$

이때 막대의 높이를 l, 나머지 하나의 줄의 길이를 x라 하면

$a^2+l^2=5^2$ … ㉠

$b^2+l^2=7^2$ … ㉡

$c^2+l^2=9^2$ … ㉢

$d^2+l^2=x^2$ … ㉣

㉠+㉢을 하면 $a^2+c^2+2l^2=5^2+9^2$

㉡+㉣을 하면 $b^2+d^2+2l^2=7^2+x^2$

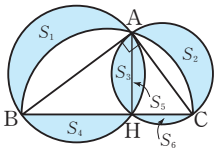
그런데 $a^2+c^2=b^2+d^2$이므로

$5^2+9^2=7^2+x^2$, $x^2=57$

$\therefore x=\sqrt{57}\ (\because x>0)$

따라서 나머지 하나의 줄의 길이는 $\sqrt{57}$이다.

18 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AH}$를 긋고, 색칠한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6이라 하면



(색칠한 부분의 넓이)

$=(S_1+S_2)+(S_4+S_5)+(S_3+S_6)$

$=\triangle ABC+\{(\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원$)-\triangle ABH\}$

$\quad+\{(\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원$)-\triangle AHC\}$

$=\{\triangle ABC-(\triangle ABH+\triangle AHC)\}$

$\quad+\{(\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원$)+(\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원$)\}$

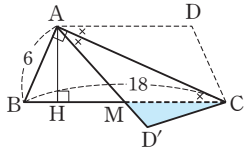
$=(\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원$)$

$=\frac{1}{2}\times\pi\times8^2=32\pi\ (\text{cm}^2)$

19 $\angle DAC=\angle MAC$ (접은 각)

$\quad=\angle MCA$ (엇각)

이므로 $\triangle AMC$는 이등변삼각형이다.



$\therefore \overline{AM}=\overline{CM}$

따라서 $\overline{BM}=\overline{CM}=\overline{AM}=9$이므로

점 M은 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 외심이다.

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$이므로

$6^2=\overline{BH}\times18$ $\quad\therefore \overline{BH}=2$

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}-2\overline{BH}=18-4=14$

$\triangle ABH$에서 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AH}$

$\quad=\frac{1}{2}\times14\times4\sqrt{2}=28\sqrt{2}$

$\triangle AMC=\frac{1}{2}\times\overline{MC}\times\overline{AH}$

$\quad=\frac{1}{2}\times9\times4\sqrt{2}=18\sqrt{2}$

$\therefore \triangle MD'C=\triangle AD'C-\triangle AMC$

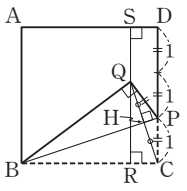
$\quad=\triangle ADC-\triangle AMC$

$\quad=28\sqrt{2}-18\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

20 $\triangle BPQ$에서

$\overline{BP}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 Q, C에서 $\overline{BP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle QPH\backsim\triangle BPQ$ (AA 닮음)이므로 $\overline{QH}:\overline{BQ}=\overline{QP}:\overline{BP}$에서



$\overline{QH}:3=1:\sqrt{10}$

$\therefore \overline{QH}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \overline{QC}=2\overline{QH}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

또 점 Q에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 S, R라 하면

$\triangle QCR\backsim\triangle BPQ$ (AA 닮음)이므로

$\overline{QC}:\overline{BP}=\overline{QR}:\overline{BQ}$에서

$\frac{3\sqrt{10}}{5}:\sqrt{10}=\overline{QR}:3$

$\therefore \overline{QR}=\frac{9}{5}$

따라서 점 Q에서 $\overline{AD}$까지의 거리는

$\overline{QS}=3-\frac{9}{5}=\frac{6}{5}$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.37~38

01 2 **02** $\frac{25}{3}$ **03** $5+\sqrt{7}$ **04** $\frac{16\sqrt{15}}{5}$ **05** 86 **06** $\frac{10}{3}$

01 $\overline{AH}=x$, $\overline{AE}=y$, $\overline{BF}=z$, $\overline{CG}=w$ $(0<x,\ y,\ z,\ w<1)$라 하면

$\overline{HD}=1-x$, $\overline{EB}=1-y$, $\overline{FC}=1-z$, $\overline{GD}=1-w$

이므로

$a^2+b^2+c^2+d^2$

$=x^2+y^2+(1-y)^2+z^2+(1-z)^2+w^2$

$\quad+(1-w)^2+(1-x)^2$

$=x^2+y^2+1-2y+y^2+z^2+1-2z+z^2+w^2$

$\quad+1-2w+w^2+1-2x+x^2$

$=2x^2-2x+1+2y^2-2y+1+2z^2-2z+1+2w^2-2w+1$

이때 $2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ (0<x<1)$이므로

$x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \frac{1}{2}\le2x^2-2x+1<1$ … ㉠

같은 방법으로 하면

$\frac{1}{2}\le2y^2-2y+1<1$ … ㉡

$\frac{1}{2}\le2z^2-2z+1<1$ … ㉢

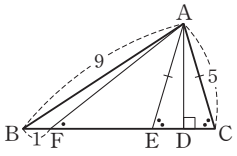
$\frac{1}{2}\le2w^2-2w+1<1$ … ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서 $4\times\frac{1}{2}\le a^2+b^2+c^2+d^2<4\times1$

$\therefore\ 2\le a^2+b^2+c^2+d^2<4$

따라서 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 최솟값은 2이다.

02 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라 하고, $\overline{AC}=\overline{AE}$가 되도록 점 E를 잡으면



△ADE≡△ADC(RHS 합동)

이므로 $\overline{ED}=\overline{CD}$

이때 ∠C=2∠AFC이고

∠C=∠AEC이므로 ∠AFE=∠FAE

$\therefore\ \overline{FE}=\overline{AE}=\overline{AC}=5$

$\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$이므로

$9^2-(6+\overline{ED})^2=5^2-\overline{ED}^2$

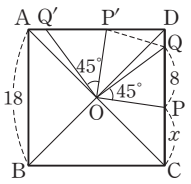
$81-36-12\overline{ED}-\overline{ED}^2=25-\overline{ED}^2$

$12\overline{ED}=20\qquad\therefore\ \overline{ED}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ \overline{FC}=\overline{FE}+2\overline{ED}=5+\frac{10}{3}=\frac{25}{3}$

03 $\overline{CP}=x$라 하면 $\overline{DQ}=10-x$

오른쪽 그림과 같이 △OPQ를 점 O를 중심으로 하여 $\overline{PQ}$가 $\overline{AD}$ 위에 오도록 회전시킨 삼각형을 △OP′Q′이라 하면



$\overline{P'D}=x$, $\overline{AQ'}=10-x$

또 ∠POQ=45°이므로 ∠COP+∠DOQ=45°

∠DOP′=∠COP이므로 ∠QOP′=45°

$\therefore$ △OPQ≡△OP′Q(SAS 합동)

$\therefore\ \overline{P'Q}=8$

△DP′Q에서

$(10-x)^2+x^2=8^2,\ x^2-10x+18=0$

$\therefore\ x=5\pm\sqrt{7}$

$\therefore\ \overline{CP}=5+\sqrt{7}\ (\because\ \overline{CP}>\overline{DQ})$

04 △ABC의 세 수선에 대응하는 세 변의 길이를 각각 a, b, $c\,(a>b>c)$라 하고, 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times3a=\frac{1}{2}\times4b=\frac{1}{2}\times6c$이므로

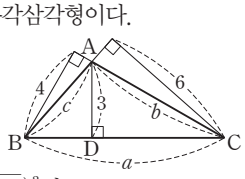
$2S=3a=4b=6c$

$\therefore\ a:b:c=4:3:2$

이때 $a=4x$, $b=3x$, $c=2x\,(x>0)$라 하면

$(2x)^2+(3x)^2<(4x)^2$이므로 둔각삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 △ABC를 그리고 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라 하면



△ABC에서

$(2x)^2-\overline{BD}^2=(3x)^2-(4x-\overline{BD})^2$이므로

$8x\times\overline{BD}=11x^2\qquad\therefore\ \overline{BD}=\frac{11}{8}x\ (\because\ x>0)$

△ABD에서

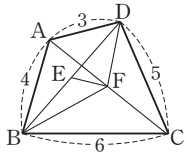
$(2x)^2-\left(\frac{11}{8}x\right)^2=3^2$이므로

$\frac{135}{64}x^2=9,\ x^2=\frac{64}{15}\qquad\therefore\ x=\frac{8\sqrt{15}}{15}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times a\times3$

$=\frac{1}{2}\times\left(4\times\frac{8\sqrt{15}}{15}\right)\times3=\frac{16\sqrt{15}}{5}$

05 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BF}$와 $\overline{DF}$를 그으면 △ABC에서 파포스 정리에 의해



$4^2+6^2=2(\overline{BF}^2+\overline{AF}^2)\qquad\cdots$ ㉠

△ADC에서 파포스 정리에 의해

$3^2+5^2=2(\overline{DF}^2+\overline{AF}^2)\qquad\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$4^2+6^2+3^2+5^2=2(\overline{BF}^2+\overline{DF}^2)+4\overline{AF}^2$

△BFD에서 파포스 정리에 의해

$\overline{BF}^2+\overline{DF}^2=2(\overline{EF}^2+\overline{DE}^2)\qquad\cdots$ ㉢

또 $\overline{AC}=2\overline{AF}$이므로 $\overline{AC}^2=4\overline{AF}^2\qquad\cdots$ ㉣

$\overline{BD}=2\overline{DE}$이므로 $\overline{BD}^2=4\overline{DE}^2\qquad\cdots$ ㉤

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2$

$=4\overline{AF}^2+4\overline{DE}^2+4\overline{EF}^2\ (\because$ ㉣, ㉤)

$=4\overline{AF}^2+4(\overline{DE}^2+\overline{EF}^2)$

$=4\overline{AF}^2+2(\overline{BF}^2+\overline{DF}^2)\ (\because$ ㉢)

$=4^2+6^2+3^2+5^2=86$

06 $\overline{RC}=x$라 하면

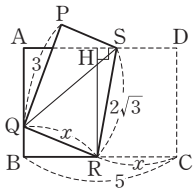
$\overline{BR}=5-x$이므로

△QBR에서

$\overline{QB}=\sqrt{x^2-(5-x)^2}$

$=\sqrt{10x-25}$

$\therefore\ \overline{QA}=3-\sqrt{10x-25}$



위의 그림과 같이 $\overline{QS}$를 그으면

△QAS에서 $\overline{QS}^2=\overline{QA}^2+\overline{AS}^2\qquad\cdots$ ㉠

△QPS에서 $\overline{QS}^2=\overline{QP}^2+\overline{PS}^2\qquad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{QA}^2+\overline{AS}^2=\overline{QP}^2+\overline{PS}^2$

$(3-\sqrt{10x-25})^2+\overline{AS}^2=3^2+(5-\overline{AS})^2$

$9-6\sqrt{10x-25}+10x-25+\overline{AS}^2$

$=9+25-10\overline{AS}+\overline{AS}^2$

$\therefore\ \overline{AS}=5-x+\frac{3}{5}\sqrt{10x-25}$

또 위의 그림과 같이 점 R에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △HRS에서

$\overline{RS}^2=\overline{HR}^2+\overline{HS}^2$이므로

$(2\sqrt{3})^2=3^2+(\overline{AS}-\overline{AH})^2$

$(2\sqrt{3})^2=3^2+\left(\frac{3}{5}\sqrt{10x-25}\right)^2$

$12=9+\frac{9}{25}(10x-25)\qquad\therefore\ x=\frac{10}{3}$

$\therefore\ \overline{RC}=\frac{10}{3}$

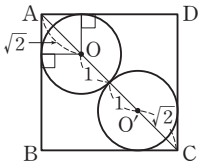
2 피타고라스 정리의 활용

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.41~46

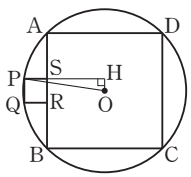
1-1 $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **1-2** $6+4\sqrt{2}$ **1-3** 2
2-1 $6\sqrt{3}$ **2-2** $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **2-3** $6(3\sqrt{3}-\pi)$
2-4 $\frac{27\sqrt{3}}{32}$ **2-5** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **2-6** $\sqrt{15}$ **3-1** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
3-2 1 **3-3** $3\sqrt{3}-3$ **4-1** $2\sqrt{3}-1$
4-2 $64(\pi-2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$ **4-3** $32(\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2$
4-4 $6\sqrt{3}-2\pi$ **5-1** $\sqrt{85}$ **5-2** $(3+2\sqrt{41})\,\text{km}$
5-3 $10\sqrt{2}$ **6-1** $4\sqrt{3}\,\text{cm}$ **6-2** $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$
6-3 40 **7-1** $\frac{32}{3}\,\text{cm}^3$ **7-2** $2\sqrt{2}$ **7-3** $\frac{2}{5}$
7-4 $40\sqrt{2}$ **8-1** $\sqrt{370}$ **8-2** $2\sqrt{61}\pi$ **8-3** $2\sqrt{7}$
8-4 $\frac{16\sqrt{13}}{13}+\frac{18}{5}$

1-1 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4\,(\text{cm})$
△ABC에서
$2^2=\overline{AE}\times 4$ $\therefore\ \overline{AE}=1\,(\text{cm})$
△ABE≡△CDF (RHA 합동)이므로 $\overline{AE}=\overline{CF}$
$\therefore\ \overline{EF}=4-(1+1)=2\,(\text{cm})$
△ABE에서 $\overline{BE}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}\,(\text{cm})$
$\therefore\ \triangle BEF=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

1-2 오른쪽 그림에서
$\overline{AO}=\overline{O'C}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
$\overline{AC}=\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$
정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면
$\overline{AC}=\sqrt{2}x$이므로
$\sqrt{2}x=2+2\sqrt{2}$ $\therefore\ x=2+\sqrt{2}$
$\therefore\ \square ABCD=(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$



1-3 $\overline{AC}=10\sqrt{2}$이므로
$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AC}=5\sqrt{2}$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{PS}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면
$\overline{OH}=\frac{x}{2}$, $\overline{PH}=x+5$

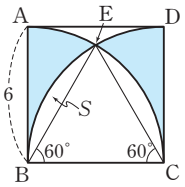


△POH에서 $(x+5)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=(5\sqrt{2})^2$
$x^2+10x+25+\frac{x^2}{4}=50$, $x^2+8x-20=0$
$(x+10)(x-2)=0$ $\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$
따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.

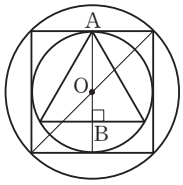
2-1 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$
$=\frac{1}{2}\times 12\times\overline{PQ}+\frac{1}{2}\times 12\times\overline{PR}$
$=6(\overline{PQ}+\overline{PR})$
이때 $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2=36\sqrt{3}$이므로
$6(\overline{PQ}+\overline{PR})=36\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{PR}=6\sqrt{3}$

2-2 $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2=36\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$이므로
$\overline{AB}=12\,(\text{cm})$ $(\because\ \overline{AB}>0)$
$\therefore\ \overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 12=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$
점 G는 △ABC의 무게중심이므로
$\overline{AG}=\frac{2}{3}\times 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$
이때 $\overline{AF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3}=6\,(\text{cm})$이고
점 G′은 △AGE의 무게중심이므로
$\overline{AG'}=\frac{2}{3}\times 6=4\,(\text{cm})$
$\therefore\ \triangle AG'H=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

2-3 오른쪽 그림과 같이 $\overset{\frown}{AC}$와 $\overset{\frown}{BD}$가 만나는 점을 E라 하면
$\overline{AB}=\overline{EB}=\overline{EC}=\overline{BC}=6$이므로
△EBC는 정삼각형이다.
오른쪽 그림에서
$S=$(부채꼴 CEB의 넓이)$-\triangle EBC$
$=\pi\times 6^2\times\frac{60}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2$
$=6\pi-9\sqrt{3}$
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)
$=2\{$(부채꼴 BEA의 넓이)$-S\}$
$=2\left\{\pi\times 6^2\times\frac{30}{360}-(6\pi-9\sqrt{3})\right\}$
$=2(3\pi-6\pi+9\sqrt{3})$
$=6(3\sqrt{3}-\pi)$



2-4 큰 원의 지름의 길이는 정사각형의 대각선의 길이와 같으므로 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면
$\sqrt{2}a=3$ $\therefore\ a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$
(작은 원의 지름의 길이)$=a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$
이때 점 O는 정삼각형의 무게중심이므로
(정삼각형의 높이)$=\overline{AB}=\frac{3}{2}\overline{AO}$
$=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{8}$

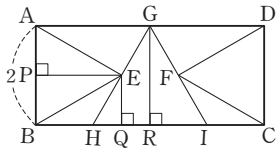


정삼각형의 한 변의 길이를 b라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{9\sqrt{2}}{8}$ $\therefore\ b=\frac{3\sqrt{6}}{4}$

$\therefore$ (정삼각형의 넓이)$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{27\sqrt{3}}{32}$

2-5



위의 그림과 같이 점 E에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 P라 하고, 두 점 E, G에서 $\overline{HI}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면

$\overline{BQ}=\overline{PE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

$\overline{GR}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{HI}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{HI}=2$ $\therefore\ \overline{HI}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{HR}=\frac{1}{2}\overline{HI}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

또 $\overline{EH}=\overline{EG}$, $\overline{EQ}/\!/\overline{GR}$이므로

△EHQ와 △GHR는 닮음비가 1 : 2인 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{HQ}=\overline{QR}$이므로 $\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{HR}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{BC}=2\overline{BR}=2(\overline{BQ}+\overline{QR})$

$=2\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

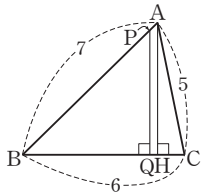
2-6 헤론의 공식에 의해

$s=\frac{7+6+5}{2}=9$이므로

△ABC

$=\sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)}$

$=6\sqrt{6}$



위의 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\frac{1}{2}\times6\times\overline{AH}=6\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{AH}=2\sqrt{6}$

△ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}=5$

△ABH∽△PBQ(AA 닮음)이므로

$\overline{AH}:\overline{PQ}=\overline{BH}:\overline{BQ}$에서

$2\sqrt{6}:\overline{PQ}=5:\overline{BQ}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{2\sqrt{6}}{5}\overline{BQ}$

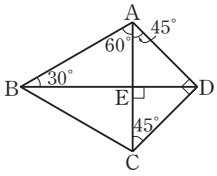
그런데 $\overline{PQ}$가 △ABC의 넓이를 이등분하므로

$\triangle PBQ=\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}\overline{BQ}=3\sqrt{6}$

$\overline{BQ}^2=15$

$\therefore\ \overline{BQ}=\sqrt{15}(\because\ \overline{BQ}>0)$

3-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 E라 하고, $\overline{AE}=a$라 하면



△ABE에서

$a:\overline{BE}=1:\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{BE}=\sqrt{3}a$

△AED에서

$a:\overline{ED}=1:1$ $\therefore\ \overline{ED}=a$

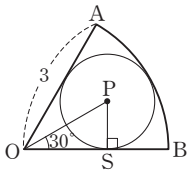
$a:\overline{AD}=1:\sqrt{2}$ $\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{2}a$

$\overline{BD}=\overline{BE}+\overline{ED}=\sqrt{3}a+a=(\sqrt{3}+1)a$

$\overline{CD}=\overline{AD}=\sqrt{2}a$

$\therefore\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{(1+\sqrt{3})a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

3-2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$를 긋고 점 P에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 S라 하자.



원의 반지름의 길이를 r라 하면

△OPS에서

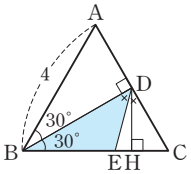
$(3-r):r=2:1$

$2r=3-r$, $3r=3$

$\therefore\ r=1$

3-3 △ABD에서

$4:\overline{BD}=2:\sqrt{3}$ $\therefore\ \overline{BD}=2\sqrt{3}$



$\overline{DC}=4\times\frac{1}{2}=2$

$\overline{BE}=x$라 하면

△BDC에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{BE}:\overline{CE}$이므로

$2\sqrt{3}:2=x:(4-x)$, $2x=8\sqrt{3}-2\sqrt{3}x$

$(1+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=6-2\sqrt{3}$

위의 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

△BDH에서 $2\sqrt{3}:\overline{DH}=2:1$

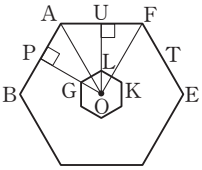
$\therefore\ \overline{DH}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \triangle BDE=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{DH}$

$=\frac{1}{2}\times(6-2\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}-3$

4-1 오른쪽 그림과 같이 점 A, F, P, U와 정육각형의 중심 O를 각각 연결하면 △AOF는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로



$\overline{OU}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

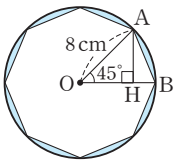
△GOL은 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\overline{OL}=1$

$\therefore\ \overline{UL}=\overline{OU}-\overline{OL}$

$=2\sqrt{3}-1$

4-2 오른쪽 그림과 같이 정팔각형의 이웃하는 두 꼭짓점을 A, B라 하고, 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle AOB=360^\circ\div 8=45^\circ$이므로

$\triangle AOH$에서

$8 : \overline{AH}=\sqrt{2} : 1$

$\therefore \overline{AH}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}$

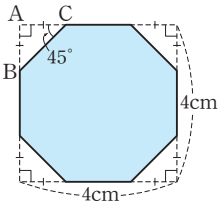
$=\frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{2}$

$=16\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\pi\times 8^2-16\sqrt{2}\times 8$

$=64(\pi-2\sqrt{2})\,(\text{cm}^2)$

4-3 정팔각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서



$\overline{AB} : x=1 : \sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}x\,(\text{cm})$

이때 정사각형의 한 변의 길이가 4 cm이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}x+x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=4,\ (1+\sqrt{2})x=4$

$\therefore x=4(\sqrt{2}-1)\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4(\sqrt{2}-1)$

$=4-2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

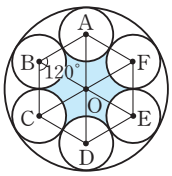
$\therefore$ (정팔각형의 넓이)

$=4^2-\left\{\frac{1}{2}\times(4-2\sqrt{2})\times(4-2\sqrt{2})\right\}\times 4$

$=16-(48-32\sqrt{2})$

$=32(\sqrt{2}-1)\,(\text{cm}^2)$

4-4 원 O에 내접하는 여섯 개의 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{AB}=2r$,

$\overline{BO}=3-r$

$\triangle ABO$는 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BO}$에서

$2r=3-r,\ 3r=3$

$\therefore r=1$

$\therefore$ (정육각형 ABCDEF의 넓이)$=6\triangle ABO$

$=6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$

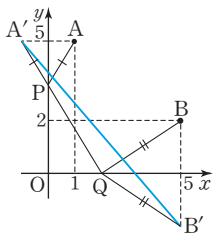
$=6\sqrt{3}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=6\sqrt{3}-2\times$(작은 원의 넓이)

$=6\sqrt{3}-2\times(\pi\times 1^2)$

$=6\sqrt{3}-2\pi$

5-1 오른쪽 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



A′(−1, 5), B′(5, −2)

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}$

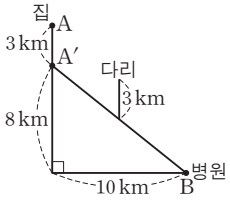
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{B'Q}$

$\geq\overline{A'B'}$

$=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+\{(-2)-5\}^2}=\sqrt{85}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{85}$이다.

5-2 오른쪽 그림과 같이 점 A를 강의 폭 만큼 이동한 점을 A′이라 하면 (집에서 병원까지의 최단 거리)

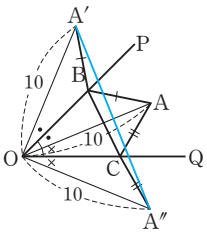


$=\overline{AA'}+\overline{A'B}$

$=3+\sqrt{8^2+10^2}$

$=3+2\sqrt{41}\,(\text{km})$

5-3 오른쪽 그림과 같이 점 A를 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A′, A″이라 하고, $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ 위의 임의의 점을 각각 B, C라 하면



$\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{AC}=\overline{A''C}$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}\geq\overline{A'A''}$

이때 $\angle A'OA''=2(\bullet+\times)=90^\circ$이므로

$\overline{A'A''}=10\sqrt{2}$

따라서 구하는 최단 거리는 $10\sqrt{2}$이다.

6-1 구의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\frac{4}{3}\pi r^3=288\pi$

$\therefore r=6\,(\text{cm})$

따라서 정육면체의 대각선의 길이는

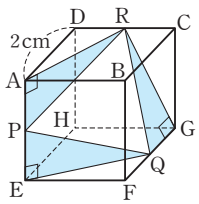
$6\times 2=12\,(\text{cm})$이므로

정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$\sqrt{3}x=12$

$\therefore x=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

6-2 오른쪽 그림에서



$\overline{AR}=\overline{EQ}=\overline{GR}$

$=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,(\text{cm})$

$\triangle APR\equiv\triangle EPQ\equiv\triangle GQR$이므로

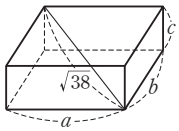
$\overline{PR}=\overline{PQ}=\overline{QR}$

$=\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle PQR$는 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$ cm인 정삼각형이므로

$\triangle PQR=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{6})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm}^2)$

6-3 오른쪽 그림과 같이 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는



$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{38}$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=38$

겉넓이는 $2(ab+bc+ca)=62$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

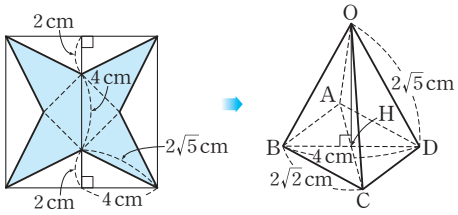
$(a+b+c)^2=38+62=100$

$\therefore\ a+b+c=10$

따라서 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times10=40$

7-1



완성된 입체도형은 위의 그림과 같은 정사각뿔이므로

$\overline{OD}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}\,(\text{cm})$

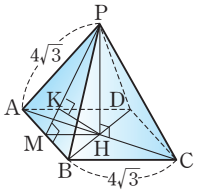
정사각뿔의 밑면의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$\sqrt{2}x=4 \qquad \therefore\ x=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\therefore$ (높이)$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4\,(\text{cm})$

$\therefore$ (부피)$=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times4=\frac{32}{3}\,(\text{cm}^3)$

7-2 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=6$

$\overline{MH}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\triangle PMH$에서

$\overline{PH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

이때 점 K는 $\overline{PM}$ 위에 있으므로

$\overline{PM}\times\overline{KH}=\overline{MH}\times\overline{PH}$에서

$6\times\overline{KH}=2\sqrt{3}\times2\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{KH}=2\sqrt{2}$

7-3 두 원뿔 A, B의 밑면의 반지름의 길이를 각각 r_A, r_B라 하면

$2\pi r_A=2\pi\times12\times\frac{240}{360}$에서 $r_A=8$

$2\pi r_B=2\pi\times12\times\frac{120}{360}$에서 $r_B=4$

즉, $h_A=\sqrt{12^2-8^2}=4\sqrt{5}$, $h_B=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$이므로

$\frac{h_B}{h_A}=\frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{10}$

$\therefore\ a=\frac{2}{5}$

7-4 $\overline{AE}=\overline{AF}=\frac{1}{2}\times8=4$, $\overline{AG}=\frac{1}{4}\times8=2$

$\triangle AGF$에서 $4^2=2^2+(2\sqrt{3})^2$이므로

$\angle AGF=90^\circ$

$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4$이고, $\triangle EFG$는 이등변삼각형이므로 점 G에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle EHG$에서

$\overline{GH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ \triangle EFG=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(사면체 A−EFG의 부피)$=\frac{1}{3}\times\triangle EFG\times\overline{AG}$

$=\frac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times2$

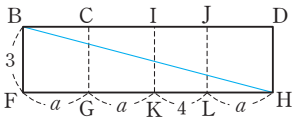
$=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(정사면체 A−BCD의 부피)$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times8^3=\frac{128\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ (남은 입체도형의 부피)$=\frac{128\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

$=40\sqrt{2}$

8-1 선이 지나는 부분의 전개도를 그리면 다음 그림과 같다.



$\overline{FG}=\overline{GK}=\overline{LH}=a$라 하면

$\overline{FD}$, $\overline{DK}$는 직육면체의 대각선이므로

$\overline{FD}=\overline{DK}=\sqrt{a^2+4^2+3^2}=\sqrt{a^2+25}$

$\triangle FDK$에서

$(a^2+25)+(a^2+25)=(2a)^2$

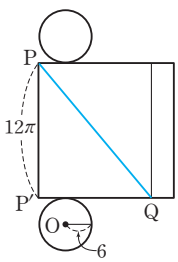
$2a^2+50=4a^2$, $2a^2=50$

$\therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$

따라서 $\overline{FH}=5+5+4+5=19$이므로

(최단 거리)$=\sqrt{\overline{FH}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{19^2+3^2}=\sqrt{370}$

8-2 원기둥의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



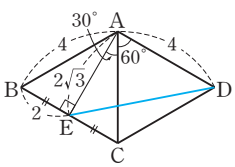
$\overline{PP'}=12\pi$,

$\overline{P'Q}=2\pi\times6\times\frac{300}{360}=10\pi$

따라서 $\triangle PP'Q$에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(10\pi)^2+(12\pi)^2}=2\sqrt{61}\pi$

8-3 선이 지나는 부분의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

이때 $\angle EAD=30^\circ+60^\circ=90^\circ$

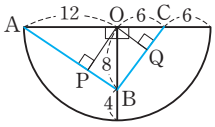
이므로 $\triangle AED$는 직각삼각형이다.

$\therefore\ \overline{ED}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=2\sqrt{7}$

8-4 원뿔의 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 $\angle x$라 하면

$2\pi\times12\times\frac{x}{360}=2\pi\times3$ $\therefore \angle x=90^\circ$

따라서 원뿔의 옆면의 전개도 2개를 이어 붙여 그리면 오른쪽 그림과 같다.



원뿔의 꼭짓점 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면 두 점 P, Q는 각각 원뿔의 꼭짓점에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 가장 가까운 점이므로 내리막길 구간은 $\overline{PB}$와 $\overline{QC}$이다.

$\triangle ABO$에서 $\overline{AB}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$이므로

$\overline{OB}^2=\overline{PB}\times\overline{BA}$에서 $8^2=\overline{PB}\times4\sqrt{13}$

$\therefore \overline{PB}=\frac{16\sqrt{13}}{13}$

$\triangle OBC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로

$\overline{OC}^2=\overline{QC}\times\overline{CB}$에서 $6^2=\overline{QC}\times10$

$\therefore \overline{QC}=\frac{18}{5}$

따라서 내리막길 구간의 길이의 합은

$\overline{PB}+\overline{QC}=\frac{16\sqrt{13}}{13}+\frac{18}{5}$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.47~50

01 $\frac{63}{2}$ **02** 168 **03** 13 **04** $\frac{\pi}{2}+3\sqrt{3}$

05 ③ **06** 6 **07** $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **08** $2\sqrt{7}$

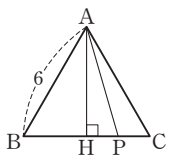
09 $(4-2\sqrt{2})\pi$ **10** $8\sqrt{2}$ **11** $2\sqrt{17}$

12 $3\sqrt{13}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **13** $\frac{4320}{1321}$초 후 **14** $\frac{56}{17}$

15 $\frac{15\sqrt{6}}{4}\,\text{cm}$ **16** $\sqrt{95}$ **17** $252\sqrt{2}$

18 $2+\sqrt{2}$ **19** $\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$ **20** 40 cm **21** $\sqrt{89}$

01 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

$\overline{BP}=x$라 하면

$\overline{PH}=x-3$, $\overline{CP}=6-x$이므로

$\triangle APH$에서

$\overline{AP}^2=(x-3)^2+(3\sqrt{3})^2$

$\therefore \overline{AP}^2+\overline{CP}^2=(x-3)^2+(3\sqrt{3})^2+(6-x)^2$

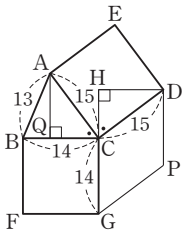
$=x^2-6x+9+27+36-12x+x^2$

$=2x^2-18x+72$

$=2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{63}{2}$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 $\frac{63}{2}$이다.

02 오른쪽 그림과 같이 평행사변형을 그리고 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q, 점 D에서 $\overline{CG}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle CDH\equiv\triangle CAQ$(RHA 합동)

$\therefore \overline{DH}=\overline{AQ}$

$\triangle ABC$에서 헤론의 공식에 의해

$s=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}=84$

따라서 $\frac{1}{2}\times14\times\overline{AQ}=84$이므로

$\overline{AQ}=12$ $\therefore \overline{DH}=\overline{AQ}=12$

$\therefore \square DCGP=\overline{CG}\times\overline{DH}=14\times12=168$

03 삼각형의 세 변의 길이가 연속하는 세 자연수이므로 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=x+1$, $\overline{CA}=x+2\,(x>8)$라 하면

헤론의 공식에 의해

$s=\frac{x+(x+1)+(x+2)}{2}=\frac{3x+3}{2}$이므로

$\triangle ABC$

$=\sqrt{\frac{3x+3}{2}\left(\frac{3x+3}{2}-x\right)\left\{\frac{3x+3}{2}-(x+1)\right\}\left\{\frac{3x+3}{2}-(x+2)\right\}}$

$=\sqrt{\frac{3x+3}{2}\times\frac{x+3}{2}\times\frac{x+1}{2}\times\frac{x-1}{2}}$

$=\frac{x+1}{4}\sqrt{3(x-1)(x+3)}$ … ㉠

이때 내접하는 원의 반지름의 길이가 4이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times x\times4+\frac{1}{2}\times(x+1)\times4+\frac{1}{2}\times(x+2)\times4$

$=6(x+1)$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{x+1}{4}\sqrt{3(x-1)(x+3)}=6(x+1)$

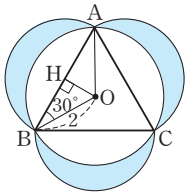
$\sqrt{3(x-1)(x+3)}=24$, $(x-1)(x+3)=192$

$x^2+2x-195=0$, $(x+15)(x-13)=0$

$\therefore x=13\,(\because x>8)$

따라서 가장 짧은 변의 길이는 13이다.

04 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle OHB$에서

$\overline{OB}:\overline{HB}=2:\sqrt{3}$이므로

$2:\overline{HB}=2:\sqrt{3}$ $\therefore \overline{HB}=\sqrt{3}$

$\overline{AB}=2\overline{HB}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

=3(AB를 지름으로 하는 반원의 넓이)

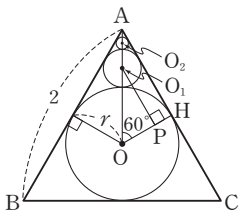
+$\triangle ABC$−(원 O의 넓이)

$=3\times\frac{1}{2}\times\pi\times(\sqrt{3})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2-\pi\times2^2$

$=\frac{9}{2}\pi+3\sqrt{3}-4\pi$

$=\frac{\pi}{2}+3\sqrt{3}$

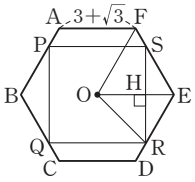
05 원 O의 반지름의 길이를 r, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$\triangle ABC$
$=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{r}{2}(2+2+2)$
$\sqrt{3}=3r \quad \therefore r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

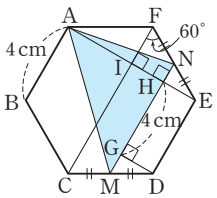
$\triangle AOH$에서
$\angle AOH=180^\circ-\angle OHA-\angle OAH$
$=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ$
따라서 $\triangle OPO_1$에서
$\overline{OO_1}:\overline{OP}=2:1,\ (r+r_1):(r-r_1)=2:1$
$2r-2r_1=r+r_1,\ 3r_1=r \quad \therefore r_1=\frac{1}{3}r$
같은 방법으로 하면
$r_2=\frac{1}{3}r_1,\ r_3=\frac{1}{3}r_2,\ r_4=\frac{1}{3}r_3,\ r_5=\frac{1}{3}r_4$이므로
$r_6=\left(\frac{1}{3}\right)^6\times r=\frac{1}{3^6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3^7}$

06 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 대각선의 교점 O에서 $\overline{RS}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면



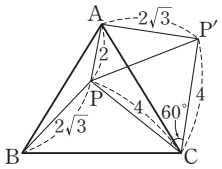
$\overline{OH}=\overline{HR}=\frac{x}{2},\ \overline{HE}=\overline{OE}-\frac{x}{2}$
또 정육각형의 한 내각의 크기는
$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$이므로
$\triangle HRE$의 세 내각의 크기는 $30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$이다.
$\triangle HRE$에서 $\overline{HR}:\overline{HE}=\sqrt{3}:1$이므로
$\overline{HR}=\sqrt{3}\overline{HE}=\sqrt{3}\left(\overline{OE}-\frac{x}{2}\right)$
$\frac{x}{2}=\sqrt{3}\overline{OE}-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ (1+\sqrt{3})x=2\sqrt{3}\overline{OE}$
$\therefore x=(3-\sqrt{3})\overline{OE}=(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=6$
따라서 정사각형의 한 변의 길이는 6이다.

07 오른쪽 그림에서 정육각형의 한 내각의 크기는
$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$이므로



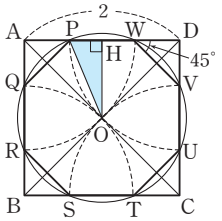
$\triangle FIE$의 세 내각의 크기는 $30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$이다.
$\triangle FIE$에서 $\overline{FI}:\overline{EF}=1:2$이므로
$\overline{FI}:4=1:2,\ 2\overline{FI}=4$
$\therefore \overline{FI}=2\,(\text{cm})$
$\overline{EI}:4=\sqrt{3}:2$에서 $2\overline{EI}=4\sqrt{3} \quad \therefore \overline{EI}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$
$\triangle EFI$에서 $\overline{NH}=\frac{1}{2}\overline{FI}=1\,(\text{cm})$이므로
$\overline{MN}=\overline{MG}+\overline{GH}+\overline{NH}=1+4+1=6\,(\text{cm})$
또 $\overline{HI}=\frac{1}{2}\overline{EI}=\sqrt{3}\,(\text{cm})$이므로
$\overline{AH}=\overline{AI}+\overline{HI}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$
$\therefore \triangle AMN=\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{AH}$
$=\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

08 오른쪽 그림과 같이 $\triangle PBC$를 점 C를 중심으로 점 B가 점 A에 오도록 회전하고, $\overline{PP'}$을 그으면



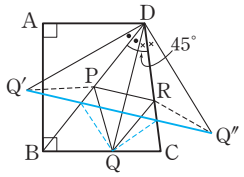
$\overline{P'C}=\overline{PC}=4$, $\angle PCP'=60^\circ$이므로 $\triangle PP'C$는 정삼각형이다.
$\therefore \overline{PP'}=4$
이때 $\triangle PAP'$의 세 변의 길이의 비가 $2:2\sqrt{3}:4=1:\sqrt{3}:2$이므로 $\triangle PAP'$의 세 내각의 크기는 $30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$이다.
따라서 $\triangle ACP'$에서 $\angle AP'C=30^\circ+60^\circ=90^\circ$이므로
$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=2\sqrt{7}$

09 $\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}$



$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$
$\overline{AP}=\overline{WD}=\overline{AD}-\overline{AW}$
$=2-\overline{AO}=2-\sqrt{2}$
$\overline{PQ}=\sqrt{2}\,\overline{AP}$
$=\sqrt{2}\times(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$
$\overline{PW}=\overline{AD}-2\overline{AP}$
$=2-2(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$
$\therefore \overline{PQ}=\overline{PW}$
같은 방법으로 하면 팔각형 PQRSTUVW는 각 변의 길이가 모두 같고, 모든 내각의 크기가 $180^\circ-45^\circ=135^\circ$로 같다.
따라서 팔각형 PQRSTUVW는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}-2$인 정팔각형이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\overline{OP}$의 길이와 같다.
$\overline{OH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=1$
$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PW}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2)=\sqrt{2}-1$
$\triangle PHO$에서
$\overline{OP}^2=1^2+(\sqrt{2}-1)^2=4-2\sqrt{2}$
$\therefore$ (외접원의 넓이)$=\pi\times\overline{OP}^2=(4-2\sqrt{2})\pi$

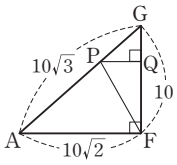
10 오른쪽 그림과 같이 점 Q를 $\overline{DB}$, $\overline{DC}$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 Q′, Q″이라 하면



$\overline{PQ}=\overline{PQ'}$, $\overline{RQ}=\overline{RQ''}$이므로
(△PQR의 둘레의 길이)
$=\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$
$=\overline{PQ'}+\overline{RQ''}+\overline{RP}\geq\overline{Q'Q''}$
그런데 $\overline{DQ'}=\overline{DQ''}=\overline{DQ}$이므로 $\overline{DQ}$가 최소일 때, 즉 $\overline{DQ}$가 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선일 때 $\overline{Q'Q''}$의 길이가 최소가 된다.

이때 $\overline{DQ}=\overline{AB}=8$이고,
$\angle Q'DQ''=2(\bullet+\times)=90^\circ$이므로 $\overline{Q'Q''}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$
$\triangle PQR$의 둘레의 길이의 최솟값은 $8\sqrt{2}$이다.

11 $\overline{AF}=10\sqrt{2}$, $\overline{AG}=10\sqrt{3}$

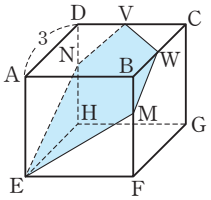


$\triangle AFG$에서
$(10\sqrt{2})^2+10^2=(10\sqrt{3})^2$이므로
$\angle AFG=90^\circ$이다.
점 P에서 $\overline{GF}$에 내린 수선의 발을 Q라 하면
$\triangle GPQ\backsim\triangle GAF$(AA 닮음)이고,
$\overline{GP}:\overline{PA}=2:3$이므로

$\overline{QF}=10\times\frac{3}{5}=6$

$\overline{PQ}:10\sqrt{2}=2:5$에서 $\overline{PQ}=4\sqrt{2}$
따라서 $\triangle PFQ$에서
$\overline{PF}=\sqrt{\overline{QF}^2+\overline{PQ}^2}=\sqrt{6^2+(4\sqrt{2})^2}=2\sqrt{17}$

12 세 점 E, M, N을 포함하는 평면으로 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{EN}/\!/\overline{MW}$이므로 $\frac{\overline{BM}}{\overline{BW}}=\frac{\overline{NH}}{\overline{EH}}$

$\frac{1}{\overline{BW}}=\frac{2}{3}$ $\therefore\ \overline{BW}=\frac{3}{2}$

$\overline{CW}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

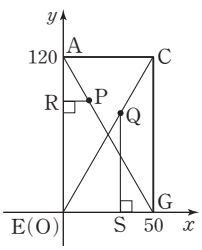
$\overline{EM}/\!/\overline{NV}$이므로 $\frac{\overline{DN}}{\overline{DV}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{EF}}$

$\frac{1}{\overline{DV}}=\frac{2}{3}$ $\therefore\ \overline{DV}=\frac{3}{2}$

$\overline{CV}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ (단면의 둘레의 길이)
$=\overline{EM}+\overline{MW}+\overline{WV}+\overline{VN}+\overline{NE}$
$=\sqrt{3^2+2^2}+\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{3^2+2^2}$
$=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}+\sqrt{13}$
$=3\sqrt{13}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

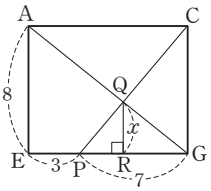
13 $\overline{EG}=\sqrt{40^2+30^2}=50$ (m)
두 점 P, Q는 □AEGC의 두 대각선 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같이 □AEGC를 점 E를 원점으로 하는 좌표평면 위에 나타내면



$\overline{AG}=\overline{CE}=\sqrt{120^2+50^2}$
$=130$ (m)
t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{EQ}$의 길이는
$\overline{AP}=13t$, $\overline{EQ}=26t$이고,
$\triangle ARP\backsim\triangle AEG$(AA 닮음)에서
$\overline{RP}:50=\overline{AR}:120=13t:130$이므로
$\overline{RP}=5t$, $\overline{AR}=12t$ $\therefore$ P$(5t,\ 120-12t)$
$\triangle QES\backsim\triangle CEG$(AA 닮음)에서
$\overline{ES}:50=\overline{QS}:120=26t:130$이므로
$\overline{ES}=10t$, $\overline{QS}=24t$ $\therefore$ Q$(10t,\ 24t)$
$\therefore\ \overline{PQ}^2=(10t-5t)^2+\{24t-(120-12t)\}^2$
$=1321t^2-8640t+14400$
$=1321\left(t-\frac{4320}{1321}\right)^2+14400-\frac{4320^2}{1321}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 되는 것은 $\frac{4320}{1321}$초 후이다.

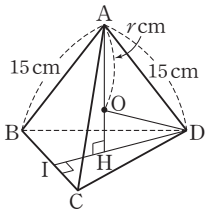
14 $\triangle EFG$에서
$\overline{EG}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로
$\overline{EP}=3$, $\overline{PG}=7$
$\overline{QR}=x$라 하면
$\triangle AEG\backsim\triangle QRG$(AA 닮음)이므로



$8:x=10:\overline{RG}$에서 $\overline{RG}=\frac{5}{4}x$

$\therefore\ \overline{PR}=7-\frac{5}{4}x$이고
$\triangle QPR\backsim\triangle CPG$(AA 닮음)이므로
$x:8=\left(7-\frac{5}{4}x\right):7$
$7x=56-10x$, $17x=56$
$\therefore\ x=\frac{56}{17}$

15 오른쪽 그림과 같이 정사면체의 꼭짓점 A에서 $\triangle BCD$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}$는 구의 중심 O를 지나고 점 H는 $\triangle BCD$의 무게중심이므로



$\overline{DI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times15=\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (cm)

$\overline{DH}=\frac{2}{3}\times\frac{15\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ (cm)

$\triangle AHD$에서
$\overline{AH}=\sqrt{15^2-(5\sqrt{3})^2}=5\sqrt{6}$ (cm)
구의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$\overline{OH}=\overline{AH}-\overline{AO}=5\sqrt{6}-r$ (cm)
$\triangle ODH$에서
$r^2=(5\sqrt{6}-r)^2+(5\sqrt{3})^2$
$r^2=150-10\sqrt{6}r+r^2+75$, $10\sqrt{6}r=225$
$\therefore\ r=\frac{15\sqrt{6}}{4}$ (cm)

따라서 구의 반지름의 길이는 $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ cm이다.

16 $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AD}=c$라 하면
$\triangle ABC$에서 $a^2+b^2=5^2$ … ㉠
$\triangle ACD$에서 $b^2+c^2=6^2$ … ㉡
$\triangle ADB$에서 $c^2+a^2=7^2$ … ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$2(a^2+b^2+c^2)=110$ $\therefore\ a^2+b^2+c^2=55$ … ㉣
㉣−㉠을 하면 $c^2=30$ $\therefore\ c=\sqrt{30}$

㉣−㉡을 하면 $a^2=19$ ∴ $a=\sqrt{19}$

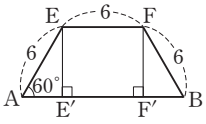
㉣−㉢을 하면 $b^2=6$ ∴ $b=\sqrt{6}$

∴ (부피)$=\frac{1}{3}\times\triangle ACD\times\overline{AB}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{30}\right)\times\sqrt{19}$

$=\sqrt{95}$

17 오른쪽 그림과 같이 두 점 E, F에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라 하면



$\overline{AE}:\overline{AE'}=2:1$, $6:\overline{AE'}=2:1$

∴ $\overline{AE'}=3$

∴ $\overline{AB}=\overline{AE'}+\overline{E'F'}+\overline{F'B}=3+6+3=12$

오른쪽 그림에서

△VEF∽△VAB(AA 닮음)

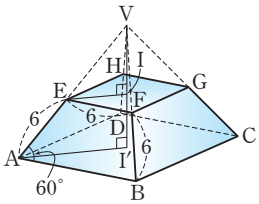
이고, 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{VE}:\overline{VA}=1:2$

$\overline{VE}:(\overline{VE}+6)=1:2$

∴ $\overline{VE}=6$

∴ $\overline{VA}=6+6=12$



점 V에서 사각뿔대의 두 밑면에 내린 수선의 발을 각각 I, I′이라 하면

$\overline{AI'}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times12\sqrt{2}=6\sqrt{2}$이므로

△VAI′에서

$\overline{VI'}=\sqrt{12^2-(6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{2}$

$\overline{EI}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로

△VEI에서 $\overline{VI}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

∴ (주어진 사각뿔대의 부피)

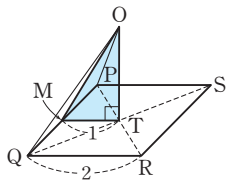
= (사각뿔 V−ABCD의 부피) − (사각뿔 V−EFGH의 부피)

$=\frac{1}{3}\times12\times12\times6\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times6\times6\times3\sqrt{2}$

$=288\sqrt{2}-36\sqrt{2}$

$=252\sqrt{2}$

18 다섯 개의 구의 중심을 각각 O, P, Q, R, S라 하면 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 PQRS를 그릴 수 있다.



이때 $\overline{PQ}$의 중점을 M, 정사각형의 두 대각선의 교점을 T라 하면 $\overline{OM}$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형 OPQ의 높이이므로

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

△OMT에서

$\overline{OT}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

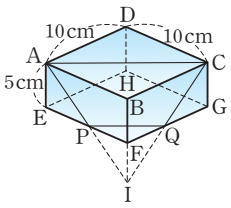
따라서 구하는 높이는

(구 O의 반지름의 길이) + $\overline{OT}$ + (구 Q의 반지름의 길이)

$=1+\sqrt{2}+1$

$=2+\sqrt{2}$

19 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$, $\overline{BF}$, $\overline{CQ}$의 연장선이 만나는 점을 I라 하면



△AEP≡△IFP(ASA 합동)

$\overline{FI}=\overline{AE}=5$ cm이므로

$\overline{BI}=10$ cm

$\overline{PI}=\overline{AP}=5\sqrt{2}$ cm이므로

$\overline{AI}=\overline{CI}=\overline{AC}=10\sqrt{2}$ cm

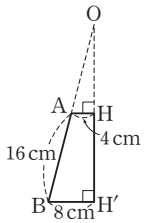
따라서 점 B에서 □APQC에 내린 수선의 길이를 h cm라 하면 사면체 B−AIC의 부피는

$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{BI}=\frac{1}{3}\times\triangle AIC\times h$

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times10\times10\right)\times10=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(10\sqrt{2})^2\right\}\times h$

∴ $h=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ (cm)

20 오른쪽 그림에서



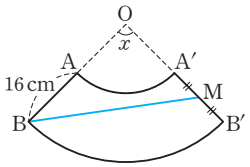
△OAH∽△OBH′(AA 닮음)이고, 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$

$\overline{OA}:(\overline{OA}+16)=1:2$

∴ $\overline{OA}=16$ (cm)

원뿔대의 옆면의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로



∠BOB′$=x$라 하면

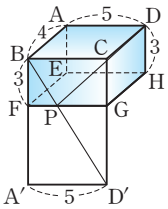
$2\pi\times16\times\frac{x}{360}=2\pi\times4$

∴ $\angle x=90^\circ$

따라서 △OBM에서

$\overline{BM}=\sqrt{32^2+(16+8)^2}=40$ (cm)

21 오른쪽 그림과 같이 면 AFGD를 $\overline{FG}$를 축으로 회전하여 면 BFGC와 한 면이 되도록 두 점 A′, D′을 잡으면



$\overline{BP}+\overline{PD}\geq\overline{BD'}$

△BD′C에서

$\overline{CD'}=\overline{CG}+\overline{GD'}$

$=\overline{CG}+\overline{GD}$

$=3+\sqrt{4^2+3^2}=8$

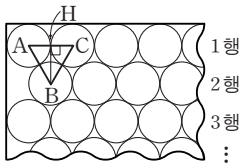
이므로 $\overline{BD'}=\sqrt{5^2+8^2}=\sqrt{89}$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.51~52

01 420개 **02** $\frac{16}{5}$ **03** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **04** $36-12\sqrt{5}$

05 $200\left(1-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$ cm **06** $\frac{875}{9}\pi$

01 오른쪽 그림에서 △ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로



$\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

캔을 x행까지 담을 수 있다고 하면

$1+\sqrt{3}(x-1)+1\le 20$

$\sqrt{3}(x-1)\le 18,\ x-1\le 6\sqrt{3}$

$\therefore\ x\le 1+6\sqrt{3}=11.\times\times\times$

따라서 캔을 11행까지 담을 수 있다.

이때 캔의 밑면의 반지름의 길이는 1이고, $2\times 10=20$이므로 1행에 10개, 2행에 9개, 3행에 10개, …, 10행에 9개, 11행에 10개의 캔을 넣을 수 있다.

즉, 상자의 맨 아랫줄에 넣을 수 있는 캔의 개수는

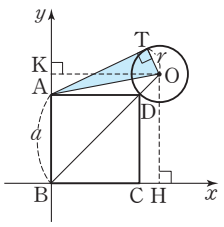
$5(10+9)+10=105$(개)

또 캔의 높이는 5이고, $5\times 4=20$이므로 캔을 네 줄까지 담을 수 있다.

따라서 담을 수 있는 캔의 최대 개수는

$105\times 4=420$(개)

02 오른쪽 그림과 같이 □ABCD를 점 B를 원점으로 하는 좌표평면 위에 나타내면



A$(0,\ a)$, B$(0,\ 0)$, C$(a,\ 0)$, D$(a,\ a)$이다.

$\overline{BD}=\sqrt{2}a$이므로

$\overline{BO}=\sqrt{2}a+r$

$\therefore\ \overline{BH}=\overline{BK}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}a+r)$

$=a+\frac{r}{\sqrt{2}}$

$=a+\frac{\sqrt{2}r}{2}$

따라서 점 O의 좌표는 $O\left(a+\frac{\sqrt{2}r}{2},\ a+\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)$

△ATO에서

$\overline{AT}^2+\overline{OT}^2=\overline{AO}^2$이므로

$(16+5\sqrt{2})+r^2=\left(a+\frac{\sqrt{2}r}{2}-0\right)^2+\left(a+\frac{\sqrt{2}r}{2}-a\right)^2$

$16+5\sqrt{2}+r^2=a^2+ar\sqrt{2}+\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}$

$16+5\sqrt{2}=a^2+ar\sqrt{2}$

이때 a, r는 유리수이므로 $a^2=16$, $ar=5$

$\therefore\ \frac{a}{r}=\frac{a^2}{ar}=\frac{16}{5}$

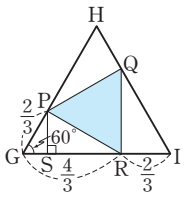
03 △EPH∽△EAB(AA 닮음)이고 닮음비가 2 : 3이므로

$\overline{PH}:\overline{AB}=2:3$에서 $\overline{PH}:2=2:3$

$\therefore\ \overline{PH}=\frac{4}{3}$

같은 방법으로 하면 $\overline{QI}=\frac{4}{3}$, $\overline{RG}=\frac{4}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{GI}$에 내린 수선의 발을 S라 하면



△PGS의 세 내각의 크기는 30°, 60°, 90°이므로

$\overline{PG}:\overline{PS}=2:\sqrt{3}$에서

$\frac{2}{3}:\overline{PS}=2:\sqrt{3}$ $\therefore\ \overline{PS}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

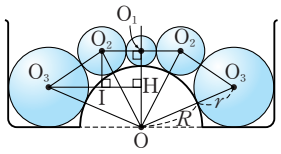
이때 △HPQ≡△GRP≡△IQR (SAS 합동)이므로

$\triangle PQR=\triangle HGI-3\triangle PGR$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

04



반원 O의 반지름의 길이를 R, 원 O_3의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{O_1O_2}=5$, $\overline{OO_1}=R+2$, $\overline{OO_2}=R+3$이므로

△OO_1O_2에서

$(R+3)^2=(R+2)^2+5^2$

$R^2+6R+9=R^2+4R+4+25$

$2R=20$ $\therefore\ R=10$

위의 그림과 같이 중심 O_3에서 $\overline{OO_1}$에 내린 수선의 발을 H, 중심 O_2에서 $\overline{O_3H}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{O_2O_3}=3+r$, $\overline{O_2I}=\overline{OO_1}-\overline{OH}=12-r$이므로

△O_3O_2I에서

$\overline{O_3I}=\sqrt{(3+r)^2-(12-r)^2}$

$\overline{OO_3}=10+r$, $\overline{O_3H}=\sqrt{(3+r)^2-(12-r)^2}+5$, $\overline{OH}=r$이므로

△OHO_3에서

$(10+r)^2=\{\sqrt{(3+r)^2-(12-r)^2}+5\}^2+r^2$

$(10+r)^2=(\sqrt{30r-135}+5)^2+r^2$

$21-r=\sqrt{30r-135}$

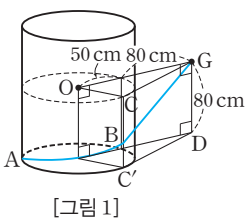
양변을 제곱하여 정리하면

$r^2-72r+576=0$

$\therefore\ r=36-12\sqrt{5}$ ($\because\ 0<r<10$)

따라서 원 O_3의 반지름의 길이는 $36-12\sqrt{5}$이다.

05 앵무새의 위치를 점 G라 하면 [그림 1]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 1]

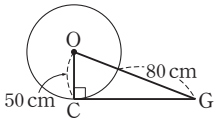
위에서 보면 [그림 2]와 같으므로

△OCG에서

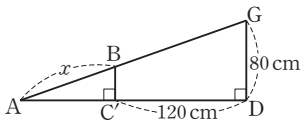
$\overline{CG}=\sqrt{130^2-50^2}=120$ (cm)

$\therefore\ \overline{CG}=\overline{C'D}=120$ (cm)

기둥에 접촉해 있는 실의 길이를 x라 하면 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 2]



실의 길이가 2 m이므로 $\overline{AG}=200\,\text{cm}$

$\triangle GDA$에서

$\overline{AD}=\sqrt{200^2-80^2}=40\sqrt{21}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{AC'}=\overline{AD}-\overline{C'D}=40\sqrt{21}-120\,(\text{cm})$

$\triangle ABC'\backsim\triangle AGD$(AA 닮음)이므로

$\overline{AC'}:\overline{AD}=\overline{AB}:\overline{AG}$에서

$(40\sqrt{21}-120):40\sqrt{21}=x:200$

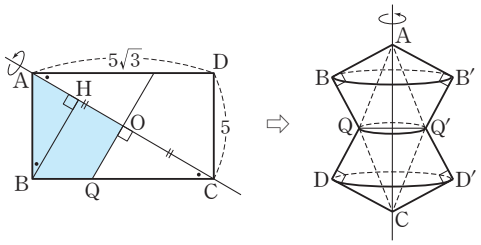
$40\sqrt{21}x=200(40\sqrt{21}-120)$

$\therefore\ x=\dfrac{200(40\sqrt{21}-120)}{40\sqrt{21}}=200\left(1-\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)\,(\text{cm})$

따라서 기둥에 접촉해 있는 실의 길이는

$200\left(1-\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)\text{cm}$이다.

06



$\overline{AC}$의 중점을 O라 하고, $\overline{AC}$의 수직이등분선과 $\overline{BC}$와의 교점을 Q라 하면 구하는 회전체의 부피는 □ABQO를 $\overline{AO}$를 축으로 하여 1회전시킨 것의 2배이다.

$\overline{AC}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+5^2}=10$

점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ADC\backsim\triangle BHA$(AA 닮음)이므로

$\overline{AC}:\overline{BA}=\overline{DC}:\overline{HA}$에서

$10:5=5:\overline{HA}\qquad\therefore\ \overline{HA}=\dfrac{5}{2}$

$\overline{AD}:\overline{BH}=\overline{AC}:\overline{BA}$에서

$5\sqrt{3}:\overline{BH}=10:5\qquad\therefore\ \overline{BH}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

또 $\triangle ADC\backsim\triangle COQ$(AA 닮음)이므로

$\overline{AD}:\overline{CO}=\overline{DC}:\overline{OQ}$에서

$5\sqrt{3}:5=5:\overline{OQ}\qquad\therefore\ \overline{OQ}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AH}$를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_1은

$V_1=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times\overline{BH}^2)\times\overline{HA}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{125}{8}\pi$

$\overline{CH}$를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_2는

$V_2=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times\overline{BH}^2)\times\overline{CH}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\times\dfrac{15}{2}=\dfrac{375}{8}\pi$

$\overline{CO}$를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_3은

$V_3=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times\overline{OQ}^2)\times\overline{CO}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times5=\dfrac{125}{9}\pi$

따라서 구하는 회전체의 부피는

$2(V_1+V_2-V_3)=2\left(\dfrac{125}{8}\pi+\dfrac{375}{8}\pi-\dfrac{125}{9}\pi\right)$

$=2\times\dfrac{875}{18}\pi=\dfrac{875}{9}\pi$

퍼펙트 단원 마무리 P.53~55

01 32 **02** 726 **03** $\sqrt{a^2-1}$ **04** 1 **05** $\dfrac{47}{2}$

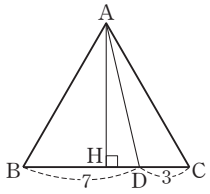
06 ④ **07** $\dfrac{1560}{289}$ **08** $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ **09** $48(2\sqrt{3}-3)\ \text{cm}^2$

10 24가지 **11** $\dfrac{\sqrt{14}}{8}$ **12** $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$ **13** $3\sqrt{39}$

14 $2\sqrt{7}$ **15** $4\sqrt{41}$ **16** $6\sqrt{5}$

01

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로

$\overline{BH}=\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\times(7+3)=5$

$\triangle AHC$에서

$\overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2=\overline{AC}^2-5^2\qquad\cdots$ ㉠

$\triangle AHD$에서

$\overline{AH}^2=\overline{AD}^2-\overline{HD}^2=\overline{AD}^2-2^2\qquad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{AC}^2-5^2=\overline{AD}^2-2^2,\ \overline{AC}^2-\overline{AD}^2=5^2-2^2$

$(\overline{AC}-\overline{AD})(\overline{AC}+\overline{AD})=21$

그런데 $\overline{AB}$와 $\overline{AD}$의 길이가 모두 자연수이고

$\overline{AC}-\overline{AD}<\overline{AC}+\overline{AD}$이므로

(i) $\overline{AC}-\overline{AD}=3,\ \overline{AC}+\overline{AD}=7$일 때,

$\overline{AC}=5$이므로 삼각형의 성립 조건에 의해 $\triangle ABC$는 존재하지 않는다.

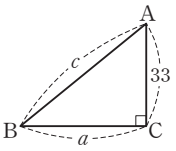
(ii) $\overline{AC}-\overline{AD}=1,\ \overline{AC}+\overline{AD}=21$일 때, $\overline{AC}=11$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=11+11+10=32$

02

오른쪽 그림의 $\overline{AB}$를 빗변으로 하는 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a$라 하자. (단, a, c는 자연수)



$c^2=33^2+a^2,\ c^2-a^2=33^2$

$(c-a)(c+a)=3^2\times11^2$

그런데 $\triangle ABC$의 넓이, 즉

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times a\times33$이 최소가 되려면 a의 값이 최소가 되어야 한다.

따라서 $c+a>c-a$인 경우를 순서쌍 $(c+a,\ c-a)$로 나타내어 보면

$(c+a,\ c-a)=(11^2,\ 3^2),\ (11^2\times3,\ 3),\ (11\times3^2,\ 11),\ (11^2\times3^2,\ 1)$

이때 a의 값이 최소가 되는 경우는 $c+a=11\times3^2$, $c-a=11$이다. $\therefore\ a=44,\ c=55$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times44\times33=726$

03 $ab(a-b)-a^2+b^2+a-b=0$에서

$a^2b-ab^2-a^2+b^2+a-b=0$

$a^2(b-1)-a(b^2-1)+(b^2-b)=0$

$a^2(b-1)-a(b+1)(b-1)+b(b-1)=0$

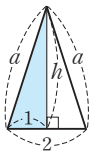
$(b-1)\{a^2-(b+1)a+b\}=0$

$(b-1)(a-b)(a-1)=0$

$\therefore\ a=b\ (\because\ a\neq1,\ b\neq1)$

따라서 이 삼각형은 오른쪽 그림과 같은 이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$h=\sqrt{a^2-1^2}=\sqrt{a^2-1}$



$\therefore$ (삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times h$

$=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a^2-1}$

04 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로

$\overline{BG}^2=\left(\frac{2}{3}\overline{BF}\right)^2=\frac{4}{9}\overline{BF}^2$

$=\frac{4}{9}\left\{\overline{AB}^2+\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2\right\}=\frac{4}{9}\left(\overline{AB}^2+\frac{1}{4}\overline{AC}^2\right)$ … ㉠

$\overline{CG}^2=\left(\frac{2}{3}\overline{CD}\right)^2=\frac{4}{9}\overline{CD}^2$

$=\frac{4}{9}\left\{\overline{AC}^2+\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2\right\}=\frac{4}{9}\left(\overline{AC}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2\right)$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=\frac{4}{9}\left(\overline{AB}^2+\frac{1}{4}\overline{AC}^2\right)+\frac{4}{9}\left(\overline{AC}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2\right)$

$=\frac{5}{9}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=\frac{5}{9}\overline{BC}^2=5$

$\therefore\ \overline{BC}^2=9$ $\therefore\ \overline{BC}=3\ (\because\ \overline{BC}>0)$

또 점 E는 $\triangle ABC$의 외심이므로

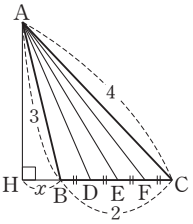
$\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

05 $3^2+2^2<4^2$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$는 $\angle B>90^\circ$인 둔각삼각형이다. 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H, $\overline{HB}=x$라 하면

$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{HB}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2$

에서



$3^2-x^2=4^2-(2+x)^2$ $\therefore\ x=\overline{HB}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ \overline{AH}^2=3^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{135}{16}$

이때 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FC}=\frac{1}{2}$이므로

$\overline{AD}^2=\overline{AH}^2+\overline{HD}^2=\frac{135}{16}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^2=10$

$\overline{AF}^2=\overline{AH}^2+\overline{HF}^2=\frac{135}{16}+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$

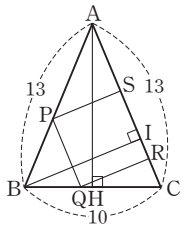
$\therefore\ \overline{AD}^2+\overline{AF}^2=10+\frac{27}{2}=\frac{47}{2}$

06 $\angle C>90^\circ$이면 $p^2>a^2+b^2$이 성립하므로 $p>\sqrt{a^2+b^2}$

$\angle C<90^\circ$이면 $q^2<a^2+b^2$이 성립하므로 $q<\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\ q<\sqrt{a^2+b^2}<p$

07 점 A와 B에서 $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면



$\overline{BH}=\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BI}$

$\frac{1}{2}\times10\times12=\frac{1}{2}\times13\times\overline{BI}$ $\therefore\ \overline{BI}=\frac{120}{13}$

이때 □PQRS의 한 변의 길이를 x라 하면

$\triangle QCR\backsim\triangle BCI$(AA 닮음)이므로

$\overline{QC}:\overline{BC}=\overline{QR}:\overline{BI}$

$\overline{QC}:10=x:\frac{120}{13}$ $\therefore\ \overline{QC}=\frac{13}{12}x$

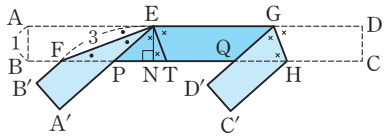
또 $\triangle ABC\backsim\triangle PBQ$(AA 닮음)이므로

$\overline{BC}:\overline{BQ}=\overline{AC}:\overline{PQ},\ 10:\left(10-\frac{13}{12}x\right)=13:x$

$130-\frac{169}{12}x=10x,\ \frac{289}{12}x=130$

$\therefore\ x=\frac{1560}{289}$

08



위의 그림에서 $\angle AEF=\angle PEF$이고,

$\angle AEF=\angle EFP$(엇각)이므로 $\angle PEF=\angle EFP$

따라서 $\triangle PEF$는 $\overline{PE}=\overline{PF}$인 이등변삼각형이다.

같은 방법으로 하면

$\triangle GQH$는 $\overline{QG}=\overline{QH}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{PQ}$ 위에 $\overline{ET}/\!/\overline{GH}$가 되는 점 T를 잡으면

$\angle DGH=\angle GET=\angle ETP$이고,

$\overline{EA'}/\!/\overline{GD'}$이므로 $\angle PET=\angle QGH$

따라서 $\triangle EPT$는 $\overline{PE}=\overline{PT}$인 이등변삼각형이므로

$\triangle EPT\equiv\triangle GQH$(ASA 합동)

$\angle FET=\angle FEP+\angle PET$

$=\frac{1}{2}(\angle AEP+\angle PEG)=90^\circ$

이므로 $\triangle EFT$는 $\angle FET=90^\circ$인 직각삼각형이다.

점 E에서 $\overline{FT}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$\triangle EFN$에서 $\overline{FN}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle EFT$에서 $\overline{EF}^2=\overline{FN}\cdot\overline{FT}$이므로

$3^2=2\sqrt{2}\times\overline{FT}$ $\therefore\ \overline{FT}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \triangle EFP+\triangle GQH=\triangle EFP+\triangle EPT=\triangle EFT$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\times1=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$

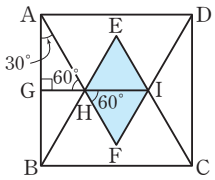
09 $\triangle AGH$의 세 내각의 크기는 30°, 60°, 90°이므로

$\overline{GH}:\overline{AG}:\overline{AH}=1:\sqrt{3}:2$

$\overline{AB}=12\,\text{cm}$이므로

$\overline{AG}=6\,\text{cm}$, $\overline{GH}=2\sqrt{3}\,\text{cm}$,

$\overline{AH}=4\sqrt{3}\,\text{cm}$



$\therefore\ \overline{HF}=12-\overline{AH}=12-4\sqrt{3}=4(3-\sqrt{3})\,(\text{cm})$

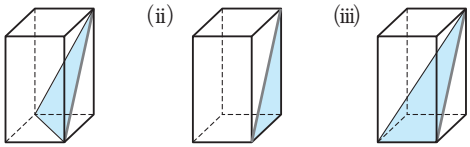
따라서 정삼각형 HFI의 한 변의 길이는 $4(3-\sqrt{3})$ cm이므로

$\triangle HFI=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\{4(3-\sqrt{3})\}^2=24(2\sqrt{3}-3)\,(\text{cm}^2)$

$\therefore\ \square EHFI=2\triangle HFI=48(2\sqrt{3}-3)\,(\text{cm}^2)$

10 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 삼각형은 다음 그림과 같이 세 가지 경우가 생긴다.

(i) (ii) (iii)



(i) 세 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$인 이등변삼각형

⇨ 길이가 $\sqrt{2}$인 변은 윗면과 아랫면에서 각각 2개씩, 모두 4개가 생기고, 그 각각의 경우에 대하여 2개의 삼각형이 생기므로 만들 수 있는 삼각형은 모두 $4\times2=8$(가지)

(ii) 세 변의 길이가 1, 2, $\sqrt{5}$인 직각삼각형

⇨ 옆면은 모두 4개이고, 각각의 옆면에 대하여 삼각형은 4개씩 생기므로 만들 수 있는 삼각형은 모두 $4\times4=16$(가지)

(iii) 세 변의 길이가 1, $\sqrt{5}$, $(\sqrt{1^2+1^2+2^2}=)\sqrt{6}$인 삼각형

그런데 이 경우는 가장 긴 변의 길이가 $\sqrt{5}$가 아니라 $\sqrt{6}$이므로 조건에 맞는 삼각형을 만들 수 없다.

(i), (ii)에 의해 $8+16=24$(가지)

11 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$, $\triangle BCD$에 내린 수선의 발을 각각 K, H라 하면

$\overline{AK}=\overline{KD}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{KH}=x$라 하면

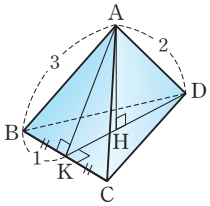
$\overline{AH}^2=\overline{AK}^2-\overline{KH}^2=\overline{AD}^2-\overline{DH}^2$

에서

$(2\sqrt{2})^2-x^2=2^2-(2\sqrt{2}-x)^2$

$8-x^2=4-(8-4\sqrt{2}x+x^2)$

$4\sqrt{2}x=12$ $\therefore\ x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$



$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

이때 사면체 A-BCD는 네 면이 모두 합동이므로 구의 중심에서 사면체의 각 면에 내린 수선의 발까지의 거리인 구의 반지름을 높이로 하고, 각 면을 밑면으로 하는 삼각뿔 4개로 나눌 수 있으며 이 4개의 삼각뿔의 부피는 같다.

따라서 구의 반지름의 길이를 r라 하면

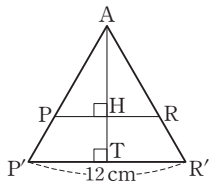
사면체 A-BCD의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD\times\overline{AH}=4\times\left(\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD\times r\right)$

$\therefore\ r=\dfrac{\overline{AH}}{4}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{14}}{2}=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$

12 네 점 P, Q, R, S는 옆면인 정삼각형의 무게중심이므로

점 A에서 두 점 P, R를 지나면서 $\overline{BC}$, $\overline{DE}$와 만나는 점을 각각 P′, R′이라 하자



$\overline{AP}:\overline{AP'}=\overline{PR}:\overline{P'R'}$이므로

$2:3=\overline{PR}:12$, $3\overline{PR}=24$ $\therefore\ \overline{PR}=8\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{QS}=\overline{PR}=8\,(\text{cm})$

$\therefore\ \square PQRS=\dfrac{1}{2}\times8^2=32\,(\text{cm}^2)$

점 A에서 $\overline{PR}$, $\overline{P'R'}$에 내린 수선의 발을 각각 H, T라 하면

$\triangle ABC$에서 $\overline{AP'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times12=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$이므로

$\overline{AT}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\overline{TH}=\dfrac{1}{3}\overline{AT}=\dfrac{1}{3}\times6\sqrt{2}=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

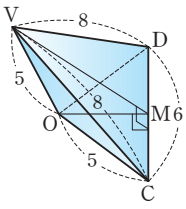
$\therefore$ (사각뿔 T-PQRS의 부피)

$=\dfrac{1}{3}\times\square PQRS\times\overline{TH}$

$=\dfrac{1}{3}\times32\times2\sqrt{2}=\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\,(\text{cm}^3)$

13 $\triangle ACD$에서 $\overline{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}=5$

두 꼭짓점 A, B가 맞닿는 점을 V라 하면 만들어진 사면체는 오른쪽 그림과 같다.



$\triangle OCD$는 이등변삼각형이고, 꼭짓점 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=4$이므로 $\triangle OCD=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$

$\triangle VCD$는 이등변삼각형이므로 $\overline{VM}$을 그으면

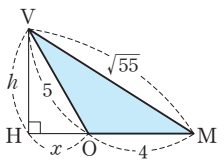
$\angle VMC=90^\circ$

$\triangle VCM$에서 $\overline{VM}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$

따라서 $\triangle VOM$에서 $(\sqrt{55})^2>5^2+4^2$이므로 $\triangle VOM$은 $\angle VOM>90^\circ$인 둔각삼각형이다.

꼭짓점 V에서 $\overline{OM}$의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{VH}=h$, $\overline{OH}=x$라 하면

$5^2-x^2=(\sqrt{55})^2-(4+x)^2$



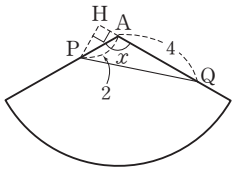
$8x=14 \quad \therefore\ x=\frac{7}{4}$

$\therefore\ h=\sqrt{5^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{39}}{4}$

따라서 구하는 사면체 V−OCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times 12\times\frac{3\sqrt{39}}{4}=3\sqrt{39}$

14 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 옆면의 전개도를 그렸을 때, 부채꼴의 중심각의 크기를 $\angle x$라 하면



$2\pi\times 6\times\frac{x}{360}=2\pi\times 2$

$\therefore\ \angle x=120^\circ$

따라서 $\angle PAH=60^\circ$이므로

△APH는 특수한 직각삼각형이다.

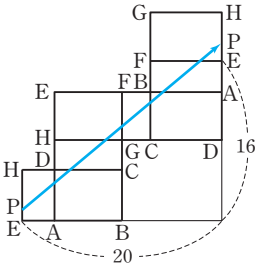
즉, $\overline{AH}=1$, $\overline{PH}=\sqrt{3}$이므로 △PQH에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(4+1)^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

15 직육면체의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ (최단 거리)$=\sqrt{16^2+20^2}$

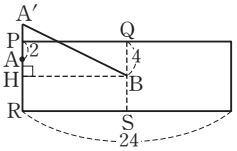
$=4\sqrt{41}$



16 원기둥의 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.

점 A를 $\overline{PQ}$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$\overline{PA'}=\overline{PA}=2$



점 B에서 $\overline{PR}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

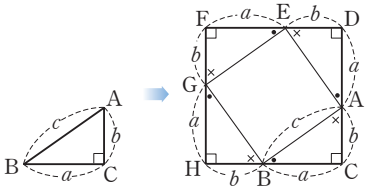
$\overline{BH}=\overline{RS}=\frac{1}{2}\times 24=12$

따라서 통의 안쪽 면의 점 A에서 통의 바깥쪽 면의 점 B까지 면을 따라가는 최단 거리는

$\overline{A'B}=\sqrt{12^2+(2+4)^2}=6\sqrt{5}$

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.56~57

1 |예시| (i) 세 변의 길이가 a, b, c인 직각삼각형 ABC에서 두 변 AC, BC를 연장하여 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 CDFH를 그리면 다음 그림과 같다.



△ABC≡△EAD≡△GEF≡△BGH(SAS 합동)

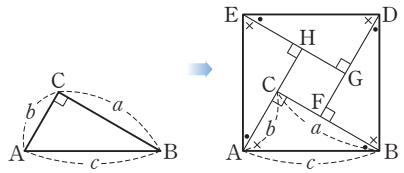
이므로 $\overline{AB}=\overline{EA}=\overline{GE}=\overline{BG}$

즉, □AEGB는 네 변의 길이가 모두 같고, 네 각의 크기가 모두 90°이므로 정사각형이다.

이때 □CDFH=4△ABC+□AEGB이므로

$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2 \quad \therefore\ a^2+b^2=c^2$

(ii) 세 변의 길이가 a, b, c인 직각삼각형 ABC와 합동인 삼각형 4개를 맞추어 정사각형 ABDE를 만들면 다음 그림과 같다.

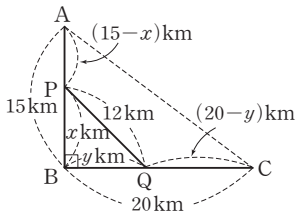


□CFGH는 한 변의 길이가 $a-b$인 정사각형이다.

이때 □ABDE=4△ABC+□CFGH이므로

$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2 \quad \therefore\ a^2+b^2=c^2$

2 |예시| 다음 그림과 같이 세 도시 A, B, C를 각각 직각삼각형의 세 꼭짓점 A, B, C라 하고, 각 도시를 연결하는 도로를 직각삼각형의 세 변이라 하면



△ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{15^2+20^2}=25$(km)이다.

△PBQ에서 $\overline{PQ}^2=x^2+y^2=12^2=144$

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\geq 0$이므로

$x^2+y^2\geq 2xy \quad \therefore\ 2xy\leq 144$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\leq 144+144=288$

$\therefore\ 0<x+y\leq 12\sqrt{2}$

따라서 A→P→Q→C의 경로로 이동하는 거리는

$(15-x)+12+(20-y)=47-(x+y)\geq 47-12\sqrt{2}$

이므로 우회 도로를 이용하여 A에서 C까지 가는 거리의 최솟값은 $(47-12\sqrt{2})$km이다.

즉, A에서 C까지 기존 도로를 이용하여 가면

$\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$(시간)이 걸리고, 우회 도로를 이용하여 가면

$\frac{47-12\sqrt{2}}{60}$(시간)이 걸린다.

이때 $\frac{47-12\sqrt{2}}{60}-\frac{1}{2}>0$이므로 우회 도로를 이용하여도 기존의 정체되던 도로 AC를 이용할 때에 비하여 A에서 C까지 가는 시간이 줄어들지 않는다.

따라서 우회 도로를 이용하는 것은 기존 도로 AC를 이용하는 것보다 시간적인 면에서 효과적이지 않다고 할 수 있다.

1 삼각비

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.62~65

1-1 $\frac{\sqrt{2}}{5}$ **1-2** $\frac{5}{9}$ **1-3** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **1-4** $\frac{4}{5}$ **1-5** $\frac{1}{5}$

1-6 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **1-7** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **1-8** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ **2-1** (1) 2 (2) 2

2-2 2 **2-3** (1) $\sin^2 x$ (2) 0 (3) 1

2-4 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **2-5** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **3-1** $\frac{1}{2}$

3-2 30°, 60° **3-3** $\sqrt{3}$ **3-4** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3-5 1 **4-1** $\frac{9\sqrt{5}}{4}$ **4-2** $\sqrt{2-2\cos x}$

1-1 △ABC∽△DBE (AA 닮음)이므로 ∠BDE=x

△DEB에서 $\sin x=\frac{\overline{EB}}{3}=\frac{1}{3}$

∴ $\overline{EB}=1$

△ABC에서 $\sin x=\frac{3}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$

∴ $\overline{AB}=9$

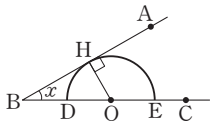
△DEB에서 $\overline{DE}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=9+1=10$

따라서 △ADE에서

$\tan y=\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\frac{2\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{5}$

1-2 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overrightarrow{BA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



△BHO에서

$\tan x=\frac{\overline{OH}}{\overline{BH}}=\frac{5}{12}$

$\overline{BH}=12k$, $\overline{OH}=5k$ ($k>0$)라 하면

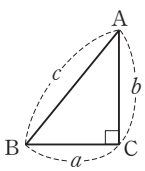
$\overline{BO}=\sqrt{(12k)^2+(5k)^2}=13k$

또 $\overline{OH}\perp\overrightarrow{BA}$이므로

$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OH}=5k$

∴ $\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}=\frac{5k+5k}{13k+5k}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

1-3 △ABC에서 $a^2+b^2=c^2$인 관계가 성립하므로 △ABC는 빗변의 길이가 c인 하는 직각삼각형이다.



$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{3}a$

∴ $\cos B=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

1-4 $\overline{AE}=\overline{CF}=a$라 하면

$\overline{ED}=\overline{DF}=2a$이므로

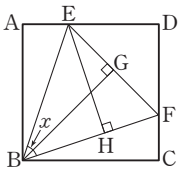
△ABE, △BCF에서

$\overline{BE}=\overline{BF}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

△DEF에서

$\overline{EF}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 G라 하면



$\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\sqrt{2}a$

따라서 △EBG에서

$\overline{BG}=\sqrt{(\sqrt{10}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}$

$=2\sqrt{2}a$

위의 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle BEF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}a\times2\sqrt{2}a=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}a\times\overline{EH}$

∴ $\overline{EH}=\frac{4\sqrt{10}}{5}a$

∴ $\sin x=\frac{\overline{EH}}{\overline{BE}}=\frac{\frac{4\sqrt{10}}{5}a}{\sqrt{10}a}=\frac{4}{5}$

1-5 $\overline{BD}:\overline{DC}=16:9$이므로

$\overline{BD}=16k$, $\overline{DC}=9k$ ($k>0$)라 하면

$\overline{AD}^2=16k\times9k=144k^2$

∴ $\overline{AD}=12k$ (∵ $\overline{AD}>0$)

따라서 △CAD에서

$\overline{AC}=\sqrt{(9k)^2+(12k)^2}=15k$

∴ $\cos x-\sin x=\frac{12k}{15k}-\frac{9k}{15k}$

$=\frac{12}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{5}$

1-6 △ABD에서 $\overline{DE}^2=\overline{AE}\times\overline{EB}$이므로

$\overline{DE}^2=4\times8=32$

∴ $\overline{DE}=4\sqrt{2}$ (∵ $\overline{DE}>0$)

$\overline{BD}^2=\overline{BE}\times\overline{BA}$이므로

$\overline{BD}^2=8\times12=96$

∴ $\overline{BD}=4\sqrt{6}$ (∵ $\overline{BD}>0$)

이때 $x+y=90°$이므로

△ABD에서 ∠ABD=y

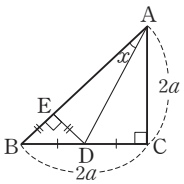
△BDE에서 ∠BDE=x

∴ $\cos x=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin y=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $\cos x+\sin y=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

1-7 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하고, $\overline{BC}=2a$라 하면



△ADC에서

$\overline{AD}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$

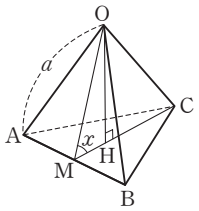
△ABC∽△DBE(AA 닮음)이므로 △DBE는 $\overline{BE}=\overline{DE}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{ED}:\overline{BD}=1:\sqrt{2}$이므로 $\overline{ED}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 △AED에서

$$\sin x=\frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

1-8 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{MC}$에 내린 수선의 발을 H, 한 모서리의 길이를 a라 하면



$\overline{CM}=\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

점 H는 △ABC의 무게중심이므로

$\overline{MH}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

△OMH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

$$\therefore\ \sin x=\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos x=\frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \sin x\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

2-1 (1) $\tan 15^\circ\times\tan 75^\circ+\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ$

$=\tan 15^\circ\times\tan(90^\circ-15^\circ)+\sin^2 15^\circ+\sin^2(90^\circ-15^\circ)$

$=\tan 15^\circ\times\frac{1}{\tan 15^\circ}+\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$

$=1+1=2$

(2) $(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)^2+(\sin 20^\circ-\cos 20^\circ)^2$

$=\sin^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\cos^2 20^\circ$

$\quad+\sin^2 20^\circ-2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\cos^2 20^\circ$

$=\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ+\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ$

$=1+1=2$

2-2 좌변의 괄호 안을 정리하면

$$\frac{1+\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{(1+\sin A)^2+\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{1+2\sin A+\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}=\frac{2}{\cos A}$$

(좌변)$=\frac{2}{\cos A}\times\sin A=\frac{2\sin A}{\cos A}=2\tan A$

$\therefore\ a=2$

2-3 (1) $(1-\sin^2 x)(1-\cos^2 x)(1+\tan^2 x)$

$=\cos^2 x\times\sin^2 x\times\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\cos^2 x\times\sin^2 x\times\frac{1}{\cos^2 x}=\sin^2 x$

(2) $\tan^2 x-\sin^2 x-\tan^2 x\sin^2 x$

$=\tan^2 x(1-\sin^2 x)-\sin^2 x$

$=\tan^2 x\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\times\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\sin^2 x-\sin^2 x=0$

(3) (주어진 식)

$$=\left(\sin^2 x-2+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+\left(\cos^2 x-2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$
$$-\left(\tan^2 x-2+\frac{1}{\tan^2 x}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\tan^2 x-\frac{1}{\tan^2 x}$$

$$=-1+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=-1+\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=-1+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$=-1+1+1=1$

2-4 이차방정식 $x^2+2\sin Ax+\cos A=0$이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=\sin^2 A-\cos A=0$

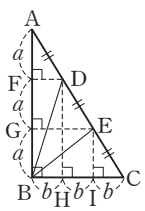
$1-\cos^2 A-\cos A=0,\ \cos^2 A+\cos A-1=0$

$$\therefore\ \cos A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

그런데 $0^\circ<A<90^\circ$일 때, $\cos A>0$이므로

$$\cos A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

2-5 오른쪽 그림과 같이 점 D, E에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G H, I라 하고, $\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GB}=a$, $\overline{BH}=\overline{HI}=\overline{IC}=b$라 하면



△DBH에서 $\overline{BD}^2=(2a)^2+b^2$이므로

$\sin^2 x=4a^2+b^2$ … ㉠

△EBI에서 $\overline{BE}^2=a^2+(2b)^2$이므로

$\cos^2 x=a^2+4b^2$ … ㉡

㉠+㉡을 하면

$\sin^2 x+\cos^2 x=5a^2+5b^2$이므로

$5(a^2+b^2)=1$ $\quad\therefore\ a^2+b^2=\frac{1}{5}$

$$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3b)^2}=3\sqrt{a^2+b^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

3-1 $\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로
$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}=2 : 1$
따라서 $\triangle ABC$에서 $\angle BAC=60^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$이므로
$\sin 2B\times\tan\frac{A}{2}=\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}$

3-2 $4\sqrt{3}x^2-2(3+\sqrt{3})x+3=0$, $(2x-1)(2\sqrt{3}x-3)=0$
$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
즉, $\sin a=\frac{1}{2}$, $\cos a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos a=\frac{1}{2}$
$\therefore\ \angle a=30^\circ$ 또는 $\angle a=60^\circ$

3-3 $0^\circ<A<45^\circ$일 때, $0<\sin A<\cos A<1$이므로
$\sin A+3\cos A>0$, $\sin A-\cos A<0$
$\therefore\ \sqrt{(\sin A+3\cos A)^2}+\sqrt{(\sin A-\cos A)^2}$
$=(\sin A+3\cos A)+\{-(\sin A-\cos A)\}$
$=4\cos A=2\sqrt{3}$
따라서 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\angle A=30^\circ$
$\therefore\ \tan(90^\circ-A)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

3-4 $\triangle ABD$에서
$\tan 30^\circ=\frac{5}{\overline{BD}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{\overline{BD}}$
$\therefore\ \overline{BD}=5\sqrt{3}$
$\sin 30^\circ=\frac{5}{\overline{AB}}$, $\frac{1}{2}=\frac{5}{\overline{AB}}$
$\therefore\ \overline{AB}=10$
$\triangle BCD$에서 $\overline{BC}=\overline{CD}$이므로
$\angle DBC=\angle BDC=45^\circ$
$\cos 45^\circ=\frac{\overline{BC}}{5\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\overline{BC}}{5\sqrt{3}}$
$\therefore\ \overline{BC}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$
$\triangle AFD$에서 $\cos 45^\circ=\frac{\overline{DF}}{5}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\overline{DF}}{5}$ $\therefore\ \overline{DF}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$
즉, $\overline{CE}=\overline{DF}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ \overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}$
$=\frac{5\sqrt{6}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$=\frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$
따라서 $\triangle ABE$에서
$\cos 75^\circ=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}}{10}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3-5 $\tan 1^\circ=\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA}}=\overline{OP_1}$, $\tan 2^\circ=\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OA}}=\overline{OP_2}$, $\cdots$,
$\tan 89^\circ=\frac{\overline{OP_{89}}}{\overline{OA}}=\overline{OP_{89}}$이므로
$\overline{OP_1}\times\overline{OP_2}\times\cdots\times\overline{OP_{89}}$
$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ$
그런데 $\tan(90^\circ-A)=\frac{1}{\tan A}$이므로
$\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ$
$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 44^\circ\times\tan 45^\circ$
$\times\frac{1}{\tan 44^\circ}\times\frac{1}{\tan 43^\circ}\times\cdots\times\frac{1}{\tan 2^\circ}\times\frac{1}{\tan 1^\circ}$
$=\tan 45^\circ=1$

4-1 $\cos\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB}}{9}=\frac{2}{3}$
$\therefore\ \overline{OB}=6$
$\triangle AOB$에서 $\overline{AB}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$
$\triangle AOB\backsim\triangle CAE$ (AA 닮음)이므로
$\overline{OB} : \overline{AE}=\overline{AB} : \overline{CE}$에서
$6 : (9-6)=3\sqrt{5} : \overline{CE}$
$6\overline{CE}=9\sqrt{5}$ $\therefore\ \overline{CE}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$
$\therefore\ \triangle CAE=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{9\sqrt{5}}{4}$

4-2 점 C에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 D라 하면
$\triangle COD$에서
$\overline{CD}=\sin x$, $\overline{OD}=\cos x$이므로
$\overline{BD}=1-\cos x$
$\triangle BCD$에서
$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DB}^2$
$=\sin^2 x+(1-\cos x)^2$
$=\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x$
$=2-2\cos x$
$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{2-2\cos x}$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.66~68

01 $\frac{1}{4}$ **02** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **03** $\frac{1}{3}$ **04** $\frac{15}{4}$ **05** $\frac{\sqrt{6}}{2}$
06 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **07** $\sqrt{5}$ **08** $\frac{4}{3}$ **09** 1 **10** $\frac{1}{2}$
11 $\frac{89}{2}$ **12** $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 **13** ③
14 (1) $2\cos 25^\circ>3\tan 25^\circ$ (2) $2\sin^2 80^\circ>2-\cos 80^\circ$
15 ④ **16** 90°

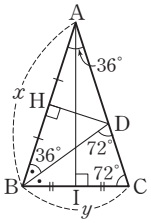
01 $\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

$\therefore\ \angle DBA=\angle DBC=36^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\overline{AB}=\overline{AC}=x,\ \overline{BC}=\overline{BD}=\overline{AD}=y$

라 하면



$\triangle AHD$에서

$$\cos 36^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{x}{2}}{y}=\frac{x}{2y}$$

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\triangle ABI$에서 $\cos 72^\circ=\frac{\overline{BI}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{y}{2}}{x}=\frac{y}{2x}$

$\therefore\ \cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{x}{2y}\times\frac{y}{2x}=\frac{1}{4}$

02 $\overline{AD}//\overline{CE}$이므로

$\angle ECF=\angle DAF=x$(엇각)

$\therefore\ \angle ECB=45^\circ-x$

$\triangle BCE$에서

$\angle EBC=90^\circ-\angle ECB$

$=90^\circ-(45^\circ-x)=45^\circ+x$

$\therefore\ \angle BAD=\angle EBC$

따라서 $\triangle ABD\equiv\triangle BCE$(RHA 합동)이므로

$\overline{BD}=\overline{CE}=4,\ \overline{BE}=\overline{AD}=2$

$\triangle AFD\backsim\triangle CFE$(AA 닮음)이므로

$\overline{AD}:\overline{CE}=\overline{DF}:\overline{EF}$에서 $2:4=\overline{DF}:\overline{EF}$

$\therefore\ \overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{EF}$

$\therefore\ \overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{DE}=\frac{1}{3}\times(4-2)=\frac{2}{3}$

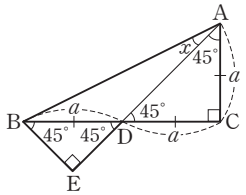
$\triangle AFD$에서

$\overline{AF}=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

$\therefore\ \sin x=\frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

03 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하고,

$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{DC}=a$라 하면



$\triangle ADC$에서 $\overline{AD}=\sqrt{2}a$

$\triangle BED$에서

$\overline{BE}=\overline{DE}=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 $\triangle ABE$에서 $\overline{AE}=\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$이므로

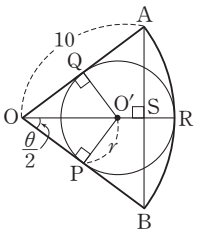
$$\tan x=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}=\frac{1}{3}$$

04 부채꼴의 중심각의 크기를 θ, 내접하는 원 O′의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle OPO'$에서

$\overline{OO'}=\overline{OR}-\overline{O'R}=10-r$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{O'P}}{\overline{OO'}}=\frac{r}{10-r}$ …㉠

또 중심 O′에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 S라 하면



$\overline{BS}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ …㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{r}{10-r}=\frac{3}{5},\ 5r=30-3r$

$\therefore\ r=\frac{15}{4}$

따라서 원 O′의 반지름의 길이는 $\frac{15}{4}$이다.

05 $\triangle ABC\backsim\triangle ADB\backsim\triangle BDC$(AA 닮음)이므로

닮음비는 $\overline{AC}:\overline{AB}:\overline{BC}$

즉, 넓이의 비가 $\overline{AC}^2:\overline{AB}^2:\overline{BC}^2$이므로

$\triangle ABC=k\overline{AC}^2$,

$\triangle ABD=k\overline{AB}^2$, $\triangle BCD=k\overline{BC}^2(k>0)$이라 하면

$\triangle ABC=3\triangle ABD-2\triangle BCD$에서

$k\overline{AC}^2=3(k\overline{AB}^2)-2(k\overline{BC}^2)$

$\therefore\ \overline{AC}^2=3\overline{AB}^2-2\overline{BC}^2$ …㉠

$\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ …㉡

㉠, ㉡에서

$3\overline{AB}^2-2\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$2\overline{AB}^2=3\overline{BC}^2$

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{BC}\ (\because\ \overline{AB}>0,\ \overline{BC}>0)$

$$\therefore\ \tan C=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

[다른 풀이]

$\overline{AD}=a,\ \overline{BD}=b,\ \overline{CD}=c$라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}(a+c)b$, $\triangle ABD=\frac{1}{2}ab$, $\triangle BDC=\frac{1}{2}bc$

$\triangle ABC=3\triangle ABD-2\triangle BCD$이므로

$\frac{1}{2}(a+c)b=3\times\frac{1}{2}ab-2\times\frac{1}{2}bc$

$\therefore\ 2a=3c$

따라서 $a=3k,\ c=2k(k>0)$라 하면

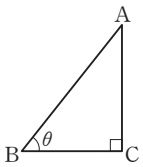
$b^2=ac$이므로 $b^2=3k\times 2k$

$\therefore\ b=\sqrt{6}k\ (\because\ b>0)$

$$\therefore\ \tan C=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\sqrt{6}k}{2k}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

06 △AEC에서 $\overline{AE}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
△ABE와 △DAE에서
$\overline{BE}:\overline{AE}=\overline{AE}:\overline{DE}=\sqrt{2}:1$,
$\angle BEA=\angle AED$이므로
△ABE∽△DAE(SAS 닮음)
$\therefore \angle DAE=\angle ABE=\alpha$
△DAE에서 $\angle AEC=\alpha+\beta$
$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

07 오른쪽 그림과 같이 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$를 만족하는 △ABC에서

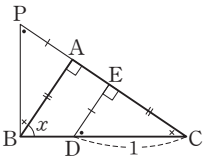


$\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=\sqrt{5}k\ (k>0)$라 하면
$\overline{BC}=\sqrt{(3k)^2-(\sqrt{5}k)^2}=2k$
$\therefore \tan\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{5}k}{2k}=\frac{\sqrt{5}}{2}$
이때 직선의 기울기는 $\tan\theta$의 값과 같고,
$ax-2y+1=0$에서 $y=\frac{a}{2}x+\frac{1}{2}$이므로
$\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\therefore a=\sqrt{5}$

08 꼭짓점의 좌표가 $(-4,\ -1)$이므로 이차함수의 식은
$y=a(x+4)^2-1$
즉, $a(x+4)^2-1=ax^2+\sin Ax+\cos A$이므로
$\sin A=8a$, $\cos A=16a-1$
이때 $\sin^2A+\cos^2A=1$이므로
$(8a)^2+(16a-1)^2=1$
$320a^2-32a=0$, $32a(10a-1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{10}\ (\because a\neq0)$
따라서 $\sin A=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos A=\frac{16}{10}-1=\frac{3}{5}$이므로
$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{4}{3}$

09 $px+qy=2$에
$y=0$을 대입하면 $x=\frac{2}{p}$이므로 $A\left(\frac{2}{p},\ 0\right)$
$x=0$을 대입하면 $y=\frac{2}{q}$이므로 $B\left(0,\ \frac{2}{q}\right)$
△AOH에서
$\sin a=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{2}{-\frac{2}{p}}=-p\ (\because p<0)$
$\therefore p=-\sin a$
$\angle HOB=\angle HAO=a$이므로
△HOB에서
$\cos a=\frac{\overline{OH}}{\overline{OB}}=\frac{2}{\frac{2}{q}}=q$
$\therefore p^2+q^2=(-\sin a)^2+\cos^2a$
$=\sin^2a+\cos^2a=1$

10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$의 연장선 위에 $\overline{PA}=\overline{DE}$가 되도록 점 P를 잡으면



△CED≡△BAP(SAS 합동)
$\therefore \overline{BP}=\overline{CD}=1$
$\angle PBA=\angle DCE$이므로
$\angle PBC=\angle PBA+\angle ABC$
$=\angle DCE+\angle EDC=90^\circ$
즉, △PBC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이고,
$\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{AC}=\overline{DE}+\overline{AC}=2$
이때 $\angle CPB=\angle ABC=x$
$\therefore \cos x=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{1}{2}$

11 $A+B=90^\circ$이면
$\cos B=\cos(90^\circ-A)=\sin A$이므로
$\cos^2A+\cos^2B=\cos^2A+\sin^2A=1$
$\therefore$ (주어진 식)
$=(\cos^21^\circ+\cos^289^\circ)+\cdots+(\cos^244^\circ+\cos^246^\circ)$
$+\cos^245^\circ+\cos^290^\circ$
$=(\cos^21^\circ+\sin^21^\circ)+\cdots+(\cos^244^\circ+\sin^244^\circ)$
$+\cos^245^\circ+\cos^290^\circ$
$=(1+1+\cdots+1)+\frac{1}{2}+0$
$=44+\frac{1}{2}$
$=\frac{89}{2}$

12 $2\sin^2A-5\cos A+1=0$에서
$2(1-\cos^2A)-5\cos A+1=0$
$2\cos^2A+5\cos A-3=0$
$(\cos A+3)(2\cos A-1)=0$
$\therefore \cos A=\frac{1}{2}\ (\because 0^\circ<A\leq90^\circ)$
$\therefore \angle A=60^\circ$
$2\cos^2B+5\sin B-4=0$에서
$2(1-\sin^2B)+5\sin B-4=0$
$2\sin^2B-5\sin B+2=0$
$(2\sin B-1)(\sin B-2)=0$
$\therefore \sin B=\frac{1}{2}\ (\because 0^\circ<B\leq90^\circ)$
$\therefore \angle B=30^\circ$
따라서 $\angle C=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$이므로
△ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

13 $B=\cos50^\circ=\cos(90^\circ-40^\circ)=\sin40^\circ$이고,
$0^\circ\leq x\leq90^\circ$일 때, $\sin x$의 값은 0에서 1까지 점점 커지므로 $B<A<1$
이때 $C=\tan63^\circ>\tan45^\circ=1$
$\therefore B<A<C$

14 (1) $2\cos 25^\circ - 3\tan 25^\circ$

$= 2\cos 25^\circ - \dfrac{3\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$= \dfrac{2\cos^2 25^\circ - 3\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$= \dfrac{2(1-\sin^2 25^\circ) - 3\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$= \dfrac{-(2\sin^2 25^\circ + 3\sin 25^\circ - 2)}{\cos 25^\circ}$

$= \dfrac{-(2\sin 25^\circ - 1)(\sin 25^\circ + 2)}{\cos 25^\circ}$

그런데 $\cos 25^\circ > 0$, $0 < \sin 25^\circ < \dfrac{1}{2}\ (= \sin 30^\circ)$이므로

$2\cos 25^\circ - 3\tan 25^\circ > 0$

$\therefore\ 2\cos 25^\circ > 3\tan 25^\circ$

(2) $2\sin^2 80^\circ - (2 - \cos 80^\circ)$

$= 2(1-\cos^2 80^\circ) - (2 - \cos 80^\circ)$

$= -2\cos^2 80^\circ + \cos 80^\circ$

$= -\cos 80^\circ\ (2\cos 80^\circ - 1)$

그런데 $0 < \cos 80^\circ < \dfrac{1}{2}\ (= \sin 60^\circ)$이므로

$2\sin^2 80^\circ - (2 - \cos 80^\circ) > 0$

$\therefore\ 2\sin^2 80^\circ > 2 - \cos 80^\circ$

15 ① $\triangle AOB$에서 $\sin a = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \overline{AB}$

② $\triangle AOC$에서 $\tan a = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \overline{AC}$

③ $\triangle AOC$에서 $\cos a = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{1}{\overline{OC}}$이므로

$\overline{OC} = \dfrac{1}{\cos a}$

④ $\triangle DOC$에서 $\tan a = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$이므로

$\overline{CD} = \overline{OC} \times \tan a = \dfrac{\tan a}{\cos a}$

⑤ $\triangle DOC$에서 $\overline{AC}^2 = \overline{AO} \times \overline{AD}$이므로

$\tan^2 a = 1 \times \overline{AD}$ $\quad\therefore\ \overline{AD} = \tan^2 a$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

16 $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = 1 & \cdots ㉠ \\ a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

$a+b=1$에서 $b=1-a$이므로

㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a\sin x + (1-a)\cos x = 1$에서

$a(\sin x - \cos x) = 1 - \cos x$ $\cdots ㉢$

$a\sin^2 x + (1-a)\cos^2 x = 1$에서

$a(\sin^2 x - \cos^2 x) = 1 - \cos^2 x$

$a(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$

$= (1+\cos x)(1-\cos x)$ $\cdots ㉣$

㉢을 ㉣에 대입하면

$(\sin x + \cos x)(1-\cos x) = (1+\cos x)(1-\cos x)$

$\sin x + \cos x = 1 + \cos x$, $\sin x = 1$

$\therefore\ \angle x = 90^\circ$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.69~70

01 $\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{6}}{9}$ **02** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ **03** $\dfrac{1}{4}$

04 (1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ **05** $\dfrac{11}{8}$

06 $2\sin^2 x > 3\cos x$

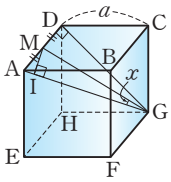
01 $\overline{AG} = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3}a$,

$\overline{DG} = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a$이고,

$\triangle GDM$에서

$\angle GDM = 90^\circ$이므로

$\overline{GM} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a$



점 M에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\triangle GAM = \dfrac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{DG} = \dfrac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{MI}$이므로

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}a \times \sqrt{2}a = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times \overline{MI}$

$\therefore\ \overline{MI} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

$\triangle MIG$에서

$\overline{GI} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}a$

$\therefore\ \sin x + \cos x = \dfrac{\overline{MI}}{\overline{GM}} + \dfrac{\overline{GI}}{\overline{GM}}$

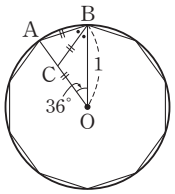
$= \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{6}a + \frac{5\sqrt{3}}{6}a}{\frac{3}{2}a} = \dfrac{\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{9}$

02 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정십각형을 그리고 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 그으면

$\angle AOB = 36^\circ$이므로

$\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$

$\angle OBA$의 이등분선과 $\overline{OA}$의 교점을 C라 하면



$\triangle OAB \backsim \triangle BAC$(AA 닮음)이므로

$\overline{OA} : \overline{BA} = \overline{AB} : \overline{AC}$

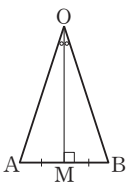
$\overline{AB}^2 = 1 \times \overline{AC} = 1 \times (1 - \overline{OC}) = 1 - \overline{OC}$

이때 $\overline{AB} = x$라 하면 $\overline{OC} = \overline{AB} = x$이므로

$x^2 = 1 - x$, $x^2 + x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\because\ x > 0)$

즉, $\overline{AB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$이므로 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



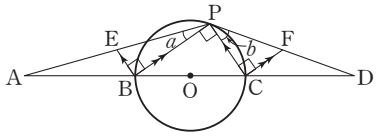
$\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

따라서 $\triangle AMO$에서 $\angle AOM = 18^\circ$

이므로 $\sin 18^\circ = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

03 $\overline{BE}//\overline{CP}$, $\overline{CF}//\overline{BP}$가 되도록 $\overline{AP}$, $\overline{DP}$ 위에 각각 점 E, F를 잡으면

$\angle EBP=\angle FCP=90^\circ$

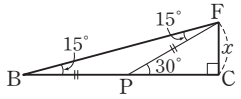


삼각형의 중점연결 정리에 의해

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{CP}$, $\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{BP}$이므로

$$\tan a\tan b=\frac{\overline{BE}}{\overline{BP}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{CP}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\overline{CP}}{\overline{BP}}\times\frac{\frac{1}{2}\overline{BP}}{\overline{CP}}$$
$$=\frac{1}{4}$$

04 (1) 오른쪽 그림과 같이 △BCF에서 $\overline{BC}$ 위에 $\overline{BP}=\overline{PF}$가 되도록 점 P를 잡으면



$\angle FPC=15^\circ+15^\circ=30^\circ$

△FPC는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로

$\overline{FC}=x$라 하면

$\overline{FC}:\overline{PC}:\overline{PF}=1:\sqrt{3}:2$에서

$\overline{PC}=\sqrt{3}x$, $\overline{PF}=2x$

$\therefore\ \overline{BP}=\overline{PF}=2x$

이때 $\overline{BC}=(2+\sqrt{3})x=1$이므로

$$x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \overline{BF}=\sqrt{1^2+(2-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{8-2\sqrt{12}}$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \cos 15^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) □GHCI의 한 변의 길이를 y라 하면

△BHG에서

$$\tan 15^\circ=\frac{\overline{GH}}{\overline{BH}}=\frac{y}{1-y}\quad\cdots\ ㉠$$

△BCF에서

$$\tan 15^\circ=\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=2-\sqrt{3}\quad\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

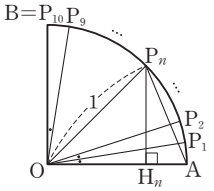
$\frac{y}{1-y}=2-\sqrt{3}$, $y=(1-y)(2-\sqrt{3})$

$(3-\sqrt{3})y=2-\sqrt{3}$

$$\therefore\ y=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

따라서 □GHCI의 한 변의 길이는 $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$이다.

05 다음 그림과 같이 점 P_1, P_2, …, P_{10}에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, …, $H_{10}(=O)$이라 하면



$\triangle P_nOA=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{P_nH_n}$

$\angle AOP_1=\angle P_1OP_2$
$=\angle P_2OP_3=\cdots=\angle P_9OB$
$=90^\circ\times\frac{1}{10}=9^\circ$

$\therefore\ \angle AOP_n=9^\circ\times n$

즉, $\sin(9^\circ\times n)=\frac{\overline{P_nH_n}}{\overline{OP_n}}=\overline{P_nH_n}$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{P_nH_n}$$
$$=\frac{1}{2}\sin(9^\circ\times n)$$

$$\therefore\ {S_1}^2+{S_2}^2+\cdots+{S_{10}}^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sin 9^\circ\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin 18^\circ\right)^2+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2}\sin 81^\circ\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin 90^\circ\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}(\sin^2 9^\circ+\sin^2 18^\circ+\cdots+\sin^2 81^\circ+\sin^2 90^\circ)$$

그런데 $\sin A=\cos(90^\circ-A)$이므로

${S_1}^2+{S_2}^2+\cdots+{S_{10}}^2$
$=\frac{1}{4}(\sin^2 9^\circ+\cdots+\sin^2 36^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 54^\circ+$
$\cdots+\sin^2 81^\circ+\sin^2 90^\circ)$
$=\frac{1}{4}(\underline{\sin^2 9^\circ}+\cdots+\underline{\sin^2 36^\circ}+\sin^2 45^\circ+\underline{\cos^2 36^\circ}+$
$\cdots+\underline{\cos^2 9^\circ}+\sin^2 90^\circ)$
$=\frac{1}{4}\left\{1\times 4+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2\right\}$
$=\frac{11}{8}$

06 $2\sin^2 x-3\cos x=2(1-\cos^2 x)-3\cos x$
$=-2\cos^2 x-3\cos x+2$
$=-(2\cos x-1)(\cos x+2)$

그런데 $60^\circ<x<90^\circ$이므로

$\cos 90^\circ<\cos x<\cos 60^\circ$

$$\therefore\ 0<\cos x<\frac{1}{2}$$

즉, $-1<2\cos x-1<0$,

$2<\cos x+2<\frac{5}{2}$이므로

$-(2\cos x-1)(\cos x+2)>0$

따라서 $2\sin^2 x-3\cos x>0$이므로

$2\sin^2 x>3\cos x$

2 삼각비의 활용

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.74~78

1-1 ④ **1-2** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^2 **1-3** $\frac{48}{5}$ **1-4** $\sqrt{3}$ cm

1-5 $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ m **2-1** $3\sqrt{19}$ **2-2** $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm

2-3 $(2\sqrt{3}+2)$ cm **3-1** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ **3-2** $\frac{5}{2}$

3-3 $\frac{19}{2}$ **3-4** 60° **4-1** 1 **4-2** 10 cm

4-3 $10\sqrt{2}$ m **5-1** 90.2%

5-2 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2 **5-3** 6 **5-4** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$, 3

5-5 24 cm^2 **5-6** $\frac{17}{13}$ **5-7** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ **6-1** ① **6-2** $\frac{\sqrt{10}}{10}$

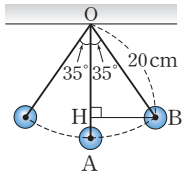
1-1 오른쪽 그림의 △OHB에서

$\overline{OH}=20\cos 35°$(cm)

$\therefore \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}$

$=20-20\cos 35°$

$=20(1-\cos 35°)$(cm)



1-2 ∠A가 예각일 때, $\sin(90°-A)=\cos A$이므로

$\sin x=\cos 2x$에서 $x+2x=90°$

$3x=90°$ $\therefore x=30°$

$\overline{OB}=\frac{\overline{OA}}{\cos 30°}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{OC}=\frac{\overline{OB}}{\cos 30°}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$ (cm)

$\overline{CD}=\overline{OC}\tan 30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm)

$\therefore \triangle OCD=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (cm^2)

1-3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$를 그으면

△AOT′≡△AOT (RHS 합동)

이므로 ∠AOT′=∠AOT

$\overline{AO}$와 $\overline{TT'}$의 교점을 M이라 하면

△OMT′≡△OMT (SAS 합동)

$\therefore \overline{OM}\perp\overline{TT'}$

△AOT에서 $\overline{AO}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

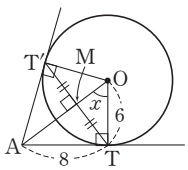
이때 ∠AOT=x라 하면

$\sin x=\frac{\overline{AT}}{\overline{AO}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$이므로

△MOT에서

$\overline{TM}=6\sin x=6\times\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$

$\therefore \overline{TT'}=2\overline{TM}=2\times\frac{24}{5}=\frac{48}{5}$



1-4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 연장선 위에 $\overline{DE}=\overline{CB'}$이 되도록 점 B′을 잡으면

△BED≡△ACB′ (SAS 합동)

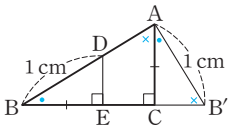
$\therefore$ ∠DBE=∠B′AC, $\overline{AB'}=\overline{BD}=1$ cm

∠BAB′=90°이고,

$\overline{BB'}=\overline{BC}+\overline{CB'}=\overline{BC}+\overline{DE}=2$ cm이므로

$\cos B'=\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}}=\frac{1}{2}$ $\therefore$ ∠B′=60°

$\therefore \overline{AB}=\overline{AB'}\tan 60°=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (cm)



1-5 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 평행하게 $\overline{A'B'}$을 그으면 막대의 그림자는 $\overline{OB'}$이다.

점 A′에서 $\overline{OB'}$에 내린 수선의 발을 C라 하면

△AOB에서

$\overline{OA}=3$ m, $\overline{OB}=\sqrt{3}$ m이므로

$\tan(\angle ABO)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\therefore$ ∠ABO=60°

$\overline{A'C}=3\sin 45°=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (m)

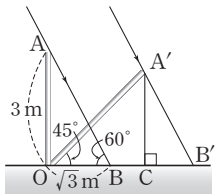
이때 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$이므로 ∠A′B′C=∠ABO=60°

△A′CB′에서

$\overline{CB'}=\frac{\overline{A'C}}{\tan 60°}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (m)

$\therefore \overline{OB'}=\overline{OC}+\overline{CB'}=\overline{A'C}+\overline{CB'}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ (m)



2-1 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

△CHD에서 $\overline{CD}=\overline{AB}=6$,

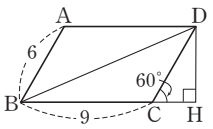
∠DCH=∠ABC=60°이므로

$\overline{CH}=6\cos 60°=3$

$\overline{DH}=6\sin 60°=3\sqrt{3}$

따라서 △BDH에서

$\overline{BD}=\sqrt{12^2+(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{19}$



2-2 ∠BAE=60°이므로

∠EAG=90°−60°=30°,

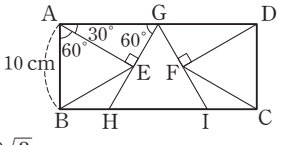
∠AGE=90°−30°=60°

따라서 △AEG에서

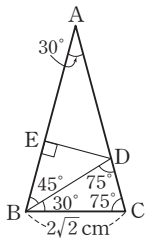
$\overline{AG}=\frac{\overline{AE}}{\sin 60°}=\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ (cm)

이때 △AEG≡△DFG (SAS 합동)이므로 $\overline{AG}=\overline{DG}$

$\therefore \overline{AD}=2\overline{AG}=\frac{40\sqrt{3}}{3}$ (cm)



2-3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 위에 $\overline{BC}=\overline{BD}$인 점 D를 잡으면



$\angle BDC=\angle BCD=75^\circ$이므로

$\angle DBC=30^\circ$

$\therefore \angle ABD=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\triangle DBE$에서

$\overline{EB}=\overline{ED}=\overline{BD}\cos 45^\circ=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\,(\text{cm})$

$\triangle AED$에서

$\overline{AE}=\dfrac{\overline{ED}}{\tan 30^\circ}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

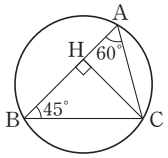
$\therefore \overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}=2\sqrt{3}+2\,(\text{cm})$

3-1 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=2\times 1=2$이므로

$\overline{BC}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3},\ \overline{AC}=2\sin 45^\circ=\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ACH$에서

$\overline{AH}=\overline{AC}\cos 60^\circ=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle BCH$에서

$\overline{BH}=\overline{BC}\cos 45^\circ=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

3-2 $\triangle DBC$에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{DC}}{\sin x}$이므로

$\dfrac{\sin x}{\overline{DC}}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{2\overline{BD}}$

따라서 $\dfrac{\sin x}{\overline{DC}}$의 값이 최대일 때, $\overline{BD}$의 길이는 최소이므로 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이어야 한다.

즉, $\angle BDC=90^\circ$ $\quad\therefore \overline{BD}=5\sin 30^\circ=\dfrac{5}{2}$

3-3 $\triangle APC$에서 제이코사인법칙에 의해

$\cos A=\dfrac{8^2+2^2-7^2}{2\times 8\times 2}=\dfrac{19}{32}$ $\quad\cdots$ ㉠

$\overline{BP}=x$라 하면 $\overline{AB}=x+2$이므로

$\triangle ABC$에서 제이코사인법칙에 의해

$\cos A=\dfrac{8^2+(x+2)^2-(\sqrt{87})^2}{2\times 8\times(x+2)}=\dfrac{x^2+4x-19}{16(x+2)}$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{x^2+4x-19}{16(x+2)}=\dfrac{19}{32},\ 2(x^2+4x-19)=19(x+2)$

$2x^2-11x-76=0,\ (x+4)(2x-19)=0$

$\therefore x=\dfrac{19}{2}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{BP}=\dfrac{19}{2}$

3-4 $(a-c)(a^2+ac)+(b-c)(b^2+bc)=0$에서

$a(a-c)(a+c)+b(b-c)(b+c)=0$

$a(a^2-c^2)+b(b^2-c^2)=0$

$a^3+b^3-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2-ab+b^2-c^2)=0$

그런데 $a+b\neq 0$이므로 $a^2-ab+b^2-c^2=0$ $\quad\cdots$ ㉠

제이코사인법칙에 의해 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $\quad\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-ab+2ab\cos C=0,\ \cos C=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle C=60^\circ$

4-1 $\overline{EC}=a$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=a+\sqrt{3}$이므로

$\tan 75^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{EC}}=\dfrac{a+\sqrt{3}}{a}$

그런데 $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$이므로 $\dfrac{a+\sqrt{3}}{a}=2+\sqrt{3}$

$(1+\sqrt{3})a=\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

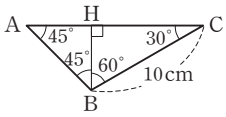
$\therefore \overline{AC}=a+\sqrt{3}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\triangle BCD$에서

$\overline{CD}=\overline{BC}\tan 30^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=1$

4-2 $\triangle ABC$에서



$\angle BAC=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)$

$=45^\circ$

점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

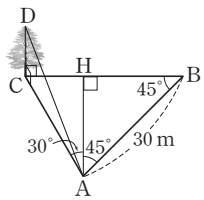
$\triangle BCH$에서 $\overline{BH}=10\cos 60^\circ=5\,(\text{cm})$

$\triangle ABH$에서 $\overline{AB}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=5\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\triangle DAB$에서 $\tan a=\dfrac{\overline{DA}}{\overline{AB}}$이므로 $\dfrac{\overline{DA}}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{DA}=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10\,(\text{cm})$

4-3 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABH$에서

$\overline{AH}=30\sin 45^\circ=15\sqrt{2}\,(\text{m})$

$\triangle ACH$에서

$\angle CAH=75^\circ-45^\circ=30^\circ$이므로

$\overline{AC}=\dfrac{\overline{AH}}{\cos 30^\circ}=\dfrac{15\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=10\sqrt{6}\,(\text{m})$

이때 $\angle DCA=90^\circ$이므로 $\triangle ACD$에서

$\overline{CD}=\overline{AC}\tan 30^\circ=10\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{2}\,(\text{m})$

5-1 △ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$

△ADE에서

$\overline{AD}=c\times(1+0.1)=1.1c$

$\overline{AE}=b\times(1-0.18)=0.82b$

$\therefore\ \triangle ADE=\frac{1}{2}\times1.1c\times0.82b\times\sin A$

$=\frac{1}{2}bc\sin A\times0.902$

$=\triangle ABC\times0.902$

따라서 △ADE의 넓이는 △ABC의 넓이의 90.2%이다.

5-2 $\overline{CD}=x$ cm라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=2\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\sqrt{3}x\ (\text{cm}^2)$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times x\times\sin30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}x\ (\text{cm}^2)$

따라서 △ABC=△ADC+△BCD이므로

$2\sqrt{3}=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\qquad\therefore\ x=\frac{4}{3}\ (\text{cm})$

$\therefore\ \triangle ADC=\sqrt{3}\times\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ (\text{cm}^2)$

5-3 □ADPF에서 $\angle ADP=\angle AFP=90^\circ$

$\angle A=60^\circ$이므로 $\angle DPF=120^\circ$

같은 방법으로 하면 $\angle DPE=\angle EPF=120^\circ$

$\triangle PDF=\frac{1}{2}zx\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}zx$

$\triangle PDE=\frac{1}{2}xy\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$

$\triangle PEF=\frac{1}{2}yz\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}yz$

$\therefore\ \triangle DEF=\triangle PDF+\triangle PDE+\triangle PEF$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(zx+xy+yz)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times8\sqrt{3}=6$

5-4 $\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{AE}=6-x$이므로

□DBCE=△ABC−△ADE

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2-\frac{1}{2}x(6-x)\sin60^\circ$

$=9\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}x(6-x)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-3)^2+\frac{27\sqrt{3}}{4}$

따라서 $x=3$일 때, □DBCE의 넓이의 최솟값은 $\frac{27\sqrt{3}}{4}$이다.

이때 $x=3$이면 △ADE는 정삼각형이므로 $\overline{DE}=3$

5-5 $\angle EAD=\angle FAD=x$라 하면

$\angle AEB=\angle EAD=x$(엇각)

△ADF에서 $\overline{AF}=\frac{\overline{AD}}{\cos x}=\frac{6}{\cos x}$

△ABE에서 $\overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{\sin x}=\frac{4}{\sin x}$

$\therefore\ \triangle AEF=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin2x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{\cos x}\times\frac{4}{\sin x}\times2\sin x\cos x$

$=24\ (\text{cm}^2)$

5-6 정사각형의 한 변의 길이를 $3a\,(a>0)$라 하면

$\overline{BP}=\overline{DQ}=2a$, $\overline{CP}=\overline{CQ}=a$

$\therefore\ \overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}=\sqrt{13}a$

□ABCD=△ABP+△AQD+△PCQ+△APQ

$=2\triangle ABP+\triangle PCQ+\triangle APQ$

이므로

$(3a)^2=2\times\left(\frac{1}{2}\times2a\times3a\right)+\left(\frac{1}{2}\times a\times a\right)$

$+\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{13}a\times\sqrt{13}a\times\sin x\right)$

$9a^2=6a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}a^2\sin x$

$5a^2=13a^2\sin x$

$\therefore\ \sin x=\frac{5}{13}$

이때 $\sin^2x+\cos^2x=1$이므로 $\cos^2x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2$

$\therefore\cos x=\frac{12}{13}\ (\because\ 0^\circ<x<90^\circ)$

$\therefore\ \sin x+\cos x=\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{17}{13}$

5-7 헤론의 공식에 의해 $s=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

즉, $\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin C=\frac{15\sqrt{7}}{4}$이므로

$\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$

△CED에서

$\overline{CE}=4k$, $\overline{DE}=\sqrt{7}k\,(k>0)$라 하면

$\overline{CD}=\sqrt{(4k)^2-(\sqrt{7}k)^2}=3k$

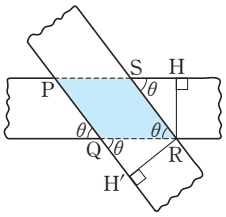
이때 $\triangle CED=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\triangle ABC$이므로

$\frac{1}{2}\times3k\times\sqrt{7}k=\frac{1}{2}\times\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$k^2=\frac{5}{4}\qquad\therefore k=\frac{\sqrt{5}}{2}\ (\because\ k>0)$

$\therefore\ \overline{CD}=3k=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

6-1 오른쪽 그림과 같이 점 R에서 $\overleftarrow{PS}$, $\overleftarrow{PQ}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



△QRH′에서
∠RQH′=θ이므로

$\overline{QR}=\dfrac{\overline{RH'}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

△SRH에서 ∠RSH=θ이므로

$\overline{SR}=\dfrac{\overline{RH}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

$\therefore$ □PQRS$=\overline{QR}\times\overline{SR}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\sin\theta}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{\sin\theta}$

6-2 □OABC=△OAB+△OBC

$=\dfrac{1}{2}\times2\times3+\dfrac{1}{2}\times4\times3$

$=3+6=9$ … ㉠

$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,
$\overline{BO}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$이므로

□OABC$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BO}\times\sin a$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}\times\sin a$

$=3\sqrt{10}\sin a$

$3\sqrt{10}\sin a=9$ ($\because$ ㉠) $\therefore$ $\sin a=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

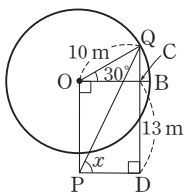
$\therefore$ $\cos a=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.79~82

01 ③ **02** $10\sqrt{3}$ **03** $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm **04** ③
05 $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ cm **06** 128
07 ∠B=90°인 직각삼각형 **08** $\sqrt{21}$ cm
09 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **10** $\sqrt{3}$ cm **11** 28 : 27 : 20 **12** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$
13 30 **14** 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발
15 $2\sqrt{3}$ **16** $\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ **17** $3\sqrt{2}$ cm
18 최솟값 : 2, 최댓값 : $\sqrt{5}$

01 출발 후 한 바퀴를 도는 데 15분이 걸리므로 5분 동안 $\dfrac{360°}{3}=120°$ 회전한다.

따라서 5분 후에는 오른쪽 그림과 같이 Q지점에 도달한다.



∠QOB=30°이므로

$\overline{QC}=10\sin30°=5$ (m)

$\overline{OC}=10\cos30°=5\sqrt{3}$ (m)

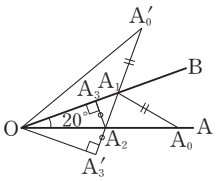
△QPD에서

$\overline{PD}=\overline{OC}=5\sqrt{3}$ m

$\overline{QD}=\overline{QC}+\overline{CD}=5+13=18$ (m)

$\therefore$ $\tan x=\dfrac{\overline{QD}}{\overline{PD}}=\dfrac{18}{5\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

02 오른쪽 그림과 같이 점 A_0을 $\overline{OB}$에 대하여 대칭이동한 점을 A_0', 점 A_3을 $\overline{OA}$에 대하여 대칭이동한 점을 A_3'이라 하면



∠$A_0'OA_3'$=60°이고

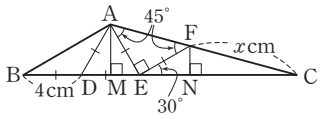
$\overline{A_0A_1}=\overline{A'_0A_1}$, $\overline{A_2A_3}=\overline{A_2A'_3}$이므로

$\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}=\overline{A_0'A_3'}$

$=\overline{OA_0'}\sin60°$

$=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

03 △AEF는 직각이등변삼각형이므로
∠AFE=∠FAE=45°
△ADE는 정삼각형이므로
∠AED=60°
$\therefore$ ∠FEC=180°−(60°+90°)=30°
다음 그림과 같이 점 A, F에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면



$\overline{AF}=\sqrt{2}\,\overline{AE}=4\sqrt{2}$ (cm)

$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{FN}=\overline{EF}\sin30°=4\times\dfrac{1}{2}=2$ (cm)

$\overline{FC}=x$ cm라 하면

△AMC에서 $\sin C=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AC}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+x}$ … ㉠

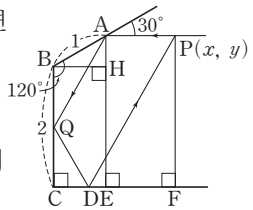
△FNC에서 $\sin C=\dfrac{\overline{FN}}{\overline{FC}}=\dfrac{2}{x}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+x}=\dfrac{2}{x}$, $2(\sqrt{3}-1)x=8\sqrt{2}$

$\therefore$ $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (cm)

$\therefore$ $\overline{FC}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$cm

04 P지점의 좌표를 P(x, y)라 하면
∠BAQ=30°이므로
∠BQA=180°−(120°+30°)
=30°



즉, △ABQ는 이등변삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{BQ}=1$
∠CQD=∠BQA=30°이므로
$\overline{CD}=\overline{CQ}\tan30°=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

A, P지점에서 $\overrightarrow{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, B지점에서 $\overline{AE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle ABH=120^\circ-90^\circ=30^\circ$이므로

$y=\overline{PF}=\overline{AH}+\overline{HE}=\overline{AB}\sin 30^\circ+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

$\angle PDF=\angle QDC=60^\circ$이므로 $\overline{PF}=\overline{PD}\sin 60^\circ$에서

$\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PD}$ $\therefore\ \overline{PD}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\triangle PDF$에서

$\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2,\ 12x^2-8\sqrt{3}x-21=0$

$(2x+\sqrt{3})(6x-7\sqrt{3})=0$ $\therefore\ x=\frac{7\sqrt{3}}{6}\ (\because\ x>0)$

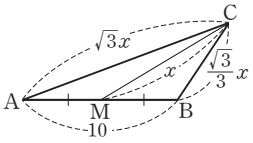
$\therefore\ P(x,\ y)=\left(\frac{7\sqrt{3}}{6},\ \frac{5}{2}\right)$

05 $\overline{PC}=x$라 하면

$\triangle PAC$에서 $\overline{AC}=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$

$\triangle PBC$에서 $\overline{BC}=\frac{x}{\tan 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\triangle PMC$에서 $\angle PMC=45^\circ$이므로 $\overline{MC}=\overline{PC}=x$



$\triangle ABC$에서 파포스 정리에 의해

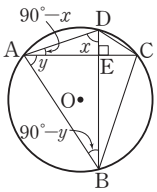
$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)$

$(\sqrt{3}x)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2=2(5^2+x^2),\ 3x^2+\frac{1}{3}x^2=50+2x^2$

$\frac{4}{3}x^2=50,\ x^2=\frac{75}{2}$ $\therefore\ x=\frac{5\sqrt{6}}{2}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{PC}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

06 $\angle ADB=x$라 하면



$\angle CAD=90^\circ-x$

$\triangle ABD$에서 사인법칙에 의해

$\overline{AB}=2\times 4\sin x=8\sin x$

$\triangle ACD$에서 사인법칙에 의해

$\overline{CD}=2\times 4\sin(90^\circ-x)=8\cos x$

$\angle CAB=y$라 하면 $\angle ABD=90^\circ-y$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의해

$\overline{BC}=2\times 4\sin y=8\sin y$

$\triangle ABD$에서 사인법칙에 의해

$\overline{AD}=2\times 4\sin(90^\circ-y)=8\cos y$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2$

$=64\sin^2 x+64\sin^2 y+64\cos^2 x+64\cos^2 y$

$=64(\sin^2 x+\cos^2 x)+64(\sin^2 y+\cos^2 y)$

$=64+64=128$

07 주어진 방정식이 중근을 가지므로

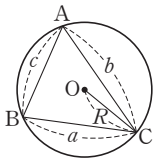
$\frac{D}{4}=\cos^2 B+(\sin C-\cos A)(\sin C+\cos A)=0$

$\cos^2 B+\sin^2 C-\cos^2 A=0$

$(1-\sin^2 B)+\sin^2 C-(1-\sin^2 A)=0$

$\therefore\ \sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B$

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 세 변의 길이를 a, b, c라 하고, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해



$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},$

$\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2$ $\therefore\ a^2+c^2=b^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

08 $\overline{BQ}=x$ cm이면 $\overline{AP}=2x$ cm $(0\le x\le 7)$

$\triangle PBQ$에서 제이코사인법칙에 의해

$\overline{PQ}^2=(14-2x)^2+x^2-2x(14-2x)\cos 60^\circ$

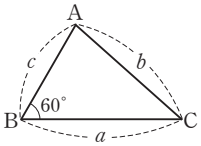
$=(14-2x)^2+x^2-x(14-2x)$

$=7x^2-70x+196$

$=7(x-5)^2+21$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{21}$ cm이다.

09 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 가장 긴 변의 길이를 a, 가장 짧은 변의 길이를 c, 다른 한 변의 길이를 b라 하면 이차방정식



$6x^2-27x+16=0$의 서로 다른 두 근은 각각 a, c이므로 근과 계수의 관계에서

$a+c=\frac{9}{2},\ ac=\frac{8}{3}$

$\triangle ABC$에서 제이코사인법칙에 의해

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ$

$=a^2+c^2-ac$

$=(a+c)^2-3ac$

$=\left(\frac{9}{2}\right)^2-3\times\frac{8}{3}=\frac{49}{4}$

$\therefore\ b=\frac{7}{2}(\because\ b>0)$

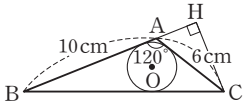
이때 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times(a+b+c)\times r=\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ$

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}\right)\times r=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ r=\frac{\sqrt{3}}{6}$

따라서 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

10 다음 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle CAH=60^\circ$



$\overline{CH}=6\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{AH}=6\cos 60^\circ=3$ (cm)

$\triangle BCH$에서

$\overline{BC}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+13^2}=14$ (cm)

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 10\times 6\times \sin(180^\circ-120^\circ)=15\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

이때 내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=\frac{1}{2}\times 10r+\frac{1}{2}\times 14r+\frac{1}{2}\times 6r=15r(\text{cm}^2)$

즉, $15r=15\sqrt{3}$ $\therefore\ r=\sqrt{3}\ (\text{cm})$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ cm이다.

11 $\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{CA}=c\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$라 하면

$\overline{AP}=\frac{2}{5}a,\ \overline{BP}=\frac{3}{5}a,\ \overline{BQ}=\frac{3}{7}b,\ \overline{CQ}=\frac{4}{7}b,$

$\overline{CR}=\frac{1}{3}c,\ \overline{AR}=\frac{2}{3}c$

$\triangle APR=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}a\times\frac{2}{3}c\times\sin A$

$=\frac{4}{15}\left(\frac{1}{2}ac\sin A\right)=\frac{4}{15}\triangle ABC$

$\triangle BQP=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}b\times\frac{3}{5}a\times\sin B$

$=\frac{9}{35}\left(\frac{1}{2}ab\sin B\right)=\frac{9}{35}\triangle ABC$

$\triangle CRQ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}c\times\frac{4}{7}b\times\sin C$

$=\frac{4}{21}\left(\frac{1}{2}bc\sin C\right)=\frac{4}{21}\triangle ABC$

$\therefore\ \triangle APR:\triangle BQP:\triangle CRQ=\frac{4}{15}:\frac{9}{35}:\frac{4}{21}$

$=28:27:20$

12 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로

$\overline{BD}\perp\overline{AC}$이고, $\angle ABD=\angle CBD=30^\circ$이다.

이때 $\overline{AC}=a$라 하면 $\overline{CD}=\frac{a}{2}$,

$\overline{BE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a$이므로

$\triangle CDE$에서

$\overline{CE}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$

$\triangle BCE=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{BC}\times\sin x$

에서 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}a\times a\times\sin x$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}\sin x$ $\therefore\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$

13 $\overline{AP}=a,\ \overline{BP}=b,\ \overline{CP}=c,\ \overline{DP}=d$라 하면

$\triangle ABP$에서 제이코사인법칙에 의해

$4^2=a^2+b^2-2ab\cos 45^\circ=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$

같은 방법으로 하면

$8^2=b^2+c^2+\sqrt{2}bc,\ 3^2=c^2+d^2-\sqrt{2}cd,$

$9^2=a^2+d^2+\sqrt{2}ad$

이므로

$\square ABCD=\triangle ABP+\triangle BCP+\triangle CDP+\triangle DAP$

$=\frac{1}{2}ab\sin 45^\circ+\frac{1}{2}bc\sin 135^\circ$

$+\frac{1}{2}cd\sin 45^\circ+\frac{1}{2}ad\sin 135^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}(ab+bc+cd+ad)$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{a^2+b^2-4^2}{\sqrt{2}}+\frac{8^2-b^2-c^2}{\sqrt{2}}\right.$

$\left.+\frac{c^2+d^2-3^2}{\sqrt{2}}+\frac{9^2-a^2-d^2}{\sqrt{2}}\right)$

$=\frac{120}{4}=30$

14 $\angle QAB=\angle BAP,\ \angle PAC=\angle CAR$이므로

$\angle QAR=2\angle A$

이때 $\overline{AR}=\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로

$\triangle AQR=\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}\times\sin(2\angle A)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}^2\sin(2\angle A)$

즉, $2\angle A$의 크기는 일정하므로 $\overline{AP}$가 최소일 때,

$\triangle AQR$의 넓이가 최소가 된다.

따라서 점 P는 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발이다.

15 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin x=\frac{1}{3}S$이므로

$\sin x=\frac{2S}{3\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

$\triangle ADE=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin y=\frac{1}{3}S$이므로

$\sin y=\frac{2S}{3\times\overline{AD}\times\overline{AE}}$

$\triangle AEC=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AC}\times\sin z=\frac{1}{3}S$이므로

$\sin z=\frac{2S}{3\times\overline{AE}\times\overline{AC}}$

$\therefore\ \frac{\sin y}{\sin x\times\sin z}=\frac{\frac{2S}{3\times\overline{AD}\times\overline{AE}}}{\frac{2S}{3\times\overline{AB}\times\overline{AD}}\times\frac{2S}{3\times\overline{AE}\times\overline{AC}}}$

$=\frac{3\times\overline{AB}\times\overline{AC}}{2S}$

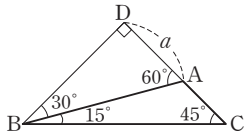
$=\frac{3\times\overline{AB}\times\overline{AC}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=2\sqrt{3}$

16 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{CA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\angle BAD=15^\circ+45^\circ=60^\circ$,

$\angle ABD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

이때 $\overline{AD}=a$라 하면 $\overline{AB}=2a,\ \overline{BD}=\sqrt{3}a$



△DBC에서
∠DBC=∠DCB=45°이므로
$\overline{CD}=\overline{BD}=\sqrt{3}a$, $\overline{BC}=\sqrt{2}\sqrt{3}a=\sqrt{6}a$,
$\overline{AC}=\sqrt{3}a-a=(\sqrt{3}-1)a$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 2a\times(\sqrt{3}-1)a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}$

$\frac{a^2}{2}=1$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

따라서 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{AC}=(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,
$\overline{BC}=\sqrt{6}\times\sqrt{2}=2\sqrt{3}$이므로
(△ABC의 둘레의 길이)$=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$=\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

17 $\overline{AB}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$ (cm)이고,
$\overline{AD}=12\times\frac{2}{3}=8$ (cm), $\overline{CD}=12-8=4$ (cm)

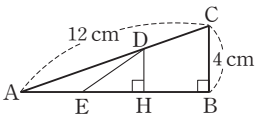
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times 12\times\sin A=48\sqrt{2}\sin A$

$\triangle AED=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times 8\times\sin A=4\overline{AE}\sin A$

그런데 $\triangle AED=\frac{1}{4}\triangle ABC$이므로

$4\overline{AE}\sin A=\frac{1}{4}\times 48\sqrt{2}\sin A$

$\therefore \overline{AE}=3\sqrt{2}$ (cm)
다음 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



△AHD∽△ABC(AA 닮음)이므로
$\overline{HD}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AC}$에서
$\overline{HD}:4=2:3$, $3\overline{HD}=8$

$\therefore \overline{HD}=\frac{8}{3}$ (cm)

$\overline{AH}:\overline{AB}=\overline{AD}:\overline{AC}$에서
$\overline{AH}:8\sqrt{2}=2:3$, $3\overline{AH}=16\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AH}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$ (cm)

$\therefore \overline{EH}=\overline{AH}-\overline{AE}=\frac{16\sqrt{2}}{3}-3\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$ (cm)

$\therefore \overline{DE}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)^2}=3\sqrt{2}$ (cm)

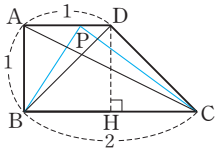
18 ∠BPC=a라 하면

$\triangle BCP=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin a=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AB}$이므로

$\frac{1}{2}xy\sin a=\frac{1}{2}\times 2\times 1$

$xy\sin a=2$ $\therefore xy=\frac{2}{\sin a}$

오른쪽 그림과 같이 점 P가
점 D에서 점 A로 움직일수록
∠BPC의 크기가 작아진다.
점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의
발을 H라 하면

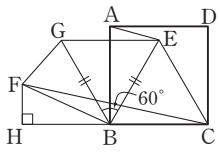


△ABD에서 ∠ABD=45°이므로
∠DBH=∠BDH=45°
이때 △BHD≡△CHD(SAS 합동)이므로
∠CDH=∠BDH=45° $\therefore$ ∠BDC=90°
따라서 $\sin a=\sin 90^\circ=1$일 때, xy의 최솟값은 2이고,
$\sin a=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$일 때, xy의 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.83~84

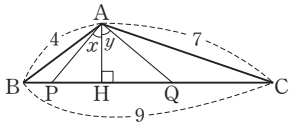
01 2 **02** $\frac{80}{9}$ **03** $\frac{29}{5}$ **04** $\frac{98}{3}\pi-9\sqrt{3}$
05 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ cm^2 **06** $3\sqrt{61}:4\sqrt{19}:9\sqrt{19}:2\sqrt{61}$

01 오른쪽 그림과 같이 △ABE를
점 B를 중심으로 60°만큼 시계
반대 방향으로 회전이동하면
△FBG가 되고, 이때 △BEG는
정삼각형이 된다.



$\therefore \overline{AE}+\overline{BE}+\overline{CE}$
$=\overline{FG}+\overline{GE}+\overline{CE}\geq\overline{FC}$
따라서 $\overline{FC}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$이다. …㉠
이때 □ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면
$\overline{FB}=\overline{AB}=x$,
∠FBC=∠FBA+∠ABC
$=60^\circ+90^\circ=150^\circ$
위의 그림과 같이 점 F에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 △FBC에서 ∠FBH=30°이므로
$\overline{FH}=x\sin 30^\circ=\frac{1}{2}x$, $\overline{HB}=x\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$
△FHC에서
$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^2=\overline{FC}^2$
$(2+\sqrt{3})x^2=(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$ ($\because$ ㉠)
$(2+\sqrt{3})x^2=8+4\sqrt{3}$, $x^2=\frac{4(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=4$
$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

02



위의 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 ∠PAH=x, ∠QAH=y라 하면
$\overline{PH}=\overline{AH}\tan x$, $\overline{HQ}=\overline{AH}\tan y$
$\therefore \overline{PQ}=\overline{PH}+\overline{HQ}=\overline{AH}\tan x+\overline{AH}\tan y$
$=\overline{AH}(\tan x+\tan y)$

이때 $\tan x>0$이고, $\tan y=\tan(90^\circ-x)=\dfrac{1}{\tan x}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{AH}(\tan x+\tan y)$

$=\overline{AH}\left(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right)\geq 2\overline{AH}$

또 $\triangle ABH$에서 $\overline{AH}^2=4^2-\overline{BH}^2$ … ㉠

$\triangle ACH$에서

$\overline{AH}^2=7^2-\overline{CH}^2=7^2-(9-\overline{BH})^2$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $4^2-\overline{BH}^2=7^2-(9-\overline{BH})^2$

$18\overline{BH}=48$ $\therefore \overline{BH}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \triangle APQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PQ}$

$\geq\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times 2\overline{AH}=\overline{AH}^2$

$=\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2=\dfrac{80}{9}$

따라서 $\triangle APQ$의 넓이의 최솟값은 $\dfrac{80}{9}$이다.

03 세 원 A, B, C의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$\overline{AB}=a+b$, $\overline{BC}=b+c$, $\overline{AC}=a+c$

$\triangle ABC$에서

$(b+c)^2=(a+b)^2+(a+c)^2$이므로

$bc=a(a+b+c)$ … ㉠

$\triangle ABC$의 둘레의 길이는 12이므로

$(a+b)+(b+c)+(a+c)=12$

$\therefore a+b+c=6$ … ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면 $bc=6a$

$\triangle ABC$의 넓이가 6이므로

$\dfrac{1}{2}(a+b)(a+c)=6$, $a(a+b+c)+bc=12$

$\therefore a=1$, $bc=6$

이때 $a+b+c=6$이므로 $b+c=5$

b, c를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

그런데 $b>c$이므로 $b=3$, $c=2$

따라서 $\triangle ABC$에서 $\cos C=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=\dfrac{3}{5}$

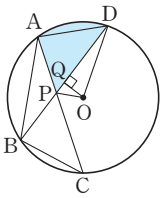
$\triangle ADC$에서 제이코사인법칙에 의해

$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{DC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{DC}\times\cos C$

$=(1+2)^2+2^2-2\times(1+2)\times 2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{29}{5}$

따라서 $\overline{AD}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $\dfrac{29}{5}$이다.

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 긋고, 중심 O에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 Q라 하면



$\triangle DQO$에서

$\overline{OQ}=\sqrt{14^2-13^2}=3\sqrt{3}$

$\triangle PQO$에서

$\overline{PQ}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$이므로

$\tan(\angle OPQ)=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle OPQ=60^\circ$

같은 방법으로 하면 $\angle OPC=60^\circ$

$\therefore \angle APD=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$

$\overline{DP}=\overline{DQ}+\overline{PQ}=13+3=16$

같은 방법으로 하면 $\overline{CP}=16$

$\therefore \overline{AP}=26-16=10$

위의 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면

$\triangle APD=\dfrac{1}{2}\times 10\times 16\times\sin 60^\circ=40\sqrt{3}$

$\overline{AB}$를 그으면 $\triangle ABP$는 이등변삼각형이고

$\angle APB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로

$\angle ABD=30^\circ$ $\therefore \angle AOD=60^\circ$

따라서 $\triangle AOD$는 정삼각형이므로 $\overset{\frown}{AD}$와 $\overline{AD}$로 이루어진 활꼴의 넓이는

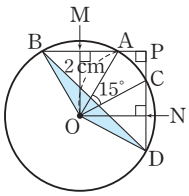
$\pi\times 14^2\times\dfrac{60}{360}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 14^2=\dfrac{98}{3}\pi-49\sqrt{3}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=\triangle APD+(\overset{\frown}{AD}$와 $\overline{AD}$로 이루어진 활꼴의 넓이)

$=40\sqrt{3}+\left(\dfrac{98}{3}\pi-49\sqrt{3}\right)=\dfrac{98}{3}\pi-9\sqrt{3}$

05 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 $\overline{OM}$, $\overline{ON}$은 각각 $\angle AOB$, $\angle COD$의 이등분선이다.



이때 $\angle AOM=\angle BOM=\alpha$, $\angle CON=\angle DON=\beta$라 하면

□PMON은 직사각형이므로

$\angle AOC=90^\circ-\angle AOM-\angle CON=90^\circ-(\alpha+\beta)$

$\angle BOD=90^\circ+\angle BOM+\angle DON=90^\circ+(\alpha+\beta)$

$\therefore \angle AOC+\angle BOD=180^\circ$

$\triangle BOD=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OD}\times\sin(180^\circ-\angle BOD)$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OD}\times\sin(\angle AOC)$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 15^\circ$

이때 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$이므로

$\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \triangle BOD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 15^\circ$

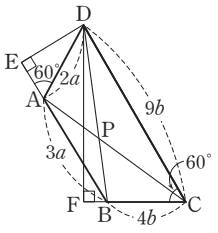
$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (cm^2)

06 □ABCD에서

$\angle A=360^\circ-(180^\circ+60^\circ)=120^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하자.



$\overline{AB}:\overline{AD}=3:2$이므로

$\overline{AB}=3a$, $\overline{AD}=2a\ (a>0)$

라 하면

△ADE에서

$\overline{AE}=2a\cos 60^\circ=a$

$\overline{DE}=2a\sin 60^\circ=\sqrt{3}a$

따라서 △EBD에서

$\overline{DB}=\sqrt{(4a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{19}a$ … ㉠

한편 $\overline{BP}:\overline{PD}=2:3$이므로

△ABP : △APD=2 : 3, △PBC : △PCD=2 : 3

즉, △ABC : △ACD=2 : 3이므로

$\left(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B\right):\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DC}\times\sin(180^\circ-B)\right)$

$=2:3$

$(3a\times\overline{BC}):(2a\times\overline{DC})=2:3$

$(\because \sin(180^\circ-B)=\sin B)$

$\therefore \overline{BC}:\overline{DC}=4:9$

$\overline{BC}=4b$, $\overline{DC}=9b\ (b>0)$라 하고, 점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 F라 하면

△DCF에서

$\overline{DF}=9b\sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{2}b$, $\overline{FC}=9b\cos 60^\circ=\frac{9}{2}b$

$\therefore \overline{FB}=\overline{FC}-\overline{BC}=\frac{9}{2}b-4b=\frac{1}{2}b$

△DFB에서

$\overline{DB}=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2}=\sqrt{61}b$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{19}a=\sqrt{61}b$이므로 $b=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{61}}a$

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}$

$=3a:4b:9b:2a$

$=3a:\frac{4\sqrt{19}}{\sqrt{61}}a:\frac{9\sqrt{19}}{\sqrt{61}}a:2a$

$=3\sqrt{61}:4\sqrt{19}:9\sqrt{19}:2\sqrt{61}$

퍼펙트 단원 마무리 P.85~87

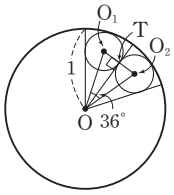
01 $9+4\sqrt{5}$ **02** 1 **03** ⑤ **04** ⑤

05 $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ **06** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **07** $\sqrt{7}$

08 ② **09** 324 **10** 4 **11** $\frac{2}{3}$ **12** $3\sqrt{21}$

13 $\frac{17-\sqrt{33}}{8}$ **14** $(8-6\sqrt{3})\pi+12$

01 오른쪽 그림과 같이 원 O_1과 접하는 또 다른 원을 O_2라 하고, 두 원 O_1, O_2의 접점을 T라 하면



$\angle OTO_1=\angle OTO_2=90^\circ$이므로 세 점 O_1, T, O_2는 한 직선 위에 있다.

두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 r라 하면 △O_1OO_2에서

$\overline{OO_1}=\overline{OO_2}=1-r$, $\angle O_1OO_2=36^\circ$이므로

$\angle OO_1O_2=\angle OO_2O_1=72^\circ$

△O_1OT에서 $\overline{O_1T}=r$이므로

$\cos 72^\circ=\frac{r}{1-r}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$4r=(1-r)(\sqrt{5}-1)$, $(\sqrt{5}+3)r=\sqrt{5}-1$

$\therefore \frac{1}{r}=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}=2+\sqrt{5}$

$\therefore \frac{A}{B}=\frac{\pi\times 1^2}{\pi\times r^2}=\frac{1}{r^2}=(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}$

02 $\sin\theta+\cos\theta=1$에서 $\sin\theta=1-\cos\theta$

양변을 제곱하면 $\sin^2\theta=(1-\cos\theta)^2$

$1-\cos^2\theta=1-2\cos\theta+\cos^2\theta$, $\cos\theta(\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=0$ 또는 $\cos\theta=1$

(i) $\cos\theta=0$일 때, $\sin\theta=1$이므로

$\sin^{2009}\theta+\cos^{2009}\theta=1+0=1$

(ii) $\cos\theta=1$일 때, $\sin\theta=0$이므로

$\sin^{2009}\theta+\cos^{2009}\theta=0+1=1$

(i), (ii)에 의해 $\sin^{2009}\theta+\cos^{2009}\theta=1$

03 (i) $2\cos x\ge 1$일 때

$(2\cos x)^2<\cos^2 x+1^2$, $3\cos^2 x<1$, $\cos^2 x<\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{2}\le\cos x<\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $2\cos x<1$일 때

$1^2<(2\cos x)^2+\cos^2 x$, $5\cos^2 x>1$, $\cos^2 x>\frac{1}{5}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}}<\cos x<\frac{1}{2}$

(i), (ii)에 의해 $\frac{1}{\sqrt{5}}<\cos x<\frac{1}{\sqrt{3}}$

이때 $\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $0^\circ<x<90^\circ$일 때,

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로 $\angle x$의 크기로 알맞은 것은 ⑤이다.

04 $B=2\tan 75^\circ>2\tan 45^\circ=2$이므로

$A<B$, $C<B$

$\sin 15^\circ=\sin(90^\circ-75^\circ)=\cos 75^\circ$,

$\cos 15^\circ=\cos(90^\circ-75^\circ)=\sin 75^\circ$이므로

$A-C=(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)-(\cos^2 75^\circ+\cos 75^\circ)$

$=(\sin 75^\circ+\cos 75^\circ)-(\cos^2 75^\circ+\cos 75^\circ)$

$=\sin 75^\circ-\cos^2 75^\circ$

$=\sin 75^\circ-(1-\sin^2 75^\circ)$

$=\sin^2 75^\circ+\sin 75^\circ-1=\left(\sin 75^\circ+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

그런데 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 75^\circ<1$이므로

$A-C>0 \quad \therefore\ C<A$

$\therefore\ C<A<B$

05 $3\tan x=\cos x$에서 $3\times\frac{\sin x}{\cos x}=\cos x$

양변에 $\cos x$를 곱하면

$3\sin x=\cos^2 x,\ 3\sin x=1-\sin^2 x$

$\sin^2 x+3\sin x-1=0$

$\therefore\ \sin x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times(-1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

그런데 $0^\circ<x<90^\circ$에서 $0<\sin x<1$이므로

$\sin x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

06 $2x^2-2x-c=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$(\sin A+\cos A)+(\sin A-\cos A)=-\frac{-2}{2}=1$

$2\sin A=1,\ \sin A=\frac{1}{2} \quad \therefore\ \angle A=30^\circ$

$(\sin A+\cos A)(\sin A-\cos A)=-\frac{c}{2}$에서

(좌변)$=\sin^2 A-\cos^2 A=\sin^2 30^\circ-\cos^2 30^\circ$

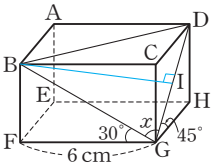
$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$

이므로 $-\frac{1}{2}=-\frac{c}{2} \quad \therefore\ c=1$

$\therefore\ a+b=c\sin A+c\cos A$

$=1\times\sin 30^\circ+1\times\cos 30^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

07 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{DG}$에 내린 수선의 발을 I라 하면



$\triangle BFG$에서

$\overline{BF}=6\tan 30^\circ=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\overline{BG}=\frac{6}{\cos 30^\circ}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\triangle DGH$에서 $\overline{DH}=\overline{BF}=2\sqrt{3}\,\text{cm}$이므로

$\overline{DG}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=2\sqrt{6}\,(\text{cm})$

또 $\overline{BD}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$이므로

$\triangle BGD$는 이등변삼각형이다.

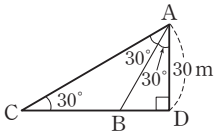
$\therefore\ \overline{GI}=\frac{1}{2}\overline{DG}=\sqrt{6}\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle BGI$에서

$\overline{BI}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{42}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \tan x=\frac{\overline{BI}}{\overline{GI}}=\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}}=\sqrt{7}$

08 배가 움직인 거리는 $\overline{BC}$의 길이와 같다.



$\triangle ABD$에서 $\angle BAD=30^\circ$이므로

$\overline{AB}=\frac{30}{\cos 30^\circ}=20\sqrt{3}\,(\text{m})$

$\angle C=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

즉, $\angle BAC=\angle BCA$이므로

$\overline{BC}=\overline{AB}=20\sqrt{3}\,\text{m}$

따라서 배가 20분 동안 $20\sqrt{3}\,\text{m}$를 움직였으므로

(배의 속력)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}=\frac{20\sqrt{3}}{20}=\sqrt{3}\,(\text{m/분})$

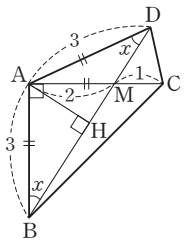
09 $\triangle ABM$에서

$\overline{BM}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이고,

$\angle ABD=\angle ADB=x$라 하면

$\cos x=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABH$에서

$\overline{BH}=3\cos x=\frac{9\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\ \overline{BD}=2\overline{BH}=\frac{18\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\ 13\overline{BD}^2=13\times\left(\frac{18\sqrt{13}}{13}\right)^2=324$

10 $\triangle CDE=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 6\right)=12$이고,

$\sin C=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$이므로

$\triangle CDE=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{CE}\times\sin C=12$에서

$\overline{CD}\times\overline{CE}=40$

또 제이코사인법칙에 의해

$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-2\overline{CD}\cdot\overline{CE}\cos C$이고,

$\cos C=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$이므로

$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-\frac{8}{5}\overline{CD}\cdot\overline{CE}$

$=(\overline{CD}-\overline{CE})^2+\frac{2}{5}\overline{CD}\cdot\overline{CE}$

$=(\overline{CD}-\overline{CE})^2+16$

따라서 $\overline{CD}=\overline{CE}$일 때, $\overline{DE}^2$의 최솟값은 16이므로 $\overline{DE}$의 최솟값은 $\sqrt{16}=4$이다.

11 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}$

$\therefore\ \overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\overline{AB}$

$\triangle ABP$에서 $\angle BAP=60^\circ$이므로 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BP}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore\ \overline{BP}=\frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{AB}$

$\therefore\ \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}\overline{AB}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\overline{AB}}=\frac{2}{3}$

12 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 18\times 18\times \sin 60^\circ=81\sqrt{3}$

이때 $\triangle ADF\equiv\triangle BED\equiv\triangle CFE$(SAS 합동)이고

$\triangle ADF=\frac{1}{2}\times 3\times 15\times \sin 60^\circ=\frac{45\sqrt{3}}{4}$이므로

$\triangle DEF=\triangle ABC-3\triangle ADF$

$=81\sqrt{3}-3\times\frac{45\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{189\sqrt{3}}{4}$

따라서 $\triangle DEF$의 한 변의 길이를 x라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{189\sqrt{3}}{4}$, $x^2=189$

$\therefore\ x=3\sqrt{21}\ (\because\ x>0)$

13 $\triangle ABC$에서 제이코사인법칙에 의해

$6^2=2^2+\overline{BC}^2-2\times 2\times\overline{BC}\times\cos 120^\circ$

이때 $\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ$이므로

$36=4+\overline{BC}^2-4\times\overline{BC}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\overline{BC}^2+2\overline{BC}-32=0$

$\therefore\ \overline{BC}=-1+\sqrt{33}\ (\because\ \overline{BC}>0)$

이때 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle BCD$이므로

$\overline{BD}=x$라 하면

$\frac{1}{2}\times 2\times(-1+\sqrt{33})\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 2\times x\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times x\times(-1+\sqrt{33})\times\sin 60^\circ$

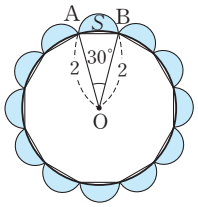
$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ$이므로

$2(-1+\sqrt{33})=(1+\sqrt{33})x$

$\therefore\ x=\frac{2(-1+\sqrt{33})}{1+\sqrt{33}}=\frac{17-\sqrt{33}}{8}$

$\therefore\ \overline{BD}=\frac{17-\sqrt{33}}{8}$

14 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 한 넓이를 S라 하면 $\angle AOB=30^\circ$, $\overline{OA}=\overline{OB}=2$이므로



$\triangle AOB$에서 제이코사인법칙에 의해

$\overline{AB}^2=2^2+2^2-2\times 2\times 2\times\cos 30^\circ$

$=4+4-8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=8-4\sqrt{3}$

$S=$($\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)$+\triangle AOB$

$-$(부채꼴 AOB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 30^\circ-\pi\times 2^2\times\frac{30}{360}$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi+1-\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4-3\sqrt{3}}{6}\pi+1$

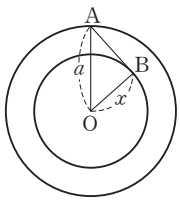
따라서 색칠한 부분의 넓이는

$12S=12\times\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{6}\pi+1\right)$

$=(8-6\sqrt{3})\pi+12$

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.88~89

1 |예시| 오른쪽 그림과 같이 태양과 지구의 위치를 각각 O, A라 하고, 금성의 위치를 B라 하자.



또 지구와 태양 사이의 거리를 a, 태양과 금성 사이의 거리를 x라 하자.

$\triangle AOB$에서 사인법칙에 의해

$\frac{x}{\sin A}=\frac{a}{\sin B}$이므로

$\sin A=\frac{x\sin B}{a}$

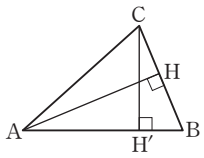
$\sin A$는 $\sin B=1$일 때 최댓값을 가지므로 $\angle A$의 크기는 $\angle B=90^\circ$일 때 최대가 된다.

이때 주어진 기사에서 금성의 최대 이각은 48°이므로 $\triangle AOB$에서 $\angle B=90^\circ$일 때, $\angle A=48^\circ$이다.

$\therefore\ x=a\sin 48^\circ$

따라서 기사에 주어진 최대 이각의 크기와 지구와 태양 사이의 거리를 알면 태양과 금성 사이의 거리를 구할 수 있다.

2 |예시| 오른쪽 그림과 같이 배의 위치를 점 C라 하고 해변 위에 거리를 측정할 수 있는 두 지점 A, B의 크기를 잡아 기선 AB의 길이와 $\angle A$, $\angle B$를 측정한다.



점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle CAH$에서 $\overline{AH}=\overline{AC}\sin C$,

$\triangle ABH$에서 $\overline{AH}=\overline{AB}\sin B$이다.

즉, $\overline{AC}\sin C=\overline{AB}\sin B$이므로 $\overline{AC}=\frac{\overline{AB}\sin B}{\sin C}$이다.

또 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\triangle CAH'$에서

$\overline{CH'}=\overline{AC}\sin A$

$=\frac{\overline{AB}\sin B}{\sin C}\times\sin A$

$=\frac{\overline{AB}\sin B\sin A}{\sin C}$

이다.

이때 $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$이므로 측정한 기선 AB의 길이와 $\angle A$, $\angle B$의 크기를 이용하여 배에서 해변까지의 거리를 구할 수 있다.

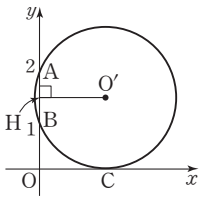
Ⅳ 원의 성질

1 원과 직선

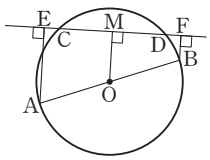
STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.94~98

1-1 $\frac{9}{4}\pi$ **1-2** 2 cm **1-3** $(64\pi-48\sqrt{3})\text{cm}^2$ **1-4** 90
1-5 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **1-6** 32π **2-1** 10 **2-2** 13 cm **2-3** 67.5°
2-4 $\left(8\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)\text{cm}^2$ **2-5** 135° **3-1** 192
3-2 $12\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ **3-3** $\frac{225}{8}$ cm **3-4** $30\,\text{cm}^2$
3-5 $\left(\frac{70}{3}\pi+20\sqrt{3}\right)$ cm **4-1** $28\,\text{cm}^2$ **4-2** $\frac{16\sqrt{26}}{5}\,\text{cm}^2$
4-3 $\frac{39+9\sqrt{17}}{2}$ m **5-1** $\sqrt{6}$ cm **5-2** $(110-25\pi)\text{cm}^2$
5-3 97 **5-4** 1 **6-1** 12 **6-2** $\frac{21}{4}$

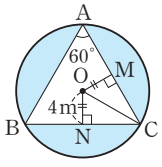
1-1 원의 중심 O′에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\overline{BH}$이므로
$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$
따라서 반지름의 길이는
$\overline{O'C}=\overline{OB}+\overline{BH}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
$\therefore$ (원 O′의 넓이)$=\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\pi$



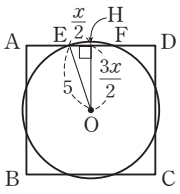
1-2 원의 중심 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{CM}=\overline{DM}$ … ㉠
$\overline{OM}\perp\overline{EF}$, $\overline{AE}\perp\overline{EF}$, $\overline{BF}\perp\overline{EF}$
이므로 $\overline{AE}//\overline{OM}//\overline{BF}$
이때 $\overline{AO}=\overline{BO}$이므로 $\overline{EM}=\overline{FM}$ … ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의해
$\overline{DF}=\overline{FM}-\overline{DM}=\overline{EM}-\overline{CM}=\overline{EC}$
$\therefore$ $\overline{DF}=\overline{EC}=2$ cm



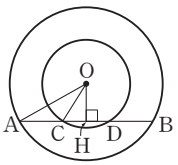
1-3 △ABC에서 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\angle B=\angle A=60°$
$\therefore$ $\angle C=180°-2\times60°=60°$
즉, △ABC는 정삼각형이다.
오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$를 그으면
△OMC≡△ONC (RHS 합동)이므로
$\angle OCN=\frac{1}{2}\angle C=30°$
△ONC에서
$\overline{CN}=\frac{4}{\tan 30°}=4\sqrt{3}(\text{cm})$, $\overline{CO}=\frac{4}{\sin 30°}=8(\text{cm})$
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\pi\times8^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times(8\sqrt{3})^2$
$=64\pi-48\sqrt{3}(\text{cm}^2)$



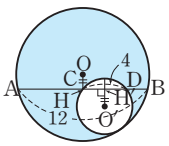
1-4 오른쪽 그림에서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3x$라 하고, 원의 중심 O에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{OH}=\frac{3x}{2}$, $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{x}{2}$
△OEF에서
$5^2=\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$ $\therefore$ $x^2=10$
$\therefore$ □ABCD$=3x\times3x=9x^2=9\times10=90$



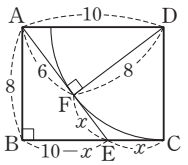
1-5 $\overline{AB}$의 삼등분점을 각각 C, D라 하면
$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB}=\frac{1}{3}\overline{AB}=6$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{CD}=3$
$\therefore$ $\overline{AH}=6+3=9$
이때 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 두 원의 반지름의 길이의 차가 $4\sqrt{2}$이므로
$\overline{OA}=r+4\sqrt{2}$
△OAH에서 $\overline{OH}^2=(r+4\sqrt{2})^2-9^2$ … ㉠
△OCH에서 $\overline{OH}^2=r^2-3^2$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $(r+4\sqrt{2})^2-9^2=r^2-3^2$
$r^2+8\sqrt{2}r+32-81=r^2-9$, $8\sqrt{2}r=40$
$\therefore$ $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$



1-6 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 O, O′에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면
$\overline{AH}=6$, $\overline{DH'}=2$
두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면
$x^2-6^2=y^2-2^2$ $\therefore$ $x^2-y^2=36-4=32$
따라서 두 원의 넓이의 차는
$\pi x^2-\pi y^2=\pi(x^2-y^2)=32\pi$



2-1 오른쪽 그림과 같이 접점을 F라 하고 $\overline{DF}$를 그으면
$\overline{DF}=\overline{DC}=8$
△AFD에서
$\overline{AF}=\sqrt{10^2-8^2}=6$
이때 $\overline{EC}=x$라 하면
$\overline{FE}=\overline{EC}=x$, $\overline{BE}=10-x$
따라서 △ABE에서
$(6+x)^2=8^2+(10-x)^2$
$36+12x+x^2=64+100-20x+x^2$
$32x=128$ $\therefore$ $x=4$
$\therefore$ $\overline{AE}=6+4=10$



2-2 $\overline{AF}=\overline{AK}=a\,\text{cm}$라 하면

$\overline{PF}=\overline{PG}=\overline{PH}=\overline{PI}$

$=\overline{PJ}=(21-a)\,\text{cm}$

$\overline{BK}=\overline{BG}=\overline{BL}$

$=(16-a)\,\text{cm}$

$\overline{CL}=\overline{CH}=\overline{CM}$

$=12-(16-a)=a-4\,(\text{cm})$

$\overline{DM}=\overline{DI}=\overline{DN}=8-(a-4)=12-a\,(\text{cm})$

$\overline{EN}=\overline{EJ}=4-(12-a)=a-8\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{PE}=\overline{PJ}+\overline{EJ}=(21-a)+(a-8)=13\,(\text{cm})$

2-3 $\overline{OQ}$를 그으면 $\overline{OQ}=\overline{OB}=3\,\text{cm}$

$\overline{CQ}$는 원 O의 접선이므로

$\overline{CQ}\perp\overline{OQ}$

따라서 $\overline{AP}/\!/\overline{OQ}$이므로

$\overline{OB}:\overline{AB}=\overline{OQ}:\overline{AP}$에서

$3:6=3:\overline{AP}\qquad\therefore\ \overline{AP}=6\,(\text{cm})$

$\triangle ABP$에서 $\overline{AB}=\overline{AP}=6\,\text{cm}$이므로

$\angle QBA=\dfrac{180^\circ-45^\circ}{2}=67.5^\circ$

2-4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{O'T}$를 그으면 $\triangle ATO'$에서

$\overline{AT}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

또 $\overline{AO'}:\overline{O'T}=8:4=2:1$

이므로

$\angle AO'T=60^\circ$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=$(반원 O의 넓이)$+\triangle ATO'$

$\qquad-$(부채꼴 O′BT의 넓이)

$=\left(\dfrac{1}{2}\times\pi\times2^2\right)+\left(\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4\right)-\left(\pi\times4^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\right)$

$=2\pi+8\sqrt{3}-\dfrac{8}{3}\pi$

$=8\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi\,(\text{cm}^2)$

2-5 $\angle EAO=a$, $\angle DCE=\angle ECA=b$라 하자.

다음 그림과 같이 $\overline{OD}$를 그으면 $\angle ODC=90^\circ$이고

$\triangle OAD$는 $\overline{AO}=\overline{DO}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ODA=\angle OAD=a$

$\therefore\ \angle AEC=\angle EDC+\angle DCE=(a+90^\circ)+b$

따라서 $\triangle EAC$에서

$\angle EAC+\angle ECA+\angle AEC$

$=a+b+(a+90^\circ+b)=180^\circ$

$2(a+b)=90^\circ\qquad\therefore\ a+b=45^\circ$

$\therefore\ \angle AEC=45^\circ+90^\circ=135^\circ$

3-1

위의 그림에서 공통외접선의 길이는 $\overline{O'H}$의 길이와 같으므로

$\overline{O'H}=\sqrt{13^2-5^2}=12\qquad\therefore\ x=12$

위의 그림에서 공통내접선의 길이는 $\overline{O'H'}$의 길이와 같으므로

$\overline{O'H'}=\sqrt{13^2-11^2}=4\sqrt{3}\qquad\therefore\ y=4\sqrt{3}$

$\therefore\ x^2+y^2=12^2+(4\sqrt{3})^2=192$

3-2 중간 크기의 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{4}{2}=2\,(\text{cm})$이고,

작은 크기의 원의 반지름의 길이를 $x\,\text{cm}$라 하면 오른쪽 그림에서

$(2+x)^2-(2-x)^2=(4-x)^2-x^2$

$8x=-8x+16,\ 16x=16$

$\therefore\ x=1\,(\text{cm})$

따라서 육각형의 각 변의 길이는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ (육각형의 넓이)

$=2\triangle ABF+\square BCEF$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times1\right)+4\sqrt{2}\times2$

$=12\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

3-3

위의 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{O'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O'H}=\overline{O'B}-\overline{BH}=15-7=8\,(\text{cm})$

$\triangle O'OH$에서

$\overline{OH}=\sqrt{17^2-8^2}=15\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{OH}=15\,\text{cm}$

$\triangle PAO\backsim\triangle PBO'$(AA 닮음)이므로

$\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{OA}:\overline{O'B}$에서

$(\overline{PB}-15):\overline{PB}=7:15$

$7\overline{PB}=15\overline{PB}-225\qquad\therefore\ \overline{PB}=\dfrac{225}{8}\,(\text{cm})$

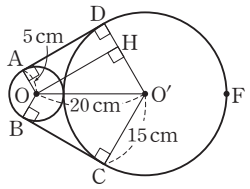
3-4

위의 그림과 같이 점 O′에서 $\overline{OP}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=\overline{QO'}=4\,\text{cm}$

△OHO′에서 $\overline{O'H}=\sqrt{15^2-12^2}=9$ (cm)
∴ $\overline{PQ}=\overline{O'H}=9$ cm
이때 $\overline{OO'}$과 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면
△OPR∽△OHO′(AA 닮음)이므로
$\overline{OP}:\overline{PR}=\overline{OH}:\overline{O'H}$에서 $8:\overline{PR}=12:9$
∴ $\overline{PR}=6$ (cm)
∴ (색칠한 부분의 넓이)=△OPR+△O′QR

$$=\frac{1}{2}\times 8\times 6+\frac{1}{2}\times 4\times(9-6)$$
$$=30\ (\text{cm}^2)$$

3-5



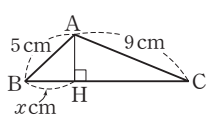
$\overline{O'H}=\overline{O'D}-\overline{DH}=15-5=10$ (cm)
△OO′H에서
$\overline{OH}=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$ (cm)
∴ $\overline{AD}=\overline{OH}=10\sqrt{3}$ cm
$\overline{O'H}:\overline{OH}:\overline{O'O}=10:10\sqrt{3}:20=1:\sqrt{3}:2$이므로
$\angle HOO'=30^\circ$, $\angle OO'H=60^\circ$
즉, $\angle AOB=360^\circ-(30^\circ\times 2+90^\circ\times 2)=120^\circ$,
$\angle CO'D$(큰 각)$=360^\circ-60^\circ\times 2=240^\circ$
따라서 필요한 끈의 최소 길이는
$\widehat{AB}+\widehat{CFD}+\overline{AD}\times 2$

$$=2\pi\times 5\times\frac{120^\circ}{360^\circ}+2\pi\times 15\times\frac{240^\circ}{360^\circ}+10\sqrt{3}\times 2$$
$$=\frac{10}{3}\pi+20\pi+20\sqrt{3}=\left(\frac{70}{3}\pi+20\sqrt{3}\right)(\text{cm})$$

4-1 $\overline{AB}=12$ cm이므로 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$ cm라 하면
$\overline{BE}=\overline{BD}=(12-x)$cm
$\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{O'E}=\overline{O'F}=\overline{O'D}=2$cm이므로
$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=(12-x)+2=14-x$(cm)
$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}=x+2$(cm)

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$
$$=12+(14-x)+(x+2)$$
$$=28(\text{cm}^2)$$

4-2 $\overline{AD}=a$ cm라 하면 $\overline{AF}=\overline{AD}=a$ cm
$\overline{BE}=\overline{BD}=(5-a)$cm, $\overline{CE}=\overline{CF}=(9-a)$cm
$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=(5-a)+(9-a)=12$이므로
$a=1$ (cm), $\overline{BD}=5-1=4$ (cm)
오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BH}=x$ cm라 하면
$\overline{CH}=(12-x)$cm



$\overline{AH}^2=5^2-x^2=9^2-(12-x)^2$
$24x=88$ ∴ $x=\frac{11}{3}$ (cm)
△ABH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{5^2-\left(\frac{11}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{26}}{3}\ (\text{cm})$$
$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{2\sqrt{26}}{3}=4\sqrt{26}\ (\text{cm}^2)$$

이때 $\overline{AD}:\overline{BD}=1:4$이므로

$$\triangle BCD=\frac{4}{5}\triangle ABC=\frac{4}{5}\times 4\sqrt{26}=\frac{16\sqrt{26}}{5}\ (\text{cm}^2)$$

[다른 풀이]
$\overline{AD}=1$ cm, $\overline{BD}=4$ cm이고,
헤론의 공식을 이용하면 $s=\frac{5+9+12}{2}=13$ (cm)이므로
$\triangle ABC=\sqrt{13(13-5)(13-9)(13-12)}=4\sqrt{26}$ (cm^2)
이때 $\overline{AD}:\overline{BD}=1:4$이므로

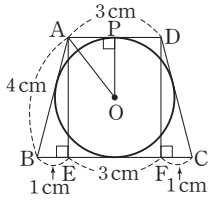
$$\triangle BCD=\frac{4}{5}\triangle ABC=\frac{4}{5}\times 4\sqrt{26}=\frac{16\sqrt{26}}{5}\ (\text{cm}^2)$$

4-3 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$ m, $\overline{CF}=\overline{CE}=y$ m라 하면 승훈이의 속력이 민정이의 속력의 2배이고 걸린 시간은 같으므로
$\overline{AD}+\overline{AC}=2\overline{CE}$, $x+(x+y)=2y$
∴ $2x=y$ … ㉠
△ABC에서 $(x+3)^2+(y+3)^2=(x+y)^2$
∴ $3x+3y+9=xy$ … ㉡
㉠, ㉡에서

$$2x^2-9x-9=0,\ x=\frac{9+3\sqrt{17}}{4}\ (\text{m})\ (\because\ x>0)$$
$$\therefore\ y=\frac{9+3\sqrt{17}}{2}\ (\text{m})$$
$$\therefore\ (\triangle ABC\text{의 둘레의 길이})$$
$$=2\overline{AD}+2\overline{CE}+2\overline{BD}$$
$$=2x+2y+6$$
$$=\frac{9+3\sqrt{17}}{2}+9+3\sqrt{17}+6$$
$$=\frac{39+9\sqrt{17}}{2}\ (\text{m})$$

따라서 산책로의 전체 길이는 $\frac{39+9\sqrt{17}}{2}$ m이다.

5-1 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$이고 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로
$2\overline{AB}=3+5$
∴ $\overline{AB}=4$ (cm)
오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고 $\overline{AD}$와 원 O의 접점을 P라 하면 $\overline{OP}\perp\overline{AD}$이고, $\overline{BE}=\overline{CF}=1$ cm이므로
$\overline{AE}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ (cm)



∴ $\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ (cm)
따라서 △AOP에서

$$\overline{AO}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{4}}=\sqrt{6}\ (\text{cm})$$

5-2 $\overline{AB}=x\,\text{cm}$, $\overline{CD}=y\,\text{cm}$라 하면

$10+12=x+y$이므로 $x+y=22$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 그으면

$\square ABCD$

$=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\left(\frac{1}{2}\times x\times 5\right)+\left(\frac{1}{2}\times 12\times 5\right)+\left(\frac{1}{2}\times y\times 5\right)+\left(\frac{1}{2}\times 10\times 5\right)$

$=55+\frac{5}{2}(x+y)$

$=55+\frac{5}{2}\times 22=110(\text{cm}^2)$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=110-\pi\times 5^2=110-25\pi(\text{cm}^2)$

5-3 $\overline{DH}=\overline{DE}=x$, $\overline{CH}=\overline{CG}=y$이므로

$\overline{DC}=\overline{DH}+\overline{HC}=x+y$

$13+(x+y)=8+18$이므로

$x+y=13$ …㉠

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OG}$, $\overline{OH}$를 그으면

$\triangle DOE\equiv\triangle DOH$ (RHS 합동),

$\triangle COG\equiv\triangle COH$ (RHS 합동)

이므로

$\angle EOD=\angle HOD=a$,

$\angle GOC=\angle HOC=b$라 하면

$2a+2b=180^\circ$ $\therefore a+b=90^\circ$

따라서 $\triangle DOC$는 $\angle DOC=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{OH}^2=\overline{DH}\times\overline{CH}$에서 $6^2=xy$

$\therefore xy=36$ …㉡

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=13^2-2\times 36=97$ ($\because$ ㉠, ㉡)

5-4 원 O의 반지름의 길이를 x라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{AQ}=\overline{AP}=\overline{DP}=\overline{DR}=x$

이므로

$\overline{ES}=\overline{RE}=4-x$,

$\overline{BS}=\overline{QB}=12-x$

$\therefore \overline{BE}=\overline{BS}+\overline{ES}$

$=(12-x)+(4-x)$

$=16-2x$

$\triangle BCE$에서

$(16-2x)^2=8^2+(2x)^2$

$64x=192$ $\therefore x=3$

$\therefore \triangle BCE=\frac{1}{2}\times 2x\times 8=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$

이때 원 O′의 반지름의 길이를 y라 하면

$\triangle BCE=\frac{1}{2}\times(8+6+10)\times y=24$ $\therefore y=2$

따라서 두 원 O, O′의 반지름의 길이의 차는

$3-2=1$

6-1 $\overline{BD}=x$라 하면

$\overline{AD}=\overline{AF}=13-x$이고,

$\overline{EC}=\overline{CF}=14-x$이므로

$\overline{AC}=(13-x)+(14-x)=15$

$27-2x=15$ $\therefore x=6$

$\therefore$ (△PBR의 둘레의 길이)

$=2\overline{BD}=2\times 6=12$

6-2 $\triangle ABC$에서 $\overline{AG}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BG}:\overline{GC}$에서

$12:5=6:\overline{CG}$ $\therefore \overline{CG}=\frac{5}{2}$

(△ABC의 둘레의 길이)$=12+5+\left(6+\frac{5}{2}\right)=\frac{51}{2}$

즉, $2\overline{AD}=\frac{51}{2}$ $\therefore \overline{AD}=\frac{51}{4}$

$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=\frac{51}{4}-12=\frac{3}{4}$

$\therefore \overline{BE}=\overline{BD}=\frac{3}{4}$

$\therefore \overline{EG}=\overline{BG}-\overline{BE}=6-\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.99~101

01 $\sqrt{10}\,\text{cm}$ **02** 19.2 cm **03** 4 cm

04 5개 **05** 90° **06** 60° **07** $\frac{10}{7}$ **08** $2\sqrt{15}$

09 $\sqrt{70}\,\text{cm}$ **10** $4+\sqrt{2}$ **11** 25 **12** 13 cm

13 2 **14** 3π

01 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라 하자.

$\overline{OL}=a\,\text{cm}$, $\overline{LM}=\overline{MN}=b\,\text{cm}$라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면

$\triangle AOL$에서 $r^2=a^2+3^2$ …㉠

$\triangle COM$에서 $r^2=(a+b)^2+(\sqrt{6})^2$ …㉡

$\triangle EON$에서 $r^2=(a+2b)^2+1^2$ …㉢

㉡−㉠을 하면

$2ab+b^2=3$ …㉣

㉢−㉡을 하면

$2ab+3b^2=5$ …㉤

㉤−㉣을 하면

$2b^2=2$ $\therefore b=1(\text{cm})$ ($\because b>0$)

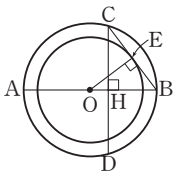
㉣에서 $2a+1=3$

$\therefore a=1(\text{cm})$

㉠에서 $r^2=1^2+9=10$

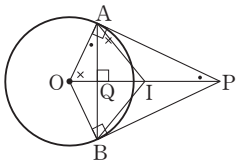
$\therefore r=\sqrt{10}\,(\text{cm})$ ($\because r>0$)

02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$와 작은 원의 접점을 E라 하고 $\overline{OE}$를 그으면



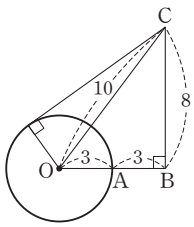
$\triangle OBE$에서
$\overline{BE}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (cm)이므로
$\overline{CB}=2\overline{BE}=12$(cm)
$\triangle OBE\backsim\triangle CBH$(AA 닮음)이므로
$\overline{OB}:\overline{CB}=\overline{OE}:\overline{CH}$에서
$10:12=8:\overline{CH}$, $10\overline{CH}=96$
$\therefore \overline{CH}=9.6$ (cm)
$\therefore \overline{CD}=2\overline{CH}=2\times9.6=19.2$ (cm)

03 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$와 $\overline{AB}$의 교점을 Q라 하면



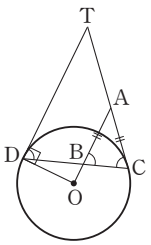
$\angle AQO=\angle PAO=90^\circ$이므로
$\angle OAQ=\angle APQ$
$\triangle PAB$의 내심 I를 잡으면
$\angle QAI=\angle PAI$이므로
$\angle OIA=\angle IAP+\angle IPA$
$=\angle IAQ+\angle OAQ=\angle OAI$
즉, $\triangle OAI$는 이등변삼각형이므로 $\overline{OA}=\overline{OI}$
따라서 점 I는 $\overline{OP}$와 원 O의 교점이므로
$\overline{PI}=\overline{OP}-\overline{OI}=7-3=4$ (cm)

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CO}$를 그으면



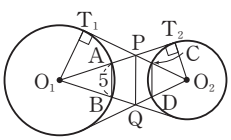
$\overline{CO}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로
$\overline{CP}$의 길이의 최솟값은
$10-3=7$
오른쪽 그림과 같이 점 C에서 원 O에 접선을 그으면
$\overline{CP}=\sqrt{10^2-3^2}=\sqrt{91}$이므로
$\overline{CP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{91}$
$\therefore 7\le\overline{CP}\le\sqrt{91}$
이때 $\overline{CP}$의 길이가 정수인 것은 7, 8, 9이고, 8, 9인 경우가 각각 2가지씩이므로 점 P의 개수는 5개이다.

05 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 접선을 그어 $\overline{CA}$의 연장선과 만나는 점을 T라 하면 $\overline{TD}=\overline{TC}$이므로



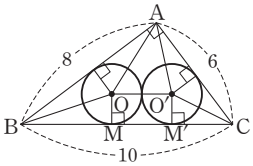
$\angle TDC=\angle TCD$
$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\angle ABC=\angle ACB$
$\therefore \angle TDC=\angle ABC$
따라서 $\overline{TD}/\!/\overline{AB}$, $\angle TDO=90^\circ$이므로
$\angle AOD=90^\circ$

06 오른쪽 그림에서



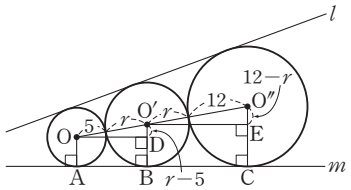
$\triangle O_1PT_1\backsim\triangle O_2PT_2$(AA 닮음)이므로
$\overline{O_1P}:\overline{O_2P}=\overline{O_1T_1}:\overline{O_2T_2}$
$\triangle O_1AB\backsim\triangle O_1PQ$(SAS 닮음)
이므로 $\overline{O_1A}:\overline{O_1P}=\overline{AB}:\overline{PQ}$
$\triangle O_2CD\backsim\triangle O_2PQ$(SAS 닮음)이므로
$\overline{O_2C}:\overline{O_2P}=\overline{CD}:\overline{PQ}$
이때 $\overline{O_1T_1}=\overline{O_1A}$, $\overline{O_2T_2}=\overline{O_2C}$이므로
$\overline{AB}:\overline{PQ}=\overline{O_1A}:\overline{O_1P}=\overline{O_1T_1}:\overline{O_1P}$
$=\overline{O_2T_2}:\overline{O_2P}=\overline{O_2C}:\overline{O_2P}$
$=\overline{CD}:\overline{PQ}$
$\therefore \overline{CD}=\overline{AB}=5$
그런데 $\triangle CDO_2$에서 $\overline{O_2C}=\overline{O_2D}=5$이므로 $\triangle CDO_2$는 정삼각형이다.
$\therefore \angle CO_2D=60^\circ$

07 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$이므로 $\angle A=90^\circ$
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times8=24$
이때 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 길이를 h라 하면
$\frac{1}{2}\times10\times h=24$ $\therefore h=\frac{24}{5}$
오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 O, O′에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 M, M′이라 하고, 두 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle O'CA+(\triangle OBM+\triangle O'M'C)$
$+\triangle AOO'+\square OMM'O'$
$24=\frac{1}{2}\times8\times r+\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times(10-2r)\times r$
$+\frac{1}{2}\times2r\times\left(\frac{24}{5}-r\right)+2r\times r$
$\therefore r=\frac{10}{7}$
따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{10}{7}$이다.

08



위의 그림에서 원 O′의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{OO'}=5+r$, $\overline{O'D}=r-5$
$\overline{O'O''}=12+r$, $\overline{O''E}=12-r$
이때 $\triangle ODO'\backsim\triangle O'EO''$(AA 닮음)이므로
$\overline{OO'}:\overline{O'O''}=\overline{O'D}:\overline{O''E}$
$(5+r):(12+r)=(r-5):(12-r)$
$(12+r)(r-5)=(5+r)(12-r)$, $r^2-60=0$
$\therefore r=2\sqrt{15}$ ($\because r>0$)
따라서 원 O′의 반지름의 길이는 $2\sqrt{15}$이다.

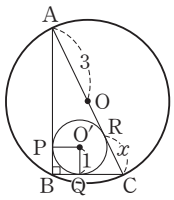
09 두 원 O, O′의 반지름의 길이의 비가 3 : 2이므로
$\overline{AO}=3r$cm, $\overline{O'B}=2r$cm$(r>0)$라 하면
$\angle OAB=\angle O'BA=90^\circ$이므로
$\triangle AOB$에서
$\overline{AB}^2=(4+3r)^2-(3r)^2=16+24r$ … ㉠
$\triangle ABO'$에서
$\overline{AB}^2=(5+2r)^2-(2r)^2=25+20r$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $16+24r=25+20r$

$4r=9 \quad \therefore r=\frac{9}{4}$ (cm)

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{16+24r}=\sqrt{16+24\times\frac{9}{4}}=\sqrt{70}$ (cm)

10 원 O′과 △ABC의 세 변 AB, BC, CA의 접점을 각각 P, Q, R라 하고,



$\overline{CR}=\overline{CQ}=x$라 하면

$\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{QC}=1+x$

$\overline{AP}=\overline{AR}=\overline{AC}-\overline{RC}=6-x$

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=7-x$

그런데 △ABC는 직각삼각형이므로

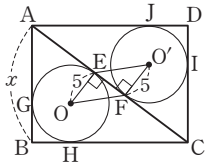
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서

$6^2=(7-x)^2+(1+x)^2$

$x^2-6x+7=0 \quad \therefore x=3-\sqrt{2}\ (\because 0<x<3)$

$\therefore \overline{AB}=7-(3-\sqrt{2})=4+\sqrt{2}$

11 $\overline{AB}=x$라 하면



$\overline{BC}=35-x$이므로

$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$

$=\overline{AG}+\overline{CH}$

$=(\overline{AB}-\overline{BG})+(\overline{BC}-\overline{BH})$

$=(x-5)+(35-x-5)$

$=25$

△ABC에서

$x^2+(35-x)^2=25^2,\ x^2-35x+300=0$

$(x-15)(x-20)=0$

$\therefore x=15$ 또는 $x=20$

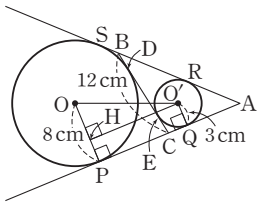
$\therefore \overline{AB}=15,\ \overline{BC}=20\ (\because \overline{AB}<\overline{BC})$

$\overline{AG}=\overline{AE}=10,\ \overline{CE}=15,\ \overline{CF}=\overline{CI}=10$이므로

$\overline{EF}=15-10=5$

$\therefore \square EOFO'=2\times\triangle OEF=2\times\left(\frac{1}{2}\times5\times5\right)=25$

12



위의 그림과 같이 원의 중심 O′에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PC}=\overline{DC},\ \overline{CQ}=\overline{CE}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CQ}=\overline{DC}+\overline{CE}$ … ㉠

$\overline{RB}=\overline{BE},\ \overline{BS}=\overline{BD}$이므로

$\overline{RS}=\overline{RB}+\overline{BS}=\overline{BE}+\overline{BD}$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{PQ}+\overline{RS}=(\overline{DC}+\overline{BD})+(\overline{BE}+\overline{CE})$

$=2\overline{BC}=24$(cm)

이때 $\overline{PQ}=\overline{RS}$이므로 $\overline{PQ}=\overline{RS}=12$(cm)

$\therefore \overline{O'H}=\overline{PQ}=12$ cm

따라서 △OO′H에서

$\overline{OO'}=\sqrt{12^2+5^2}=13$ (cm)

13 △ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\overline{BS}=\frac{1}{2}(3+4+5)=6$

이므로

$\overline{CS}=\overline{BS}-\overline{BC}=6-3=3$

$\therefore \overline{CE}=\overline{CS}=3$

이때 $\overline{CD}=x$라 하면

$\overline{BQ}=\overline{BR}=3-x$,

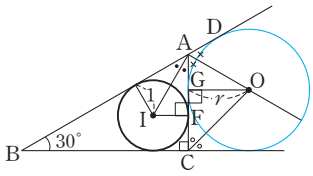
$\overline{AD}=\overline{AQ}=5-(3-x)=x+2$이므로

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}=(x+2)+x=2x+2=4$

$\therefore x=1$

$\therefore \overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}=3-1=2$

14 다음 그림과 같이 △ABC의 가장 작은 방접원의 중심을 O라 할 때, 두 원의 중심 I, O에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하자.



$\angle CAD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로

$\angle CAO=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$

원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 △OAG에서

$\overline{OG}:\overline{AG}=\sqrt{3}:1$이므로 $r:\overline{AG}=\sqrt{3}:1$

$\sqrt{3}\overline{AG}=r \quad \therefore \overline{AG}=\frac{r}{\sqrt{3}}$

또 $\angle GCO=\frac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$이므로 $\overline{CG}=\overline{OG}=r$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AG}+\overline{GC}=\frac{r}{\sqrt{3}}+r=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$ … ㉠

이때 △AIF에서

$\overline{IF}:\overline{AF}=1:\sqrt{3}$이므로 $1:\overline{AF}=1:\sqrt{3}$에서

$\overline{AF}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AF}+\overline{FC}=\sqrt{3}+1$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r=\sqrt{3}+1 \quad \therefore r=\sqrt{3}$

따라서 가장 작은 방접원의 넓이는

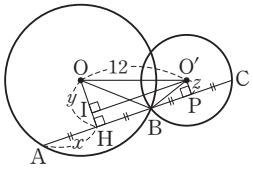
$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.102~103

01 $\sqrt{130}$ **02** $2\sqrt{15}$ **03** (1) 5 (2) 5

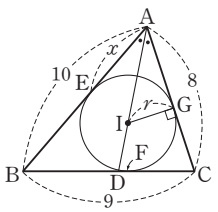
04 $(2\sqrt{5}-2)$ cm **05** 5 **06** $\frac{8}{9}$ cm

01 다음 그림과 같이 원의 중심 O, O′에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, P라 하고, 점 O′에서 $\overline{OH}$에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{AH}=x$, $\overline{OH}=y$, $\overline{O'P}=z$라 하면
$\overline{AH}=\overline{HB}=\overline{BP}=\overline{PC}=x$
△OIO′에서
$12^2=(y-z)^2+(2x)^2$ … ㉠
△OHB에서
$8^2=y^2+x^2$이므로 $x^2=8^2-y^2$ … ㉡
△O′PB에서
$6^2=x^2+z^2$이므로 $x^2=6^2-z^2$ … ㉢
㉡+㉢을 하면
$2x^2=8^2-y^2+6^2-z^2$ … ㉣
㉣을 ㉠에 대입하면
$12^2=(y-z)^2+2(8^2-y^2+6^2-z^2)$
$y^2+2yz+z^2=56$, $(y+z)^2=56$
$\therefore\ y+z=2\sqrt{14}\ (\because\ y>0,\ z>0)$ … ㉤
이때 ㉡−㉢을 하면
$8^2-y^2-(6^2-z^2)=0$
$y^2-z^2=28$, $(y+z)(y-z)=28$
$\therefore\ y-z=\dfrac{28}{y+z}=\dfrac{28}{2\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ … ㉥
따라서 ㉤, ㉥을 연립하여 풀면
$y=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$
$x^2=8^2-\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{2}\right)^2=\dfrac{65}{2}$
$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{130}}{2}\ (\because\ x>0)$
$\therefore\ \overline{AB}=2x=\sqrt{130}$

02 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 내접원 I를 그리고, 접점을 각각 E, F, G라 하자.



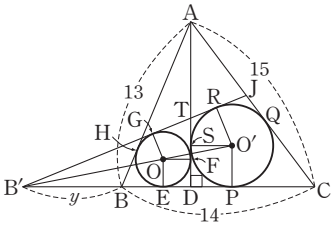
$\overline{AE}=x$라 하면
$\overline{BE}=\overline{BF}=10-x$,
$\overline{CG}=\overline{CF}=8-x$
이므로 $\overline{BC}=(10-x)+(8-x)=9$
$\therefore\ x=\dfrac{9}{2}$

헤론의 공식에 의해 $s=\dfrac{10+9+8}{2}=\dfrac{27}{2}$이므로
$\triangle ABC=\sqrt{\dfrac{27}{2}\left(\dfrac{27}{2}-10\right)\left(\dfrac{27}{2}-9\right)\left(\dfrac{27}{2}-8\right)}$
$=\sqrt{\dfrac{27}{2}\times\dfrac{7}{2}\times\dfrac{9}{2}\times\dfrac{11}{2}}$
$=\dfrac{9\sqrt{231}}{4}$

내접원 I의 반지름의 길이를 r라 하면
$\dfrac{r}{2}(10+9+8)=\dfrac{9\sqrt{231}}{4}$ $\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{231}}{6}$
△AIG에서
$\overline{AI}^2=\left(\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{231}}{6}\right)^2=\dfrac{80}{3}$
$\therefore\ \overline{AI}=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}\ (\because\ \overline{AI}>0)$
△ABC에서
$10:8=\overline{BD}:\overline{CD}$, $5:4=\overline{BD}:\overline{CD}$
$\therefore\ \overline{BD}=5$, $\overline{CD}=4$
△ABD에서
$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AI}:\overline{ID}$, $10:5=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}:\overline{ID}$
$\therefore\ \overline{ID}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$
$\therefore\ \overline{AD}=\overline{AI}+\overline{ID}$
$=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}+\dfrac{2\sqrt{15}}{3}=2\sqrt{15}$

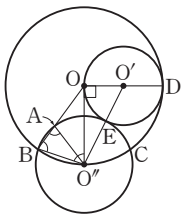
03 (1) $\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$에서
$13^2-\overline{BD}^2=15^2-(14-\overline{BD})^2$
$28\overline{BD}=140$ $\therefore\ \overline{BD}=5$
△ABD에서
$\overline{AD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$
원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times5\times12=\dfrac{1}{2}r(13+5+12)$
$30=15r$ $\therefore\ r=2$
원 O′의 반지름의 길이를 r'이라 하면
$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times9\times12=\dfrac{1}{2}r'(15+9+12)$
$54=18r'$ $\therefore\ r'=3$
이때 □OEDF, □SDPO′은 정사각형이므로
$\overline{ED}=2$, $\overline{DP}=3$ $\therefore\ \overline{EP}=2+3=5$

(2) 다음 그림과 같이 $\overline{BC}$와 $\overline{GR}$의 연장선이 만나는 점을 B′이라 하고 $\overline{BB'}=y$라 하자.



△OB′E∽△O′B′P(AA 닮음)이므로
$\overline{B'E}:\overline{B'P}=\overline{OE}:\overline{O'P}$에서
$(y+3):(y+5+3)=2:3$ $\therefore\ y=7$
△ABD와 △B′TD에서
$\overline{AD}=\overline{B'D}=12$, $\angle ADB=\angle B'DT=90^\circ$,
$\overline{AH}=\overline{AF}=\overline{B'E}=\overline{B'G}=10$이므로
$\angle BAD=\angle TB'D$
$\therefore$ △ABD≡△B′TD(ASA 합동)
$\therefore\ \overline{DT}=\overline{DB}=5$

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{O'O''}$을 긋고 두 원 O′, O″의 교점을 E라 하면



$\triangle OO'O''$에서 $\overline{OO'}=2$ cm이므로

$\overline{O'O''}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ (cm)

$\overline{O''A}$, $\overline{O''B}$를 그으면

$\triangle OBO''$에서 $\overline{OB}=\overline{OO''}$이므로

$\angle OBO''=\angle OO''B$

$\triangle O''BA$에서 $\overline{O''B}=\overline{O''A}$이므로 $\angle O''BA=\angle O''AB$

$\therefore\ \angle OO''B=\angle O''AB$

따라서 $\triangle OBO''\backsim\triangle O''AB$(AA 닮음)이므로

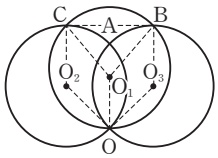
$\overline{OB}:\overline{O''A}=\overline{BO''}:\overline{AB}$

$4:(2\sqrt{5}-2)=(2\sqrt{5}-2):\overline{AB}$

$4\overline{AB}=24-8\sqrt{5}$ $\therefore\ \overline{AB}=6-2\sqrt{5}$ (cm)

$\therefore\ \overline{OA}=\overline{OB}-\overline{AB}=4-(6-2\sqrt{5})=2\sqrt{5}-2$ (cm)

05 오른쪽 그림과 같이 세 원의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하면 세 점은 점 O로부터 5만큼 떨어져 있으므로 $\triangle O_1O_2O_3$의 외접원의 반지름의 길이는 5이다.



$\square CO_2OO_1$, $\square BO_1OO_3$이 마름모이므로 $\square CO_2O_3B$는 평행사변사변형이다.

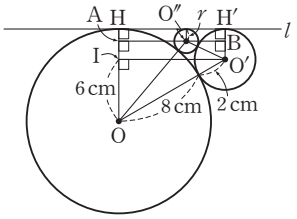
$\therefore\ \overline{CB}=\overline{O_2O_3}$ …㉠

$\square AO_2OO_3$이 마름모이므로 $\square AO_2O_1B$, $\square ACO_1O_3$은 평행사변형이다.

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{O_1O_3}$, $\overline{AB}=\overline{O_2O_1}$ …㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $\triangle ABC\equiv\triangle O_1O_2O_3$(SSS 합동)이므로 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이는 5이다.

06



위의 그림과 같이 두 원의 중심 O, O′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고, 원의 중심 O′에서 $\overline{OH}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle IOO'$에서

$\overline{OO'}=8+2=10$ (cm), $\overline{OI}=8-2=6$ (cm)이므로

$\overline{IO'}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ (cm)

원의 중심 O″에서 $\overline{OH}$와 $\overline{O'H'}$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 원 O″의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\triangle AOO''$에서

$\overline{OO''}=8+r$(cm), $\overline{OA}=8-r$(cm)이므로

$\overline{AO''}=\sqrt{(8+r)^2-(8-r)^2}=\sqrt{32r}=4\sqrt{2r}$(cm)

$\triangle BO'O''$에서

$\overline{O'O''}=2+r$(cm), $\overline{O'B}=2-r$(cm)이므로

$\overline{BO''}=\sqrt{(2+r)^2-(2-r)^2}=\sqrt{8r}=2\sqrt{2r}$(cm)

이때 $\overline{IO'}=\overline{AO''}+\overline{BO''}=4\sqrt{2r}+2\sqrt{2r}=8$이므로

$6\sqrt{2r}=8$ $\therefore\ r=\frac{8}{9}$ (cm)

따라서 원 O″의 반지름의 길이는 $\frac{8}{9}$ cm이다.

2 원주각

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.106~112

1-1 $\frac{441}{4}\pi$ **1-2** 15° **1-3** $\frac{9}{2}$ cm **1-4** $\frac{16}{3}$

1-5 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ **2-1** $\frac{3}{5}$ **2-2** 145° **3-1** 118°

3-2 70° **3-3** $\frac{6}{35}$ **3-4** 78° **3-5** 90° **4-1** $2\sqrt{3}$

4-2 65° **4-3** 5 **4-4** $\frac{48}{5}$cm **4-5** 60°

4-6 $\frac{54}{13}$ cm^2 **5-1** ③ **5-2** 180° **5-3** 72.5°

6-1 80 **6-2** $\frac{25}{2}\pi$ **6-3** $2\sqrt{13}$ **6-4** 10 cm

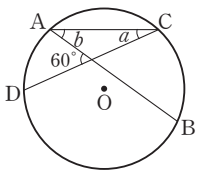
6-5 $3\sqrt{2}$ cm **6-6** 1.35 m **7-1** $\sqrt{2}$

7-2 $\frac{2\sqrt{114}}{3}$ **8-1** $\frac{6}{5}$ cm **8-2** $18+\frac{63\sqrt{2}}{2}$

8-3 $1+\sqrt{2}$ **8-4** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ cm **8-5** 2

8-6 $(6-2\sqrt{3})$ cm **8-7** 5 cm

1-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\angle ACD=a$, $\angle CAB=b$라 하면



$a+b=60°$

$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기의 각각 a, b이므로

$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BC}$에 대한 중심각의 크기의 합은

$2(a+b)=120°$

원 O의 반지름의 길이를 r, 둘레의 길이를 l이라 하면

$(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}):120°=l:360°$

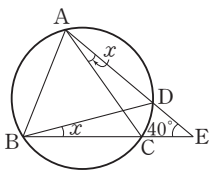
$\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{9}{2}\pi\right):120°=l:360°$

$7\pi:120°=l:360°$ $\therefore\ l=21\pi$

이때 $2\pi\times r=21\pi$이므로 $r=\frac{21}{2}$

따라서 원 O의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{21}{2}\right)^2=\frac{441}{4}\pi$

1-2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{BD}$를 긋고, $\angle CAD=x$라 하면



$\angle CBD=\angle CAD=x$

$\triangle ACE$에서

$\angle ACB=x+40°$

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$이므로

$\angle ACB=\angle BAC=\angle ABD=x+40°$

$\triangle ABC$에서

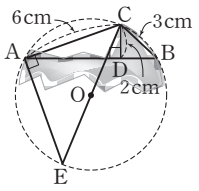
$(x+40°)+(x+40°+x)+(x+40°)=180°$

$4x+120°=180°$, $4x=60°$

$\therefore\ x=15°$

$\therefore\ \angle CAD=15°$

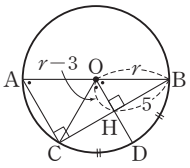
1-3 오른쪽 그림과 같이 전체 원을 그리고 $\overline{CO}$의 연장선과 원 O가 만나는 점을 E라 하면



△CAE와 △CDB에서
∠CAE=∠CDB=90°,
∠AEC=∠ABC이므로
△CAE∽△CDB(AA 닮음)
즉, $\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{CE}:\overline{CB}$에서
$6:2=\overline{CE}:3$ ∴ $\overline{CE}=9$(cm)

따라서 원래의 접시의 반지름의 길이는 $\frac{9}{2}$ cm이다.

1-4 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{OH}=r-3$이므로
△OHB에서

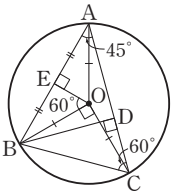


$r^2=(r-3)^2+5^2$ ∴ $r=\frac{17}{3}$

위의 그림과 같이 $\overline{CO}$를 그으면
$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$이므로 ∠BOD=∠COD
△ACB와 △OHB에서
$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BOD$,
∠ACB=∠OHB=90°이므로
△ACB∽△OHB (AA 닮음)
즉, $\overline{AC}:\overline{OH}=\overline{AB}:\overline{OB}$에서
$\overline{AC}:\frac{8}{3}=\frac{34}{3}:\frac{17}{3}$ ∴ $\overline{AC}=\frac{16}{3}$

1-5 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=4:3:5$이므로
$\angle A=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$, $\angle B=180^\circ\times\frac{5}{12}=75^\circ$
$\angle C=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ$

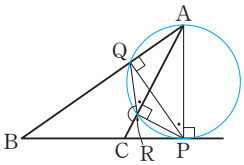
오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면



∠BOC=2∠A=2×45°=90°
이므로 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$ … ㉠
점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D라 하면
$\overline{CD}:\overline{BC}=1:2$에서 $\overline{CD}:2\sqrt{2}=1:2$
∴ $\overline{CD}=\sqrt{2}$ … ㉡
∠AOB=2∠C=2×60°=120°이므로 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하면
∠EOB=60°
△OEB에서 $\overline{BO}:\overline{BE}=2:\sqrt{3}$이므로 $\overline{BE}=\sqrt{3}$
∴ $\overline{AB}=2\overline{BE}=2\sqrt{3}$ … ㉢
△BDA에서 ∠BAD=45°이므로
$\overline{AB}:\overline{AD}=\sqrt{2}:1$에서 $2\sqrt{3}:\overline{AD}=\sqrt{2}:1$
∴ $\overline{AD}=\sqrt{6}$ … ㉣
따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의해 △ABC의 둘레의 길이는
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$
$=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$
$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

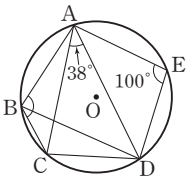
2-1 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 ∠B=∠A
△DAC에서 $\overline{CD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로
$\sin B=\sin A=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$

2-2



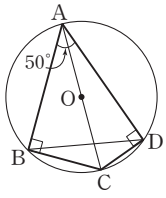
위의 그림과 같이 ∠AQP=∠ARP=90°이므로
□AQRP는 원에 내접하는 사각형이다.
∴ ∠QRA=∠QPA … ㉠
△AQP와 △APB에서
∠AQP=∠APB=90°, ∠BAP는 공통이므로
△AQP∽△APB (AA 닮음)
∴ ∠APQ=∠ABP=35° … ㉡
㉠, ㉡에 의해 ∠QRA=35°
∴ ∠QRC=180°−∠QRA=180°−35°=145°

3-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



∠CBD=∠CAD=38°
□ABDE가 원에 내접하므로
∠ABD=180°−100°=80°
∴ ∠ABC=∠ABD+∠CBD
=80°+38°=118°

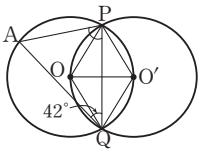
3-2 ∠B=∠D=90°이므로 □ABCD는 원에 내접하고, 원의 중심을 O라 하면 중심 O는 $\overline{AC}$ 위에 있다.



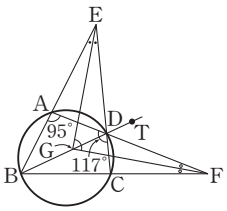
직각삼각형 ABC에서
$\overline{AC}:\overline{BC}=8:4=2:1$이므로
∠BAC=30°, ∠ACB=60°
∴ ∠CAD=50°−30°=20°
∠DBC=∠CAD=20°
∴ ∠ABD=90°−20°=70°

3-3 7개의 점 중 4개의 점을 선택하는 경우의 수는
$\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$(가지)
이때 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 원에 내접하는 경우의 수는
(i) 한 선분에 대하여 같은 쪽에 있는 각의 크기가 같은 경우
∠BFC=∠BEC=90°이므로 □FBCE
∠AEB=∠ADB=90°이므로 □ABDE
∠AFC=∠ADC=90°이므로 □AFDC
(ii) 대각의 크기의 합이 180°인 경우
∠AFH+∠AEH=180°이므로 □AFHE
∠BFH+∠BDH=180°이므로 □FBDH
∠CDH+∠CEH=180°이므로 □HDCE
따라서 (i), (ii)에서 원에 내접하는 사각형은 6가지이다.
∴ $\frac{6}{35}$

3-4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OO'}$, $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{O'P}$, $\overline{O'Q}$를 그으면 두 원의 반지름의 길이가 같으므로
$\overline{OO'}=\overline{OP}=\overline{O'P}=\overline{OQ}=\overline{O'Q}$
즉, $\triangle POO'$과 $\triangle QOO'$은 모두 정삼각형이다.
$\therefore\ \angle PO'Q=2\times60^\circ=120^\circ$
$\square AQO'P$는 원 O에 내접하므로
$\angle PAQ=180^\circ-\angle PO'Q=180^\circ-120^\circ=60^\circ$
따라서 $\triangle APQ$에서 $\angle APQ=180^\circ-60^\circ-42^\circ=78^\circ$

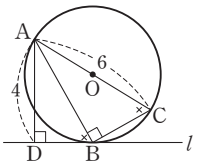


3-5

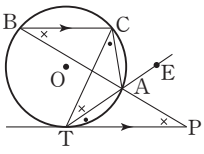


$\square ABCD$는 원에 내접하므로
$\angle B=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-117^\circ=63^\circ$
$\triangle FAB$에서
$85^\circ=63^\circ+\angle F\quad\therefore\ \angle F=22^\circ$
$\angle ECF=180^\circ-\angle BCD=\angle BAD=95^\circ$
$\triangle EBC$에서
$95^\circ=63^\circ+\angle E\quad\therefore\ \angle E=32^\circ$
위의 그림과 같이 $\overline{BG}$의 연장선을 그으면
$\triangle BEG$에서 $\angle EGT=\angle EBG+\frac{1}{2}\angle E$ … ㉠
$\triangle BFG$에서 $\angle FGT=\angle GBF+\frac{1}{2}\angle F$ … ㉡
㉠+㉡을 하면
$\angle EGF=\angle B+\frac{1}{2}\angle E+\frac{1}{2}\angle F$
$=63^\circ+16^\circ+11^\circ=90^\circ$

4-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 그으면
$\angle ABC=90^\circ$이고,
$\angle ABD=\angle ACB$이므로
$\triangle ACB\backsim\triangle ABD$ (AA 닮음)
$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AD}$에서
$\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}=6\times4=24$
$\therefore\ \overline{AB}=2\sqrt{6}$
$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$

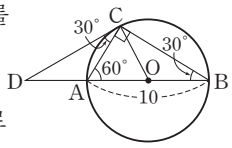


4-2 $\angle ACT=\angle ATP$ … ㉠
$\angle ABC=\angle ATC$,
$\angle ABC=\angle APT$(엇각)이므로
$\angle ABC=\angle APT$ … ㉡
위의 그림과 같이 $\overline{TA}$의 연장선을 그으면 $\triangle ACT$에서
$\angle CAE=\angle ACT+\angle ATC$ … ㉢
$\triangle ATP$에서
$\angle PAE=\angle ATP+\angle APT$ … ㉣



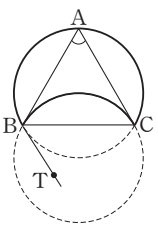
㉢+㉣을 하면
$\angle ACT+\angle ATC+\angle ATP+\angle APT$
$=\angle CAE+\angle PAE$
즉, $2(\angle ATC+\angle ATP)=\angle CAP=130^\circ$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore\ \angle CTP=65^\circ$

4-3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$를 그으면 $\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{AC}$이므로
$\angle BAC=2\angle ABC$ … ㉠
$\triangle ABC$에서 $\angle ACB=90^\circ$이므로
$\angle BAC+\angle ABC=90^\circ$
$2\angle ABC+\angle ABC=90^\circ$ ($\because$ ㉠), $3\angle ABC=90^\circ$
$\therefore\ \angle ABC=30^\circ$
$\therefore\ \angle BAC=2\times30^\circ=60^\circ$
이때 $\angle ACD=\angle ABC=30^\circ$이므로
$\triangle ACD$에서
$\angle ADC=\angle BAC-\angle ACD=60^\circ-30^\circ=30^\circ$
즉, $\triangle ACD$는 이등변삼각형이므로 $\overline{AD}=\overline{AC}$ … ㉡
그런데 $\triangle AOC$는 정삼각형이므로
($\because\ \angle CAO=60^\circ$, $\overline{OA}=\overline{OC}$)
$\overline{AC}=\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$ … ㉢
따라서 ㉡, ㉢에 의해 $\overline{AD}=\overline{AC}=5$



4-4 $\angle AEB=90^\circ$이고 $\overline{BD}\perp l$이므로 $\overline{AE}\,//\,l$
$\therefore\ \overline{AE}=\overline{CD}$
$\triangle TAB$에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (cm)
$\triangle TAC$와 $\triangle BAT$에서
$\angle ACT=\angle ATB=90^\circ$, $\angle ATC=\angle ABT$이므로
$\triangle TAC\backsim\triangle BAT$ (AA 닮음)
즉, $\overline{AT}:\overline{AB}=\overline{TC}:\overline{BT}$에서 $6:10=\overline{TC}:8$
$\therefore\ \overline{TC}=\frac{24}{5}$ (cm)
$\triangle BTD$와 $\triangle BAT$에서
$\angle TDB=\angle ATB=90^\circ$, $\angle BTD=\angle BAT$이므로
$\triangle BTD\backsim\triangle BAT$ (AA 닮음)
즉, $\overline{TB}:\overline{AB}=\overline{TD}:\overline{AT}$에서 $8:10=\overline{TD}:6$
$\therefore\ \overline{TD}=\frac{24}{5}$ (cm)
$\therefore\ \overline{AE}=\overline{CD}=\overline{TC}+\overline{TD}=\frac{24}{5}+\frac{24}{5}=\frac{48}{5}$ (cm)

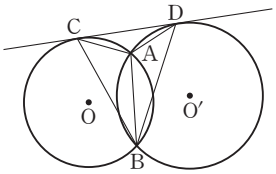
4-5 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$가 접은 $\overset{\frown}{BC}$에 접하므로
$\overline{AB}=\overline{AC}$
$\therefore\ \angle ABC=\angle ACB$ … ㉠
접기 전의 $\overset{\frown}{BC}$에 대하여 점 B에서의 접선 BT를 그으면
$\angle TBC=\angle BAC$ … ㉡
이때 $\overrightarrow{BT}$를 $\overset{\frown}{BC}$와 같이 접으면 $\overrightarrow{BT}$는 $\overline{BA}$와 겹치므로
$\angle TBC=\angle ABC$ … ㉢
따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의해
$\angle ABC=\angle ACB=\angle BAC$
$\therefore\ \angle BAC=60^\circ$



4-6 △ABD와 △BCD에서
∠ADB=∠BDC=90°, ∠BAD=∠CBD이므로
△ABD∽△BCD(AA 닮음)
이때 △ABD와 △BCD의 닮음비는
$\overline{AB}:\overline{BC}=4:6=2:3$이므로
$\triangle ABD:\triangle BCD=2^2:3^2=4:9$
$\therefore \triangle BCD=\frac{9}{13}\triangle ABC$
$=\frac{9}{13}\times\frac{1}{2}\times4\times6=\frac{108}{13}$ (cm²)
$\overline{EB}=\overline{ED}$이므로 ∠DBE=∠BDE이고,
△BCD에서 ∠DBC+∠DCB=90°이므로
∠CDE=90°−∠BDE=90°−∠DBE=∠DCE
$\therefore \overline{EC}=\overline{ED}=\overline{EB}$
$\therefore \triangle DEC=\frac{1}{2}\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\frac{108}{13}=\frac{54}{13}$ (cm²)

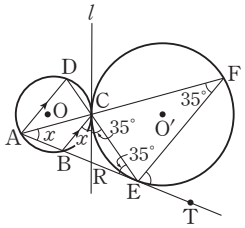
5-1 ∠ATE=∠ACT=70°이므로
∠BTD=180°−45°−70°=65°
이때 $\overline{DB}=\overline{DT}$이므로 ∠DBT=∠DTB=65°
따라서 △ABT에서 ∠DBT=∠TAB+∠ATB이므로
∠TAB=65°−45°=20°

5-2



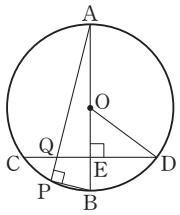
위의 그림과 같이 $\overline{AB}$를 그으면 $\overline{CD}$는 공통외접선이므로
∠DCA=∠CBA, ∠CDA=∠ABD
$\therefore$ ∠CAD+∠CBD=∠CAD+(∠CBA+∠ABD)
=∠CAD+∠DCA+∠CDA
=180°

5-3 다음 그림과 같이 접점 C를 지나는 두 원의 공통접선 l을 긋고 직선 l과 $\overrightarrow{AT}$의 교점을 R라 하자.

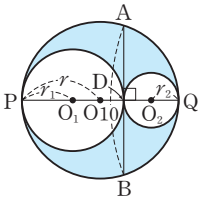


∠RCE=∠CFE=35°
$\overline{RC}=\overline{RE}$이므로 ∠REC=∠RCE=35°
∠CAB=x라 하면 ∠RCB=∠CAB=x
$\overline{AD}//\overline{BC}$이므로 ∠ADC=∠BCE=$x$+35° (동위각)
이때 □ABCD는 원 O에 내접하는 사각형이므로
∠CBE=∠ADC=x+35°
△CBE에서
(x+35°)+(x+35°)+35°=180° $\therefore$ x=37.5°
따라서 △FAE에서
∠FET=∠AFE+∠FAE=35°+37.5°=72.5°

6-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 그으면
△OED에서
$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CD}=4$, $\overline{OD}=5$이므로
$\overline{OE}=\sqrt{5^2-4^2}=3$
$\therefore \overline{AE}=\overline{AO}+\overline{OE}=5+3=8$
이때 $\overline{PB}$를 그으면
∠QPB=∠QEB=90°이므로 네 점 Q, P, B, E는 한 원 위에 있다.
$\therefore \overline{AQ}\times\overline{AP}=\overline{AE}\times\overline{AB}=8\times10=80$

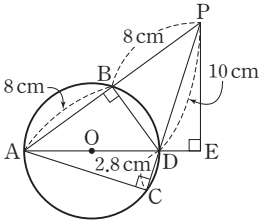


6-2 세 원 O, O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r, r_1, r_2라 하자.
$\overline{DA}=\overline{DB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$이고,
네 점 A, B, P, Q는 한 원 위에 있으므로
$\overline{DA}\cdot\overline{DB}=\overline{DP}\cdot\overline{DQ}$에서
$5^2=2r_1\times2r_2$
$\therefore r_1r_2=\frac{25}{4}$ … ㉠
이때 $2r=2r_1+2r_2$ $\therefore r=r_1+r_2$ … ㉡
㉡을 제곱하면 $r^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$ … ㉢
㉠을 ㉢에 대입하면
$r^2=r_1^2+r_2^2+\frac{25}{2}$ $\therefore r^2-(r_1^2+r_2^2)=\frac{25}{2}$
따라서 색칠한 부분의 넓이는
$\pi r^2-(\pi r_1^2+\pi r_2^2)=\pi\{r^2-(r_1^2+r_2^2)\}$
$=\pi\times\frac{25}{2}=\frac{25}{2}\pi$



6-3 ∠BFC=∠BEC=90°이므로 네 점 F, B, C, E는 한 원 위에 있다.
$\overline{AF}\cdot\overline{AB}=\overline{AE}\cdot\overline{AC}$에서 $2\times6=\overline{AE}\cdot\overline{AC}$ … ㉠
또 ∠AEB=∠ADB=90°이므로 네 점 A, E, D, B는 한 원 위에 있다.
$\overline{CE}\cdot\overline{CA}=\overline{CD}\cdot\overline{CB}$에서 $\overline{CE}\cdot\overline{CA}=5\times8$ … ㉡
㉠+㉡을 하면
$\overline{AE}\cdot\overline{AC}+\overline{CE}\cdot\overline{CA}=12+40$
$\overline{AC}(\overline{AE}+\overline{CE})=\overline{AC}\cdot\overline{AC}=52$, $\overline{AC}^2=52$
$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{13}$ ($\because \overline{AC}>0$)

6-4 $\overline{PB}\cdot\overline{PA}=\overline{PD}\cdot\overline{PC}$에서
$8\times16=10\times(10+\overline{CD})$ $\therefore \overline{CD}=2.8$ (cm)
오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$, $\overline{AC}$를 그으면
∠PBD=∠PED=90°이므로 □PBDE는 한 원에 내접한다.
$\therefore \overline{AB}\cdot\overline{AP}$
$=\overline{AD}\cdot\overline{AE}$
$=\overline{AD}\cdot(\overline{AD}+\overline{DE})$
$=\overline{AD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DE}$
즉, $\overline{AD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DE}=8\times16=128$ … ㉠



$\angle ACP=\angle AEP=90^\circ$이므로 네 점 A, C, E, P는 한 원 위에 있다.

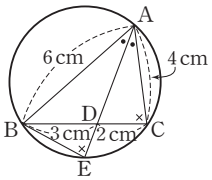
$\overline{AD}\cdot\overline{ED}=\overline{PD}\cdot\overline{CD}$에서 $\overline{AD}\cdot\overline{ED}=10\times2.8=28$

㉠에 대입하면

$\overline{AD}^2+28=128$, $\overline{AD}^2=100$

$\therefore\ \overline{AD}=10\ (\mathrm{cm})\ (\because\ \overline{AD}>0)$

6-5 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 외접원을 그리고 $\overline{AD}$의 연장선이 원과 만나는 점을 E라 하면



$\triangle ABE$와 $\triangle ADC$에서

$\angle BAE=\angle DAC$,

$\angle AEB=\angle ACD$이므로

$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$(AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AE}:\overline{AC}$에서

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{AD}\cdot(\overline{AD}+\overline{DE})$

$=\overline{AD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DE}$

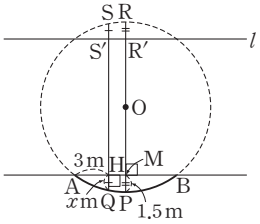
즉, $\overline{AD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DE}=6\times4=24$ …㉠

이때 $\overline{AD}\cdot\overline{ED}=\overline{BD}\cdot\overline{CD}=3\times2=6$이므로

㉠에 대입하면 $\overline{AD}^2+6=24$, $\overline{AD}^2=18$

$\therefore\ \overline{AD}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})\ (\because\ \overline{AD}>0)$

6-6 오른쪽 그림과 같이 전체 원을 그리고 가장자리에서 3 m 떨어진 곳을 H라 하자.



$\overline{OP}$, $\overline{HQ}$의 연장선과 원 O가 만나는 점을 각각 R, S라 하면 네 점 A, B, P, R는 한 원 위에 있으므로

$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MP}\cdot\overline{MR}$에서

$\overline{MA}=\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4.5$, $4.5^2=1.5\times\overline{MR}$

$\therefore\ \overline{MR}=13.5\ (\mathrm{m})$

$\therefore\ \overline{PR}=\overline{PM}+\overline{MR}=1.5+13.5=15\ (\mathrm{m})$

가장자리에서 3 m 떨어진 곳의 수심을 x m라 하고 $\overline{AB}$와 평행하면서 점 R와의 거리가 1.5 m인 직선을 l이라 하자. 이때 직선 l이 $\overline{SQ}$, $\overline{RP}$와 만나는 점을 각각 S′, R′이라 하면

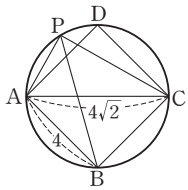
$\overline{SS'}=x\ \mathrm{m}$, $\overline{S'H}=\overline{R'M}=13.5-1.5=12\ (\mathrm{m})$

$\overline{HA}\cdot\overline{HB}=\overline{HQ}\cdot\overline{HS}$에서

$3\times6=x(x+12)$, $x^2+12x-18=0$

$\therefore\ x=-6+3\sqrt{6}=1.35\ (\mathrm{m})\ (\because\ x>0)$

7-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 정사각형의 한 변의 길이가 4이므로



$\overline{AC}=4\sqrt{2}$

이때 □ABCP는 원에 내접하므로 톨레미의 정리에 의해

$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{PC}=\overline{AC}\cdot\overline{PB}$

$4\overline{PA}+4\overline{PC}=4\sqrt{2}\,\overline{PB}$, $\overline{PA}+\overline{PC}=\sqrt{2}\,\overline{PB}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}}=\dfrac{\sqrt{2}\,\overline{PB}}{\overline{PB}}=\sqrt{2}$

7-2 $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=\overline{OB}\cdot\overline{OD}$이므로 □ABCD는 원에 내접하는 사각형이다.

$\triangle AOD$와 $\triangle BOC$에서

$\angle CAD=\angle CBD$, $\angle AOD=\angle BOC$이므로

$\triangle AOD\backsim\triangle BOC$(AA 닮음)

$\overline{AO}:\overline{BO}=\overline{AD}:\overline{BC}$에서 $8:4=12:\overline{BC}$

$\therefore\ \overline{BC}=6$

같은 방법으로 하면 $\triangle AOB\backsim\triangle DOC$(AA 닮음)

$\overline{AB}=x$라 하면

$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AB}:\overline{DC}$에서 $8:6=x:\overline{DC}$

$\therefore\ \overline{DC}=\dfrac{3}{4}x$

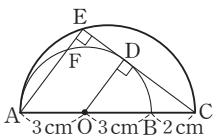
따라서 톨레미의 정리에 의해

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

$x\times\dfrac{3}{4}x+12\times6=11\times10$, $\dfrac{3}{4}x^2=38$

$\therefore\ x=\dfrac{2\sqrt{114}}{3}\ (\because\ x>0)$

8-1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 그으면 $\angle CDO=90^\circ$이므로



$\triangle CDO$에서

$\overline{CD}=\sqrt{5^2-3^2}=4\ (\mathrm{cm})$

$\triangle CDO\backsim\triangle CEA$(AA 닮음)이므로

$\overline{CO}:\overline{CA}=\overline{CD}:\overline{CE}$에서

$5:8=4:\overline{CE}$ $\therefore\ \overline{CE}=\dfrac{32}{5}\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \overline{DE}=\dfrac{32}{5}-4=\dfrac{12}{5}\ (\mathrm{cm})$

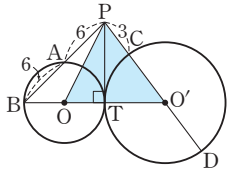
$\overline{CO}:\overline{CA}=\overline{DO}:\overline{EA}$에서

$5:8=3:\overline{EA}$ $\therefore\ \overline{EA}=\dfrac{24}{5}\ (\mathrm{cm})$

$\overline{ED}$는 원 O의 접선이므로 $\overline{ED}^2=\overline{EF}\cdot\overline{EA}$에서

$\left(\dfrac{12}{5}\right)^2=\overline{EF}\times\dfrac{24}{5}$ $\therefore\ \overline{EF}=\dfrac{6}{5}\ (\mathrm{cm})$

8-2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO'}$의 연장선이 원 O′과 만나는 점을 D라 하면



$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$에서

$6\times12=3\times(3+2\overline{CO'})$

$\therefore\ \overline{CO'}=\dfrac{21}{2}$

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=72$ $\therefore\ \overline{PT}=6\sqrt{2}$

$\triangle PBT$에서 $\overline{BT}=\sqrt{12^2-(6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{2}$

따라서 두 원 O, O′의 반지름의 길이는 각각 $3\sqrt{2}$, $\dfrac{21}{2}$이므로 $\overline{OO'}=\overline{OT}+\overline{O'T}=\dfrac{6\sqrt{2}+21}{2}$

$\therefore\ \triangle POO'=\dfrac{1}{2}\times\overline{OO'}\times\overline{PT}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6\sqrt{2}+21}{2}\times6\sqrt{2}$

$=18+\dfrac{63\sqrt{2}}{2}$

8-3 $\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AC}$이므로
$\overline{AB}^2=6\times12=72$ $\therefore\ \overline{AB}=6\sqrt{2}\ (\because\ \overline{AB}>0)$
△AFB와 △AEC에서
∠ABD=∠DCB, ∠DAE=∠BAF이므로
△AFB∽△AEC (AA 닮음)
이때 $\overline{AF}=a$, $\overline{EF}=b$라 하면
$\overline{AF}:\overline{AE}=\overline{AB}:\overline{AC}$에서
$a:(a+b)=6\sqrt{2}:12$
$\sqrt{2}(a+b)=2a$, $(2-\sqrt{2})a=\sqrt{2}b$
$\therefore\ \dfrac{\overline{AF}}{\overline{EF}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

8-4 오른쪽 그림에서
∠ACB=∠ABE=90°이고
∠CAB=a, ∠CBA=b라 하면
$a+b=90°$이므로
∠CBD=a
△DCB에서 $\overline{CD}=\overline{BD}$이므로
∠DCB=∠DBC=a
$\therefore$ ∠DCE=90°−a=b
△CBE에서 ∠ECB=90°, ∠CBE=a이므로
∠CEB=b
즉, △DEC에서 $\overline{DC}=\overline{DE}$
따라서 $\overline{DC}=\overline{DB}=\overline{DE}$이므로 $\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BE}$
이때 $\overline{EB}^2=\overline{EC}\cdot\overline{EA}=6\times15=90$
$\therefore\ \overline{EB}=3\sqrt{10}$ (cm) ($\because\ \overline{EB}>0$)
$\therefore\ \overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BE}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ (cm)

8-5 △ABC∽△EBD (AA 닮음)
이므로 ∠BAC=∠BED … ㉠
이때 점 D는 △ABC의 외심이므로
$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=4$
즉, △DAC는 이등변삼각형이므로
∠DAC=∠DCA … ㉡
㉠, ㉡에서 ∠DCP=∠PEC이므로 $\overline{DC}$는 △PCE의 외접원의 접선이다.
따라서 $\overline{DC}^2=\overline{DP}\cdot\overline{DE}$이므로 $\overline{DP}=x$라 하면
$4^2=x(x+6)$, $(x+8)(x-2)=0$
$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$
$\therefore\ \overline{DP}=2$

8-6 △APQ에서
∠PAQ+60°+∠PQB+30°
=180°
이므로 ∠PAQ+∠PQB=90°
이때 ∠PQB=∠BAQ이므로
∠PAQ=∠PQB=45°
점 Q에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
△PQH에서 ∠PQH=30°이므로
$\overline{PH}=2$ cm, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$ cm
△AQH에서 ∠QAH=∠AQH=45°이므로
$\overline{AH}=\overline{QH}=2\sqrt{3}$ cm
$\therefore\ \overline{AP}=\overline{AH}+\overline{PH}=2+2\sqrt{3}$ (cm)
$\overline{PQ}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{PQ}^2=\overline{PB}\cdot\overline{PA}$에서 $4^2=\overline{PB}\times(2+2\sqrt{3})$
$\therefore\ \overline{PB}=\dfrac{16}{2(\sqrt{3}+1)}=4(\sqrt{3}-1)$ (cm)
$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AP}-\overline{PB}$
$=(2+2\sqrt{3})-4(\sqrt{3}-1)$
$=6-2\sqrt{3}$ (cm)
이때 ∠AOB=2∠AQB=60°이므로 △OAB는 정삼각형이다.
$\therefore$ (반지름의 길이)=$\overline{OA}=\overline{AB}=(6-2\sqrt{3})$ cm

8-7 점 O는 △ABC의 외심이다.
오른쪽 그림과 같이 △ABC의 외접원 O와 $\overline{AO}$의 연장선이 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BD}$를 그으면
△ABD와 △QMC에서
∠ABD=∠QMC=90°,
∠ADB=∠ACB=∠QCM
이므로 △ABD∽△QMC (AA 닮음)
$\therefore$ ∠BAD=∠MQC
즉, ∠PAO=∠PQA이므로 $\overline{OA}$는 △APQ의 외접원의 접선이다.
$\overline{OA}^2=\overline{OP}\cdot\overline{OQ}$에서 $6^2=4\times\overline{OQ}$ $\therefore\ \overline{OQ}=9$ (cm)
$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=9-4=5$ (cm)

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.113~117

01 2	02 $4\sqrt{2}$ cm	03 $a+b$	04 10
05 2	06 정사각형	07 $\frac{160}{9}\pi$	08 $\frac{2}{3}\pi$
09 $\frac{15}{4}$	10 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2	11 1 : 3	12 ④
13 90°	14 40 cm^2	15 16	16 16
17 $\frac{\sqrt{22}}{2}$ cm	18 ⑤	19 21	20 2 : 3
21 45°	22 $\frac{21}{2}$ cm	23 $\frac{16}{3}$	24 $\frac{1}{2}$
25 4π			

01 △APB와 △DHP에서
∠BAP=∠BDC,
∠APB=∠DHP=90°이므로
△APB∽△DHP (AA 닮음)
$\therefore$ ∠ABP=∠DPH
또 ∠QPB=∠DPH이므로
∠QBP=∠QPB
즉, △QBP는 이등변삼각형이므로 $\overline{QB}=\overline{QP}$ … ㉠

$\angle APQ=90^\circ-\angle QPB$
$=90^\circ-\angle QBP=\angle QAP$
즉, $\triangle QPA$는 이등변삼각형이므로 $\overline{QP}=\overline{QA}$ … ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $\overline{PQ}=\overline{BQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로
$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times 4=2$

02 $\triangle ABC$에서 $\angle BAC=90^\circ$이므로
$\angle BAD=\angle CAD=45^\circ$
이때 원주각의 크기가 같으므로
$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$ $\therefore \overline{BD}=\overline{CD}$
$\angle BDC=90^\circ$이므로 $\triangle BDC$는 직각이등변삼각형이다.
$\overline{BC}=2\times 4=8$ (cm)이므로
$\overline{CD}=4\sqrt{2}$ (cm) … ㉠
또 $\angle ACP=\angle BCP=a$라 하면 $\angle DCP=45^\circ+a$
$\triangle ACP$에서
$\angle CPD=\angle CAP+\angle ACP=45^\circ+a$
$\therefore \angle DCP=\angle CPD$
$\triangle DPC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{DP}=\overline{DC}$ … ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $\overline{PD}=\overline{DC}=4\sqrt{2}$cm

03 오른쪽 그림에서 $\overline{PQ}$, $\overline{ST}$의 연장선이 만나는 점을 R라 하면
$\angle SOT=\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$이므로
$\overset{\frown}{SQ}$, $\overset{\frown}{TP}$의 중심각의 크기는 모두 $40^\circ\times 3=120^\circ$이고
$\angle SPQ=\angle TSP=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$
이때 $\overline{TQ}//\overline{SP}$이므로 $\triangle TQR$와 $\triangle SPR$는 모두 정삼각형이다.
$\therefore c=\overline{SP}=\overline{SR}=\overline{ST}+\overline{TR}=\overline{ST}+\overline{TQ}=a+b$

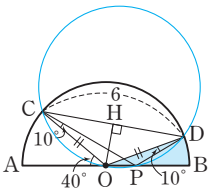
04 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로
$\triangle ABI$에서
$\angle DIB=\angle BAI+\angle ABI$
$=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$ … ㉠
$\angle DBI=\angle DBC+\angle CBI$
$=\angle DAC+\angle CBI$
$=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $\angle DIB=\angle DBI$
$\therefore \overline{BD}=\overline{DI}=5$
같은 방법으로 하면 $\overline{DC}=\overline{DI}=5$
$\therefore \overline{BD}+\overline{DC}=5+5=10$

05 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BO}$의 연장선과 원이 만나는 점을 P라 하면
$\angle BCP=90^\circ$이므로 $\overline{AD}//\overline{PC}$
$\angle BAP=90^\circ$이므로 $\overline{CE}//\overline{PA}$
즉, □AFCP는 평행사변형이므로
$\overline{AF}=\overline{PC}$ … ㉠
또 $\triangle OBH\backsim\triangle PBC$(AA 닮음)이므로
$\overline{BH}:\overline{BC}=\overline{OH}:\overline{PC}$에서 $1:2=\overline{OH}:\overline{PC}$
$\therefore \overline{PC}=2\overline{OH}$ … ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $\overline{AF}=2\overline{OH}$
$\therefore \frac{\overline{AF}}{\overline{OH}}=2$

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OS}$와 $\overline{OQ}$를 그으면
$\overline{PC}//\overline{AS}$이므로 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{CS}$
$\therefore \overset{\frown}{PS}=\overset{\frown}{AC}$
$\therefore \angle POS=\angle AOC=90^\circ$
$\overline{PC}//\overline{QB}$이므로 $\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{CB}$
$\therefore \angle POQ=\angle BOC=90^\circ$
$\therefore \angle QOS=\angle POQ+\angle POS=180^\circ$
따라서 세 점 Q, O, S는 한 직선 위에 있다.
같은 방법으로 하면 세 점 P, O, R도 한 직선 위에 있다.
$\angle POS=90^\circ$이므로 $\overline{PR}\perp\overline{QS}$이고,
$\overline{OP}=\overline{OR}=\overline{OQ}=\overline{OS}$
따라서 □PQRS는 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하고 그 길이가 같으므로 정사각형이다.

07 □ABCD는 원에 내접하므로
$\angle B+\angle D=180^\circ$
오른쪽 그림과 같이 □ABCD와 내접원 O의 접점을 각각 E, F, G, H라 하고, $\overline{BE}=a$라 하면
$\overline{BF}=\overline{BE}=a$,
$\overline{CF}=\overline{CG}=6-a$,
$\overline{DG}=\overline{DH}=10-(6-a)=a+4$,
$\overline{AH}=\overline{AE}=12-(a+4)=8-a$
$\triangle BFO$와 $\triangle OGD$에서
$\angle BFO=\angle OGD=90^\circ$
$\angle FBO=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle D)$
$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle D=90^\circ-\angle ODG=\angle GOD$
$\therefore \triangle BFO\backsim\triangle OGD$(AA 닮음)
내접원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{BF}:\overline{OG}=\overline{FO}:\overline{GD}$에서
$a:r=r:(a+4)$ $\therefore a(a+4)=r^2$ … ㉠
같은 방법으로 하면
$\triangle CGO\backsim\triangle OHA$(AA 닮음)이므로
$\overline{CG}:\overline{OH}=\overline{GO}:\overline{HA}$에서 $(6-a):r=r:(8-a)$
$\therefore (6-a)(8-a)=r^2$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $a^2+4a=a^2-14a+48$ $\therefore a=\frac{8}{3}$
a의 값을 ㉠에 대입하면 $r^2=\frac{8}{3}\times\frac{20}{3}=\frac{160}{9}$
따라서 내접원 O의 넓이는 $\pi\times r^2=\frac{160}{9}\pi$

08 오른쪽 그림에서



$\angle OCP=\angle ODP$이므로 네 점 C, O, P, D는 한 원 위에 있다.

$\square COPD$에서

$\angle AOC=180^\circ-\angle COP$

$=\angle CDP=40^\circ$

이므로

$\angle ODC=40^\circ-10^\circ=30^\circ$

$\triangle COD$는 이등변삼각형이므로 $\angle OCD=\angle ODC=30^\circ$

$\therefore \angle COD=120^\circ$

따라서 $\angle DOB=180^\circ-(40^\circ+120^\circ)=20^\circ$

점 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HD}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\triangle HOD$에서 $\overline{OD}=\frac{3}{\cos 30^\circ}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (부채꼴 DOB의 넓이)$=\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{20^\circ}{360^\circ}=\frac{2}{3}\pi$

09 $\triangle PAB$와 $\triangle PDA$에서

$\angle PAB=\angle ADP$, $\angle APD$는 공통이므로

$\triangle PAB\backsim\triangle PDA$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{PA}:\overline{PD}=\overline{AB}:\overline{DA}$ … ㉠

같은 방법으로 하면

$\triangle PCB\backsim\triangle PDC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{PC}:\overline{PD}=\overline{BC}:\overline{DC}$ … ㉡

이때 $\overline{PA}=\overline{PC}$이므로 ㉠, ㉡에서

$\overline{AB}:\overline{DA}=\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PC}:\overline{PD}=\overline{BC}:\overline{DC}$

$3:\overline{DA}=4:5$

$\therefore \overline{AD}=\frac{15}{4}$

10 원 O에서 $\angle ACD=\angle DEC$이고,

$\triangle ABC$에서 $\angle A=90^\circ$이므로

$\angle ABC=90^\circ-\angle ACB$

$=90^\circ-(\angle ACD+\angle DCE)$

$=90^\circ-(\angle DEC+\angle DCE)$

$=90^\circ-(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

따라서 $\triangle ABC$에서

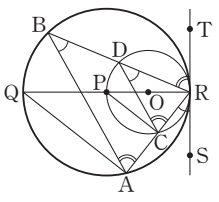
$\angle A=90^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $\angle C=60^\circ$이므로

$\overline{AC}:\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}:2$

$\therefore \overline{AC}=3\,(\text{cm})$, $\overline{AB}=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm}^2)$

11 오른쪽 그림과 같이 점 R에서 그은 두 원의 공통인 접선을 $\overleftrightarrow{ST}$라 하면



$\angle SRA=\angle RDC=\angle RBA$

$\angle TRB=\angle RCD=\angle RAB$

$\therefore \triangle RCD\backsim\triangle RAB$ (AA 닮음)

$\angle SRO=\angle SRP=90^\circ$이므로 $\overline{RP}$의 연장선이 원 P와 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{QR}$는 원 P의 지름이고 점 O는 $\overline{QR}$ 위에 있다.

$\triangle RCP$와 $\triangle RAQ$에서

$\angle RCP=\angle RAQ=90^\circ$, $\angle ARQ$는 공통이므로

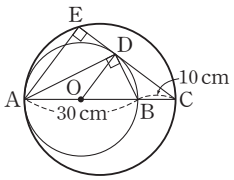
$\triangle RCP\backsim\triangle RAQ$ (AA 닮음)이고 닮음비는

$\overline{RC}:\overline{RA}=\overline{RP}:\overline{RQ}=1:2$

따라서 $\triangle RCD:\triangle RAB=1^2:2^2=1:4$이므로

$\triangle RCD:\square ABDC=1:3$

12 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 그으면



$\angle AEC=\angle ODC=90^\circ$이므로

$\overline{AE}/\!/\overline{OD}$

$\overline{AE}:\overline{OD}=\overline{AC}:\overline{OC}$에서

$\overline{AE}:15=40:25$

$\therefore \overline{AE}=24\,(\text{cm})$

위의 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\triangle EAD$와 $\triangle DAB$에서

$\angle AED=\angle ADB=90^\circ$, $\angle ADE=\angle ABD$

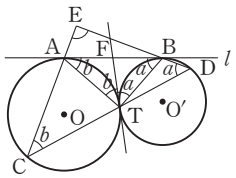
$\therefore \triangle EAD\backsim\triangle DAB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{EA}:\overline{DA}=\overline{AD}:\overline{AB}$에서

$\overline{AD}^2=\overline{AE}\times\overline{AB}=24\times 30$

$\therefore \overline{AD}=12\sqrt{5}\,(\text{cm})$ ($\because \overline{AD}>0$)

13 다음 그림과 같이 점 T를 지나는 공통인 접선을 그어 $\overline{AB}$와 만나는 점을 F라 하자.



$\angle BDT=\angle FBT=\angle FTB=a$,

$\angle ACT=\angle FAT=\angle FTA=b$라 하면

$\triangle ATB$에서

$\angle BAT+\angle ATB+\angle ABT$

$=b+(b+a)+a=2(a+b)$

$=180^\circ$

$\therefore a+b=90^\circ$

따라서 $\triangle ECD$에서

$\angle CED=180^\circ-(a+b)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

14 $\overline{AB}=2\overline{OB}=10\,(\text{cm})$이고, $\overline{AE}:\overline{EB}=1:3$이므로

$\overline{AE}=\frac{1}{4}\times 10=\frac{5}{2}\,(\text{cm})$, $\overline{BE}=\frac{3}{4}\times 10=\frac{15}{2}\,(\text{cm})$

$\overline{AE}:\overline{EB}=1:3$이므로

$\overline{CE}=3a\,\text{cm}$, $\overline{DE}=5a\,\text{cm}\,(a>0)$라 하면

$\overline{CE}\cdot\overline{DE}=\overline{AE}\cdot\overline{BE}$에서

$3a\times 5a=\frac{5}{2}\times\frac{15}{2}$, $a^2=\frac{5}{4}$

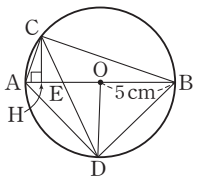
$\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{2}\,(\text{cm})$ ($\because a>0$)

$\therefore \overline{CE}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\,(\text{cm})$, $\overline{DE}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\,(\text{cm})$

$\triangle EDO$에서 $\overline{OE}^2+\overline{OD}^2=\overline{DE}^2$이므로

$\angle EOD=90^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle CHE \backsim \triangle DOE$ (AA 닮음)

$\overline{CH} : \overline{DO} = \overline{CE} : \overline{DE}$에서

$\overline{CH} : 5 = 3 : 5$

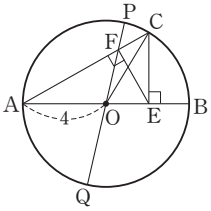
$\therefore \overline{CH} = 3\,(\text{cm})$

$\therefore \square ADBC = \triangle CAB + \triangle DAB$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 3 + \frac{1}{2} \times 10 \times 5$

$= 15 + 25 = 40\,(\text{cm}^2)$

15 오른쪽 그림과 같이 $\overline{FO}$의 연장선을 그어 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면



$\overline{OP}^2 - \overline{OF}^2$

$= (\overline{OP} + \overline{OF})(\overline{OP} - \overline{OF})$

$= (4 + \overline{OF})(4 - \overline{OF})$

$= \overline{QF} \cdot \overline{PF}$

$= \overline{AF} \cdot \overline{CF}$ … ㉠

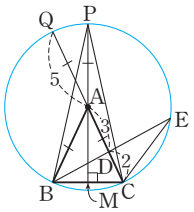
$\triangle ACE$에서 $\overline{EF}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{CF}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\overline{EF}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{CF} = \overline{OP}^2 - \overline{OF}^2 = 4^2 - \overline{OF}^2$

$\therefore \overline{OF}^2 + \overline{EF}^2 = 16$

16 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하고, $\overline{MA}$의 연장선 위에 $\overline{AP} = \overline{AB}$가 되도록 점 P를 잡으면



$\angle BPC = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle BEC$

이므로 네 점 B, C, E, P는 한 원 위에 있다.

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AP}$인 점 A는 이 원의 중심이므로 $\overline{AC}$의 연장선과 이 원과의 교점을 Q라 하면 $\overline{CQ}$는 이 원의 지름이다.

즉, $\overline{DB} \cdot \overline{DE} = \overline{DC} \cdot \overline{DQ}$이므로

$\overline{DB} \times \overline{DE} = 2 \times (3 + 5) = 16$

17 $\overline{PQ} = \overline{PR}$이므로 원의 중심 O에서 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$까지의 거리는 같고, $\overline{PO}$는 $\angle QPR$를 이등분한다.

$\therefore \overline{PC} : \overline{PD} = \overline{CO} : \overline{DO} = 1 : 2$

즉, $\overline{PC} = x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{PD} = 2x\,(\text{cm})$

$\overline{PC} \cdot \overline{QC} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$에서

$x \times \overline{QC} = 2 \times 4 = 8$ $\therefore \overline{QC} = \frac{8}{x}\,(\text{cm})$

$\overline{PD} \cdot \overline{RD} = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$에서

$2x \times \overline{RD} = 5 \times 1 = 5$ $\therefore \overline{RD} = \frac{5}{2x}\,(\text{cm})$

$\overline{PQ} = \overline{PR}$이므로 $\overline{PC} + \overline{CQ} = \overline{PD} + \overline{DR}$에서

$x + \frac{8}{x} = 2x + \frac{5}{2x}$

양변에 x를 곱하면 $x^2 + 8 = 2x^2 + \frac{5}{2}$, $x^2 = \frac{11}{2}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{22}}{2}\,(\text{cm})\ (\because x > 0)$

$\therefore \overline{PC} = \frac{\sqrt{22}}{2}\,\text{cm}$

18 $\overline{AH} = x$라 하면 $\overline{AH} \cdot \overline{AI} = \overline{AG} \cdot \overline{AF}$이므로

$x(x+7) = 2 \times 15$, $x^2 + 7x - 30 = 0$

$(x+10)(x-3) = 0$ $\therefore x = 3\ (\because x > 0)$

$\therefore \overline{AH} = 3$

$\triangle ABC$는 정삼각형이고 $\overline{AC} = 16$이므로

$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HI} + \overline{IB} = 16$

$3 + 7 + \overline{IB} = 16$ $\therefore \overline{IB} = 6$

$\overline{BD} = a$, $\overline{CE} = b$라 하면 $\overline{DE} = 16 - (a+b)$

그런데 $16 - (a+b) > 0$이므로 $a + b < 16$ … ㉠

$\overline{BD} \cdot \overline{BE} = \overline{BI} \cdot \overline{BH}$에서 $a(16-b) = 6 \times 13$ … ㉡

$\overline{CE} \cdot \overline{CD} = \overline{CF} \cdot \overline{CG}$에서 $b(16-a) = 1 \times 14$ … ㉢

㉡ − ㉢을 하면 $16(a-b) = 64$

$a - b = 4$ $\therefore a = b + 4$ … ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면 $(b+4)(16-b) = 78$

전개하여 정리하면 $b^2 - 12b + 14 = 0$ $\therefore b = 6 \pm \sqrt{22}$

(i) $b = 6 + \sqrt{22}$일 때, $a = b + 4 = 10 + \sqrt{22}$

이때 $a + b = 16 + 2\sqrt{22}$이므로 ㉠을 만족하지 않는다.

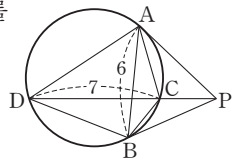
(ii) $b = 6 - \sqrt{22}$일 때, $a = b + 4 = 10 - \sqrt{22}$

이때 $a + b = 16 - 2\sqrt{22}$이므로 ㉠을 만족한다.

(i), (ii)에 의해

$\overline{DE} = 16 - (16 - 2\sqrt{22}) = 2\sqrt{22}$

19 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$를 그으면



$\triangle PCB$와 $\triangle PBD$에서

$\angle PBC = \angle BDP$,

$\angle BPC$는 공통이므로

$\triangle PCB \backsim \triangle PBD$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{BC} : \overline{DB} = \overline{PC} : \overline{PB}$ … ㉠

$\triangle PAC$와 $\triangle PDA$에서

$\angle PAC = \angle PDA$, $\angle APC$는 공통이므로

$\triangle PAC \backsim \triangle PDA$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{AC} : \overline{DA} = \overline{PC} : \overline{PA}$ … ㉡

$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로 ㉠, ㉡에 의해

$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{BD}$ $\therefore \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

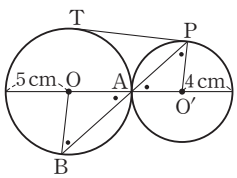
이때 $\square ACBD$에서 톨레미의 정리에 의해

$\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 7 \times 6 = 42$

$\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 42$

$\therefore \overline{AC} \times \overline{BD} = 21$

20 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PA}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 B라 하면



$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$이므로

$\overline{PA}^2 : \overline{PT}^2 = \overline{PA}^2 : \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

$= \overline{PA} : \overline{PB}$ … ㉠

점 A는 두 원 O, O′의 접점이므로 세 점 O, A, O′은 한 직선 위에 있다.

따라서 $\angle OBA = \angle OAB = \angle O'AP = \angle O'PA$이므로

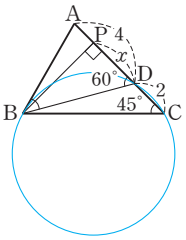
$\overline{OB} /\!/ \overline{PO'}$

$\therefore \overline{PA} : \overline{PB} = \overline{O'A} : \overline{O'O}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\overline{PA}^2 : \overline{PT}^2 = \overline{O'A} : \overline{O'O} = 4 : 9$

$\therefore \overline{PA} : \overline{PT} = \sqrt{4} : \sqrt{9} = 2 : 3$

21 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 P라 하자.



$\overline{PD}=x$라 하면

△BPD에서 $\overline{BP}:x=\sqrt{3}:1$

$\therefore\ \overline{BP}=\sqrt{3}x$ … ㉠

△BPC에서

$\overline{BP}=\overline{PC}=2+x$ … ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\sqrt{3}x=2+x$

$(\sqrt{3}-1)x=2$ $\therefore\ x=\sqrt{3}+1$

$\overline{AP}=\overline{AD}-\overline{PD}=4-(\sqrt{3}+1)=3-\sqrt{3}$

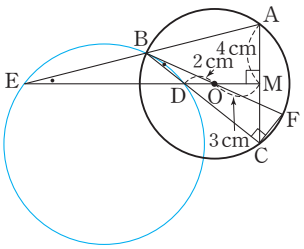
△BPA에서

$\overline{AB}^2=(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2=24$

이때 $\overline{AD}\times\overline{AC}=4\times6=24$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}\times\overline{AC}$이므로 $\overline{AB}$는 △BCD의 외접원의 접선이다.

$\therefore\ \angle ABD=\angle BCD=45^\circ$

22 다음 그림과 같이 $\overline{BO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 F라 하면



△BCF∽△EMA(AA 닮음) $\therefore\ \angle CBF=\angle MEA$

따라서 $\overline{OB}$는 △BED의 외접원의 접선이므로

$\overline{OB}^2=\overline{OD}\cdot\overline{OE}$

이때 $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2=\overline{OM}^2+\overline{AM}^2=3^2+4^2=5^2$이므로

$5^2=2\times\overline{OE}$ $\therefore\ \overline{OE}=\frac{25}{2}$ (cm)

$\therefore\ \overline{DE}=\overline{OE}-\overline{OD}=\frac{25}{2}-2=\frac{21}{2}$ (cm)

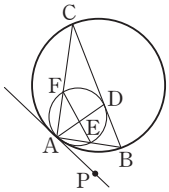
23 $\overline{AE}=x$, $\overline{AF}=y\ (x<y)$라 하면

$x+y=7$, $xy=12$이므로

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

$\therefore\ \overline{AE}=3$, $\overline{AF}=4$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{EF}$를 그으면



$\angle PAB=\angle AFE$,

$\angle PAB=\angle ACB$이므로

$\angle AFE=\angle ACB$(동위각)

$\therefore\ \overline{EF}/\!/\overline{BC}$

즉, $\overline{AE}:\overline{AF}=\overline{BE}:\overline{CF}=3:4$에서

$\overline{CF}=\frac{4}{3}\overline{BE}$ … ㉠

또 $\overline{BD}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BA}=\overline{BE}(\overline{BE}+3)=4^2$ … ㉡

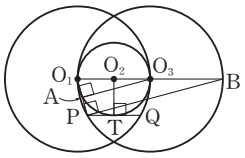
$\therefore\ \overline{CD}^2=\overline{CF}\cdot\overline{CA}=\overline{CF}(\overline{CF}+4)$

$=\frac{4}{3}\overline{BE}\left(\frac{4}{3}\overline{BE}+4\right)$ (∵ ㉠)

$=\left(\frac{4}{3}\right)^2\overline{BE}(\overline{BE}+3)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\times4^2$ (∵ ㉡)

$\therefore\ \overline{CD}=\frac{16}{3}$ (∵ $\overline{CD}>0$)

24 오른쪽 그림과 같이 $\overline{O_1P}$를 긋고 점 O_3에서 $\overline{O_1P}$에 내린 수선의 발을 A, $\overline{O_1O_3}$의 연장선이 원 O_3과 만나는 점을 B, $\overline{PQ}$와 원 O_2의 접점을 T라 하면



$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PO_1}$

$\therefore\ \frac{\overline{PO_1}^2}{\overline{PT}^2}=\frac{\overline{PO_1}^2}{\overline{PA}\cdot\overline{PO_1}}=\frac{\overline{PO_1}}{\overline{PA}}$

$\angle O_1AO_3=\angle O_1PB=90^\circ$이므로 $\overline{AO_3}/\!/\overline{PB}$

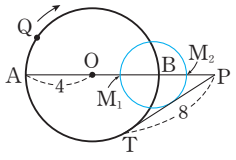
$\therefore\ \overline{PO_1}:\overline{PA}=\overline{O_1B}:\overline{O_3B}=2:1$

$\therefore\ \frac{\overline{PO_1}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PO_1}^2}{\overline{PT}^2}=2$ … ㉠

이때 $\overline{PQ}=2\overline{PT}$이므로

$\frac{\overline{PO_1}^2}{\overline{PQ}^2}=\frac{1}{4}\times\frac{\overline{PO_1}^2}{\overline{PT}^2}=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$ (∵ ㉠)

25 오른쪽 그림과 같이 원 O 위를 움직이는 점 Q에 대해 $\overline{PQ}$의 중점이 움직이는 점을 연결한 도형은 원이 된다.



$\overline{PB}=x$라 하면 $\overline{PT}$는 원 O의 접선이므로

$\overline{PT}^2=\overline{PB}\cdot\overline{PA}$에서 $8^2=x(x+8)$

$x^2+8x-64=0$ $\therefore\ x=-4+4\sqrt{5}$ (∵ $x>0$)

$\therefore\ \overline{PB}=-4+4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{PA}=\overline{PB}+\overline{AB}=(-4+4\sqrt{5})+8=4\sqrt{5}+4$

이때 $\overline{PQ}$의 길이는 점 Q가 점 A에 있을 때 가장 길고, 점 B에 있을 때 가장 짧다.

위의 그림과 같이 점 Q가 점 A에 있을 때 $\overline{PQ}$의 중점을 M_1이라 하면

$\overline{PM_1}=\frac{1}{2}\overline{PA}=\frac{4\sqrt{5}+4}{2}=2\sqrt{5}+2$ … ㉠

점 Q가 점 B에 있을 때 $\overline{PQ}$의 중점을 M_2라 하면

$\overline{PM_2}=\frac{1}{2}\overline{PB}=\frac{-4+4\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}-2$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{PQ}$의 중점이 움직인 경로는 $\overline{M_1M_2}$를 지름으로 하는 원이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{\overline{M_1M_2}}{2}=\frac{\overline{PM_1}-\overline{PM_2}}{2}=\frac{(2\sqrt{5}+2)-(2\sqrt{5}-2)}{2}=2$

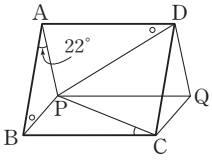
따라서 $\overline{PQ}$의 중점이 움직이는 경로의 길이는 $2\pi\times2=4\pi$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.118~119

01 22° **02** 108° **03** 1 **04** 26 **05** 39

06 $-7+\frac{7\sqrt{13}}{2}$

01 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$, $\overline{BC}$를 두 변으로 하는 평행사변형 PBCQ를 만들면



$\overline{PQ}/\!/\overline{BC}/\!/\overline{AD}$,

$\overline{BP}/\!/\overline{CQ}$, $\overline{AP}/\!/\overline{DQ}$

따라서 □APQD는 평행사변형이다.
△ABP≡△DCQ(SSS 합동)이므로
∠ABP=∠DCQ
그런데 ∠ABP=∠PDA=∠DPQ이므로
∠DCQ=∠DPQ
따라서 □DPCQ는 원에 내접한다.
∴ ∠PCB=∠QPC=∠QDC
=∠PAB=22°

02 오른쪽 그림과 같이 ∠BAC의 이등분선을 그어 $\overline{BD}$와 만나는 점을 E라 하면
∠CAE=∠EDC=36°
이므로
□AECD는 원에 내접한다.
∴ ∠CED=∠CAD=36°
이때 ∠CED=∠EBC+∠ECB에서
36°=18°+∠ECB ∴ ∠ECB=18°
즉, △EBC는 이등변삼각형이므로 $\overline{BE}=\overline{CE}$이다.
또 ∠BEC=180°−36°=144°이고

∠BAC=72°이므로 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BEC$

따라서 세 점 A, B, C는 점 E를 중심으로 하고 $\overline{EB}=\overline{EC}=\overline{EA}$를 반지름으로 하는 원 위에 있다.
△AEB에서 $\overline{EB}=\overline{EA}$이므로 ∠EBA=36°
∴ ∠APD=∠BAP+∠ABP
=72°+36°=108°

03 네 점 A, B, E, C는 한 원 위에 있으므로
∠AEC=∠ABC=60°,
∠AEB=∠ACB=60°
$\overline{CE}$의 연장선 위에 $\overline{EB}=\overline{EP}$가 되도록 점 P를 잡으면
∠PEB=180°−∠BEC
=180°−120°=60°,
이때 $\overline{EB}=\overline{EP}$이므로 △EBP는 정삼각형이다.
즉, ∠BPE=∠DEC이므로 $\overline{BP}/\!/\overline{DE}$
따라서 △CBP∽△CDE(AA 닮음)이므로
$\overline{BP}:\overline{DE}=\overline{CP}:\overline{CE}$에서
$\overline{BP}\cdot\overline{CE}=\overline{DE}\cdot\overline{CP}$ … ㉠
또 $\overline{BP}=\overline{EP}=\overline{EB}$, $\overline{CP}=\overline{CE}+\overline{EP}$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{EB}\cdot\overline{CE}=\overline{DE}(\overline{CE}+\overline{EP})$
$=\overline{DE}(\overline{CE}+\overline{EB})$
$=\overline{CE}+\overline{EB}$ (∵ $\overline{DE}=1$)
∴ $\frac{1}{\overline{EB}}+\frac{1}{\overline{CE}}=\frac{\overline{CE}+\overline{EB}}{\overline{EB}\cdot\overline{CE}}=\frac{\overline{CE}+\overline{EB}}{\overline{CE}+\overline{EB}}=1$

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$를 그으면
∠BAD=∠BED,
∠DAE=∠BEA이므로
∠BAE=∠DEA … ㉠
또 ∠DBE=∠BEA(엇각)
이므로 $\overline{BD}/\!/\overline{AE}$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의해 □ABDE는 등변사다리꼴이다.
∴ $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{BE}=\overline{AD}$ … ㉢
같은 방법으로 하면 □BCEF도 등변사다리꼴이다.
∴ $\overline{BC}=\overline{EF}$, $\overline{BE}=\overline{CF}$ … ㉣
이때 $\overline{BG}/\!/\overline{HE}$, $\overline{BH}/\!/\overline{GE}$이므로 □BHEG는 평행사변형이다.
∴ $\overline{GE}=16$, $\overline{EH}=12$
$\overline{HE}\cdot\overline{AH}=\overline{BH}\cdot\overline{HF}$에서 $12\times\overline{AH}=16\times12$
∴ $\overline{AH}=16$
$\overline{CG}\cdot\overline{GE}=\overline{BG}\cdot\overline{GD}$에서 $\overline{CG}\times16=12\times7$

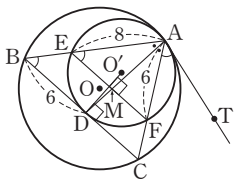
∴ $\overline{CG}=\frac{21}{4}$

∴ $\overline{AE}=\overline{AH}+\overline{HE}=28$, $\overline{CE}=\overline{CG}+\overline{GE}=\frac{85}{4}$

△AHB∽△FHE(AA 닮음)이므로
$\overline{BH}:\overline{EH}=\overline{BA}:\overline{EF}$에서 $\overline{BA}:\overline{EF}=4:3$
이때 $\overline{AB}=4k$, $\overline{EF}=3k\,(k>0)$라 하면 … ㉤
□ABDE에서 톨레미의 정리에 의해
$\overline{AD}\cdot\overline{BE}=\overline{AB}\cdot\overline{DE}+\overline{BD}\cdot\overline{AE}$
$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+19\times28=(4k)^2+532$ (∵ ㉤)
□BCEF에서 톨레미의 정리에 의해
$\overline{BE}\cdot\overline{CF}=\overline{BC}\cdot\overline{EF}+\overline{CE}\cdot\overline{BF}$
$\overline{BE}^2=\overline{EF}^2+\frac{85}{4}\times28=(3k)^2+595$ (∵ ㉤)
이때 ㉢에 의해 $\overline{AD}^2=\overline{BE}^2$이므로
$(4k)^2+532=(3k)^2+595$
$7k^2=63$ ∴ $k=3$ (∵ $k>0$)
∴ $\overline{AD}^2=\overline{BE}^2=676$
∴ $\overline{AD}=26$ (∵ $\overline{AD}>0$)

05 오른쪽 그림과 같이 점 O_1에서 원 O_2에 접선 O_1T를 그으면
$\overline{O_1T}^2=\overline{O_1P}\cdot\overline{O_1R}$
=20×(20+25)=900
∴ $\overline{O_1T}=30$ (∵ $\overline{O_1T}>0$)
따라서 점 T는 원 O_1 위에 있으므로 점 A이다.
즉, ∠O_1AO_2=90°
$\overline{O_1O_2}$와 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하면 $\overline{AD}=24$, $\overline{O_1A}=30$이므로
$\overline{O_1D}=\sqrt{30^2-24^2}=18$
△O_1AD∽△AO_2D(AA 닮음)이므로
$\overline{O_1A}:\overline{AO_2}=\overline{O_1D}:\overline{AD}$에서
$30:\overline{AO_2}=18:24$
∴ $\overline{AO_2}=40$
$\overline{AO_2}$는 원 O_1의 접선이므로
$\overline{O_2A}^2=\overline{O_2Q}\cdot\overline{O_2S}$에서
$40^2=25\times\overline{O_2S}$
∴ $\overline{O_2S}=64$
∴ $\overline{QS}=\overline{O_2S}-\overline{O_2Q}$
=64−25=39

06 오른쪽 그림과 같이 접선 AT를 그으면



$\angle TAF=\angle AEF=\angle ABC$

$\therefore \overline{EF}/\!/\overline{BC}$

$\overline{BC}$는 원 O′의 접선이므로

$\overline{O'D}\perp\overline{BC}$, $\overline{O'D}\perp\overline{EF}$이고

$\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{DF}$이므로

$\angle EAD=\angle FAD$

따라서 $\overline{AD}$는 $\angle BAC$의 이등분선이다.

이때 $\overline{AD}$와 $\overline{EF}$의 교점을 M이라 하면

$\triangle AEF$에서 $\overline{AE}:\overline{AF}=\overline{EM}:\overline{FM}$ … ㉠

$\overline{EF}/\!/\overline{BC}$이므로 $\overline{EM}:\overline{FM}=\overline{BD}:\overline{CD}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AE}:\overline{AF}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$8:6=6:\overline{CD}$ $\therefore \overline{CD}=\frac{9}{2}$

원 O′에서 $\overline{BD}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BA}$이므로

$36=\overline{BE}(\overline{BE}+8)$, $\overline{BE}^2+8\overline{BE}-36=0$

$\therefore \overline{BE}=-4+2\sqrt{13}$ ($\because \overline{BE}>0$)

원 O′에서 $\overline{CD}^2=\overline{CF}\cdot\overline{CA}$이므로

$\frac{81}{4}=\overline{CF}(\overline{CF}+6)$, $\overline{CF}^2+6\overline{CF}-\frac{81}{4}=0$

$\therefore \overline{CF}=-3+\frac{3\sqrt{13}}{2}$ ($\because \overline{CF}>0$)

$\therefore \overline{BE}+\overline{CF}=(-4+2\sqrt{13})+\left(-3+\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)$

$=-7+\frac{7\sqrt{13}}{2}$

퍼펙트 단원 마무리 P.120~123

01 $\frac{5\sqrt{65}-21}{4}$ m **02** 4시간 **03** $2\sqrt{21}$ cm

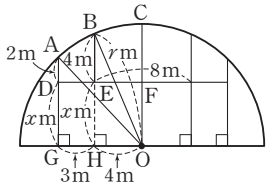
04 $\frac{8}{7}$ **05** $9\sqrt{7}$ **06** 74π **07** $\frac{17}{2}$ **08** $10\sqrt{15}$

09 50° **10** 69° **11** 풀이 참조 **12** 70°

13 4 cm **14** 마름모 **15** 19 cm **16** $\frac{14}{5}$

17 $1+\sqrt{17}$ **18** $2\sqrt{21}$ cm **19** 14

01 다음 그림과 같이 터널의 천장을 따라 반원 O를 그리고, $\overline{DG}=\overline{EH}=\overline{FO}=x$ m, 반원의 반지름의 길이를 r m라 하면



$\overline{HO}=\overline{EF}=4$ (m), $\overline{GO}=\overline{DF}=7$ (m)

$\triangle BHO$에서 $(x+4)^2+4^2=r^2$ … ㉠

$\triangle AGO$에서 $(x+2)^2+7^2=r^2$ … ㉡

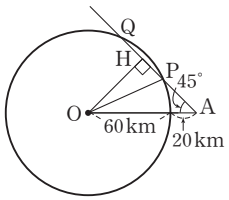
㉠−㉡을 하면 $4x-21=0$ $\therefore x=\frac{21}{4}$ (m)

$\therefore r=\sqrt{\left(\frac{21}{4}+4\right)^2+4^2}=\frac{5\sqrt{65}}{4}$ (m)

따라서 터널의 천장까지의 높이의 최댓값은

$\overline{CF}=r-x=\frac{5\sqrt{65}}{4}-\frac{21}{4}=\frac{5\sqrt{65}-21}{4}$ (m)

02 처음 배의 위치를 A라 하면 오른쪽 그림과 같이 레이더 화면을 그릴 수 있다.



점 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle AHO$에서 $\angle OAH=45°$

이므로 $\overline{OH}:\overline{OA}=1:\sqrt{2}$에서 $\overline{OH}:80=1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{OH}=40\sqrt{2}$ (km)

위의 그림과 같이 $\overline{OP}$를 그으면 $\triangle OPH$에서

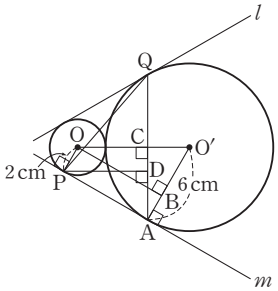
$\overline{OH}=40\sqrt{2}$ km, $\overline{OP}=60$ km이므로

$\overline{HP}=\sqrt{60^2-(40\sqrt{2})^2}=20$(km)

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{HP}=40$(km)

따라서 배의 속력이 시속 10 km이므로 배는 레이더 화면에 4시간 동안 나타난다.

03 다음 그림과 같이 직선 m과 원 O′의 접점을 A라 하고, 중심 O에서 $\overline{O'A}$에 내린 수선의 발을 B라 하자.



$\overline{O'B}=6-2=4$ (cm), $\overline{OO'}=2+6=8$ (cm)이므로

$\overline{OB}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$ (cm)

즉, $\overline{O'B}:\overline{OB}:\overline{O'O}=4:4\sqrt{3}:8=1:\sqrt{3}:2$이므로

$\triangle O'OB$는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이다.

$\overline{AQ}$와 $\overline{OO'}$의 교점을 C라 하면 $\overline{OO'}$은 $\overline{AQ}$의 수직이등분선이므로 $\triangle AO'C$는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이다.

$\overline{O'A}:\overline{AC}=2:\sqrt{3}$에서 $6:\overline{AC}=2:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{3}$ (cm)

$\therefore \overline{AQ}=2\overline{AC}=6\sqrt{3}$ (cm)

점 P에서 $\overline{AQ}$에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\angle QAP=90°-\angle O'AC=60°$이므로 $\triangle PAD$는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이다.

$\overline{AP}:\overline{AD}=2:1$에서 $4\sqrt{3}:\overline{AD}=2:1$

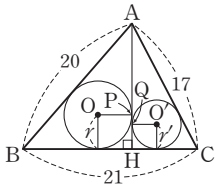
$\therefore \overline{AD}=2\sqrt{3}$ (cm)

$\overline{AP}:\overline{DP}=2:\sqrt{3}$에서 $4\sqrt{3}:\overline{DP}=2:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{DP}=6$ (cm)

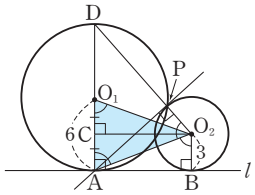
$\overline{DQ}=\overline{QA}-\overline{DA}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ (cm)이므로
△PDQ에서 $\overline{PQ}=\sqrt{6^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{21}$ (cm)

04 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면



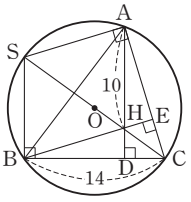
△ABH에서
$20=(\overline{AH}-r)+(\overline{BH}-r)$
$\therefore\ 2r=\overline{AH}+\overline{BH}-20$ … ㉠
원 O′의 반지름의 길이를 r'이라 하면 △ACH에서
$17=(\overline{AH}-r')+(\overline{CH}-r')$
$\therefore\ 2r'=\overline{AH}+\overline{CH}-17$ … ㉡
㉠−㉡을 하면
$2r-2r'=\overline{BH}-\overline{CH}-3$
$\therefore\ r-r'=\dfrac{\overline{BH}-\overline{CH}-3}{2}$
이때 $20^2-\overline{BH}^2=17^2-\overline{CH}^2$에서
$\overline{BH}^2-\overline{CH}^2=20^2-17^2$,
$(\overline{BH}+\overline{CH})(\overline{BH}-\overline{CH})=111$
그런데 $\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{BC}=21$이므로
$\overline{BH}-\overline{CH}=\dfrac{111}{21}=\dfrac{37}{7}$
$\therefore\ r-r'=\dfrac{\overline{BH}-\overline{CH}-3}{2}=\dfrac{\frac{37}{7}-3}{2}=\dfrac{8}{7}$
$\therefore\ \overline{PQ}=r-r'=\dfrac{8}{7}$

05 다음 그림과 같이 점 O_2에서 $\overline{O_1A}$에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\overline{AC}=\overline{O_2C}$이므로 $\triangle O_1AO_2$는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ \angle O_2O_1A=\angle O_2AO_1$



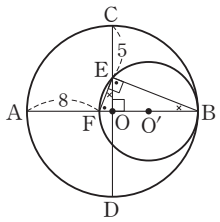
또 $\overline{AO_1}//\overline{BO_2}$이므로
$\angle O_2AO_1=\angle AO_2B$(엇각) … ㉠
$\overline{AP}$와 $\overline{AB}$는 원 O_2의 두 접선이므로
$\triangle ABO_2\equiv\triangle APO_2$(RHS 합동)
$\therefore\ \angle AO_2B=\angle AO_2P$ … ㉡
㉠, ㉡에 의해 $\angle O_2AO_1=\angle AO_2P$이고, $\overline{AO_1}$의 연장선이 원 O_1과 만나는 점을 D라 하면 $\angle O_2PA=90^\circ$이므로 세 점 D, P, O_2는 한 직선 위에 있다.
즉, $\triangle DAO_2$는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ \overline{DO_2}=\overline{DA}=12$
$\overline{DC}=12-3=9$이므로
$\triangle DCO_2$에서
$\overline{CO_2}=\sqrt{12^2-9^2}=3\sqrt{7}$
$\therefore\ \triangle O_1AO_2=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{7}=9\sqrt{7}$

06 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하고 $\overline{CO}$의 연장선과 원 O가 만나는 점을 S라 하면



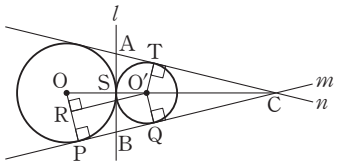
$\angle SAC=\angle SBC=90^\circ$
따라서 $\overline{SA}//\overline{BE}$, $\overline{SB}//\overline{AD}$이므로 □SBHA는 평행사변형이다.
$\therefore\ \overline{SB}=\overline{AH}=10$
따라서 △SBC에서
$\overline{SC}=\sqrt{10^2+14^2}=2\sqrt{74}$이므로 △ABC의 외접원의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{74})^2=74\pi$

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$, $\overline{EF}$를 그으면



△BOE∽△EOF(AA 닮음)
이때 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{BO}:\overline{EO}=\overline{OE}:\overline{OF}$에서
$r:(r-5)=(r-5):(r-8)$
$(r-5)^2=r(r-8)$
$2r=25$ $\therefore\ r=\dfrac{25}{2}$
$\overline{BF}=\overline{AB}-\overline{AF}=25-8=17$
따라서 원 O′의 반지름의 길이는
$\overline{BO'}=\dfrac{1}{2}\overline{BF}=\dfrac{17}{2}$

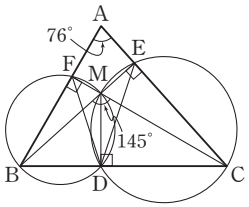
08 다음 그림과 같이 두 원의 중심 O, O′에서 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 중심 O′에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 R, O′에서 직선 n에 내린 수선의 발을 T라 하자.



△ORO′에서
$\overline{OO'}=5+3=8$, $\overline{OR}=5-3=2$
$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{RO'}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$
△ORO′∽△O′QC(AA 닮음)이므로
$\overline{OR}:\overline{O'Q}=\overline{RO'}:\overline{QC}$에서
$2:3=2\sqrt{15}:\overline{QC}$ $\therefore\ \overline{QC}=3\sqrt{15}$
$\therefore$ (△ ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=2\overline{PC}$
$=2(\overline{PQ}+\overline{QC})$
$=2\times(2\sqrt{15}+3\sqrt{15})$
$=10\sqrt{15}$

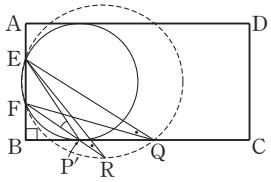
09 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$이므로 $\angle MAP=\angle ANQ$
$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{CN}$이므로 $\angle AMP=\angle NAQ$
$\angle APQ=\angle MAP+\angle AMP$
$=\angle ANQ+\angle NAQ=\angle AQP$
따라서 △BPQ에서
$\angle APQ=\angle PBQ+\angle PQB=15^\circ+35^\circ=50^\circ$
$\therefore\ \angle AQP=\angle APQ=50^\circ$

10 □FBDM과 □ECDM은 대각의 크기의 합이 180°이므로 각각 원에 내접하는 사각형이다.



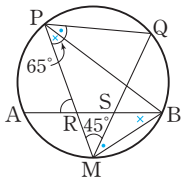
∴ ∠FDE
$=\angle FDM+\angle EDM$
$=\angle FBM+\angle ECM$
$=(\angle ABC-\angle MBC)+(\angle ACB-\angle MCB)$
$=(\angle ABC+\angle ACB)-(\angle MBC+\angle MCB)$
$=(180^\circ-\angle A)-(180^\circ-\angle BMC)$
$=(180^\circ-76^\circ)-(180^\circ-145^\circ)$
$=104^\circ-35^\circ=69^\circ$

11 다음 그림과 같이 두 점 E, F를 지나는 원이 $\overline{BC}$에 접하는 점을 P′이라 하자.



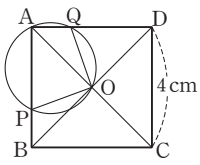
∠EQF=∠ERF<∠EP′F
(∵ ∠EP′F=∠ERF+∠P′ER)
즉, 두 점 E, F를 지나는 원의 반지름의 길이가 커질수록 원주각의 크기는 작아진다.
따라서 두 점 E, F를 지나는 원이 $\overline{BC}$에 접하고 그때의 접점에 점 P가 있을 때, ∠EPF의 크기가 최대가 된다.

12 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}$, $\overline{MB}$를 그으면 ∠QMB=∠QPB이고,



$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$이므로
∠ABM=∠MPB
△SMB에서
∠QSB=∠SMB+∠SBM
=∠BPQ+∠MPB=∠MPQ
즉, ∠RPQ+∠RSQ=∠QSB+∠RSQ=180°
따라서 □PRSQ는 원에 내접하므로
∠PRA=∠PQS=180°−(65°+45°)=70°

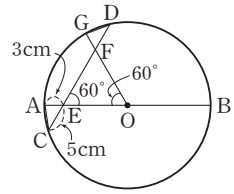
13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$를 그으면 △APO와 △DQO에서



$\overline{OA}=\overline{OD}$, ∠PAO=∠QDO
□APOQ는 원에 내접하므로
∠APO=∠DQO
따라서 △APO≡△DQO(ASA 합동)이므로
$\overline{AP}=\overline{DQ}$
∴ $\overline{AP}+\overline{AQ}=\overline{DQ}+\overline{AQ}=\overline{AD}=4$ (cm)

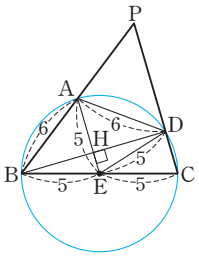
14 △MBP에서 ∠AMP=∠MBP+∠MPB
△ANP에서 ∠ANM=∠NAP+∠NPA
이때 ∠MBP=∠ABC=∠NAP이고
∠MPB=∠NPA이므로
∠AMP=∠ANM
따라서 △AMN은 $\overline{AM}=\overline{AN}$인 이등변삼각형이다.
이때 $\overline{AD}$는 이등변삼각형 AMN의 꼭지각의 이등분선이므로 $\overline{AD}\perp\overline{MN}$ … ㉠
또 $\overline{MN}$은 ∠APD의 이등분선이므로 두 점 A, D는 $\overline{MN}$에 대하여 대칭이다.
즉, $\overline{AM}=\overline{DM}$, $\overline{AN}=\overline{DN}$ … ㉡
㉠, ㉡에 의해 $\overline{AM}=\overline{AN}=\overline{DM}=\overline{DN}$
따라서 □AMDN은 마름모이다.

15 오른쪽 그림과 같이 ∠EOG=60°가 되도록 $\overline{OG}$를 그어 $\overline{ED}$와 만나는 점을 F라 하면 △OEF는 정삼각형이다.



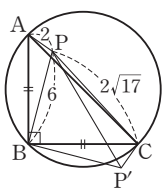
원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{EF}=r-3$(cm)
△FGD와 △EAC에서
$\overline{GF}=r-\overline{OF}=r-\overline{OE}=\overline{AE}$,
∠GDF=∠ACE
∠GFD=∠AEC=60°이므로
△FGD≡△EAC(ASA 합동)
∴ $\overline{DF}=\overline{CE}=5$ cm
∴ $\overline{DE}=\overline{DF}+\overline{EF}=5+(r-3)=r+2$(cm)
$\overline{BE}=\overline{EO}+\overline{BO}=(r-3)+r=2r-3$(cm)
$\overline{CE}\cdot\overline{DE}=\overline{AE}\cdot\overline{BE}$에서
$5\times(r+2)=3\times(2r-3)$, $5r+10=6r-9$
∴ $r=19$ (cm)

16 $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{DE}$이므로 점 E는 네 점 A, B, C, D를 지나는 원의 중심이다.



∴ ∠BDC=90°(∵ $\overline{BC}$는 지름)
$\overline{AE}$와 $\overline{BD}$의 교점을 H라 하면
△ABD는 이등변삼각형이므로
$\overline{AH}\perp\overline{BD}$
따라서 ∠BHE=∠BDC=90°
이므로 $\overline{AE}//\overline{DC}$
이때 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 P라 하면
$\overline{BE}=\overline{CE}$이므로 $\overline{PC}=2\overline{AE}=10$, $\overline{PA}=6$
$\overline{CD}=x$, $\overline{PD}=y$라 하면 $\overline{PC}=x+y=10$ … ㉠
이때 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PD}\cdot\overline{PC}$이므로
$6\times12=y(x+y)$
㉠에 의해 $72=10y$
∴ $y=\frac{36}{5}$ ∴ $\overline{CD}=x=10-\frac{36}{5}=\frac{14}{5}$

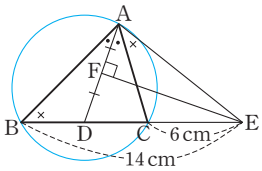
17 오른쪽 그림과 같이 점 B를 중심으로 점 A가 점 C에 오도록 △ABP를 90°만큼 회전할 때, 점 P가 이동한 점을 P′이라 하자.



∠P′BC=∠PBA이므로
∠PBP′=90°
∴ $\overline{PP'}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$
△PP′C에서 $\overline{CP'}=\overline{PA}=2$, $\overline{PC}=2\sqrt{17}$
이때 $2^2+(2\sqrt{17})^2=(6\sqrt{2})^2$

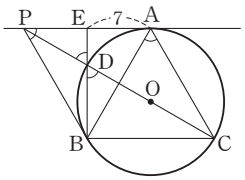
즉, $\overline{CP'}^2+\overline{PC}^2=\overline{PP'}^2$이므로 $\triangle PP'C$는 $\angle PCP'=90^\circ$인 직각삼각형이다.
따라서 $\angle PBP'+\angle PCP'=180^\circ$이므로 $\square PBP'C$는 원에 내접한다.
$\square PBP'C$에서 톨레미의 정리에 의해
$\overline{BC}\cdot\overline{PP'}=\overline{PB}\cdot\overline{CP'}+\overline{PC}\cdot\overline{BP'}$에서
$\overline{BC}\times6\sqrt{2}=6\times2+2\sqrt{17}\times6$
$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{2}+\sqrt{34}$
$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}+\sqrt{34}$이므로
$\overline{AC}=(\sqrt{2}+\sqrt{34})\times\sqrt{2}=2+2\sqrt{17}$
이때 $\overline{AC}$는 원의 지름이므로
(외접원의 반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{2+2\sqrt{17}}{2}=1+\sqrt{17}$

18



점 E는 $\overline{AD}$의 수직이등분선 위의 점이므로 $\overline{AE}=\overline{DE}$
$\therefore\ \angle EAD=\angle EDA$
$\angle EAC=\angle EAD-\angle CAD$
$=\angle EDA-\angle BAD=\angle ABC$
따라서 $\overline{AE}$는 $\triangle ABC$의 외접원의 접선이므로
$\overline{EA}^2=\overline{EC}\cdot\overline{EB}=6\times14=84$
$\therefore\ \overline{EA}=2\sqrt{21}$ (cm) ($\because\ \overline{EA}>0$)
$\therefore\ \overline{DE}=\overline{AE}=2\sqrt{21}$ cm

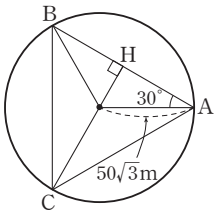
19



$\overline{AE}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{AE}^2=\overline{ED}\cdot\overline{EB}$ … ㉠
또 $\triangle DEP$와 $\triangle PEB$에서
$\angle BPA=\angle BAC$,
$\angle BAC=\angle BDC$
$\angle BDC=\angle EDP$이므로 $\angle PDE=\angle BPE$
$\therefore\ \triangle DEP\backsim\triangle PEB$(AA 닮음)
$\overline{PE}:\overline{EB}=\overline{ED}:\overline{PE}$에서
$\overline{PE}^2=\overline{ED}\cdot\overline{EB}$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AE}^2=\overline{PE}^2$ $\therefore\ \overline{AE}=\overline{PE}=7$
$\therefore\ \overline{PB}=\overline{PA}=14$

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.124~125

1 |예시| 오른쪽 그림과 같이 공원의 중심을 O라 하고 점 O에서 산책로 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

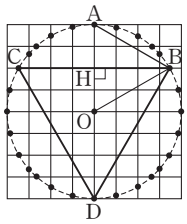
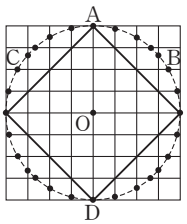


$\overline{OA}=50\sqrt{3}$(m)이고,
$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$
이므로
$\overline{AH}=\overline{OA}\cos30^\circ=50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=75$(m)
원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times75=150$(m)
즉, 산책로 AB, BC, CA의 길이는 모두 150 m이다.
또 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$이므로
$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}=2\pi\times50\sqrt{3}\times\frac{120}{360}=\frac{100\sqrt{3}\pi}{3}$ (m)
이때 두 사람이 걷는 속력을 분속 v m라 하면 두 사람이 출입구 A에서 동시에 출발한 후 세 출입구 A, B, C까지 걸리는 시간은 다음과 같다.

출입구	B	C	A	B	…
은지	$\frac{100\sqrt{3}\pi}{3v}$분	$\frac{200\sqrt{3}\pi}{3v}$분	$\frac{300\sqrt{3}\pi}{3v}$분	$\frac{400\sqrt{3}\pi}{3v}$분	…
보미	$\frac{150}{v}$분	$\frac{300}{v}$분	$\frac{450}{v}$분	$\frac{600}{v}$분	…

두 사람이 같은 시간에 같은 출입구에서 만나려면 위의 표에서
$\frac{\text{(은지가 움직인 거리)}}{v}=\frac{\text{(보미가 움직인 거리)}}{v}$,
즉, (은지가 움직인 거리)=(보미가 움직인 거리)를 만족하는 값이 있어야 한다.
그런데 은지가 움직인 거리는 무리수, 보미가 움직인 거리는 유리수이므로 몇 바퀴를 더 돌아도 각 출입구까지 두 사람이 움직인 거리는 같을 수 없다.
따라서 출발 후 두 사람이 다시 마주 칠 가능성은 없다고 할 수 있다.

2 |예시| (i) 정삼각형
오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 그리면 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 원 O의 반지름이므로
$\overline{OA}=\overline{OB}$



$\triangle ABO$의 점 B에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{OA}$의 중점이므로 $\overline{BH}$는 수직이등분선이다.
즉, $\overline{AB}=\overline{OB}$
따라서 $\triangle ABO$의 세 변의 길이가 같으므로 $\triangle ABO$는 정삼각형이다.
또 $\angle AOB=60^\circ$이므로 $\angle BOD=120^\circ$가 되어 원주각의 성질에 의해 $\angle BCD=60^\circ$
마찬가지로 $\triangle ACO$에서 $\angle CBD=60^\circ$이다.
따라서 $\triangle BCD$의 세 내각의 크기가 모두 60°이므로 $\triangle BCD$는 정삼각형이다.
(ii) 정사각형
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$는 원의 지름으로 그 길이가 같고 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $\square ABCD$는 정사각형이다.